



Національна академія наук України
Інститут математики НАН України

Збірник праць
Інституту математики НАН України

Актуальні проблеми
сучасної математики:
методи, моделі та
застосування

Київ 2024

НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ НАУК
УКРАЇНИ

ІНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

Актуальні проблеми
сучасної математики:
методи, моделі та
застосування

Київ – 2024

НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ НАУК УКРАЇНИ
ІНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

Збірник праць
Інституту математики НАН України
Том 21, № 1

Головний редактор:

О. М. Тимоха

Заступники головного редактора:

О. О. Ванєєва, В. Б. Василик

Редакційна колегія:

*О. В. Антонюк, В. М. Бойко, О. А. Бойчук, О. А. Бурилко,
В. І. Герасименко, А. А. Дороговцев, Ю. А. Дрозд, А. Н. Кочубей,
В. Д. Кошманенко, І. О. Луковський, О. Г. Мазко, В. Л. Макаров,
С. І. Максименко, В. А. Михайлець, О. О. Мурач, А. Г. Нікітін,
В. Л. Островський, Ю. А. Пилипенко, А. І. Плакош, С. А. Плакса,
Р. О. Попович, М. І. Портенко, М. В. Працьовитий, О. Л. Ребенко,
А. С. Романюк, А. С. Сердюк, С. Г. Солодкий, В. І. Ткаченко,
Ю. В. Троценко, А. Л. Шидліч*

Актуальні проблеми
сучасної математики:
методи, моделі та застосування

Actual problems
of modern mathematics:
methods, models and applications

УДК 511.7; 512.45; 515.1; 517.5; 517.54; 519.866; 517.9; 517.956; 517.977

Актуальні проблеми сучасної математики: методи, моделі та застосування

Відп. ред. *А. І. Плакош, І. А. Бондар, О. Р. Сатур.*

Зб. праць Ін-ту математики НАН України. Т. 21, № 1.

Київ: Ін-т математики НАН України, 2024. – 223 с.

ISSN 1815–2910

Збірник наукових статей «Актуальні проблеми сучасної математики: методи, моделі та застосування» містить оглядові роботи молодих учених у ключових напрямках математики. Статті охоплюють задачі з теорії операторів, еволюційних рівнянь, крайових задач, алгебраїчних структур і фрактального аналізу. Також розглянуто сучасні підходи до зображень і когомологій груп, а також динамічних систем.

Призначено для дослідників, викладачів та аспірантів, що працюють над сучасними математичними задачами.

The collection "Current Problems in Modern Mathematics: Methods, Models, and Application" presents review papers by young researchers in key areas of mathematics. The articles cover problems in operator theory, evolutionary equations, boundary value problems, algebraic structures, and fractal analysis. The volume also features approaches to group representations, cohomology, and nonlinear dynamics.

Intended for researchers, lecturers, and graduate students engaged in contemporary mathematical research.

Видавнича група збірника:

А. І. Плакош, кандидат фіз.-мат. наук (відп. ред.)

І. А. Бондар, кандидат фіз.-мат. наук (відп. ред.),

О. Р. Сатур, доктор філософії (відп. ред.)

Рецензенти:

Герасименко В. І., доктор фіз.-мат. наук, професор

Петравчук А. П., доктор фіз.-мат. наук, професор

Затверджено до друку Вченою радою Інституту математики НАН України, протокол № 13 від 3.12.2024 р.

Свідectво про державну реєстрацію – серія КВ №8459 від 19.02.2004 р.

Крайові задачі для інтегро-диференціальних рівнянь <i>І. А. Бондар</i>	1-12
Кінетичні кластерні розклади твірних операторів розв'язків ієрархій еволюційних рівнянь <i>І. В. Ган'як</i>	13-34
Групова класифікація диференціальних рівнянь: алгебраїчний підхід <i>С. Т. Гурака, О. В. Локашок</i>	35-58
Залежність ефективних властивостей від регулярних збурень <i>М. Далла Ріва, П. Луцціні, П. Мусоліно, Р. Пухтаєвич</i>	59-70
Екстремальне розбиття комплексної площини з вільними полюсами на одиничному колі <i>І. В. Денега, Я. В. Заболотний</i>	71-81
Про асимптотичну поведінку на нескінченності кільцевих та нижніх Q -гомеоморфізмів відносно p -модуля <i>Б. А. Кліщук, Р. Р. Салімов, М. В. Стефанчук</i>	82-101
Представлення деяких класів кватерніонних гіперголоморфних функцій <i>Т. С. Кузьменко, В. С. Шпаківський</i>	102-120
Зображення і когомології груп і напівгруп <i>А. І. Плакош</i>	121-148
Оцінки характеристик нелінійної апроксимації класів періодичних функцій <i>К. В. Пожарська</i>	149-168
Просторові коливання рідини в циліндричному вертикальному контейнері <i>І. А. Райновський</i>	169-179

Фрактальний аналіз функцій зі складною
локальною структурою

С. П. Ратушняк

180–190

Нелінійні властивості траєкторій в моделях
динамічних систем конфлікту

О. Р. Сатур

191–204

Алгебраїчна структура фундаментальної групи орбіт
гладких функцій на 2-торі

Б. Г. Фещенко

205–216

Крайові задачі для інтегро-диференціальних рівнянь

І. А. Бондар

Abstract. This paper presents a detailed survey of research on boundary value problems for integro-differential and integro-dynamic systems. The existence of solutions to these problems is examined using the theoretical apparatus of pseudo-inverse matrices and operators, alongside the Vishik-Lyusternik's method for the case of weakly perturbed systems.

Анотація. У даній роботі представлений огляд праць присвячених крайовим задачам для інтегро-диференціальних та інтегро-динамічних систем. Для дослідження існування розв'язків таких задач використано апарат теорії псевдообернених матриць та операторів, метод Вишика–Люстерніка (у випадку слабкозбурених систем).

1. ВСТУП

Задачі побудови конструктивних методів аналізу лінійних та слабконелінійних крайових задач для широкого класу систем функціонально-диференціальних рівнянь, які традиційно займають одне із центральних та важливих місць у якісній теорії диференціальних рівнянь, ґрунтовно вивчалися у роботах Б. Ван-дер-Поля, В. Вольтерра, А. Пуанкаре, М.І. Ронто, А.М. Самойленка, М.О. Перестюка, О.А. Бойчука, В.П. Журавльова [11, 12]. Це зумовлено, перш за все, важливістю практичного застосування теорії крайових задач у різних областях знань: теорії нелінійних коливань, теорії стійкості руху, теорії керування; низки радіотехнічних, механічних та біологічних задач.

Специфіка розгляду крайових задач для систем інтегро-диференціальних рівнянь полягає в тому, що їх лінійна частина є оператором, який не має оберненого. Цей факт суттєво ускладнює дослідження таких операторних рівнянь та крайових задач для них та призводить до

Робота виконана у рамках науково-дослідної теми молодих учених НАН України 2024-2025 рр. (державний реєстраційний номер 0124U002111), а також грантом Simons Foundation (1290607, І.А.Б.).

2020 Mathematics Subject Classification: 34B15, 45J05, 93C15, 49J15, 65J15

Ключові слова: крайові задачі, інтегро-диференціальні рівняння, інтегро-динамічні системи, псевдообернені матриці, ортопроектори, метод Вишика–Люстерніка, ітераційний процес, керування

DOI: <https://doi.org/10.3842/trim.v21n1.537>

того, що розв'язок крайової задачі для таких систем складається із умов розв'язності як самої операторної системи, так і крайової задачі для неї.

Для дослідження існування розв'язків таких задач використано апарат теорії псевдообернених матриць та операторів, який розвинено у роботах А.М. Самойленка, О.А. Бойчука, С.А. Кривошеї [1, 4].

Результати отримані в роботах [6, 7, 10, 13, 14, 17–20], а також методика їх отримання, можуть бути використані при подальшому розвитку теорії крайових задач для інтегро-диференціальних рівнянь при моделюванні та дослідженні фізичних, економічних та біологічних процесів.

Основні результати, що визначають наукову новизну, такі:

1. Використовуючи метод Вішика-Люстерника [2] та теорію псевдообернених за Муром-Пенроузом матриць, знайдено достатні умови існування розв'язків лінійних слабкозбурених систем інтегро-диференціальних рівнянь та крайових задач для них у припущенні, що породжуючі задачі нерозв'язні. Побудовано загальний вигляд розв'язків таких задач у вигляді частин рядів Лорана, які збігаються при фіксованому, достатньо малому ε [19].
2. Отримано критерій розв'язності лінійної неоднорідної задачі для системи інтегро-диференціальних рівнянь з імпульсним впливом. Запропоновано задачі такого типу розглядати як внутрішні крайові задачі ("*interface BVP's*") [6, 20].
3. Для слабконелінійної системи інтегро-диференціальних рівнянь та крайової задачі для неї побудовано рівняння для породжуючих констант, які визначають необхідні умови існування розв'язків, доведено достатні умови та встановлено зв'язок між необхідними та достатніми умовами. Побудовано збіжну ітераційну процедуру відшукування розв'язків. Також досліджено імпульсні нелінійні крайові задачі для відповідних систем та встановлені умови існування їх розв'язку у відповідному класі вектор-функцій [7, 14, 17].
4. Отримано умови біфуркації з точки $\varepsilon = 0$ розв'язків слабкозбурених систем лінійних інтегро-динамічних рівнянь на проміжку $[a, b]$ довільної часової шкали. Побудовано збіжний ітераційний процес пошуку розв'язків у вигляді частини ряду Лорана [18].
5. Розглянуто неоднорідну систему інтегро-диференціальних рівнянь з виродженим ядром, яка є розв'язною не при всіх неоднорідностях. Вводячи керування зведено дану систему до розв'язної. Знайдено вигляд такого керування та критерій розв'язності системи. Розглянуто аналогічну проблему для крайової задачі для системи інтегро-диференціальних рівнянь [7].

2. СЛАБКОНЕЛІНІЙНІ КРАЙОВІ ЗАДАЧІ ДЛЯ СИСТЕМ ІНТЕГРО-ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ З ІМПУЛЬСНИМ ВПЛИВОМ

При математичному моделюванні еволюції реальних процесів з короткочасовими збуреннями часто їх тривалістю можна знехтувати і вважати, що ці збурення носять "миттєвий" характер. Така ідеалізація приводить до необхідності дослідження динамічних систем з розривними траєкторіями або, як їх часно називають, диференціальні системи з імпульсним впливом.

М.М. Крилов та М.М. Боголюбов показали, що при дослідженні систем диференціальних рівнянь з імпульсним впливом можна успішно застосовувати асимптотичні методи нелінійної механіки. Систематичне вивчення математичних проблем теорії диференціальних систем з імпульсним впливом почалося у роботах А.Д. Мишкіса, А.М. Самойленка, М.О. Перестюка, А. Халаная, Д. Векслера. У подальшому, ідеї, закладені у цих роботах, отримали свій розвиток та узагальнення у багаточисленних публікаціях [3,9,11]. Стало зрозуміло, що теорію диференціальних систем з імпульсним впливом можна розвивати і для дослідження розв'язності систем інтегро-диференціальних рівнянь [8].

Такий напрям у теорії крайових задач для інтегро-диференціальних рівнянь з імпульсним впливом розвинений у роботах [14,17], де розглянуто слабконелінійну систему інтегро-диференціальних рівнянь з імпульсною дією у фіксований момент часу

$$\dot{x}(t) - \Phi(t) \int_a^b [A(s)x(s) + B(s)\dot{x}(s)] ds = f(t) + \varepsilon \int_a^b K(t, s)Z(x(s, \varepsilon), s, \varepsilon) ds, \quad (2.1)$$

$$\begin{aligned} \Delta E_i x|_{t=\tau_i} &:= S_i x(\tau_i - 0) + \gamma_i + \varepsilon J_1(x(\cdot, \varepsilon), \varepsilon), \\ t &\neq \tau_i, t \in [a, b], \tau_i \in (a, b), i = 1, 2, \dots, p, \end{aligned} \quad (2.2)$$

та крайову умову

$$\ell x(\cdot) = \alpha + \varepsilon J_2(x(\cdot, \varepsilon), \varepsilon), \quad \alpha \in \mathbb{R}^q \quad (2.3)$$

Тут $A(t), B(t), \Phi(t) - (m \times n), (m \times n), (n \times m)$ – вимірні матриці, компоненти яких належать простору $L_2[a, b]$; вектор-стовпчики матриці $\Phi(t)$ – лінійно-незалежні на $[a, b]$, $f(t)$ – n -вимірний вектор-функція з $L_2[a, b]$; $L_2[a, b]$ – гільбертовий простір інтегрованих зі степенню 2

вектор-функцій $x : [a, b] \longrightarrow R^n$ з нормою $\|x\|_{L_2} = \left(\int_a^b \sum_{j=1}^n |x_j(t)|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}}$,

де

$|x_j(t)|^2 \in L_2[a, b]$, $j = 1, 2, \dots, n$, $\|x\| = 0 \iff x(t) = 0$ майже всюди на $[a, b]$; $E_i, S_i - (k_i \times n)$ -вимірні матриці, $\gamma_i - k_i$ -вимірний вектор

стовпчик констант, $\text{rank}(E_i + S_i) = k_i$ ($i = 1, 2, \dots, p$), тобто розв'язок системи (2.1), (2.2) визначається однозначним продовженням через точки розриву

$$\Delta E_i x|_{t=\tau_i} = E_i(x(\tau_i + 0) - x(\tau_i - 0)), \quad (2.4)$$

тут імпульс задаться не по всіх копонентах невідомої n -вимірної вектор-функції $x(t) = \text{col}(x_1(t), x_2(t), \dots, x_{k_i}(t), \dots, x_n(t))$, а лише по k_i її копонентах; ℓ – обмежений лінійний векторний функціонал визначений в $D_2[a; b]$,

$\ell = \text{col}(\ell_1, \ell_2, \ell_3, \dots, \ell_p) : D_2[a; b] \rightarrow \mathbb{R}^p$; $\alpha = \text{col}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_p) \in \mathbb{R}^p$; $Z(x(t, \varepsilon), t, \varepsilon)$ – нелінійна по першій компоненті n -вимірна вектор-функція, неперервно диференційована по x в околі породжуючого розв'язку, інтегровна по t і неперервна по ε :

$$Z(\cdot, t, \varepsilon) \in C^1[\|x - x_0\| \leq \mu], Z(x(\cdot, \varepsilon), \cdot, \varepsilon) \in L_2[a, b],$$

$Z(x(t, \cdot), t, \cdot) \in C[0, \varepsilon_0]$; $J_1(x(\cdot, \varepsilon), \varepsilon)$, $J_2(x(\cdot, \varepsilon), \varepsilon)$ – нелінійні обмежені, відповідно, p , q -вимірні вектор-функціонали, неперервно диференційовані по x у розумінні Фреше і неперервні по ε в околі породжуючого розв'язку.

Шукана функція $x(t)$ визначається у просторі n -вимірних функцій, які допускають розриви першого роду у точках $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_p \in (a, b)$ і які абсолютно неперервні на кожному із проміжків: $[a, \tau_1], [\tau_1, \tau_2], \dots, [\tau_p, b]$. Такі функції $x(t) \in D_2([a, b] \setminus \{\tau_i\}_I)$ допускають представлення

$$x(t) = \int_a^t \dot{x}(s) ds + x(a) + \sum_{i=1}^p \chi_{[\tau_i, b]}(t) \Delta x(\tau_i), \quad (2.5)$$

де $\Delta x(\tau_i) = x(\tau_i) - x(\tau_i - 0)$, $i = 1, \dots, p$, $\chi_{[\tau_i, b]}(t)$ – характеристична функція проміжка $[\tau_i, b]$. Норму у просторі $D_2([a, b] \setminus \{\tau_i\}_I)$ задаємо наступним чином

$$\begin{aligned} \|x\|_{D_2([a, b] \setminus \{\tau_i\}_I)} &= \|\dot{x}\|_{L_2[a, b]} + |x(a)|_{\mathbb{R}^n} + \left\| \sum_{i=1}^p \chi_{[\tau_i, b]}(t) \Delta x(\tau_i) \right\|_{\mathbb{R}^n}, \\ \|x\|_{L_2[a, b]} &= \left(\int_a^b \sum_{i=1}^n |x_i(t)|^2 dt \right)^{1/2}, \quad t \in [a, b]. \end{aligned} \quad (2.6)$$

У роботі [17] показано, що досліджувати задачу з імпульсним впливом (2.1)–(2.3) можна, розглядаючи її як внутрішню крайову задачу ("interface BVP's" [22]). Для того, щоб продемонструвати цей зв'язок, введено $\varphi x(\cdot)$ – k -вимірний лінійний обмежений векторний функціонал, такий, що

$$\varphi := \text{col}(\varphi_1, \dots, \varphi_p) : D_2([a, b] \setminus \{\tau_i\}_I) \rightarrow \mathbb{R}^k,$$

і який при $\varepsilon = 0$ перетворюється у породжуючий розв'язок

$$x_0(t, c_r^0) = \Psi_0(t)P_{D_{r_1}}P_{Q_r}c_r^0 + \Psi_0(t)P_{D_{r_1}}Q^+(\delta - \mathfrak{L}F(\cdot)) + F(t), \quad (2.12)$$

$$\forall c_r^0 \in \mathbb{R}^r, r = m + n - \text{rank } D - \text{rank } Q.$$

Тоді вектор констант c_r^0 обов'язково повинен бути дійсним коренем системи рівнянь

$$P_{D_{d_1}^*} \int_a^b \left[A(s) \int_a^s \int_a^b K(\tau, s) Z(x_0(s, c_r^0), s, 0) ds d\tau + \right. \\ \left. + B(s) \int_a^b K(s, \tau) Z(x_0(\tau, c_r^0), \tau, 0) d\tau \right] ds = 0, \quad (2.13)$$

$$P_{Q_{d_2}^*} \left\{ J(x_0(\cdot, c_r^0), 0) - \mathfrak{L} \left(\int_a^b \int_a^b K(\tau, s) Z(x_0(s, c_r^0), s, 0) ds d\tau + \right. \right. \\ \left. + \Psi_0(\cdot)D^+ \int_a^b \left[A(t) \int_a^t \int_a^b K(\tau, s) Z(x_0(s, c_r^0), s, 0) ds d\tau + \right. \right. \\ \left. \left. + B(t) \int_a^b K(t, s) Z(x_0(s, c_r^0), s, 0) ds \right] dt \right) \Bigg\} = 0, \quad (2.14)$$

$$d_1 = m - \text{rank } D, \quad d_2 = p - \text{rank } Q.$$

Доведення даного твердження аналогічне доведенню теореми 5.4 [11] та теореми 4.5 [21]. У випадку періодичних задач, константа c_r^0 має фізичний зміст і є амплітудою породжуючого розв'язку, тому у класичній періодичній задачі відповідне рівняння для систем звичайних диференціальних рівнянь називають рівнянням для *породжуючих амплітуд*. По аналогії, називаємо рівняння (2.13), (2.14) – *рівняннями для породжуючих констант* імпульсної крайової задачі для систем інтегро-диференціальних рівнянь (2.1)–(2.3).

Якщо рівняння (2.13), (2.14) розв'язне, то вектор $c_r = c_r^0 \in \mathbb{R}^r$ визначає той породжуючий розв'язок (2.12), якому може відповідати розв'язок $x(t, \varepsilon)$ вихідної імпульсної крайової задачі (2.1)–(2.3), а це те саме, що розв'язок внутрішньої крайової задачі (2.1), (2.9) при $\varepsilon = 0$. Якщо ж рівняння (2.13), (2.14) не має розв'язку, то й імпульсна крайова задача (2.1)–(2.3) не буде мати розв'язку. Мова йде про дійсні корені рівняння

для породжуючих констант (2.13), (2.14). Таким чином, необхідна умова розв'язності імпульсної крайової задачі (2.1)–(2.3) задовольняється вимогою, щоб рівняння (2.13), (2.14) мало хоча один дійсний розв'язок $c_r = c_r^0 \in \mathbb{R}^r$.

Теорема 2.2. (Достатня умова). *Нехай породжуюча крайова задача (2.10), (2.11) при виконанні умов (2.13), (2.14) має r -параметричну сім'ю розв'язків (2.12), де $r = m + n - \text{rank } D - \text{rank } Q$. Тоді для кожного дійсного значення вектора $c_r = c_r^0 \in \mathbb{R}^r$, що задовольняє систему рівнянь (2.13), (2.14) для породжуючих констант та при умові*

$$\text{rank } B_0 = d_1 + d_2 \quad (2.15)$$

слабконелінійна крайова задача (2.1)–(2.3) має хоча б один розв'язок

$$x = x(t, \varepsilon): \quad x(\cdot, \varepsilon) \in D_2([a, b] \setminus \{\tau_i\}_I), \quad \dot{x}(\cdot, \varepsilon) \in L_2[a, b], \quad x(t, \cdot) \in C[0, \varepsilon_0],$$

який при $\varepsilon = 0$ перетворюється у породжуючий розв'язок (2.12) і визначається за допомогою збіжного ітераційного процесу та формулою $x_k(t, \varepsilon) = x_0(t, c_r^0) + y_k(t, \varepsilon)$, ($k = 0, 1, 2, \dots$).

Теорема 2.3. (Зв'язок між необхідною та достатньою умовами). *Для того, щоб слабконелінійна крайова задача для системи інтегро-диференціальних рівнянь (2.1)–(2.3) мала розв'язок $x = x(t, \varepsilon) : x(\cdot, \varepsilon) \in D_2[a, b]$, $\dot{x}(\cdot, \varepsilon) \in L_2[a, b]$, $x(t, \cdot) \in C[0, \varepsilon_0]$, $x(t, 0) = x_0(t, c_r^0)$, де $x_0(t, c_r^0)$ – породжуючий розв'язок (2.12) з $c_r = c_r^0 \in \mathbb{R}^r$ ($r = r_1 - \text{rank } Q$, $r_1 = m + n - \text{rank } D$), необхідно, щоб константа c_r^0 була дійсним коренем рівняння для породжуючих констант (2.13), (2.14) і достатньо, щоб виконувалася умова*

$$\text{rank } \{B_0 := \frac{\partial \bar{F}(c_r)}{\partial c_r}\}_{|c_r=c_r^0} = d_1 + d_2.$$

Більше того, якщо $p = r_1$, остання умова означає, що $c_r = c_r^0 \in \mathbb{R}^r$ є простим коренем рівняння для породжуючих констант (2.13), (2.14).

Тут матриця B_0 є відомою [17] і будується по заданих копонентах системи (2.1).

3. НЕЗАВЖДИ РОЗВ'ЯЗНІ ІНТЕГРО-ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ З ВИРОДЖЕНИМ ЯДРОМ

У роботі [7] представлено ще один метод, який дозволяє нерозв'язну систему (2.10) звести до розв'язної. Для цього введено у систему

інтегро-диференціальних рівнянь керування $u \in \mathbb{R}^n$ наступним чином

$$\dot{x}(t) - \Phi(t) \int_a^b [A(s)x(s) + B(s)\dot{x}(s)] ds = f(t) + \int_a^b K(t, s) ds u \quad (3.1)$$

і справедливим є наступний наслідок з теореми 1 [5].

Наслідок 3.1. *Не всюди розв'язну систему інтегро-диференціальних рівнянь (2.10), можна доповнити, додаючи до неї керування у вигляді $\int_a^b K(t, s) ds u$, до розв'язної при $\forall f(t) \in L_2[a, b]$ тоді і тільки тоді, коли*

$$P_S^* P_{D_{d_1}^*} = 0. \quad (3.2)$$

При цьому величину керування u необхідно вибрати наступним:

$$u = S^+ P_{D_{d_1}^*} \tilde{b} + P_S c, \quad c \in \mathbb{R}^n.$$

Тут $d_1 \times n$ -вимірна матриця

$$S := P_{D_{d_1}^*} \int_a^b \left[A(s) \int_a^s \int_a^b K(\tau, s) ds d\tau + B(s) \int_a^b K(s, \tau) d\tau \right] ds,$$

S^+ – псевдообернена (за Муром–Пенроузом) до S – $(n \times d_1)$ -вимірна матриця, P_{S^*} – $(d_1 \times d_1)$ -вимірна матриця (ортопроектор), який проектує $\mathbb{R}^{d_1}$ на $N(S^*)$, P_S – $(n \times n)$ -вимірна матриця (ортопроектор), який проектує $\mathbb{R}^n$ на $N(S)$.

Таким чином при умові (3.2) керування $u(c)$ може бути не єдиним, бо залежить від довільної сталої $P_S c \in \mathbb{R}^n$. Це дозволяє використовувати цей підхід для дослідження задач про оптимальне керування.

Також у [7] досліджено питання керовності і крайової задачі для системи інтегро-диференціальних рівнянь.

4. СЛАВКО ЗБУРЕНІ СИСТЕМИ ЛІНІЙНИХ ІНТЕГРО-ДИНАМІЧНИХ РІВНЯНЬ НА ЧАСОВІЙ ШКАЛІ

Побудова математичних моделей процесів реального світу, призводить до розгляду крайових задач для різних операторних рівнянь. У роботі [18] розглянуто систему інтегро-динамічних рівнянь зі збуренням на деякій часовій шкалі $\mathbb{T}$ вигляду

$$x^\Delta(t) - \Phi(t) \int_a^b [A(s)x(s) + B(s)x^\Delta(s)] \Delta s = f(t) +$$

$$+ \varepsilon \int_a^b [K(t, s)x(s) + K_1(t, s)x^\Delta(s)] \Delta s. \quad (4.1)$$

Припускається, що $A(t), B(t) - (m \times n)$ -, $\Phi(t) - (n \times m)$ -, $f(t) - (n \times 1)$ -, $K(t, s), K_1(t, s) - (n \times n)$ -вимірні матриці, компоненти яких належать простору $L_2[a, b]_{\mathbb{T}}$ Δ -інтегровних з квадратом на проміжку $[a, b]_{\mathbb{T}} := [a, b] \cup \mathbb{T}$ функцій; стовпчики матриці $\Phi(t)$ – лінійно-незалежні на $[a, b]_{\mathbb{T}}$, тобто $\text{rank} \Phi(t) = m$. А також, що породжуюча система

$$x^\Delta(t) - \Phi(t) \int_a^b [A(s)x(s) + B(s)x^\Delta(s)] \Delta s = f(t), \quad (4.2)$$

яку отримаємо з (4.1) при $\varepsilon = 0$, нерозв’язна. Виникають питання, чи можна за допомогою лінійного збурення звести систему (4.2) до розв’язної? А якщо можна, то якими повинні бути складові збурених матриць $K(t, s), K_1(t, s)$ в інтегро-динамічній системі (4.1), щоб вона стала розв’язною при довільних неоднорідностях $f(t) \in L_2[a, b]_{\mathbb{T}}$?

Розв’язок системи (4.1) знайдено у класі вектор-функцій

$$x = x(t, \varepsilon) : x(\cdot, \varepsilon) \in D_2[a, b]_{\mathbb{T}}, \quad x^\Delta(\cdot, \varepsilon) \in L_2[a, b]_{\mathbb{T}}, \quad x(t, \cdot) \in C(0, \varepsilon_0],$$

і показано, що існування розв’язку задачі (4.1) істотно залежить від $(d_1 \times r_1)$ -вимірної матриці B_0 . Доведено наступну теорему.

Теорема 4.1. *Нехай $\text{rank} B_0 = n_2 < d_1$ і система інтегро-динамічних рівнянь (4.1) зі збуренням задовольняє вказаним вище умовам так, що породжуюча ($\varepsilon = 0$) система (4.2) не розв’язна. Тоді, якщо виконується умова*

$$P_{B_0^*} P_{D_{d_1}^*} = 0 \quad (4.3)$$

система (4.1) має ρ -параметричну ($\rho = n + m - n_1 - n_2$) сім’ю розв’язків у вигляді збіжного ряду при фіксованому $\varepsilon \in (0; \varepsilon_]$:*

$$x(t, \varepsilon) = \sum_{k=-1}^{\infty} \varepsilon^k x_k(t, c_\rho), \quad \forall c_\rho \in \mathbb{R}^\rho, \quad \forall t \in [a, b]_{\mathbb{T}}. \quad (4.4)$$

Для доведення даного факту застосовано метод Вішика-Люстерника [2], який дозволяє знайти ефективні коефіцієнти умови виникнення розв’язків системи (4.1) для $\forall t \in [a, b]_{\mathbb{T}}$ у вигляді частини ряду Лорана по степенях малого параметра ε .

Зауваження 4.1. Умова (4.3) є достатньою умовою існування розв'язку системи (4.1). Якщо умова (4.3) не виконується, то розв'язок системи (4.1) у вигляді ряду (4.4) не існує, але може існувати у вигляді частини ряду Лорана типу (4.4) по степенях $-2, -3, \dots$ малого параметра ε .

Зауваження 4.2. Якщо додатково вимагати виконання умови $P_{B_0} = 0$, то система (4.1) буде мати єдиний розв'язок у вигляді збіжного ряду

$$x(t, \varepsilon) = \sum_{k=-1}^{\infty} \varepsilon^k \bar{x}_k(t, \bar{c}_k).$$

5. Висновки

Дослідження крайових задач для систем інтегро-диференціальних рівнянь як у нелінійному випадку, та і у динамічному, пропонують широкий спектр можливостей як для теоретичного розвитку, так і для практичного застосування. Оскільки технології продовжують розвиватися, розуміння та контроль над складними динамічними системами залишаються важливою сферою дослідження.

Наприклад, імпульсні системи інтегро-диференціальних рівнянь з керуванням [7] можуть бути використані для моделювання та аналізу різних економічних явищ. Одним із прикладів є моделювання інтервенцій економічної політики в макроекономічному контексті. У свою чергу, інтегро-динамічні системи та крайові задачі для них у відповідних просторах [18] є потужними інструментами для моделювання різних процесів, які мають складну динаміку та враховують попередні стани системи, це фізичні, біологічні або економічні процеси, де поточний стан залежить від усіх попередніх станів. Широкий спектр застосування даної теорії мотивує до подальшого її розвитку [15, 16].

ЛІТЕРАТУРА

- [1] О. Бойчук, С. Кривошея, А. Самойленко. Крайові задачі для систем лінійних інтегро-диференціальних рівнянь з виродженим ядром. *Укр. мат. журн.*, 48(11):1576–1579, 1996.
- [2] М. Вишик, Люстерник Л. Решение некоторых задач о возмущениях в случае матриц и самосопряженных и несамосопряженных дифференциальных уравнений. Решение некоторых задач о возмущениях в случае матриц и самосопряженных и несамосопряженных дифференциальных уравнений. *УМН*, 3(15):3–80, 1960.
- [3] А. Самойленко, М. Перестюк. *Диференціальні рівняння з імпульсною дією*. Київ: Вища школа, 1987.
- [4] С. Кривошея. Умови розв'язності нетерових крайових задач для інтегро-диференціальних систем. *Вісник Київського Університету. Серія: фізико-математичні науки*, 4:144–151, 2001.

- [5] А. Самойленко, О. Бойчук, С. Кривошея. Крайові задачі для систем лінійних інтегро-диференціальних рівнянь з виродженим ядром. *Укр. мат. журн.*, 48(11):1576–1579, 1996.
- [6] І. Бондар, М. Громяк. Імпульсна крайова задача для інтегро-диференціальних рівнянь з виродженим ядром. Некритичний випадок. *Буковинський математичний журнал*, 5(3-4):15–17, 2017.
- [7] І. Бондар. Умови керування для незавжди розв’язних інтегро-диференціальних рівнянь з виродженим ядром та крайових задач для них. *Буковинський математичний журнал*, 4(1-2):13–17, 2016.
- [8] M. Akhmet, R. Seilova. Control of a boundary value problem for a linear impulsive integro-differential system. *Integral and integro-differential equations*, 36(10):1369–1376, 2000. doi:10.1134/S0012266114030057.
- [9] O. Boichuk. Boundary value problems for impulse differential systems. *Universitatis Jagellonicae Acta Mathematica*, XXXVI(5):187–192, 1998.
- [10] O. Boichuk, I. Holovats’ka. Boundary-value problems for systems of integrodifferential equations. *Journal of Mathematical Sciences*, 203(3):306–321, 2014. doi:10.1007/s10958-014-2135-1.
- [11] O. Boichuk, A. Samoilenko. *Generalized inverse operators and Fredholm boundary value problems*. Berlin, Boston: De Gruyter, 2004. doi:10.1515/9783110944679.
- [12] O. Boichuk, A. Samoilenko, V. Zhuravlev. Linear boundary-value problems for normally solvable operator equations in a banach space. *Differ. Equ.*, 50(3):1–11, 2014. doi:10.1134/S0012266114030057.
- [13] I. Bondar. Weakly perturbed boundary-value problems for systems of integro-differential equations with impulsive action. *Tatra Mountains Mathematical Publications (Subtitle: Differential and Difference Equations and Applications 2014)*, 63:73–87, 2015. doi:10.1515/tmmp-2015-0021.
- [14] I. Bondar. Weakly nonlinear boundary-value problems for systems of impulsive integrodifferential equations. critical case of the second order. *Journal of Mathematical Sciences*, 249(4):553–572, 2020. doi:10.1007/s10958-022-06074-6.
- [15] I. Bondar. Linear boundary-value problems for systems of integrodifferential equations with degenerate kernel. resonance case for a weakly perturbed boundary-value problem. *Journal of Mathematical Sciences*, 274:822–832, 2023. doi:10.1007/s10958-023-06645-1.
- [16] I. Bondar. *Regularization of Linear Impulsive Boundary Value Problem for Systems of Integro-Differential Equations*. In: Timokha, A. (eds) *Analytical and Approximate Methods for Complex Dynamical Systems*. Understanding Complex Systems. Springer, Cham, 2025. doi:10.1515/9783110944679.
- [17] I. Bondar, M. Gromyak, N. Kozlova. Weakly nonlinear impulsive boundary-value problems for systems of integrodifferential equations. *Miskolc Mathematical Notes*, 17(1):69–84, 2016. doi:10.18514/MMN.2016.1897.
- [18] I. Bondar, O. Nesterenko, O. Strakh. Weakly perturbed systems of linear integro-dynamic equations on time scales. *Journal of Mathematical Sciences*, 265(4):561–576, 2022. doi:10.1007/s10958-022-06074-6.
- [19] I. Bondar, R. Ovchar. Bifurcation of solutions of the boundary-value problem for systems of integrodifferential equations with degenerate kernel. *Journal of Mathematical Sciences*, 238(3):224–236, 2019. doi:10.1007/s10958-019-04231-y.
- [20] I. Bondar, O. Strakh. Weakly perturbed impulsive boundary-value problem for integrodifferential systems in the resonance case. *Journal of Mathematical Sciences*, 274(1):13–24, 2023. doi:10.1007/s10958-023-06567-y.

- [21] I. Golovatska. Weakly perturbed boundary-value problems for systems of integro-differential equations. *Tatra Mountains Mathematical Publications*, 54(1):61–71, 2013. doi:10.2478/tmmp-2013-0005.
- [22] A. Zettl. Adjoint and self-adjoint bvp's with interface conditions. *SIAM J.Appl.Math.*, 16(4), 1968. doi:10.1137/0116069.

І. А. Бондар

ІНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ НАН УКРАЇНИ, М. КИЇВ

Email: bondar.ivnn@gmail.com

ORCID: 0000-0001-8876-1557

Кінетичні кластерні розклади твірних операторів розв'язків ієрархій еволюційних рівнянь

І. В. Гап'як

Abstract. The article provides an overview of the method of kinetic cluster expansions for generating operators of solutions to the hierarchies of evolutionary equations. The developed method allows for a rigorous justification of the derivation of nonlinear kinetic equations from the microscopic dynamics of a system of many particles.

Анотація. В статті подано огляд методу кінетичних кластерів розкладів для твірних операторів розв'язків ієрархій еволюційних рівнянь. Розроблений метод дозволяє строго обґрунтовувати вивід нелінійних кінетичних рівнянь з мікроскопічної динаміки систем багатьох частинок.

1. ПЕРЕДНЄ СЛОВО

Однією з фундаментальних задач сучасної математичної фізики є обґрунтування кінетичних рівнянь, тобто, замкнених рівнянь відносно одночастинкової функції розподілу. Відомі історичні приклади кінетичних рівнянь – рівняння Больцмана [6] та рівняння Енскога [9], які описують процеси зіткнення частинок у розріджених газах. Звичайний підхід до виведення рівняння Больцмана полягає в побудові асимптотичної границі Больцмана–Греда для розв'язку задачі Коші для ієрархії рівнянь ББГКІ (Боголюбов–Борн–Грін–Кірквуд–Івон), який представляється розкладами в ряд теорії збурення [7, 22].

Відмітимо, що еволюція як скінченної, так і нескінченної кількості частинок визначається функціями розподілу (станами), які описуються задачею Коші для ієрархії рівнянь ББГКІ, яка для скінченної кількості частинок є еквівалентною до задачі Коші рівняння Ліувілля для функції розподілу ймовірності [7, 22]. У певних ситуаціях [7] колективна поведінка багаточастинкових систем може бути описана кінетичними рівняннями. Звичайна філософія опису кінетичної еволюції полягає в

2020 Mathematics Subject Classification: 35C10; 35Q20; 82C05; 82D05; 70F45

Ключові слова: ієрархія еволюційних рівнянь; кінетичне рівняння; кластерні розклади; кумулянт; напівгрупа операторів; частинки із зіткненнями

DOI: <https://doi.org/10.3842/trim.v21n1.538>

наступному: якщо початковий стан задається одночастинковою редукованою функцією розподілу, тоді еволюцію стану можна ефективно описати за допомогою одночастинкової редукованої функції розподілу, яка визначається нелінійним кінетичним рівнянням. В даній роботі на основі розробленого методу кінетичних кластерних розкладів для непертурбативного розв'язку ієрархій еволюційних рівнянь ББГКІ представлено огляд робіт, які присвячені строгому виводу узагальненого кінетичного рівняння Енскоґа та редукованих функціоналів.

Альтернативний підхід до опису еволюції станів ґрунтується на послідовності функцій, які визначаються як кумулянти редукованих функцій розподілу. Ці функції інтерпретуються як редуковані кореляційні функції, які підпорядковуються відповідній ієрархії нелінійних еволюційних рівнянь [16, 17]. Для початкових станів редукованих кореляційних функцій, які задовольняють умову хаосу використано метод кінетичних кластерних розкладів і описано еволюцію редукованих кореляцій за допомогою кінетичного рівняння, а саме, кінетичного рівняння Енскоґа [13].

Також для функцій, які описують кореляції в системі скінченного числа пружних куль і визначаються задачею Коші для ієрархії еволюційних рівнянь Ліувілля [16], використовуючи метод кінетичних кластерних розкладів встановлено залежність між s частинковою ($s \geq 0$) кореляційною функцією та одночастинковими кореляційними функціями в довільний момент часу.

2. КУМУЛЯНТИ ГРУП ОПЕРАТОРІВ

У цьому розділі буде представлено непертурбативний розв'язок задачі Коші для ієрархії рівнянь ББГКІ для системи пружних куль. Такий розв'язок визначається через кумулянти груп операторів рівняння Ліувілля.

Розглянемо систему нефіксованого, тобто довільного, але скінченного числа частинок одиничної маси (формалізм нерівноважного великого канонічного ансамблю [1, 7]) взаємодіючих як пружні кулі з діаметром $\sigma > 0$. Кожна частинка характеризується фазовою координатою $(q_i, p_i) \equiv x_i \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$, $i \geq 1$. Для конфігурацій такої системи справедливі наступні нерівності: $|q_i - q_j| \geq \sigma$, $i \neq j \geq 1$, тобто множина $W_s \equiv \{(q_1, \dots, q_s) \in \mathbb{R}^{3s} \mid |q_i - q_j| < \sigma \text{ хоча б для однієї пари } (i, j) : i \neq j \in (1, \dots, s)\}$ є множиною заборонених конфігурацій.

Нехай стани системи пружних куль належать простору інтегрованих функцій $L_s^1 \equiv L^1(\mathbb{R}^{3s} \times (\mathbb{R}^{3s} \setminus W_s))$, $s \geq 1$, які є симетричними відносно перестановки аргументів $x_1, \dots, x_s$, дорівнюють нулю на множині

заборонених конфігурацій $\mathbb{W}_s$ з нормою:

$$\|f_s\|_{L^1(\mathbb{R}^{3s} \times \mathbb{R}^{3s})} = \int dx_1 \dots dx_s |f_s(x_1, \dots, x_s)|.$$

Позначимо через $L_{s,0}^1 \subset L_s^1$ підпростір неперервно диференційованих функцій з компактним носієм.

Еволюція всіх можливих станів описується послідовністю маргінальних (s -частинкових) функцій розподілу $F_s(t, x_1, \dots, x_s)$, $s \geq 1$, що задовольняють задачу Коші для ієрархії рівнянь ББГКІ (ланцюжка рівнянь Боголюбова) [7]

$$\frac{\partial}{\partial t} F_s(t) = \mathcal{L}_s F_s(t) + \sum_{i=1}^s \int_{\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3} dx_{s+1} \mathcal{L}_{\text{int}}(i, s+1) F_{s+1}(t), \quad (2.1)$$

$$F_s(t)|_{t=0} = F_s^0, \quad s \geq 1. \quad (2.2)$$

Якщо $t > 0$, в ієрархії еволюційних рівнянь (2.1) оператор Ліувілля $\mathcal{L}_s$ визначається через дужку Пуассона невзаємодіючих частинок з граничною умовою на $\partial\mathbb{W}_s$ [7]:

$$\mathcal{L}_s F_s(t) := - \sum_{i=1}^s \langle p_i, \frac{\partial}{\partial q_i} \rangle_{|\partial\mathbb{W}_s} F_s(t, x_1, \dots, x_s), \quad (2.3)$$

де через $\langle \cdot, \cdot \rangle$ позначено скалярний добуток. Гранична умова на $\partial\mathbb{W}_s$ визначається за таким правилом: якщо $t \geq 0$, то при $|q_i - q_j| = \sigma$ потрібно у випадку $\langle (q_i - q_j), (p_i - p_j) \rangle \leq 0$ в дужці Пуассона перейти від значень імпульсів частинок (p_i, p_j) до значень імпульсів до зіткнення (p_i^*, p_j^*) згідно з співвідношеннями

$$\begin{aligned} p_i^* &:= p_i - \eta \langle \eta, (p_i - p_j) \rangle, \\ p_j^* &:= p_j + \eta \langle \eta, (p_i - p_j) \rangle. \end{aligned} \quad (2.4)$$

При $t < 0$ така заміна відповідає випадку $\langle (q_i - q_j), (p_i - p_j) \rangle > 0$ [7].

Оператор $\mathcal{L}_{\text{int}}(i, s+1)$ визначається співвідношенням:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^s \int_{\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3} dx_{s+1} \mathcal{L}_{\text{int}}(i, s+1) F_{s+1}(t) := \\ \sigma^2 \sum_{i=1}^s \int_{\mathbb{R}^3 \times \mathbb{S}_+^2} dp_{s+1} d\eta \langle \eta, (p_i - p_{s+1}) \rangle (F_{s+1}(t, x_1, \dots, q_i, p_i^*, \dots \\ \dots, x_s, q_i - \sigma\eta, p_{s+1}^*) - F_{s+1}(t, x_1, \dots, x_s, q_i + \sigma\eta, p_{s+1})), \end{aligned} \quad (2.5)$$

де $\mathbb{S}_+^2 := \{\eta \in \mathbb{R}^3 \mid |\eta| = 1, \langle \eta, (p_i - p_{s+1}) \rangle > 0\}$ і імпульси p_i^*, p_{s+1}^* визначаються з формул (2.4).

Якщо $t < 0$, генератор ієрархії рівнянь ББГКІ визначається співвідношенням:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^s \int_{\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3} dx_{s+1} \mathcal{L}_{\text{int}}(i, s+1) F_{s+1}(t) := \\ \sigma^2 \sum_{i=1}^s \int_{\mathbb{R}^3 \times \mathbb{S}_+^2} dp_{s+1} d\eta \langle \eta, (p_i - p_{s+1}) \rangle (F_{s+1}(t, x_1, \dots, x_s, \\ q_i - \sigma\eta, p_{s+1}) - F_{s+1}(t, x_1, \dots, q_i, p_i^*, \dots, x_s, q_i + \sigma\eta, p_{s+1}^*)), \end{aligned} \quad (2.6)$$

Надалі будемо розглядати початковий стан частинок (2.2), який задовольняє умову хаосу [7], а саме, випадок стану статистично незалежних частинок

$$F_s(t)|_{t=0} = F_s^{(c)}(x_1, \dots, x_s) \equiv \prod_{i=1}^s F_1^0(x_i) \mathcal{X}_{\mathbb{R}^{3s} \setminus \mathbb{W}_s}, \quad s \geq 1, \quad (2.7)$$

де $\mathcal{X}_{\mathbb{R}^{3s} \setminus \mathbb{W}_s} \equiv \mathcal{X}_s(q_1, \dots, q_s)$ – функція Хевісайда дозволених конфігурацій s пружних куль. Зауважимо, що початковий стан (2.7) є характерним для кінетичного опису багаточастинкової системи, оскільки в цьому випадку всі можливі стани характеризуються за допомогою одночастинкової редукованої функції розподілу.

У просторі $L^1(\mathbb{R}^{3n} \times \mathbb{R}^{3n})$ визначена така група сильно неперервних операторів

$$\begin{aligned} (S_s(-t)f_s)(x_1, \dots, x_s) \equiv S_s(-t, 1, \dots, s)f_s(x_1, \dots, x_s) := \\ \begin{cases} f_s(X_1(-t, x_1, \dots, x_s), \dots, X_s(-t, x_1, \dots, x_s)), & (x_1, \dots, x_s) \in (\mathbb{R}^{3s} \times (\mathbb{R}^{3s} \setminus \mathbb{W}_s)), \\ 0, & (q_1, \dots, q_s) \in \mathbb{W}_s, \end{cases} \end{aligned} \quad (2.8)$$

де $X_i(-t)$ – фазова траєкторія i -ї частинки, яка побудована нижче. Зауважимо, що фазові траєкторії системи пружних куль визначаються майже скрізь на фазовому просторі $\mathbb{R}^{3s} \times (\mathbb{R}^{3s} \setminus \mathbb{W}_s)$ крім множини $\mathbb{M}_s^0$ нульової міри Лебега [7]. Множина $\mathbb{M}_s^0$ складається із точок фазового простору, які визначають такі початкові дані, що під час еволюції породжують багатократні зіткнення, тобто зіткнення більше ніж двох частинок, більше ніж одне двохчастинкове зіткнення в деякий момент часу і на скінченному інтервалі часу відбувається нескінченне число зіткнень.

Якщо початковий стан (2.7) $F_1^0 \in L^1(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3)$ визначається одночастинковою функцією розподілу, тоді непертурбативний розв'язок початкової задачі ієрархії рівнянь ББГКІ (2.1), (2.7) зображується послідовністю $F(t) = (1, F_1(t), \dots, F_s(t), \dots)$ редукованих (s -частинкових)

функцій розподілу [18, 20]

$$F_s(t, x_1, \dots, x_s) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \int_{(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3)^n} dx_{s+1} \dots dx_{s+n} \mathfrak{A}_{1+n}(-t, \quad (2.9)$$

$$\{1, \dots, s\}, s+1, \dots, s+n) \prod_{i=1}^{s+n} F_1^0(x_i) \mathcal{X}_{\mathbb{R}^3(s+n) \setminus \mathbb{W}_{s+n}}, \quad s \geq 1,$$

де твірний оператор $\mathfrak{A}_{1+n}(-t) \in (n+1)$ -го порядку кумулянт груп операторів (2.8), який визначається таким розкладом:

$$\mathfrak{A}_{1+n}(-t, \{1, \dots, s\}, s+1, \dots, s+n) = \quad (2.10)$$

$$\sum_{P: (\{1, \dots, s\}, s+1, \dots, s+n) = \bigcup_i X_i} (-1)^{|P|-1} (|P|-1)! \prod_{X_i \subset P} S_{|\theta(X_i)|}(-t, \theta(X_i)),$$

і використано наступні позначення: $\{1, \dots, s\}$ є множина, яка складається із одного елемента $(1, \dots, s)$, тобто $|\{1, \dots, s+1\}| = 1$, $\sum_P$ – сума по всіх можливих розбиттях P множини $(\{1, \dots, s\}, s+1, \dots, s+n)$ на $|P|$ непорожніх підмножин $X_i \in (\{1, \dots, s\}, s+1, \dots, s+n)$, які взаємно не перетинаються, відображення θ є відображення декластиризації, яке визначається згідно формули: $\theta(\{1, \dots, s\}) = 1, \dots, s$. Найпростіші приклади кумулянтів (2.10) визначаються наступним чином:

$$\begin{aligned} \mathfrak{A}_1(-t, 1, \dots, s) &= S_s(-t, 1, \dots, s), \\ \mathfrak{A}_2(-t, 1, \dots, s, s+1) &= S_{s+1}(-t, 1, \dots, s, s+1) - \\ &\quad S_s(-t, 1, \dots, s) S_1(-t, s+1), \\ \mathfrak{A}_3(-t, \{1, \dots, s\}, s+1, s+2) &= S_{s+2}(-t, 1, \dots, s+2) - \\ &\quad - S_{s+1}(-t, 1, \dots, s+1) S_1(-t, s+2) - S_{s+1}(-t, 1, \dots, s, s+2) \times \\ &\quad S_1(-t, s+1) - S_s(-t, 1, \dots, s) S_2(-t, s+1, s+2) + \\ &\quad 2! S_s(-t, 1, \dots, s) S_1(-t, s+1) S_1(-t, s+2). \end{aligned}$$

Для кумулянтів (2.10) груп операторів (2.8) справедлива оцінка

$$\int_{(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3)^{s+n}} dx_1 \dots dx_{s+n} |(\mathfrak{A}_{1+n}(-t, \{1, \dots, s\}, s+1, \dots, s+n) f_{s+n})$$

$$(x_1, \dots, x_{s+n})| \leq n! e^{n+2} \|f_{s+n}\|_{L_{s+n}^1}. \quad (2.11)$$

Дійсно, дана оцінка випливає із нерівностей

$$\int_{(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3)^{s+n}} dx_1 \dots dx_{s+n} |(\mathfrak{A}_{1+n}(-t, \{1, \dots, s\}, s+1, \dots, s+n)$$

$$f_{s+n})(x_1, \dots, x_{s+n})| \leq \sum_{P: (\{1, \dots, s\}, s+1, \dots, s+n) = \bigcup_i X_i} (|P|-1)! \|f_{s+n}\|_{L_{s+n}^1} =$$

$$\sum_{k=1}^{n+1} s(n+1, k)(k-1)! \|f_{s+n}\|_{L_{s+n}^1},$$

де $s(n+1, k)$ – числа Стірлінга другого роду для яких мають місце такі нерівності:

$$\sum_{k=1}^{n+1} s(n+1, k)(k-1)! = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k} \sum_{\substack{r_1, \dots, r_k \geq 1 \\ r_1 + \dots + r_k = n+1}} \frac{(n+1)!}{r_1! \dots r_k!} \leq \sum_{k=1}^{n+1} k^n \leq n! e^{n+2}.$$

Враховуючи оцінку (2.11), ряд (2.9) для довільних $t \in \mathbb{R}$ збігається по нормі простору L_s^1 за умови що: $\|F_1^0\|_{L^1(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3)} < e^{-1}$, яка є умовою на середнє число частинок.

Зауважимо, що непертурбативний розв'язок (2.9) ієрархії рівнянь ББГ-КІ (2.1) перетворюється до форми пертурбативного (ітераційного) ряду [7] як результат застосування аналогів рівнянь Дюамеля [4] до кумулянтів груп операторів (2.10).

Якщо початкові дані $F_1^0 \in L_0^1(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3)$, то послідовність функцій (2.9) є сильним розв'язком початкової задачі ієрархії рівнянь ББГКІ (2.1) і (2.7), і для довільних початкових даних $F_1^0 \in L^1(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3)$ це є слабкий розв'язок [7].

3. МЕТОД КІНЕТИЧНИХ КЛАСТЕРНИХ РОЗКЛАДІВ

В даному розділі сформулюємо перетворення для кумулянтів (2.10) груп операторів (2.8), які дозволяли б розклади редукованих функцій розподілу (2.9) при $s \geq 2$ виразити в термінах розкладів по одночастинковій функції розподілу. Відмітимо, що вперше поняття кластерних розкладів було запропоновано в роботі [8].

Для того, щоб переформулювати задачу Коші (2.1), (2.7) як нову задачу Коші для одночастинкової функції розподілу та явно визначених функціоналів відносно такої функції, введемо наступні кластерні розклади кумулянтів (2.10) груп операторів (2.8) [13]

$$\begin{aligned} \mathfrak{A}_{1+n}(-t, \{1, \dots, s\}, s+1, \dots, s+n) \mathfrak{I}_{s+n}(1, \dots, s+n) = & \quad (3.1) \\ \sum_{k_1=0}^n \frac{n!}{(n-k_1)!k_1!} \mathfrak{A}_{1+n-k_1}(t, \{1, \dots, s\}, s+1, \dots, s+n-k_1) \times \\ \sum_{k_2=0}^{k_1} \frac{k_1!}{k_2!(k_1-k_2)!} \cdots \sum_{k_{n-k_1+s}=0}^{k_{n-k_1+s-1}} \frac{k_{n-k_1+s-1}!}{k_{n-k_1+s}!(k_{n-k_1+s-1}-k_{n-k_1+s})!} \times \\ \prod_{i=1}^{s+n-k_1} \mathfrak{A}_{1+k_{n-k_1+s+1-i}-k_{n-k_1+s+2-i}}(-t, i, s+n-k_1+1+ \end{aligned}$$

$$+k_{s+n-k_1+2-i}, \dots, s+n-k_1+k_{s+n-k_1+1-i}) \times \\ \mathfrak{I}_{1+k_n-k_1+s+1-i-k_n-k_1+s+2-i}(i, s+n-k_1+1+k_{s+n-k_1+2-i}, \dots \\ \dots, s+n-k_1+k_{s+n-k_1+1-i}), \quad n \geq 0.$$

В формулі (3.1) введено позначення: $k_{s+1} \equiv 0$, а оператор $\mathfrak{I}_{s+n}$ визначається через формулу

$$\mathfrak{I}_{s+n}(1, \dots, s+n)f_{s+n} := \mathcal{X}_{\mathbb{R}^{3(s+n)} \setminus \mathbb{W}_{s+n}} f_{s+n}, \quad (3.2)$$

де $\mathcal{X}_{\mathbb{R}^{3(s+n)} \setminus \mathbb{W}_{s+n}}$ – функція Хевісайда дозволених конфігурацій $s+n$ пружних куль. У випадку початкових станів (2.7), що включають в собі кореляції такого типу, кластерні розклади (3.1) дозволяють врахувати початкові кореляції в кінетичному рівнянні. Розклади (3.1) будемо називати кінетичними кластерними розкладами для кумулянтів (2.10) груп операторів (2.9).

Щоб краще зрозуміти структуру рекурсивних співвідношень (3.1) наведемо кілька прикладів цих співвідношень. Але для цього спочатку визначимо нові еволюційні оператори, а саме кумулянти розсієння, які визначаються згідно формули

$$\hat{\mathfrak{A}}_{1+n}(t, \{1, \dots, s\}, s+1, \dots, s+n) := \quad (3.3) \\ \mathfrak{A}_{1+n}(-t, \{1, \dots, s\}, s+1, \dots, s+n) \mathfrak{I}_{s+n}(X) \prod_{i=1}^{s+n} \mathfrak{A}_1(t, i).$$

Тепер наведемо приклади рекурсивних співвідношень (3.1) найнижчих порядків в термінах кумулянтів розсієння (3.3). Поділявши лівою і правою частинами рівності (3.1) на еволюційний оператор $\prod_{i=1}^{s+n} \mathfrak{A}_1(t, i)$, отримаємо

$$\begin{aligned} \hat{\mathfrak{A}}_1(t, \{1, \dots, s\}) &= \mathfrak{V}_1(t, \{1, \dots, s\}), \\ \hat{\mathfrak{A}}_2(t, \{1, \dots, s\}, s+1) &= \mathfrak{V}_2(t, \{1, \dots, s\}, s+1) + \\ &\quad \mathfrak{V}_1(t, \{1, \dots, s\}) \sum_{i_1=1}^s \hat{\mathfrak{A}}_2(t, i_1, s+1), \\ \hat{\mathfrak{A}}_3(t, \{1, \dots, s\}, s+1, s+2) &= \mathfrak{V}_3(t, \{1, \dots, s\}, s+1, s+2) + \\ &+ 2! \mathfrak{V}_2(t, \{1, \dots, s\}, s+1) \sum_{i_1=1}^{s+1} \hat{\mathfrak{A}}_2(t, i_1, s+2) + \mathfrak{V}_1(t, \{1, \dots, s\}) \times \\ &\times \left(\sum_{i_1=1}^s \hat{\mathfrak{A}}_3(t, i_1, s+1, s+2) + 2! \sum_{1=i_1 < i_2}^s \hat{\mathfrak{A}}_2(t, i_1, s+1) \hat{\mathfrak{A}}_2(t, i_2, s+2) \right), \end{aligned}$$

де $\hat{\mathfrak{A}}_{1+n}(t)$ — $(1+n)$ -го порядку ($n = 0, 1, 2$) кумулянт розсіяння (3.3). Легко перевірити, що розв'язки цих співвідношень задаються наступними розкладами:

$$\begin{aligned} \mathfrak{V}_1(t, \{1, \dots, s\}) &= \hat{\mathfrak{A}}_1(t, \{1, \dots, s\}) = S_s(-t, 1, \dots, s) \mathfrak{J}_s(Y) \prod_{i=1}^s S_1(t, i), \\ \mathfrak{V}_2(t, \{1, \dots, s\}, s+1) &= \hat{\mathfrak{A}}_2(t, \{1, \dots, s\}, s+1) - \\ &\quad \hat{\mathfrak{A}}_1(t, \{1, \dots, s\}) \sum_{i_1=1}^s \hat{\mathfrak{A}}_2(t, i_1, s+1), \\ \mathfrak{V}_3(t, \{1, \dots, s\}, s+1, s+2) &= \hat{\mathfrak{A}}_3(t, \{1, \dots, s\}, s+1, s+2) - \\ &\quad - 2! \hat{\mathfrak{A}}_2(t, \{1, \dots, s\}, s+1) \sum_{i_1=1}^{s+1} \hat{\mathfrak{A}}_2(t, i_1, s+2) - \hat{\mathfrak{A}}_1(t, \{1, \dots, s\}) \times \\ &\quad \left(\sum_{i_1=1}^s \hat{\mathfrak{A}}_3(t, i_1, s+1, s+2) - 2! \sum_{i_1=1}^s \sum_{i_2=1}^{s+1} \hat{\mathfrak{A}}_2(t, i_1, s+1) \times \right. \\ &\quad \left. \hat{\mathfrak{A}}_2(t, i_2, s+2) + 2! \sum_{1=i_1 < i_2}^s \hat{\mathfrak{A}}_2(t, i_1, s+1) \hat{\mathfrak{A}}_2(t, i_2, s+2) \right). \end{aligned}$$

У загальному випадку розв'язки рекурсивних співвідношень (3.1), тобто $(1+n)$ -го порядку ($n \geq 0$) оператори $\mathfrak{V}_{1+n}(t)$, визначаються через розклади ($s \geq 2, n \geq 0$)

$$\begin{aligned} \mathfrak{V}_{1+n}(t, \{1, \dots, s\}, s+1, \dots, s+n) &= n! \sum_{k=0}^n (-1)^k \sum_{m_1=1}^n \dots \quad (3.4) \\ \dots \sum_{m_k=1}^{n-m_1-\dots-m_{k-1}} &\frac{1}{(n-m_1-\dots-m_k)!} \hat{\mathfrak{A}}_{1+n-m_1-\dots-m_k}(t, \{1, \dots, s\}, \\ s+1, \dots, s+n-m_1-\dots-m_k) &\prod_{j=1}^k \sum_{k_2^j=0}^{m_j} \dots \sum_{k_{n-m_1-\dots-m_j+s}^j=0}^{k_{n-m_1-\dots-m_j+s-1}^j} \\ &\prod_{i_j=1}^{s+n-m_1-\dots-m_j} \frac{1}{(k_{n-m_1-\dots-m_j+s+1-i_j}^j - k_{n-m_1-\dots-m_j+s+2-i_j}^j)!} \times \\ &\times \hat{\mathfrak{A}}_{1+k_{n-m_1-\dots-m_j+s+1-i_j}^j - k_{n-m_1-\dots-m_j+s+2-i_j}^j}(t, i_j, \\ &+s+n-m_1-\dots-m_j+1+k_{s+n-m_1-\dots-m_j+2-i_j}^j, \dots \\ &\dots, s+n-m_1-\dots-m_j+k_{s+n-m_1-\dots-m_j+1-i_j}^j). \end{aligned}$$

де мається на увазі, що $k_1^j \equiv m_j$, $k_{n-m_1-\dots-m_j+s+1}^j \equiv 0$. Цей факт перевіряється як результат підстановки виразу (3.4) у рекурсивні співвідношення (3.1). Слід відзначити, що кореляції, які породжуються під час динаміки пружних куль та початкові кореляції, які пов'язані із забороненими конфігураціями повністю визначаються через еволюційні оператори (3.4).

Відмітимо деякі характерні властивості еволюційних операторів (3.4). У сенсі слабкої збіжності в просторі $L^1(\mathbb{R}^{3s} \times \mathbb{R}^{3s} \setminus \mathbb{W}_s)$ інфінітезимальний генератор першого порядку еволюційного оператора (3.4) визначається через оператор

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} (\mathfrak{V}_1(t, \{1, \dots, s\}) - I) f_s = \sum_{i < j=1}^s \mathcal{L}_{\text{int}}(i, j) f_s,$$

де оператор $\mathcal{L}_{\text{int}}^*(i, j)$ визначається формулою (2.5).

У загальному випадку, тобто при $n \geq 1$, у такому ж сенсі, як і для еволюційного оператора першого порядку (3.4) має місце рівність:

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \mathfrak{V}_{1+n}(t, \{1, \dots, s\}, s+1, \dots, s+n) f_{s+n} = 0.$$

У випадку системи невзаємодіючих частинок для кумулянтів розсіяння (3.3) мають місце такі рівності:

$$\hat{\mathfrak{A}}_{1+n}(t, \{1, \dots, s\}, s+1, \dots, s+n) = \prod_{i=1}^s S_1(-t, i) \mathfrak{I}_s(1, \dots, s) \prod_{j=1}^s S_1(t, j) \delta_{n,0},$$

де $n \geq 0$, $\delta_{n,0}$ – символ Кронекера, тоді ми отримаємо

$$\mathfrak{V}_{1+n}(t, \{1, \dots, s\}, s+1, \dots, s+n) = \prod_{i=1}^s S_1(-t, i) \mathfrak{I}_s(1, \dots, s) \prod_{j=1}^s S_1(t, j) \delta_{n,0}.$$

Подібним чином як у початковий час $t = 0$ справедлива така рівність: $\mathfrak{V}_{1+n}(0, \{1, \dots, s\}, s+1, \dots, s+n) = \mathfrak{I}_s(1, \dots, s) \delta_{n,0}$, $n \geq 0$.

4. РЕДУКОВАНІ ФУНКЦІОНАЛИ СТАНУ ЧАСТИНОК

Як було зазначено вище еволюція системи нефіксованого числа частинок, які взаємодіють як пружні кулі описується послідовністю редукованих функцій розподілу $F(t) = (1, F_1(t, x_1), \dots, F_s(t, x_1, \dots, x_s), \dots)$, де $F_s(t)$ визначаються задачею Коші для ієрархії рівнянь ББГКІ (2.1), (2.2). Для початкових даних (2.7) застосовуючи кластерні розклади

(3.1) до кумулянтів (2.10) груп операторів (2.8) у редукованих функціях розподілу, ми отримуємо, що еволюція станів повністю визначається послідовністю редукованих функціоналів стану від одночастинкової функції розподілу, а саме: $F(t | F_1(t)) = (1, F_1(t, x_1), \dots, F_s(t, x_1, \dots, x_s | F_1(t)), \dots)$.

Дійсно, представимо кумулянти (2.10) груп операторів (2.8) із розкладу для розв'язку (2.9) у кінетичні кластерні розклади (3.1) у випадку $s \geq 2$. Тоді, представивши ряд за індексом сумування n та суму за індексом сумування k_1 у вигляді добутку двох рядів, отримуємо:

$$\begin{aligned}
 F_s(t, x_1, \dots, x_s) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \int_{(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3)^n} dx_{s+1} \dots dx_{s+n} \mathfrak{A}_{1+n}(-t, \{1, \dots, s\}, \\
 &s+1, \dots, s+n) \mathfrak{I}_{s+n}(1, \dots, s+n) \prod_{i=1}^{s+n} F_1^0(x_i) = \\
 &\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \int_{(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3)^n} dx_{s+1} \dots dx_{s+n} \mathfrak{V}_{1+n}(t, \{1, \dots, s\}, s+1, \dots, s+n) \times \\
 &\sum_{k_1=0}^{\infty} \sum_{k_2=0}^{k_1} \dots \sum_{k_{n+s}=0}^{k_{n+s-1}} \frac{1}{k_{n+s}!(k_{n+s-1} - k_{n+s})! \dots (k_1 - k_2)!} \times \\
 &\int_{(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3)^{k_1}} dx_{n+s+1} \dots dx_{n+s+k_1} \prod_{i=1}^{n+s} \mathfrak{A}_{1+k_{n+s+1-i}-k_{n+s+2-i}}(-t, i, \\
 &n+s+1+k_{n+s+2-i}, \dots, n+s+k_{n+s+1-i}) \prod_{j=1}^{n+s+k_1} F_1^0(x_j) \times \\
 &\mathcal{X}_{1+k_{n+s+1-i}-k_{n+s+2-i}}(q_i, q_{n+s+1+k_{n+s+2-i}}, \dots, q_{n+s+k_{n+s+1-i}}),
 \end{aligned}$$

де використані позначення введені вище. Внаслідок справедливості формули добутку (4.5) у випадку довільного індексу $s \geq 2$, в отриманому розкладі ряд по індексу сумування k_1 може бути виражений в термінах одночастинкової функції розподілу (4.2). Тому мають місце наступні рівності

$$\begin{aligned}
 &\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \int_{(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3)^n} dx_{s+1} \dots dx_{s+n} \mathfrak{A}_{1+n}(-t, \{1, \dots, s\}, s+1, \dots, s+n) \times \\
 &\mathfrak{I}_{s+n}(1, \dots, s+n) \prod_{i=1}^{s+n} F_1^0(x_i) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \int_{(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3)^n} dx_{s+1} \dots dx_{s+n} \mathfrak{V}_{1+n}(t, \\
 &\{1, \dots, s\}, s+1, \dots, s+n) \prod_{i=1}^{s+n} F_1(t, x_i),
 \end{aligned}$$

де $(n+1)$ -го порядку еволюційний оператор $\mathfrak{V}_{1+n}(t)$ визначається формулою (3.4). Тобто, ми встановили, що маргінальні функціонали стану визначаються таким розкладом:

$$F_s(t, x_1, \dots, x_s \mid F_1(t)) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \int_{(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3)^n} dx_{s+1} \dots \quad (4.1)$$

$$\dots dx_{s+n} \mathfrak{V}_{1+n}(t, \{1, \dots, s\}, s+1, \dots, s+n) \prod_{i=1}^{s+n} F_1(t, x_i),$$

де $(1+n)$ -го порядку еволюційні оператори $\mathfrak{V}_{1+n}(t)$, $n \geq 0$ визначаються формулою (3.4). Іншими словами, для вказаних початкових станів всі можливі стани системи пружних куль в довільний момент часу можуть бути описані в рамках одночастинкової функції розподілу без будь-якої апроксимації.

Типовими властивостями для кінетичного опису еволюції побудованих редукованих функціоналів стану (4.1) є індуковані властивостями еволюційних операторів (3.4).

Виведемо еволюційне рівняння, розв'язком якого є одночастинкова функція розподілу через яку визначаються редуковані функціонали стану (4.1)

$$F_1(t, x_1) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \int_{(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3)^n} dx_2 \dots dx_{n+1} \mathfrak{A}_{1+n}(-t, 1, \dots, n+1) \times \quad (4.2)$$

$$\prod_{i=1}^{n+1} F_1^0(x_i) \mathcal{X}_{\mathbb{R}^{3(1+n)} \setminus \mathbb{W}_{1+n}},$$

де еволюційний оператор $\mathfrak{A}_{1+n}(-t)$ визначається формулою (2.10).

Враховуючи справедливість наступних рівностей для кумулянтів (2.10) груп операторів (2.8) для $f \in L_0^1$ в сенсі збіжності по нормі [7]

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \mathfrak{A}_1(-t, 1) f_1(x_1) = \mathcal{L}_1(1) f_1(x_1),$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \int_{\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3} dx_2 \mathfrak{A}_2(-t, 1, 2) f_2(x_1, x_2) = \int_{\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3} dx_2 \mathcal{L}_{\text{int}}(1, 2) f_2(x_1, x_2),$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \int_{\mathbb{R}^{3n} \times (\mathbb{R}^{3n} \setminus \mathbb{W}_n)} dx_2 \dots dx_{n+1} \mathfrak{A}_{1+n}(-t, 1, \dots, n+1) f_{n+1} = 0, \quad n \geq 2,$$

де оператори $\mathcal{L}_1(1)$ і $\mathcal{L}_{\text{int}}(1, 2)$ визначаються формулами (2.3) та (2.5) відповідно. У результаті диференціювання по часовій змінній виразу (4.2) в сенсі поточної збіжності на просторі $L^1(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3)$ отримаємо

таке рівняння: [7, 19]

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} F_1(t, x_1) = -\langle p_1, \frac{\partial}{\partial q_1} \rangle F_1(t, x_1) + \\ \int_{\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3} dx_2 \mathcal{L}_{\text{int}}^*(1, 2) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \int_{(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3)^n} dx_3 \dots \\ \dots dx_{n+2} \mathfrak{A}_{1+n}(-t, \{1, 2\}, 3, \dots, n+2) \prod_{i=1}^{n+2} F_1^0(x_i) \mathcal{X}_{\mathbb{R}^{3(n+2)} \setminus \mathbb{W}_{n+2}}. \end{aligned} \quad (4.3)$$

Для того, щоб виразити другий член в правій частині цієї рівності в термінах одночастинкової функції розподілу (4.2), розкладемо кумулянти (2.10) груп операторів (2.8) в кінетичний кластерний розклад (3.1) у випадку, коли $s = 2$. Представимо ряд по індексу сумування n і суму по індексу сумування k_1 у вигляді добутку двох рядів. Як результат отримаємо:

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \int_{(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3)^n} dx_3 \dots dx_{n+2} \mathfrak{A}_{1+n}(-t, \{1, 2\}, 3, \dots, n+2) \times \\ \mathfrak{I}_{n+2} \prod_{i=1}^{n+2} F_1^0(x_i) = \\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{k_1=0}^{\infty} \int_{(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3)^{n+k_1}} dx_3 \dots dx_{n+2+k_1} \mathfrak{V}_{1+n}(t, \{1, 2\}, 3, \dots \\ \dots, n+2) \sum_{k_2=0}^{k_1} \dots \sum_{k_{n+2}=0}^{k_{n+1}} \frac{1}{k_{n+2}!(k_{n+1} - k_{n+2})! \dots (k_1 - k_2)!} \times \\ \prod_{i=1}^{n+2} \mathfrak{A}_{1+k_{n+3-i}-k_{n+4-i}}(-t, i, n+3+k_{n+4-i}, \dots, n+2+k_{n+3-i}) \\ \mathcal{X}_{1+k_{n+3-i}-k_{n+4-i}}(q_i, q_{n+3+k_{n+4-i}}, \dots, q_{n+2+k_{n+3-i}}) \prod_{j=1}^{n+2+k_1} F_1^0(x_j). \end{aligned} \quad (4.4)$$

Останній ряд може бути виражений в термінах одночастинкової функції розподілу (4.2) згідно до наступної формули добутку для рядів (4.2)

$$\begin{aligned} \prod_{i=1}^{n+2} F_1(t, x_i) = \sum_{k_1=0}^{\infty} \sum_{k_2=0}^{k_1} \dots \sum_{k_{n+2}=0}^{k_{n+1}} \frac{1}{k_{n+2}!(k_{n+1} - k_{n+2})! \dots (k_1 - k_2)!} \\ \int_{(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3)^{k_1}} dx_{n+3} \dots dx_{n+2+k_1} \prod_{i=1}^{n+2} \mathfrak{A}_{1+k_{n+3-i}-k_{n+4-i}}(-t, i, \end{aligned} \quad (4.5)$$

$$n+3+k_{n+4-i}, \dots, n+2+k_{n+3-i}) \mathcal{X}_{1+k_{n+3-i}-k_{n+4-i}}(q_i, \\ q_{n+3+k_{n+4-i}}, \dots, q_{n+2+k_{n+3-i}}) \prod_{j=1}^{n+2+k_1} F_1^0(x_j).$$

Згідно рівностей (4.4) та (4.5), і беручи до уваги означення (2.5) оператора $\mathcal{L}_{\text{int}}(1, 2)$ для $t > 0$, з рівності (4.3) отримаємо:

$$\frac{\partial}{\partial t} F_1(t, x_1) = -\langle p_1, \frac{\partial}{\partial q_1} \rangle F_1(t, x_1) + \quad (4.6)$$

$$\sigma^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \int_{\mathbb{R}^3 \times \mathbb{S}_+^2} dp_2 d\eta \int_{(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3)^n} dx_3 \dots dx_{n+2} \langle \eta, (p_1 - p_2) \rangle \times \\ (\mathfrak{V}_{1+n}(t, \{1^*, 2^*\}, 3, \dots, n+2) F_1(t, q_1, p_1^*) \times \\ F_1(t, q_1 - \sigma\eta, p_2^*) \prod_{i=3}^{n+2} F_1(t, x_i) - \\ \mathfrak{V}_{1+n}(t, \{1, 2_+\}, 3, \dots, n+2) F_1(t, x_1) \times \\ F_1(t, q_1 + \sigma\eta, p_2) \prod_{i=3}^{n+2} F_1(t, x_i)),$$

де використано такі позначення як і в рівнянні (2.1). Тракуватимемо побудовану тотожність для одночастинкової функції розподілу як кінетичне рівняння системи пружних куль і називатимемо таке еволюційне рівняння як узагальнене кінетичне рівняння Енскоґа. Ряд, яким представляється інтеграл зіткнень, збігається за умови [13]: $\|F_1(t)\|_{L^1(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3)} < e^{-8}$.

Підкреслимо, що коефіцієнти виведеного кінетичного рівняння (4.6) визначаються через початкові кореляції, які пов'язані із забороненими конфігураціями частинок.

Зауважимо, що в роботі [13] було доведено теорему про існування розв'язку задачі Коші для узагальненого рівняння Енскоґа.

Таким чином, якщо початкові дані визначаються через одночастинкову функцію розподілу на дозволених конфігураціях, тоді еволюція станів визначена через ієрархію рівнянь ББГКІ (2.1) може бути повністю описана узагальненим кінетичним рівнянням Енскоґа (4.6) і послідовністю маргінальних функціоналів стану $F_s(t, x_1, \dots, x_s \mid F_1(t))$, $s \geq 2$, які визначаються розкладами (4.1).

Відмітимо, що розклади (4.1) маргінальних функціоналів стану є нерівноважним аналогом розкладів Урселла–Майєра по степенях густини рівноважної функції розподілу. Зокрема, якщо одночастинкова функція розподілу є Максвелівською функцією розподілу, то маргінальні

функціонали стану (4.1) перетворюються у розклади Урселла–Майєра [5, 21].

5. РЕДУКОВАНІ КОРЕЛЯЦІЙНІ ФУНКЦІОНАЛИ

Альтернативним описом еволюції нефіксованого числа частинок, які взаємодіють як пружні кулі, є опис через редуковані кореляційні функції, які визначаються через редуковані кореляційні функції таким чином [16, 17]:

$$F_s(t, x_1, \dots, x_s) = \sum_{P: (x_1, \dots, x_s) = \bigcup_i X_i} \prod_{X_i \subset P} G_{|X_i|}(t, X_i), \quad s \geq 1, \quad (5.1)$$

де символ $\sum_{P: (x_1, \dots, x_s) = \bigcup_i X_i}$ є сумою по всіх можливих розбиттях P множини $(x_1, \dots, x_s)$ на $|P|$ взаємно неперетинних підмножин $X_i \subset (x_1, \dots, x_s)$. Як наслідок, розв'язок рекурентних співвідношень (5.1) представляється через редуковані функції розподілу:

$$G_s(t, x_1, \dots, x_s) = \sum_{P: (x_1, \dots, x_s) = \bigcup_i X_i} (-1)^{|P|-1} (|P| - 1)! \prod_{X_i \subset P} F_{|X_i|}(t, X_i), \quad s \geq 1. \quad (5.2)$$

Функції (5.2) описують кореляції станів системи пружних куль. Структура розкладів (5.2) є такою, що редуковані кореляційні функції є кумулянтами редукованих функцій розподілу (2.9). Відмітимо, що редуковані кореляційні функції (5.2) задовольняють нелінійну ієрархію еволюційних рівнянь [16, 17].

Розглянемо початкові дані для яких в початковий момент часу відсутні кореляції між пружними кулями на дозволених конфігураціях, а саме, $G^c = (0, G_1^0, 0, \dots, 0, \dots)$. У цьому випадку розв'язок нелінійної ієрархії еволюційних рівнянь для редукованих кореляційних функцій визначається таким розвиненням [16, 17]:

$$G_1(t, x_1) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \int_{(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3)^n} dx_2 \dots dx_{1+n} \mathfrak{A}_{1+n}(t, 1, \dots, n+1) \times \prod_{i=1}^{n+1} G_1^0(x_i) \mathcal{X}_{\mathbb{R}^{3(n+1)} \setminus \mathbb{W}_{n+1}}, \quad (5.3)$$

де $\mathfrak{A}_{1+n}(t, 1, \dots, n+1)$ – кумулянт (2.10) $(1+n)$ -го порядку груп еволюційних операторів (2.8).

Аналогічно як і для редукованих функцій розподілу для початкових даних, які задовольняють умову хаосу, використовуючи кінетичні

кластерні розклади сформулюємо нову задачу Коші для одночастинкової редукованої кореляційної функції розподілу та послідовність кореляційних функціоналів $G_s(t|G_1(t))$ від одночастинкової редукованої кореляційної функції (5.3) [16, 17]:

$$G_s(t, x_1, \dots, x_s | G_1(t)) = \quad (5.4)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \int_{(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3)^n} dx_{s+1} \dots dx_{s+n} \mathfrak{V}_{s+n}(t, 1, \dots, s+n) \prod_{i=1}^{s+n} G_1(t, x_i),$$

$$s \geq 2.$$

Оператор $\mathfrak{V}_{s+n}(t)$, $n \geq 0$, $(s+n)$ -го порядку визначається таким представленням:

$$\mathfrak{V}_{s+n}(t, 1, \dots, s, s+1, \dots, s+n) = n! \sum_{k=0}^n (-1)^k \sum_{n_1=1}^n \dots \quad (5.5)$$

$$\sum_{n_k=1}^{n-n_1-\dots-n_{k-1}} \frac{1}{(n-n_1-\dots-n_k)!} \hat{\mathfrak{A}}_{s+n-n_1-\dots-n_k}(t,$$

$$1, \dots, s+n-n_1-\dots-n_k) \prod_{j=1}^k \sum_{\substack{D_j : Z_j = \bigcup_{l_j} X_{l_j}, \\ |D_j| \leq s+n-n_1-\dots-n_j}} \frac{1}{|D_j|!} \times$$

$$\sum_{i_1 \neq \dots \neq i_{|D_j|=1}}^{s+n-n_1-\dots-n_j} \prod_{X_{l_j} \subset D_j} \frac{1}{|X_{l_j}|!} \hat{\mathfrak{A}}_{1+|X_{l_j}|}(t, i_{l_j}, X_{l_j}),$$

де $\sum_{D_j: Z_j = \bigcup_{l_j} X_{l_j}}$ є сума по всіх можливих розбиттях множини $Z_j \equiv (s+n-n_1-\dots-n_j+1, \dots, s+n-n_1-\dots-n_{j-1})$ на не більше ніж $s+n-n_1-\dots-n_j$ лінійно впорядкованих підмножин, $(s+n)$ -го порядку кумулянт розсієння визначається формулою

$$\hat{\mathfrak{A}}_{s+n}(t, 1, \dots, s+n) := \mathfrak{A}_{s+n}(t, 1, \dots, s+n) \mathcal{X}_{\mathbb{R}^{3(s+n)} \setminus \mathbb{W}_{s+n}} \prod_{i=1}^{s+n} (\mathfrak{A}_1)^{-1}(t, i),$$

і використано позначення вище.

Наведемо кілька простих прикладів операторів (5.5):

$$\mathfrak{V}_s(t, 1, \dots, s) = \mathfrak{A}_s(t, 1, \dots, s) \mathcal{X}_{\mathbb{R}^{3s} \setminus \mathbb{W}_s} \prod_{i=1}^s (\mathfrak{A}_1)^{-1}(t, i),$$

$$\mathfrak{V}_{s+1}(t, 1, \dots, s, s+1) =$$

$$\begin{aligned}
& \mathfrak{A}_{s+1}(t, 1, \dots, s+1) \mathcal{X}_{\mathbb{R}^{3(s+1)} \setminus \mathbb{W}_{s+1}} \prod_{i=1}^{s+1} (\mathfrak{A}_1)^{-1}(t, i) - \\
& \mathfrak{A}_s(t, 1, \dots, s) \mathcal{X}_{\mathbb{R}^{3s} \setminus \mathbb{W}_s} \prod_{i=1}^s (\mathfrak{A}_1)^{-1}(t, i) \sum_{j=1}^s \mathfrak{A}_2(t, j, s+1) \times \\
& \mathcal{X}_{\mathbb{R}^6 \setminus \mathbb{W}_2} (\mathfrak{A}_1)^{-1}(t, j) (\mathfrak{A}_1)^{-1}(t, s+1).
\end{aligned}$$

Якщо $\|G_1(t)\|_{L^1(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3)} < e^{-(3s+2)}$, для довільних $t \in \mathbb{R}$ ряд (5.4) збігається по нормі простору L_s^1 [13].

У цьому випадку метод побудови редукованих кореляційних функціоналів (5.4) базується на застосуванні варіацій кластерних розкладів, а саме, кінетичних кластерних розкладів [13], до породжуючих операторів (2.10) рядів, що представляють редуковані кореляційні функції.

Дійсно, враховуючи співвідношення кінетичних кластерних розкладів для кумулянтів розсієння:

$$\begin{aligned}
\hat{\mathfrak{A}}_{s+n}(t, 1, \dots, s+n) &= \sum_{n_1=0}^n \frac{n!}{(n-n_1)!} \mathfrak{V}_{s+n-n_1}(t, 1, \dots, s+n-n_1) \times \\
&\sum_{\substack{D: Z = \bigcup_l X_l, \\ |D| \leq s+n-n_1}} \frac{1}{|D|!} \sum_{i_1 \neq \dots \neq i_{|D|}}^{s+n-n_1} \prod_{X_l \subset D} \frac{1}{|X_l|!} \hat{\mathfrak{A}}_{1+|X_l|}(t, i_l, X_l),
\end{aligned}$$

де $\sum_{D: Z = \bigcup_l X_l, |D| \leq s+n-n_1}$ є сумою за всіма можливими розбиттями D лінійно впорядкованої множини $Z \equiv (s+n-n_1+1, \dots, s+n)$ на не більше ніж $s+n-n_1$ лінійно впорядкованих підмножин, ми отримуємо розклади для редукованих кореляційних функціоналів $G_s(t, x_1, \dots, x_s | G_1(t))$, $s \geq 2$, (5.4) [16].

Зазначимо, що структура кінетичних кластерних розкладів для кумулянтів розсієння груп операторів (2.8) подібна до структури віріальних розкладів рівноважних функцій розподілу, тобто має вигляд степеневого ряду по густині.

Якщо початкові дані $G_1^0 \in L_1^1$, тоді для довільного $t \in \mathbb{R}$ одночастинкова кореляційна функція (5.3) є слабким розв'язком задачі Коші для немарківського кінетичного рівняння Енскоґа [16]:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t} G_1(t, x_1) &= \\
&\mathcal{L}(1)G_1(t, x_1) + \int_{\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3} dx_2 \mathcal{L}_{\text{int}}(1, 2)G_1(t, x_1)G_1(t, x_2) +
\end{aligned} \tag{5.6}$$

$$\int_{\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3} dx_2 \mathcal{L}_{\text{int}}(1, 2) G_2(t, x_1, x_2 \mid G_1(t)),$$

$$G_1(t, x_1)|_{t=0} = G_1^0(x_1), \quad (5.7)$$

де перша частина інтегралу зіткнень у рівнянні (5.6) має структуру Больцмана—Енскоґа, а друга частина інтегралу зіткнень визначається через двочастинковий кореляційний функціонал, представлений у вигляді ряду (5.4). Цей ряд описує всі можливі кореляції, що виникають внаслідок динаміки твердих куль, а також поширення початкових кореляцій, які пов'язані із забороненими конфігураціями.

6. КОРЕЛЯЦІЙНІ ФУНКЦІОНАЛИ СТАНУ

Альтернативний підхід до опису стану скінченної кількості твердих куль полягає у використанні функцій, визначених за допомогою кластерних розкладів функцій розподілу ймовірностей [10, 16]. Історично було запропоновано кілька підходів до опису кореляцій у багаточастинкових системах. Серед них варто згадати відомий підхід до динаміки кореляцій, запропонований І. Прігожином [23] і Р. Балеску [3], та його застосування в теорії плазми.

Введемо послідовність кореляційних функцій $g(t) = (1, g_1(t, x_1), \dots, g_s(t, x_1, \dots, x_s), \dots)$, які описують еволюцію кореляцій системи скінченного числа пружних куль. В роботі [16] встановлено, що редуковані кореляційні функції розподілу (5.2) визначаються через кореляційні функції таким представленням:

$$G_s(t, x_1, \dots, x_s) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \int_{(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3)^n} dx_{s+1} \dots dx_{s+n} g_{s+n}(t, x_1, \dots, x_{s+n}), \quad s \geq 1. \quad (6.1)$$

Еволюція послідовності кореляційних функцій $g(t)$ багатьох твердих куль визначається задачею Коші для ієрархії еволюційних рівнянь Ліувілья, яка визначається в слабкому формулюванні таким чином [16, 17]:

$$\frac{\partial}{\partial t} g_s(t, x_1, \dots, x_s) = \mathcal{L}_s(1, \dots, s) g_s(t, x_1, \dots, x_s) + \sum_{P: (x_1, \dots, x_s) = X_1 \cup X_2} \sum_{i_1 \in \hat{X}_1} \sum_{i_2 \in \hat{X}_2} \mathcal{L}_{\text{int}}(i_1, i_2) g_{|X_1|}(t, X_1) g_{|X_2|}(t, X_2), \quad (6.2)$$

$$g_s(t, x_1, \dots, x_s)|_{t=0} = g_s^0(x_1, \dots, x_s), \quad s \geq 1, \quad (6.3)$$

де $\sum_{P: (x_1, \dots, x_s) = X_1 \cup X_2}$ є сумою за всіма можливими розбиттями P множини $(x_1, \dots, x_s)$ на дві непорожні попарно неперетинні підмножини X_1 і X_2 , символ $\hat{X}_i$ позначає множину індексів підмножини X_i координат фазового простору, а оператор $\mathcal{L}_s$ визначений на підпросторі $L_0^1 \subset L^1$ формулою (2.3). Слід зазначити, що ієрархія Ліувілля (6.2) є сукупністю рекурентних еволюційних рівнянь.

Для $t \geq 0$ наведемо кілька перших прикладів рекурентних рівнянь (6.2) для системи твердих куль:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} g_1(t, x_1) &= -\langle p_1, \frac{\partial}{\partial q_1} \rangle g_1(t, x_1), \\ \frac{\partial}{\partial t} g_2(t, x_1, x_2) &= -\sum_{j=1}^2 \langle p_j, \frac{\partial}{\partial q_j} \rangle g_2(t, x_1, x_2) + \\ &\quad \sigma^2 \int_{\mathbb{S}_+^2} d\eta \langle \eta, (p_1 - p_2) \rangle (g_2(t, q_1, p_1^*, q_2, p_2^*) \delta(q_1 - q_2 + \sigma\eta) - \\ &\quad g_2(t, x_1, x_2) \delta(q_1 - q_2 - \sigma\eta)) + \\ &\quad \sigma^2 \int_{\mathbb{S}_+^2} d\eta \langle \eta, (p_1 - p_2) \rangle (g_1(t, q_1, p_1^*) g_1(t, q_2, p_2^*) \delta(q_1 - q_2 + \sigma\eta) - \\ &\quad g_1(t, x_1) g_1(t, x_2) \delta(q_1 - q_2 - \sigma\eta)), \end{aligned}$$

де використовувалися позначення, прийняті вище.

Для початкових даних, які належать простору інтегрованих функцій, розв'язок задачі Коші (6.2), (6.3) визначається таким представленням [16]:

$$g_s(t, x_1, \dots, x_s) = \sum_{P: (x_1, \dots, x_s) = \bigcup_j X_j} \mathfrak{A}_{|P|}(t, \{\hat{X}_1\}, \dots, \{\hat{X}_{|P|}\}) \prod_{X_j \in P} g_{|X_j|}^0(X_j), \quad s \geq 1, \quad (6.4)$$

де символ $\sum_{P: (x_1, \dots, x_s) = \bigcup_j X_j}$ означає суму за всіма можливими розбиттями P множини $(x_1, \dots, x_s)$ на $|P|$ на непорожні попарно неперетинні підмножини X_j , символ $\hat{X}$ означає множину індексів множини X координат фазового простору, а множина $(\{\hat{X}_1\}, \dots, \{\hat{X}_{|P|}\})$ складається з елементів, які є підмножинами $\hat{X}_j \subset (1, \dots, s)$, тобто, $|(\{\hat{X}_1\}, \dots, \{\hat{X}_{|P|}\})| = |P|$. Породжуючий оператор $\mathfrak{A}_{|P|}(t)$ представлення (6.4) є $|P|$ -го порядку кумулянт груп операторів (2.8), який визначається такою сумою:

$$\mathfrak{A}_{|P|}(t, \{\hat{X}_1\}, \dots, \{\hat{X}_{|P|}\}) := \quad (6.5)$$

$$\sum_{P': (\{\hat{X}_1\}, \dots, \{\hat{X}_{|P'|}\}) = \bigcup_k Z_k} (-1)^{|P'|-1} (|P'| - 1)! \prod_{Z_k \subset P'} S_{|\theta(Z_k)|}(t, \theta(Z_k)),$$

де символ $\theta \in$ відображенням декластеризації: $\theta(\{\hat{X}_i\}) \doteq (\hat{X}_i)$. Найпростіші приклади кореляційних функцій (6.4) визначаються такими рівностями: $g_1(t, x_1) = \mathfrak{A}_1(t, 1)g_1^0(x_1)$, $g_2(t, x_1, x_2) = \mathfrak{A}_1(t, \{1, 2\})g_2^0(x_1, x_2) + \mathfrak{A}_2(t, 1, 2)g_1^0(x_1)g_1^0(x_2)$.

Розглянемо далі випадок, коли кореляції між твердими кулями у початковий момент часу відсутні (початковий стан, що задовольняє умові хаосу [7, 24]), послідовність початкових кореляційних функцій на допустимих конфігураціях має такий вигляд $g^{(c)}(0) = (0, g_1^0(x_1), 0, \dots, 0, \dots)$. У цьому випадку для $(x_1, \dots, x_s) \in \mathbb{R}^{3s} \times (\mathbb{R}^{3s} \setminus \mathbb{W}_s)$ розклади (6.4) представляються наступним чином

$$g_s(t, x_1, \dots, x_s) = \mathfrak{A}_s(t, 1, \dots, s) \prod_{i=1}^s g_1^0(x_i) \mathcal{X}_{\mathbb{R}^{3s} \setminus \mathbb{W}_s}, \quad s \geq 1, \quad (6.6)$$

де породжуючий оператор $\mathfrak{A}_s(t)$ цього розкладу є s -го порядку кумулянт груп операторів (2.8), визначений через розклад

$$\mathfrak{A}_s(t, 1, \dots, s) = \sum_{P: (1, \dots, s) = \bigcup_i X_i} (-1)^{|P|-1} (|P| - 1)! \prod_{X_i \subset P} S_{|X_i|}(t, X_i), \quad (6.7)$$

з позначеннями, прийнятими в формулі (6.4). Із представлення (6.6) видно, що у разі відсутності кореляцій на початковий момент часу, кореляції, згенеровані динамікою системи твердих куль, повністю визначаються кумулянтами (6.7) груп операторів (2.8).

Зазначимо, що у випадку початкових даних $g^{(c)}(0)$ розклади (6.6) можна переписати в іншому поданні, яке пояснює їх фізичний зміст. Дійсно, для $n = 1$ ми маємо $g_1(t, x_1) = \mathfrak{A}_1(t, 1)g_1^0(x_1) = g_1^0(p_1, q_1 - p_1 t)$.

Згідно з формулою (6.6) та визначенням кумулянта першого порядку $\mathfrak{A}_1(t) = S_1(-t)$, і його оберненою групою $S_1^{-1}(-t) = S_1(t)$, ми виразимо кореляційні функції $g_s(t)$, $s \geq 2$, через одночастинкову кореляційну функцію $g_1(t)$. Розкладаючи кумулянт груп операторів (6.7) у формулі (6.6) у кінетичний кластерний розклад (3.1) ми отримаємо для $s \geq 2$ такі кореляційні функціонали стану:

$$g_s(t, x_1, \dots, x_s | g_1(t)) = \hat{\mathfrak{A}}_s(t, 1, \dots, s) \prod_{i=1}^s g_1(t, x_i), \quad s \geq 2,$$

де $\hat{\mathfrak{A}}_s(t, 1, \dots, s)$ є s -го порядку кумулянт (6.7) операторів розсієння

$$\hat{S}_n(t, 1, \dots, n) \doteq S_n(-t, 1, \dots, n) \mathcal{X}_{\mathbb{R}^{3n} \setminus \mathbb{W}_n} \prod_{i=1}^n S_1(t, i), \quad n \geq 1.$$

На підпростор $L_{n,0}^1$ генератор оператора розсіювання $\hat{S}_n(t, 1, \dots, n)$ визначаються через оператор: $\frac{d}{dt}\hat{S}_n(t, 1, \dots, n) |_{t=0} = \sum_{j_1 < j_2=1}^n \mathcal{L}_{\text{int}}(j_1, j_2)$, де для $t \geq 0$ оператор $\mathcal{L}_{\text{int}}(j_1, j_2)$ визначається формулою (2.5).

7. ВИСНОВОК

Метою цього огляду було представити застосування розробленого методу кінетичних кластерних розкладів для виведення кінетичного рівняння системи багатьох частинок із зіткненнями та побудови функціоналів від розв'язку такого рівняння.

У роботі розв'язок ієрархій еволюційних рівнянь ББГКІ для частинок із зіткненнями визначено непертурбативним представленням, а саме, кумулянтами відповідного порядку для груп операторів рівнянь Ліувілля. На основі такого непертурбативного представлення розв'язку, для початкових даних, які визначаються одночастинковими редукованими функціями розподілу було представлено метод кінетичних кластерних розкладів для кумулянтів груп операторів рівняння Ліувілля. Завдяки цьому методу було отримано без будь-яких апроксимацій не марківське кінетичне рівняння Енскоґа та редуковані функціонали стану від розв'язку цього кінетичного рівняння. Зауважимо, що в роботах [14, 15] представлено підхід виведення кінетичного рівняння Енскоґа із динаміки спостережуваних для системи багатьох частинок із зіткненнями.

Також для початкових даних редукованих кореляційних функцій та кореляційних функцій, які задовольняють умову хаосу, за допомогою методу кінетичних кластерних розкладів було побудовано редуковані кореляційні функціонали від одночастинкової редукованої кореляційної функції та кореляційні функціонали від одночастинкової кореляційної функції відповідно. Було показано, що одночастинкова редукована кореляційна функція задовольняє кінетичне рівняння Енскоґа.

Таким чином, представлений метод кінетичних кластерних розкладів дає математичний механізм побудови кінетичних рівнянь для редукованої одночастинкової функції розподілу або редукованої кореляційної функції, а також, дає можливість визначити еволюцію групи частинок із зіткненнями як функціонал від розв'язку цих кінетичних рівнянь. Зауважимо, що для відкритих систем частинок із зіткненнями метод кінетичних кластерних розкладів розроблено в роботах [2, 11], а для квантових багаточастинкових систем розглянуто в [12].

ЛІТЕРАТУРА

- [1] Д. Я. Петрина, В. И. Герасименко. Математические проблемы статистической механической системы упругих шаров. *Успехи мат. наук*, 45(3):135–182, 1990.

- [2] I. В. Гап'як, В. І. Герасименко. Рівняння Фоккера-Планка з початковими кореляціями в кінетичній теорії зіткнень. *Буковинський математичний журнал*, 3(3-4):29–35, 2015.
- [3] R. Balescu. Dynamical correlation patterns: a new representation of the Liouville equation. *Physica*, 56(1):1–24, 1971. doi:10.1016/0031-8914(71)90002-4.
- [4] J. Banasiak, L. Arlotti. *Perturbations of Positive Semigroups with Applications*. New York: Springer, 2006.
- [5] N. N. Bogolyubov. *Problems of the dynamical theory in statistical physics*. Gostechizdat, M., 1946. URL: <https://books.google.com.ua/books?id=GUE6AQAAIAAJ>.
- [6] L. E. Boltzmann. Weitere Studien über das Wärmegleichgewicht unter Gasmolekülen. *Sitzungsber. Akad. Wiss.*, 66:275—370, 1872.
- [7] C. Cercignani, V. I. Gerasimenko, D. Ya. Petrina. *Many-particle Dynamics and Kinetic Equations*. Springer, (Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1st ed. 1997), 2012. doi:10.1007/978-94-011-5558-8.
- [8] Mayer J. E., Montroll E. Molecular distribution. *Journal of chemical physics*, 9:2–16, 1941. URL: <http://dx.doi.org/10.1063/1.1750822>, doi:10.1063/1.1750822.
- [9] D. Enskog. Kinetische theorie der wärmeleitung, reibung und selbstdiffusion in gewissen verdichteten gasen und flüssigkeiten. *Kungl. Sv. Vetenskapsakademiens Handl.*, 63(4):3–44, 1922.
- [10] I. V. Gapyak, V. I. Gerasimenko. Hierarchy of evolution equations for correlations of hard-sphere fluids. *Reports of NAS of Ukraine*, (3):3–12, 2022. doi:10.15407/dopovidi2022.02.003.
- [11] I.V. Gapyak, V.I. Gerasimenko. The non-markovian fokker–planck kinetic equation for a system of hard spheres. *Rep. of the NAS of Ukraine*, (12):29–35, 2014. doi:10.15407/dopovidi2014.12.029.
- [12] V. I. Gerasimenko. Nonlinear kinetic equations of quantum systems. *Proc. Inst. Math. NASU*, 17(2):82–112, 2020. doi:10.48550/arXiv.2107.10872.
- [13] V. I. Gerasimenko, I. V. Gapyak. Hard sphere dynamics and the Enskog equation. *Kinetic and Related Models*, 5(3):459–484, 2012. doi:10.3934/krm.2012.5.459.
- [14] V. I. Gerasimenko, I. V. Gapyak. Low-density asymptotic behavior of observables of hard sphere fluids. *Advances in Math. Phys.*, 2018:1–11, 2018. doi:10.1155/2018/6252919.
- [15] V. I. Gerasimenko, I. V. Gapyak. Boltzmann–Grad asymptotic behavior of collisional dynamics. *Reviews in Math. Phys.*, 33(2):2130001, 2021. doi:10.1142/s0129055x21300016.
- [16] V. I. Gerasimenko, I. V. Gapyak. Propagation of correlations in a hard-sphere system. *J Stat. Phys.*, 189(2), 2022. doi:10.1007/s10955-022-02958-8.
- [17] V. I. Gerasimenko, I. V. Gapyak. Advances in theory of evolution equations of many colliding particles. *Збірник праць Ін-ту математики НАН України*, 20(1), 2023. doi:10.3842/trim.v20n1.528.
- [18] V. I. Gerasimenko, I. V. Gapyak. Non-perturbative solutions of hierarchies of evolution equations for colliding particles. *AIP Advances*, 14, 2024. doi:10.1063/5.0223487.
- [19] V. I. Gerasimenko, D. Ya. Petrina. Thermodynamic limit of nonequilibrium states of a three-dimensional system of elastic spheres. *Theor. Math. Phys.*, 64:734–747, 1985. doi:10.1007/BF01017041.
- [20] V. I. Gerasimenko, T. V. Ryabukha. Cumulant representation of solutions of the BBGKY hierarchy of equations. *Ukrainian Math. J.*, 54:1583–1601, 2002. doi:10.1023/A:1023771917748.

- [21] M. S. Green, R. A. Piccirelli. Basis of the functional assumption in the theory of the Boltzmann equation. *Phys. Rev.*, 132:1388–1410, 1963. doi:10.1103/PhysRev.132.1388.
- [22] D. Ya. Petrina, V. I. Gerasimenko. Mathematical problems of statistical mechanics of a system of elastic balls. *Rus. Math. Surveys*, 45(3):153–211, 1990. doi:10.1070/rm1990v045n03abeh002360.
- [23] I. Prigogine. *Non-Equilibrium Statistical Mechanics*. N.Y.: John Wiley & Sons, 1962.
- [24] H. Spohn. *Large Scale Dynamics of Interacting Particles*. Springer-Verlag, Berlin, 1991. doi:10.1007/978-3-642-84371-6.

І. В. Гап'як

ІНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ НАН УКРАЇНИ, КИЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ІМЕНІ ТАРАСА ШЕВЧЕНКА

Email: ihapiak@knu.ua

ORCID: 0000-0003-2102-1583

Групова класифікація диференціальних рівнянь: алгебраїчний підхід

С. Т. Гурака, О. В. Локазюк

Abstract. Using the classical Lie theorem on realizations of Lie algebras by vector fields on the line, we substantially simplify the proof of the known results on the group classification of the classes of (1+1)-dimensional nonlinear evolution equations $u_t = H(u_{xx})$ and $u_t + uu_x = H(u_{xx})$.

Анотація. Використовуючи класичну теорему Лі про реалізацію алгебр Лі векторними полями на прямій, суттєво спрощено доведення відомих результатів про класифікацію класів (1+1)-вимірних нелінійних еволюційних рівнянь вигляду $u_t = H(u_{xx})$ та $u_t + uu_x = H(u_{xx})$.

1. Вступ

Диференціальні рівняння відіграють важливу роль у сучасній науці, адже знаходять своє застосування у багатьох сферах. Один із важливих напрямків цієї галузі математики — груповий аналіз диференціальних рівнянь. Фундаментальним поняттям групового аналізу диференціальних рівнянь є поняття симетрій — перетворень, які переводять розв’язки рівняння (або системи рівнянь) у розв’язки цього самого рівняння (або системи рівнянь). Розрізняють різні типи симетрій: локальні, неперервні, дискретні, контактні, потенціальні, узагальнені тощо. Симетрії широко використовуються, оскільки вони дають можливість будувати точні розв’язки звичайних диференціальних рівнянь та рівнянь із частинними похідними, із довільного тривіального розв’язку отримувати інший, складніший розв’язок, інтегрувати звичайні диференціальні рівняння, понижувати порядок рівняння, виконувати редукцію, описувати закони збереження, будувати інтеграли руху, будувати параметричні схеми в чисельних методах тощо. Перелічені вище задачі зводяться до так званої прямої задачі симетрійного аналізу, яка полягає в описі симетрій для заданого класу диференціальних рівнянь.

2020 Mathematics Subject Classification: 01A72, 16G50, 18G80

Ключові слова: еволюційне рівняння, групова класифікація, перетворення еквівалентності, симетрія, алгебра Лі, алгебраїчний підхід, реалізації алгебр Лі на прямій

DOI: <https://doi.org/10.3842/trim.v21n1.539>

Софус Лі звів задачу пошуку симетрій до лінійної задачі розв'язання перевизначених систем диференціальних рівнянь, таким чином значно спростивши початкову задачу. Однак через брак ефективних інструментів для розв'язку складних перевизначених систем диференціальних рівнянь навіть інфінітезимальний метод може іноді приводити до дуже громіздких обчислень, якщо початкова задача містить довільні параметри або ж її розмірність дуже велика. Ще більше спростити розв'язок можуть різні алгебраїчні методи, які на даний час розробляються в тому числі представниками київської наукової школи симетрійного аналізу.

Основним предметом цієї роботи є еволюційні рівняння

$$u_t = H(t, x, u, u_1, u_2, \dots, u_r), \quad (1.1)$$

де t, x — незалежні змінні (часова та просторова змінні, відповідно); $u = u(t, x)$ — залежна змінна; $u_t = \frac{\partial u}{\partial t}$ — частинна похідна за змінною t ; $u_k = \frac{\partial^k u}{\partial x^k}$ — k -та частинна похідна за змінною x , $k = 1, \dots, r$, $r \in \mathbb{N}$, $r \geq 2$, де r — порядок рівняння; H — довільна гладка функція змінних $t, x, u, u_1, u_2, \dots, u_r$, $H_{u_r} \neq 0$.

Симетрії еволюційних рівнянь та їх властивості — популярні теми багатьох наукових досліджень та праць. Окрім того, дуже часто рівняння цього класу слугують базовими прикладами в симетрійному аналізі диференціальних рівнянь (див., наприклад, [7, 12–14, 21]). Зазначимо, що, згідно з результатами Соколова [24] та Магадєєва [20], контактні перетворення зберігають вигляд рівнянь із класу (1.1) тоді й лише тоді, коли вони мають наступний вигляд:

$$\tilde{t} = \varkappa(t), \quad \tilde{x} = \phi(t, x, u, u_x), \quad \tilde{u} = \psi(t, x, u, u_x),$$

при чому на функції ϕ та ψ накладена умова контактності [25]

$$\phi_{u_x}(u_x \psi_u + \psi_x) = \psi_{u_x}(u_x \phi_u + \phi_x).$$

У роботі [20] Магадєєв встановив, що у випадку скінченновимірної алгебри контактних симетрій (Cont) $(1+1)$ -вимірних еволюційних рівнянь із класу (1.1) її розмірність становить щонайбільше $r+5$. Натомість, у випадку нескінченновимірної алгебри контактних симетрій рівняння завжди можна звести до лінійного за допомогою деяких контактних перетворень. У цій статті автор також навів повний перелік алгебр скінченновимірних контактних симетрій рівнянь із класу (1.1) і відповідні еволюційні рівняння, що їх допускають.

Добре відома (див., наприклад, [15, Theorem 1] і [3, лема 4.5, с. 266]) наступна лема:

Лема 1.1. *Для довільного еволюційного рівняння вигляду (1.1) t -компонента будь-якого інфінітезимального оператора, що породжує однопараметричну групу локальних перетворень симетрії цього рівняння, не залежить від x та u .*

Таким чином, векторні поля, що належать максимальній алгебрі ліївської інваріантності $\mathfrak{g}^H$ еволюційних рівнянь з класу (1.1), можна шукати у вигляді:

$$Q = \xi^0(t)\partial_t + \xi^1(t, x, u)\partial_x + \eta(t, x, u)\partial_u, \quad (1.2)$$

де $\xi^0(t)$, $\xi^1(t, x, u)$ і $\eta(t, x, u)$ пробігають множину гладких функцій своїх аргументів.

Відомою є класична теорема Лі про ліївські алгебри векторних полів на дійсній прямій [19, Satz 6, S. 455] (також [22, Theorem 2.70], [9, Theorem 1] і [4, теорема 1.1, с. 26]).

Теорема 1.1. *Нееквівалентні реалізації скінченновимірних ліївських алгебр векторними полями на t -прямій вичерпують наступні алгебри:*

$$\{0\}, \quad \langle \partial_t \rangle, \quad \langle \partial_t, t\partial_t \rangle, \quad \langle \partial_t, t\partial_t, t^2\partial_t \rangle.$$

Позначимо через π проєкцію з $\mathbb{R}^t \times \mathbb{R}^x$ на $\mathbb{R}^t$ і нехай $k := \dim \pi_* \mathfrak{g}^H$. Оскільки t -компонента векторних полів вигляду (1.2) залежить лише від змінної t , то, з огляду на теорему 1.1, $k \leq 3$.

Раніше теорема Лі вже успішно застосовувалася для групової класифікації класів еволюційних рівнянь та рівняння Шредінгера [6, 17, 18, 23], а також класу лінійних звичайних диференціальних рівнянь довільного фіксованого порядку $r \geq 2$ [11, §3], де існує аналогічна проєктовність на одновимірний простір часової або незалежної змінної, відповідно. У роботі [9] теорему 1.1 використано у задачі групової класифікації рівняння Клейна–Гордона, причому одночасно розглядалися проєкції на обидві незалежні змінні t і x (див. також дисертацію [4, розділ 1]). Натомість, у роботі [10] проєктовність векторних полів на незалежну змінну t дає можливість ефективно використовувати теорему 1.1 для групової класифікації лінійних систем звичайних диференціальних рівнянь другого порядку з довільною кількістю залежних змінних.

2. ГРУПОВА КЛАСИФІКАЦІЯ НЕЛІНІЙНОГО РІВНЯННЯ ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ

2.1. Попередні відомості. Метою цього параграфу є уточнення та спрощення доведення результатів Ахатова, Газізова та Ібрагімова [5, §4]

про групову класифікацію класу еволюційних рівнянь вигляду

$$u_t = H(u_{xx}), \quad (2.1)$$

де $u_t = \frac{\partial u}{\partial t}$, $u_{xx} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, H — довільна гладка функція аргументу u_{xx} . Якщо H лінійна, то рівняння (2.1) відоме як лінійне рівняння теплопровідності, і тому відповідний клас (2.1) іноді називають класом нелінійних рівнянь теплопровідності.

Далі використовуємо позначення: $u_0 := u_t$, $u_1 := u_x$, $u_{11} := u_{xx}$. Тоді початкове рівняння можна переписати як

$$u_0 = H(u_{11}). \quad (2.2)$$

Нижче вважаємо, що індекси $i, j, \dots = 0, 1$, а за повторюваними індексами здійснюється підсумовування, нижні індекси — диференціювання за відповідними змінними. Виключаючи з розгляду випадок лінійного рівняння теплопровідності $u_0 = u_{11}$, припустимо, що H — нелінійна функція змінної u_{11} . (Слід звернути увагу на роботу Коваля та Поповича [16], у якій виправлено деякі недоліки в груповому аналізі лінійного рівняння теплопровідності.)

Нижче використано наступні позначення для векторних полів алгебр інваріантності рівнянь із класу (2.2):

$$\begin{aligned} Q^1 &= \partial_t, & Q^2 &= \partial_x, & Q^3 &= \partial_u, & Q^4 &= 2t\partial_t + x\partial_x + 2u\partial_u, \\ Q^5 &= x\partial_u, & Q^{6a} &= 2t\partial_t - x^2\partial_u, & Q^{6b} &= x\partial_x - 2t\partial_u, \\ Q^{6c} &= (1-k)t\partial_t + u\partial_u, & k &\neq 0, \pm\frac{1}{3}, 1, & Q^{6c_1} &= 2t\partial_t + 3u\partial_u, \\ Q^{6c_2} &= 4t\partial_t + 3u\partial_u, & Q^{7c_1} &= u\partial_x, & Q^{7c_2} &= x^2\partial_x + xu\partial_u, \end{aligned}$$

де Q^{6c_1} та Q^{6c_2} — частинні випадки векторного поля Q^{6c} для $k = \frac{1}{3}$ та $k = -\frac{1}{3}$, відповідно.

Теорема 2.1 (група еквівалентності, див. [5, §3.3]). *Група еквівалентності $G^\sim$ класу (2.2) породжена перетвореннями вигляду*

$$\begin{aligned} \tilde{t} &= \mu^0 t + \mu^1, & \tilde{x} &= \nu^0 x + \nu^1, \\ \tilde{u} &= \kappa^0 u + \kappa^1 x^2 + \kappa^2 x + \kappa^3 t + \kappa^4, & \tilde{H} &= \frac{\kappa^0}{\mu^0} H + \kappa^3, \end{aligned}$$

де $\mu^0, \mu^1, \nu^0, \nu^1, \kappa^0, \dots, \kappa^4$ — довільні константи, такі, що $\mu^0 \nu^0 \kappa^0 \neq 0$.

Векторне поле (1.2) належить максимальній алгебрі лівської інваріантності $\mathfrak{g}^H$ рівняння з класу (2.2) для будь-якого H тоді й лише тоді, коли воно задовольняє наступне визначальне рівняння:

$$(\zeta^0 - \zeta^{11} H')|_{u_0=H(u_{11})} = 0, \quad (2.3)$$

де ζ^0 та ζ^{11} — відповідні коефіцієнти першого та другого продовжень векторного поля (1.2), $H' := \partial H(u_{11})/\partial u_{11}$.

Розписуючи рівняння (2.3), отримуємо

$$\begin{aligned} & \eta_0 + \eta_u H - H\xi_0^0 - u_1(\xi_0^1 + \xi_u^1 H) \\ & - H'[\eta_{11} + 2\eta_{1u}u_1 + \eta_{uu}u_1^2 + \eta_u u_{11} - 2u_{11}(\xi_1^1 + \xi_u^1 u_1) \\ & - u_1(\xi_{11}^1 + 2\xi_{1u}^1 u_1 + \xi_{uu}^1 u_1^2 + \xi_u^1 u_{11})] = 0. \end{aligned}$$

Після розщеплення цього рівняння за степенями змінної u_1 приходимо до наступної системи:

$$\xi_{uu}^1 = 0, \quad \eta_{uu} - 2\xi_{1u}^1 = 0, \quad (2.4)$$

$$\xi_0^1 + \xi_u^1 H + (2\eta_{1u} - \xi_{11}^1 - 3\xi_u^1 u_{11})H' = 0, \quad (2.5)$$

$$\eta_0 + (\eta_u - \xi_0^0)H - (\eta_{11} + (\eta_u - 2\xi_1^1)u_{11})H' = 0. \quad (2.6)$$

Загальний розв'язок системи (2.4) має вигляд

$$\xi^1 = \alpha(t, x)u + \beta(t, x), \quad \eta = \alpha_1 u^2 + \gamma(t, x)u + \delta(t, x),$$

де $\alpha(t, x)$, $\beta(t, x)$, $\gamma(t, x)$ і $\delta(t, x)$ пробігають множину гладких функцій своїх аргументів.

Підстановка цих виразів у рівняння (2.5) і (2.6) приводить до наступної системи:

$$\begin{aligned} & \alpha_0 u + \beta_0 + \alpha H + (3\alpha_{11}u + (2\gamma_1 - \beta_{11}) - 3\alpha u_{11})H' = 0, \\ & \alpha_{01}u^2 + \gamma_0 u + \delta_0 + (2\alpha_1 u + \gamma - \xi_0^0)H - [\alpha_{111}u^2 + \gamma_{11}u \\ & + \delta_{11} + (2\alpha_1 u + \gamma - 2(\alpha_1 u + \beta_1))u_{11}]H' = 0. \end{aligned}$$

Розділяючи вищенаведену систему за степенями u , приходимо до системи

$$\alpha_0 + 3\alpha_{11}H' = 0, \quad (2.7)$$

$$\beta_0 + \alpha H + (2\gamma_1 - \beta_{11} - 3\alpha u_{11})H' = 0, \quad (2.8)$$

$$\alpha_{01} - \alpha_{111}H' = 0, \quad (2.9)$$

$$\gamma_0 + 2\alpha_1 H - \gamma_{11}H' = 0, \quad (2.10)$$

$$\delta_0 + (\gamma - \xi_0^0)H - (\delta_{11} + (\gamma - 2\beta_1)u_{11})H' = 0. \quad (2.11)$$

Беручи до уваги, що $H'' \neq 0$, з рівняння (2.7) одержуємо

$$\alpha_0 = 0, \quad \alpha_{11} = 0.$$

У той же час рівняння (2.9) стає незначущим. Далі, після диференціювання рівняння (2.8) за змінною u_{11} , отримуємо

$$-2\alpha H' + (2\gamma_1 - \beta_{11} - 3\alpha u_{11})H'' = 0.$$

Після ще одного диференціювання попереднього рівняння за змінною x маємо

$$-2\alpha_1 H' + (2\gamma_{11} - \beta_{111} - 3\alpha_1 u_{11})H'' = 0. \quad (2.12)$$

Диференціюючи рівняння (2.10) за змінною u_{11} , отримуємо

$$2\alpha_1 H' - \gamma_{11} H'' = 0. \quad (2.13)$$

Додаючи рівняння (2.12) і (2.13), маємо

$$(\gamma_{11} - \beta_{111} - 3\alpha_1 u_{11})H'' = 0.$$

Із умови $H'' \neq 0$ одержуємо

$$\alpha_1 = 0, \quad \gamma_{11} = 0, \quad \beta_{111} = 0.$$

З іншого боку, з рівняння (2.10) слідує, що $\gamma_0 = 0$. Тоді

$$\alpha = C^1 = \text{const}, \quad \beta = \beta^2(t)x^2 + \beta^1(t)x + \beta^0(t), \quad \gamma = C^2x + C^3,$$

де функції $\beta^2(t)$, $\beta^1(t)$ та $\beta^0(t)$ пробігають множину гладких функцій змінної t , і $C^1, C^2, \dots$ — довільні константи. Підстановка цих виразів у рівняння (2.8) дає

$$\beta_0^2 x^2 + \beta_0^1 x + \beta_0^0 + C^1 H + (2C^2 - 2\beta^2 - 3C^1 u_{11})H' = 0.$$

Розщеплюючи за змінною x , маємо

$$\beta_0^2 = 0, \quad \beta_0^1 = 0, \quad \beta_0^0 = 0.$$

Тоді

$$\begin{aligned} \beta^2 &= C^4, \quad \beta^1 = C^5, \quad \beta^0 = C^6 t + C^7, \\ C^6 + C^1 H + (2C^2 - 2C^4 - 3C^1 u_{11})H' &= 0. \end{aligned} \quad (2.14)$$

Отже, коефіцієнти векторного поля Q набувають такої форми:

$$\xi^0 = \xi^0(t), \quad (2.15)$$

$$\xi^1 = C^1 u + C^4 x^2 + C^5 x + C^6 t + C^7, \quad (2.16)$$

$$\eta = (C^2 x + C^3)u + \delta(t, x). \quad (2.17)$$

Після підстановки (2.16) і (2.17) в рівняння (2.11) приходимо до наступної класифікаційної умови:

$$\begin{aligned} \delta_0 + (C^2 x + C^3 - \xi_0^0)H \\ - (\delta_{11} + (C^2 x + C^3 - 2(2C^4 x + C^5))u_{11})H' &= 0. \end{aligned} \quad (2.18)$$

Якщо H — довільна функція, то із (2.14) і (2.18) знаходимо

$$\begin{aligned} C^6 &= 0, \quad C^1 = 0, \quad C^2 = C^4, \quad \delta_0 = 0, \quad C^2 x + C^3 - \xi_0^0 = 0, \\ \delta_{11} &= 0, \quad (C^2 - 4C^4)x + C^3 - 2C^5 = 0. \end{aligned}$$

Виходить, що

$$\delta = C^8 x + C^9, \quad -3C^4 = 0, \quad C^3 = 2C^5, \quad C^2 = 0,$$

і коефіцієнти векторних полів (1.2) набувають наступного вигляду:

$$\xi^0 = C^3 t + C^{10} = 2C^5 t + C^{10}, \quad \xi^1 = C^5 x + C^7, \quad \eta = 2C^5 u + C^8 x + C^9.$$

Таким чином, рівняння (2.2) з довільною функцією H у правій частині допускає 5-вимірну алгебру Лі $\mathfrak{g}^0$, породжену векторними полями

$$Q^1 = \partial_t, \quad Q^2 = \partial_x, \quad Q^3 = \partial_u, \quad Q^4 = 2t\partial_t + x\partial_x + 2u\partial_u, \quad Q^5 = x\partial_u.$$

Приходимо до наступного твердження.

Теорема 2.2. $\mathfrak{g}^0 = \langle \partial_t, \partial_x, \partial_u, 2t\partial_t + x\partial_x + 2u\partial_u, x\partial_u \rangle$ — ядро ліївських алгебр інваріантності рівнянь із класу (2.2).

2.2. Групова класифікація. Нехай $\dim \pi_* \mathfrak{g}^H = k$. Так як $\dim \pi_* \mathfrak{g}^0 = 2$, то для будь-якого рівняння з класу (2.2) маємо $k = 2$ або $k = 3$, а t -компонента є квадратичною функцією змінної t , тобто,

$$\pi_* \mathfrak{g}^H = \langle \partial_t, t\partial_t \rangle \quad \text{або} \quad \pi_* \mathfrak{g}^H = \langle \partial_t, t\partial_t, t^2\partial_t \rangle.$$

Нижче розглянуто кожен із цих двох випадків окремо.

Спочатку, диференціюючи (2.18) двічі відносно змінної x , отримуємо

$$\delta_{011} - \delta_{1111} H' = 0,$$

тому $\delta_{011} = 0$, $\delta_{1111} = 0$, отже,

$$\delta = C^{20} x^3 + C^{21} x^2 + \rho^1(t)x + \rho^0(t), \quad (2.19)$$

де функції $\rho^1(t)$ та $\rho^0(t)$ пробігають множину гладких функцій змінної t .

$k = 3$. У цьому випадку

$$\xi^0 = \lambda^2 t^2 + \lambda^1 t + \lambda^0, \quad (2.20)$$

де λ^2 , λ^1 і λ^0 — довільні константи.

Після підстановки (2.19) і (2.20) в (2.18) отримуємо

$$\begin{aligned} & \rho_0^1 x + \rho_0^0 + (C^2 x + C^3 - 2\lambda^2 t - \lambda^1) H \\ & - (6C^{20} x + 2C^{21} + (C^2 x + C^3 - 4C^4 x - 2C^5) u_{11}) H' = 0. \end{aligned}$$

Розщеплення цього рівняння за змінною x приводить до наступної системи:

$$\begin{aligned} & \rho_0^1 + C^2 H - (6C^{20} + (C^2 - 4C^4) u_{11}) H' = 0, \\ & \rho_0^0 + (C^3 - 2\lambda^2 t - \lambda^1) H - (2C^{21} + (C^3 - 2C^5) u_{11}) H' = 0. \end{aligned}$$

Диференціюючи друге рівняння вищезгаданої системи відносно змінної t , одержуємо

$$\rho_{00}^0 - 2\lambda^2 H = 0,$$

і тому $\lambda^2 = 0$, оскільки H — нелінійна функція змінної u_{11} . Маємо, що функція ξ^0 може бути щонайбільше лінійною. Це суперечить умові $k = 3$.

$k = 2$. У цьому випадку функція ξ^0 лінійна, тобто,

$$\xi^0 = \lambda^1 t + \lambda^0, \quad (2.21)$$

де λ^1 і λ^0 — довільні константи.

Із підстановки (2.19) і (2.21) в (2.18) слідує

$$\begin{aligned} & \rho_0^1 x + \rho_0^0 + (C^2 x + C^3 - \lambda^1) H \\ & - (6C^{20} x + 2C^{21} + (C^2 x + C^3 - 4C^4 x - 2C^5) u_{11}) H' = 0. \end{aligned}$$

Розщеплення цього рівняння за змінною x приводить до наступної системи:

$$\rho_0^1 + C^2 H - (6C^{20} + (C^2 - 4C^4) u_{11}) H' = 0, \quad (2.22)$$

$$\rho_0^0 + (C^3 - \lambda^1) H - (2C^{21} + (C^3 - 2C^5) u_{11}) H' = 0. \quad (2.23)$$

Після диференціювання (2.22) і (2.23) за змінною t отримуємо, що $\rho_{00}^1 = 0$ і $\rho_{00}^0 = 0$, відповідно. Тому $\rho^1(t) = C^{22}t + C^{23}$ і $\rho^0(t) = C^{24}t + C^{25}$. Отже,

$$\delta(t, x) = C^{20} x^3 + C^{21} x^2 + (C^{22} t + C^{23}) x + (C^{24} t + C^{25}).$$

Із рівнянь (2.15)–(2.17) одержуємо наступні вирази для компонент векторного поля Q :

$$\xi^0 = \lambda^1 t + \lambda^0, \quad \xi^1 = C^1 u + C^4 x^2 + C^5 x + C^6 t + C^7,$$

$$\eta = (C^2 x + C^3) u + C^{20} x^3 + C^{21} x^2 + (C^{22} t + C^{23}) x + (C^{24} t + C^{25}),$$

у той час, як (2.14), (2.22) і (2.23) дають систему визначальних рівнянь для функції H у вигляді

$$C^6 + C^1 H + (2C^2 - 2C^4 - 3C^1 u_{11}) H' = 0, \quad (2.24)$$

$$C^{22} + C^2 H - (6C^{20} + (C^2 - 4C^4) u_{11}) H' = 0, \quad (2.25)$$

$$C^{24} + (C^3 - \lambda^1) H - (2C^{21} + (C^3 - 2C^5) u_{11}) H' = 0. \quad (2.26)$$

Бачимо, що всі ці рівняння мають загальний вигляд

$$a + bH + cH' + du_{11}H' = 0 \quad (2.27)$$

із деякими сталими параметрами a, b, c і d . З точністю до еквівалентності, визначеної в теоремі 2.1, існує тільки три можливості для розв'язків рівняння типу (2.27), а саме, $e^{u_{11}}$, $\ln(u_{11})$ і u_{11}^p , де $p \neq 0, 1$.

Якщо $H = e^{u_{11}}$, то маємо

$$\begin{aligned}\xi^0 &= 2(C^5 - C^{21})t + \lambda^0, & \xi^1 &= C^5x + C^7 \\ \eta &= 2C^5u + C^{21}x^2 + C^{23}x + C^{25}.\end{aligned}$$

Таким чином, за умови $H = e^{u_{11}}$ базис максимальної алгебри лівівської інваріантності має наступний вигляд:

$$\begin{aligned}Q^1 &= \partial_t, & Q^2 &= \partial_x, & Q^3 &= \partial_u, & Q^4 &= 2t\partial_t + x\partial_x + 2u\partial_u, \\ Q^5 &= x\partial_u, & Q^6 &= 2t\partial_t - x^2\partial_u.\end{aligned}$$

Якщо $H = \ln(u_{11})$, то

$$\xi^0 = C^3t + \lambda^0, \quad \xi^1 = C^5x + C^7, \quad \eta = C^3u + C^{23}x + (C^3 - 2C^5)t + C^{25}.$$

У випадку $H = \ln(u_{11})$ одержуємо наступний базис максимальної алгебри лівівської інваріантності:

$$\begin{aligned}Q^1 &= \partial_t, & Q^2 &= \partial_x, & Q^3 &= \partial_u, & Q^4 &= 2t\partial_t + x\partial_x + 2u\partial_u, \\ Q^5 &= x\partial_u, & Q^6 &= x\partial_x - 2t\partial_u.\end{aligned}$$

Якщо $H = u_{11}^p$, то з системи (2.24)–(2.26) отримуємо

$$\begin{aligned}C^6 + C^1u_{11}^p + 2(C^2 - C^4)pu_{11}^{p-1} - 3C^1pu_{11}^p &= 0, \\ C^{22} + C^2u_{11}^p - 6C^{20}pu_{11}^{p-1} - (C^2 - 4C^4)pu_{11}^p &= 0, \\ C^{24} + (C^3 - \lambda^1)u_{11}^p - 2C^{21}pu_{11}^{p-1} - (C^3 - 2C^5)pu_{11}^p &= 0.\end{aligned}$$

Розщеплюючи цю систему, одержуємо

$$\begin{aligned}C^1 &= 3pC^1, & C^2 &= C^4, & C^2 &= p(C^2 - 4C^4), \\ \lambda^1 &= (1 - p)C^3 + 2pC^5, & C^6 &= C^{20} = C^{21} = C^{22} = C^{24} = 0.\end{aligned}$$

Якщо $p \neq \pm \frac{1}{3}$, то

$$\begin{aligned}\lambda^1 &= (1 - p)C^3 + 2pC^5, \\ C^1 &= C^2 = C^6 = C^{20} = C^{21} = C^{22} = C^{24} = 0,\end{aligned}$$

тобто компоненти векторного поля Q мають вигляд

$$\begin{aligned}\xi^0 &= ((1 - p)C^3 + 2pC^5)t + \lambda^0, & \xi^1 &= C^5x + C^7, \\ \eta &= C^3u + C^{23}x + C^{25}.\end{aligned}$$

Отже, коли $H = u_{11}^p$, $p \neq \pm \frac{1}{3}$, то алгебра максимальної ліівської інваріантності породжена наступними векторними полями:

$$\begin{aligned} Q^1 &= \partial_t, & Q^2 &= \partial_x, & Q^3 &= \partial_u, & Q^4 &= 2t\partial_t + x\partial_x + 2u\partial_u, \\ Q^5 &= x\partial_u, & Q^6 &= (1-p)t\partial_t + u\partial_u. \end{aligned}$$

Для $p = \frac{1}{3}$:

$$\lambda^1 = \frac{2}{3}(C^3 + C^5), \quad C^2 = C^6 = C^{20} = C^{21} = C^{22} = C^{24} = 0,$$

тобто компоненти векторного поля Q мають наступний вигляд:

$$\begin{aligned} \xi^0 &= \frac{2}{3}(C^3 + C^5)t + \lambda^0, & \xi^1 &= C^1u + C^5x + C^7, \\ \eta &= C^3u + C^{23}x + C^{25}. \end{aligned}$$

Таким чином, у випадку $H = u_{11}^{1/3}$ отримуємо наступний вигляд алгебри максимальної ліівської інваріантності:

$$\begin{aligned} Q^1 &= \partial_t, & Q^2 &= \partial_x, & Q^3 &= \partial_u, & Q^4 &= 2t\partial_t + x\partial_x + 2u\partial_u, \\ Q^5 &= x\partial_u, & Q^6 &= 2t\partial_t + 3u\partial_u, & Q^7 &= u\partial_x. \end{aligned}$$

Для $p = -\frac{1}{3}$:

$$\lambda^1 = \frac{2}{3}(2C^3 - C^5), \quad C^1 = C^6 = C^{20} = C^{21} = C^{22} = C^{24} = 0,$$

і компоненти векторного поля Q такі:

$$\begin{aligned} \xi^0 &= \frac{2}{3}(2C^3 - C^5)t + \lambda^0, & \xi^1 &= C^2x^2 + C^5x + C^7, \\ \eta &= (C^2x + C^3)u + C^{23}x + C^{25}. \end{aligned}$$

Отже, якщо $H = u_{11}^{-1/3}$, то алгебра максимальної ліівської інваріантності породжується наступними базисними векторними полями:

$$\begin{aligned} Q^1 &= \partial_t, & Q^2 &= \partial_x, & Q^3 &= \partial_u, & Q^4 &= 2t\partial_t + x\partial_x + 2u\partial_u, \\ Q^5 &= x\partial_u, & Q^6 &= 4t\partial_t + 3u\partial_u, & Q^7 &= x^2\partial_x + xu\partial_u. \end{aligned}$$

Отримані результати підсумовано в наступному твердженні.

Теорема 2.3 (результат групової класифікації, [5, §4]). *Повний список $G^\sim$ -нееквівалентних (максимальних) розширень ліівських симетрій у класі (2.2) вичерпують такі випадки, які наведено у таблиці 2.1.*

У випадку лінійної (несталої) функції H (останній рядок таблиці, який включено для повноти розгляду класу (2.2)) алгебра ліівської інваріантності нескінченновимірна. Тут параметрична функція f залежить

Таблиця 2.1. Результати групової класифікації класу (2.2).

$H(u_{xx})$	<i>Ліівська алгебра інваріантності</i>
$\forall$	$\langle \partial_t, \partial_x, \partial_u, 2t\partial_t + x\partial_x + 2u\partial_u, x\partial_u \rangle$
$\exp u_{xx}$	$\langle \partial_t, \partial_x, \partial_u, 2t\partial_t + x\partial_x + 2u\partial_u, x\partial_u, 2t\partial_t - x^2\partial_u \rangle$
$\ln u_{xx}$	$\langle \partial_t, \partial_x, \partial_u, 2t\partial_t + x\partial_x + 2u\partial_u, x\partial_u, x\partial_x - 2t\partial_u \rangle$
$u_{xx}^p, p \neq 0, \pm\frac{1}{3}, 1$	$\langle \partial_t, \partial_x, \partial_u, 2t\partial_t + x\partial_x + 2u\partial_u, x\partial_u, (1-p)t\partial_t + u\partial_u \rangle$
$u_{xx}^{1/3}$	$\langle \partial_t, \partial_x, \partial_u, 2t\partial_t + x\partial_x + 2u\partial_u, x\partial_u, 2t\partial_t + 3u\partial_u, u\partial_x \rangle$
$u_{xx}^{-1/3}$	$\langle \partial_t, \partial_x, \partial_u, 2t\partial_t + x\partial_x + 2u\partial_u, x\partial_u, 4t\partial_t + 3u\partial_u, x^2\partial_x + xu\partial_u \rangle$
u_{xx}	$\langle \partial_t, \partial_x, u\partial_u, 2t\partial_t + x\partial_x, t\partial_x - \frac{1}{2}xu\partial_u, t^2\partial_t + tx\partial_x - \frac{1}{4}(x^2 + 2t)u\partial_u, f(t, x)\partial_u \rangle$

від змінних (t, x) і пробігає множину розв'язків лінійного рівняння теплопровідності $u_t = u_{xx}$.

3. ГРУПОВА КЛАСИФІКАЦІЯ НЕЛІНІЙНОГО РІВНЯННЯ БЮРГЕРСА

3.1. Попередні відомості. Метою цього параграфу є спрощення доведення результатів [1, 8] про групову класифікацію класу еволюційних рівнянь вигляду

$$u_0 + uu_1 = H(u_{11}), \quad (3.1)$$

де $u_0 := u_t = \frac{\partial u}{\partial t}$, $u_1 := u_x = \frac{\partial u}{\partial x}$, $u_{11} := u_{xx} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, H — довільна гладка функція аргументу u_{xx} . Коли H — лінійна функція, то рівняння (3.1) є добре відомим рівнянням Бюргерса. Згідно з лемою 1.1, векторні поля, що належать максимальній алгебрі ліівської інваріантності $\mathfrak{g}^H$ еволюційних рівнянь із класу (3.1), можна шукати в вигляді (1.2).

Теорема 3.1 (група еквівалентності класу (3.1), див. [2]). *Група еквівалентності $G^\sim$ класу (3.1) породжена операторами ∂_t , ∂_x , $t\partial_x + \partial_u$, $t\partial_t + x\partial_x - H\partial_H$, $x\partial_x + u\partial_u + H\partial_H$, $t^2\partial_x + 2t\partial_u + 2\partial_H$, а також дискретним перетворенням еквівалентності $(t, x, u, H) \rightarrow (-t, -x, u, -H)$. Дія будь-якого перетворення еквівалентності на функцію H має вигляд*

$$\tilde{H}(u_{11}) = \delta_1 H(\delta_2 u_{11}) + \delta_0,$$

де $\delta_0, \delta_1, \delta_2 \in \mathbb{R}$, $\delta_1 \delta_2 \neq 0$.

Векторне поле (1.2) належить максимальній алгебрі лівської інваріантності $\mathfrak{g}^H$ рівняння з класу (3.1) для будь-якої функції H тоді й лише тоді, коли воно задовольняє наступне визначальне рівняння:

$$(\eta u_1 + \zeta^0 + \zeta^1 u - \zeta^{11} H')|_{u_0 + u u_1 = H(u_{11})} = 0, \quad (3.2)$$

де ζ^0 , ζ^1 та ζ^{11} — відповідні коефіцієнти першого та другого продовжень векторного поля (1.2), $H' := \partial H(u_{11})/\partial u_{11}$.

Розписуючи рівняння (3.2), отримуємо

$$\begin{aligned} & \eta u_1 + \eta_0 + H \eta_u + u u_1 \xi_0^0 - H \xi_0^0 - u_1 \xi_0^1 - u_1 \xi_u^1 H + u \eta_1 - u u_1 \xi_1^1 \\ & - H' [\eta_{11} + 2 \eta_{1u} u_1 + \eta_{uu} u_1^2 + \eta_u u_{11} - 2 u_{11} (\xi_1^1 + \xi_u^1 u_1) \\ & - u_1 (\xi_{11}^1 + 2 \xi_{1u}^1 u_1 + \xi_{uu}^1 u_1^2 + \xi_u^1 u_{11})] = 0. \end{aligned}$$

Після розщеплення цього рівняння за степенями змінної u_1 приходимо до наступної системи:

$$\xi_{uu}^1 = 0, \quad \eta_{uu} - 2 \xi_{1u}^1 = 0, \quad (3.3)$$

$$\eta - \xi_0^1 + u (\xi_0^0 - \xi_1^1) - \xi_u^1 H - (2 \eta_{1u} - \xi_{11}^1 - 3 \xi_u^1 u_{11}) H' = 0, \quad (3.4)$$

$$\eta_0 + u \eta_1 + (\eta_u - \xi_0^0) H - (\eta_{11} + (\eta_u - 2 \xi_1^1) u_{11}) H' = 0. \quad (3.5)$$

Загальний розв'язок системи (3.3) має вигляд

$$\xi^1 = a(t, x)u + b(t, x), \quad \eta = a_1 u^2 + c(t, x)u + d(t, x),$$

де $a(t, x)$, $b(t, x)$, $c(t, x)$ і $d(t, x)$ пробігають множину гладких функцій своїх аргументів.

Підстановка цих виразів у рівняння (3.4) і (3.5) приводить до наступної системи:

$$\begin{aligned} & (c - a_0 + \xi_0^0 - b_1)u + (d - b_0) - aH \\ & - (3a_{11}u + 2c_1 - b_{11} - 3au_{11})H' = 0, \\ & a_{11}u^3 + (a_{01} + c_1)u^2 + (c_0 + d_1)u + d_0 + (2a_1u + c - \xi_0^0)H \\ & - (a_{111}u^2 + c_{11}u + d_{11} + (c - 2b_1)u_{11})H' = 0. \end{aligned}$$

Розщеплюючи вищенаведену систему за степенями u , приходимо до системи

$$c - a_0 + \xi_0^0 - b_1 - 3a_{11}H' = 0, \quad (3.6)$$

$$d - b_0 - aH - (2c_1 - b_{11} - 3au_{11})H' = 0, \quad (3.7)$$

$$a_{11} = 0, \quad (3.8)$$

$$a_{01} + c_1 - a_{111}H' = 0, \quad (3.9)$$

$$c_0 + d_1 + 2a_1H - c_{11}H' = 0, \quad (3.10)$$

$$d_0 + (c - \xi_0^0)H - (d_{11} + (c - 2b_1)u_{11})H' = 0. \quad (3.11)$$

Із рівняння (3.8) випливає, що

$$a = \lambda^1(t)x + \lambda^2(t).$$

Тут і нижче $\lambda^1(t), \lambda^2(t), \dots$ пробігають множину гладких функцій змінної t . З урахуванням рівнянь (3.8) і (3.9) маємо $a_{01} + c_1 = 0$, тобто $\lambda_0^1 + c_1 = 0$, звідки можна знайти функцію $c(t, x)$:

$$c = -\lambda_0^1(t)x + \lambda^3(t).$$

Далі підставимо функції a і c в рівняння (3.6):

$$-\lambda_0^1x + \lambda^3 - \lambda_0^1x - \lambda_0^2 + \xi_0^0 - b_1 = 0.$$

Звідси знаходимо функцію $b(t, x)$:

$$b = -\lambda_0^1x^2 + (\xi_0^0 + \lambda^3 - \lambda_0^2)x + \lambda^4(t).$$

Оскільки H — нелінійна функція, то з рівняння (3.10) випливає, що

$$c_0 + d_1 = 0, \quad a_1 = 0.$$

Тоді з рівняння $a_1 = 0$ одержуємо, що $\lambda^1 = 0$, тобто

$$a = \lambda^2(t), \quad b = (\xi_0^0 + \lambda^3 - \lambda_0^2)x + \lambda^4(t), \quad c = \lambda^3(t).$$

Натомість, із рівняння $c_0 + d_1 = 0$ маємо, що $\lambda_0^3 + d_1 = 0$, а отже,

$$d = -\lambda_0^3x + \lambda^5(t).$$

Підстановка щойно уточнених виразів для функцій a, b, c і d в рівняння (3.7) приводить до співвідношення

$$(\lambda^5 - \lambda_0^4) - (2\lambda_0^3 + \xi_{00}^0 - \lambda_{00}^2)x - \lambda^2H + 3\lambda^2u_{11}H' = 0.$$

Прирівнюючи коефіцієнт при x до нуля, отримаємо наступне рівняння:

$$2\lambda_0^3 + \xi_{00}^0 - \lambda_{00}^2 = 0,$$

звідки слідує, що

$$\xi_0^0 = \lambda_0^2 - 2\lambda^3 + m_1.$$

Тут і нижче $m_1, m_2, \dots$ — довільні дійсні сталі.

Отже, приходимо до першої *класифікаційної умови*:

$$(\lambda^5 - \lambda_0^4) - \lambda^2H + 3\lambda^2u_{11}H' = 0.$$

Натомість, із підстановки наведених вище виразів для функцій a, b, c, d і ξ_0^0 в рівняння (3.11) одержимо

$$-\lambda_{00}^3x + \lambda_0^5 + (3\lambda^3 - \lambda_0^2 - m_1)H + (\lambda^3 + 2\xi_0^0 - 2\lambda_0^2)u_{11}H' = 0.$$

Прирівнюючи коефіцієнт при x до нуля, отримаємо наступне рівняння:

$$\lambda_{00}^3 = 0.$$

Звідси робимо висновок, що $\lambda^3 = m_2t + m_3$ і, отже,

$$a = \lambda^2(t), \quad b = (-m_2t + m_1 - m_3)x + \lambda^4(t), \quad c = m_2t + m_3, \\ d = -m_2x + \lambda^5(t), \quad \xi_0^0 = -2m_2t + \lambda_0^2 - 2m_3 + m_1.$$

Друга класифікаційна умова набуває вигляду

$$\lambda_0^5 + (3\lambda^3 - \lambda_0^2 - m_1)H + (\lambda^3 + 2\xi_0^0 - 2\lambda_0^2)u_{11}H' = 0.$$

Таким чином, приходимо до наступної системи:

$$(\lambda^5 - \lambda_0^4) - \lambda^2H + 3\lambda^2u_{11}H' = 0, \\ \lambda_0^5 + (3m_2t + 3m_3 - \lambda_0^2 - m_1)H + (m_2t + m_3 + 2\xi_0^0 - 2\lambda_0^2)u_{11}H' = 0, \\ \xi_0^0 = -2m_2t + \lambda_0^2 - 2m_3 + m_1. \quad (3.12)$$

Якщо H — довільна функція, то з (3.12) після розщеплення знаходимо:

$$\lambda^5 = \lambda_0^4, \quad \lambda^2 = 0, \quad \lambda_0^5 = 0, \quad 3m_2t + 3m_3 - \lambda_0^2 - m_1 = 0, \\ -3m_2t + 2m_1 - 3m_3 = 0.$$

Звідси отримуємо, що

$$\lambda^5 = m_4, \quad \lambda^4 = m_4t + m_5, \quad m_2 = 0, \quad 3m_3 - m_1 = 0, \quad 2m_1 - 3m_3 = 0,$$

тому $m_1 = 0$, $m_3 = 0$ і функції a , b , c , d і ξ_0^0 набувають наступного вигляду:

$$a = 0, \quad b = m_4t + m_5, \quad c = 0, \quad d = m_4, \quad \xi_0^0 = 0.$$

Отже, коефіцієнти векторних полів (1.2) мають форму:

$$\xi^0 = m_6, \quad \xi^1 = m_4t + m_5, \quad \eta = m_4.$$

Таким чином, рівняння (3.1) з довільною функцією H у правій частині допускає 3-вимірну алгебру Лі $\mathfrak{g}^0$, породжену векторними полями

$$Q^1 = \partial_t, \quad Q^2 = \partial_x, \quad Q^3 = t\partial_x + \partial_u.$$

Приходимо до наступного твердження.

Теорема 3.2 (див. [2]). $\mathfrak{g}^0 = \langle \partial_t, \partial_x, t\partial_x + \partial_u \rangle$ — ядро лівських алгебр інваріантності рівнянь із класу (3.1).

3.2. Групова класифікація. Нехай знову $\dim \pi_* \mathfrak{g}^H = k$. Оскільки $\dim \pi_* \mathfrak{g}^0 = 1$, то для будь-якого рівняння з класу (3.1) маємо, що $k = 1$, $k = 2$ або $k = 3$. Додатково припускаємо, що t -компонента є квадратичною функцією змінною t . Отже,

$$\pi_* \mathfrak{g}^H = \langle \partial_t \rangle, \quad \pi_* \mathfrak{g}^H = \langle \partial_t, t\partial_t \rangle \quad \text{або} \quad \pi_* \mathfrak{g}^H = \langle \partial_t, t\partial_t, t^2\partial_t \rangle.$$

Нижче розглянуто кожен із цих трьох випадків окремо.

$k = 3$. У цьому випадку

$$\xi^0 = \mu^2 t^2 + \mu^1 t + \mu^0, \quad (3.13)$$

де μ^2 , μ^1 і μ^0 — довільні константи. Порівнюючи з третім рівнянням із (3.12), маємо

$$2\mu^2 t + \mu^1 = -2m_2 t + \lambda_0^2 - 2m_3 + m_1, \quad (3.14)$$

звідки після диференціювання за змінною t отримаємо $\lambda_{00}^2 = 2\mu^2 + 2m_2$, іншими словами,

$$\lambda^2 = (\mu^2 + m_2)t^2 + m_7 t + m_8.$$

Підставляючи щойно наведений вираз у (3.14), одержимо

$$2\mu^2 t + \mu^1 = -2m_2 t + (2\mu^2 + 2m_2)t + m_7 - 2m_3 + m_1,$$

звідки слідує, що $m_7 = \mu^1 + 2m_3 - m_1$, тобто

$$\lambda^2 = (\mu^2 + m_2)t^2 + (\mu^1 + 2m_3 - m_1)t + m_8. \quad (3.15)$$

Після підстановки (3.15) в друге рівняння системи (3.12) отримуємо

$$\begin{aligned} & \lambda_0^5 + ((m_2 - 2\mu^2)t + (m_3 - \mu^1))H \\ & + (-3m_2 t + (2m_1 - 3m_3))u_{11}H' = 0. \end{aligned} \quad (3.16)$$

Після диференціювання двічі за змінною t одержимо

$$\lambda_{000}^5 = 0,$$

що свідчить про те, що функція λ^5 — квадратична, скажімо,

$$\lambda^5 = m_9 t^2 + m_{10} t + m_{11}.$$

Підставимо цей вираз назад у рівняння (3.16), отримаємо

$$\begin{aligned} & 2m_9 t + m_{10} + ((m_2 - 2\mu^2)t + (m_3 - \mu^1))H \\ & + (-3m_2 t + (2m_1 - 3m_3))u_{11}H' = 0. \end{aligned}$$

Розщеплюючи за змінною t , приходимо до системи:

$$\begin{aligned} & 2m_9 + (m_2 - 2\mu^2)H - 3m_2 u_{11}H' = 0, \\ & m_{10} + (m_3 - \mu^1)H + (2m_1 - 3m_3)u_{11}H' = 0. \end{aligned} \quad (3.17)$$

Підставимо тепер функції λ^5 і λ^2 у перше рівняння (3.12):

$$\begin{aligned} & (m_9 t^2 + m_{10} t + m_{11} - \lambda_0^4) \\ & - ((\mu^2 + m_2)t^2 + (\mu^1 + 2m_3 - m_1)t + m_8)H \\ & + 3((\mu^2 + m_2)t^2 + (\mu^1 + 2m_3 - m_1)t + m_8)u_{11}H' = 0. \end{aligned} \quad (3.18)$$

Диференціювання тричі за змінною t показує, що $\lambda_{0000}^4 = 0$, що свідчить про те, що функція λ^4 — кубічна. Отже,

$$\lambda^4 = m_{12}t^3 + m_{13}t^2 + m_{14}t + m_{15}.$$

Підставляючи функцію λ^4 назад у рівняння (3.18), маємо

$$\begin{aligned} & (m_9t^2 + m_{10}t + m_{11} - 3m_{12}t^2 - 2m_{13}t - m_{14}) \\ & - ((\mu^2 + m_2)t^2 + (\mu^1 + 2m_3 - m_1)t + m_8)H \\ & + 3((\mu^2 + m_2)t^2 + (\mu^1 + 2m_3 - m_1)t + m_8)u_{11}H' = 0. \end{aligned}$$

Розщеплюючи за змінною t , одержуємо систему:

$$\begin{aligned} & (m_9 - 3m_{12}) - (\mu^2 + m_2)H + 3(\mu^2 + m_2)u_{11}H' = 0, \\ & (m_{10} - 2m_{13}) - (\mu^1 + 2m_3 - m_1)H + 3(\mu^1 + 2m_3 - m_1)u_{11}H' = 0, \\ & (m_{11} - m_{14}) - m_8H + 3m_8u_{11}H' = 0. \end{aligned} \quad (3.19)$$

Очевидно, що рівняння у системі (3.19) мають загальний вигляд (2.27) із деякими сталими параметрами a , b , c і d . Отже, з точністю до еквівалентності, визначеної в теоремі 3.1, існує тільки три можливості для розв'язків рівняння (2.27), а саме, $e^{u_{11}}$, $\ln(u_{11})$ і u_{11}^p , де $p \neq 0, 1$.

Якщо $H = u_{11}^p$, $p \neq 0, 1$, то із систем (3.17) і (3.19) маємо

$$\begin{aligned} & 2m_9 + (m_2 - 2\mu^2)u_{11}^p - 3m_2pu_{11}^p = 0, \\ & m_{10} + (m_3 - \mu^1)u_{11}^p + (2m_1 - 3m_3)pu_{11}^p = 0, \\ & (m_9 - 3m_{12}) - (\mu^2 + m_2)u_{11}^p + 3(\mu^2 + m_2)pu_{11}^p = 0, \\ & (m_{10} - 2m_{13}) - (\mu^1 + 2m_3 - m_1)u_{11}^p + 3(\mu^1 + 2m_3 - m_1)pu_{11}^p = 0, \\ & (m_{11} - m_{14}) - m_8u_{11}^p + 3m_8pu_{11}^p = 0. \end{aligned} \quad (3.20)$$

При розщепленні цієї системи отримуємо наступні обмеження на сталі:

$$m_9 = 0, \quad m_{10} = 0, \quad m_{12} = 0, \quad m_{13} = 0, \quad m_{11} = m_{14}.$$

Далі, якщо $p \neq \frac{1}{3}$, то маємо ще наступні обмеження:

$$\begin{aligned} & m_2 = 0, \quad \mu^2 = 0, \quad m_8 = 0 \\ & \mu^1 = m_1 - 2m_3, \quad (3 - 3p)m_3 + (2p - 1)m_1 = 0. \end{aligned}$$

За умови $p = \frac{1}{3}$ маємо лише наступні обмеження:

$$\mu^2 = 0, \quad \mu^1 = \frac{2}{3}m_1.$$

Отже, за будь-якого значення $p \neq 0, 1$ (іншими словами, коли функція H не є лінійною функцією свого аргумента) $\mu^2 = 0$, тобто $k \neq 3$ і маємо суперечність.

$k = 2$. У цьому випадку

$$\xi^0 = \mu^1 t + \mu^0, \quad (3.21)$$

де μ^1, μ^0 — довільні константи. Порівнюючи з третім рівнянням із (3.12), маємо

$$\mu^1 = -2m_2 t + \lambda_0^2 - 2m_3 + m_1, \quad (3.22)$$

звідки після диференціювання за змінною t отримаємо

$$\lambda_{00}^2 = 2m_2,$$

іншими словами,

$$\lambda^2 = m_2 t^2 + m_{15} t + m_{16}.$$

Підставляючи щойно наведений вираз у (3.22), одержимо

$$\mu^1 = -2m_2 t + 2m_2 t + m_{15} - 2m_3 + m_1,$$

звідки слідує, що $m_{15} = \mu^1 + 2m_3 - m_1$, тобто

$$\lambda^2 = m_2 t^2 + (\mu^1 + 2m_3 - m_1)t + m_{16}. \quad (3.23)$$

Підстановка (3.23) в друге рівняння системи (3.12) приводить до рівняння

$$\lambda_0^5 + (m_2 t + (m_3 - \mu^1))H + (-3m_2 t + (2m_1 - 3m_3))u_{11}H' = 0. \quad (3.24)$$

Після диференціювання двічі за змінною t отримаємо $\lambda_{000}^5 = 0$, що свідчить про те, що функція λ^5 — квадратична, тобто,

$$\lambda^5 = m_{17} t^2 + m_{18} t + m_{19}.$$

Підставимо цей вираз назад у рівняння (3.24), одержимо

$$\begin{aligned} & 2m_{17} t + m_{18} + (m_2 t + (m_3 - \mu^1))H \\ & + (-3m_2 t + (2m_1 - 3m_3))u_{11}H' = 0. \end{aligned}$$

Розщеплюючи за змінною t , приходимо до системи:

$$\begin{aligned} & 2m_{17} + m_2 H - 3m_2 u_{11} H' = 0, \\ & m_{18} + (m_3 - \mu^1)H + (2m_1 - 3m_3)u_{11}H' = 0. \end{aligned} \quad (3.25)$$

Підставимо тепер функції λ^5 і λ^2 в перше рівняння (3.12):

$$\begin{aligned} & (m_{17} t^2 + m_{18} t + m_{19} - \lambda_0^4) - (m_2 t^2 + (\mu^1 + 2m_3 - m_1)t + m_{16})H \\ & + 3(m_2 t^2 + (\mu^1 + 2m_3 - m_1)t + m_{16})u_{11}H' = 0. \end{aligned} \quad (3.26)$$

Диференціювання тричі за змінною t показує, що $\lambda_{0000}^4 = 0$, що свідчить про те, що функція λ^4 — кубічна. Отже,

$$\lambda^4 = m_{20} t^3 + m_{21} t^2 + m_{22} t + m_{23}.$$

Підставляючи функцію λ^4 назад у рівняння (3.26), маємо

$$\begin{aligned} & (m_{17}t^2 + m_{18}t + m_{19} - 3m_{20}t^2 - 2m_{21}t - m_{22}) \\ & - (m_2t^2 + (\mu^1 + 2m_3 - m_1)t + m_{16})H \\ & + 3(m_2t^2 + (\mu^1 + 2m_3 - m_1)t + m_{16})u_{11}H' = 0. \end{aligned}$$

Розщеплюючи за змінною t , одержуємо таку систему:

$$\begin{aligned} & (m_{17} - 3m_{20}) - m_2H + 3m_2u_{11}H' = 0, \\ & (m_{18} - 2m_{21}) - (\mu^1 + 2m_3 - m_1)H + 3(\mu^1 + 2m_3 - m_1)u_{11}H' = 0, \\ & (m_{19} - m_{22}) - m_{16}H + 3m_{16}u_{11}H' = 0. \end{aligned} \quad (3.27)$$

Бачимо, що всі ці рівняння мають загальний вигляд (2.27) із деякими сталими параметрами a , b , c і d . З точністю до еквівалентності, визначеної в теоремі 3.1, існує тільки три можливості для розв'язків рівняння (2.27), а саме, $e^{u_{11}}$, $\ln(u_{11})$ і u_{11}^p , де $p \neq 0, 1$.

Якщо $H = e^{u_{11}}$, то маємо

$$\xi^0 = \mu^0, \quad \xi^1 = m_{19}t + m_{23}, \quad \eta = m_{19}.$$

Таким чином, у випадку функції $H = e^{u_{11}}$ отримуємо максимальну алгебру лівської інваріантності з теореми 3.2.

Якщо $H = \ln(u_{11})$, то

$$\begin{aligned} \xi^0 &= \mu^1t + \mu^0, \quad \xi^1 = 2\mu^1x - \frac{3}{2}\mu^1t^2 + m_{19}t + m_{23}, \\ \eta &= \mu^1u - 3\mu^1t + m_{19}. \end{aligned}$$

За умови $H = \ln(u_{11})$ базис максимальної алгебри лівської інваріантності задається наступними векторними полями:

$$\begin{aligned} Q^1 &= \partial_t, \quad Q^2 = \partial_x, \quad Q^3 = t\partial_x + \partial_u, \\ Q^4 &= t\partial_t + (2x - \frac{3}{2}t^2)\partial_x + (u - 3t)\partial_u. \end{aligned}$$

Якщо $H = u_{11}^p$, $p \neq 0, 1$, то із систем (3.25) і (3.27) отримуємо

$$\begin{aligned} & 2m_{17} + m_2u_{11}^p - 3m_2pu_{11}^p = 0, \\ & m_{18} + (m_3 - \mu^1)u_{11}^p + (2m_1 - 3m_3)pu_{11}^p = 0, \\ & (m_{17} - 3m_{20}) - m_2u_{11}^p + 3m_2pu_{11}^p = 0, \\ & (m_{18} - 2m_{21}) - (\mu^1 + 2m_3 - m_1)u_{11}^p + 3(\mu^1 + 2m_3 - m_1)pu_{11}^p = 0, \\ & (m_{19} - m_{22}) - m_{16}u_{11}^p + 3m_{16}pu_{11}^p = 0. \end{aligned} \quad (3.28)$$

При розщепленні цієї системи за u_{11} отримуємо такі обмеження на сталі:

$$m_{17} = 0, \quad m_{18} = 0, \quad m_{20} = 0, \quad m_{21} = 0, \quad m_{19} = m_{22}.$$

Далі, якщо $p \neq \frac{1}{3}$, то маємо ще наступні обмеження:

$$m_2 = 0, \quad m_{16} = 0, \quad \mu^1 = m_1 - 2m_3, \quad (3 - 3p)m_3 + (2p - 1)m_1 = 0.$$

Останні дві рівності можна переписати таким чином:

$$m_1 = \frac{(3p - 3)m_3}{2p - 1}, \quad \mu^1 = \frac{p + 1}{1 - 2p}m_3.$$

У цьому випадку компоненти векторного поля Q мають наступний вигляд:

$$\xi^0 = \frac{p + 1}{1 - 2p}m_3t + \mu^0, \quad \xi^1 = \frac{2 - p}{1 - 2p}m_3x + m_{19}t + m_{23}, \quad \eta = m_3u + m_{19}.$$

Нижче наведений базис максимальної алгебри лівівської інваріантності для $H = u_{11}^p$, $p \neq 0, \frac{1}{3}, 1$:

$$\begin{aligned} Q^1 &= \partial_t, \quad Q^2 = \partial_x, \quad Q^3 = t\partial_x + \partial_u, \\ Q^4 &= (p + 1)t\partial_t + (2 - p)x\partial_x + (1 - 2p)u\partial_u. \end{aligned}$$

Зауваження 3.1. Якщо $p = -1$, то в цьому випадку проєкція алгебри вищенаведених векторних полів на t -компоненту матиме розмірність 1, але цей випадок включено тут для повноти розгляду степеневі нелінійності.

За умови $p = \frac{1}{3}$ маємо лише наступне обмеження:

$$\mu^1 = \frac{2}{3}m_1.$$

Отже, у випадку $H = u_{11}^{1/3}$ компоненти векторного поля Q такі:

$$\begin{aligned} \xi^0 &= \frac{2}{3}m_1t + \mu^0, \\ \xi^1 &= (m_2t^2 + (2m_3 - \frac{1}{3}m_1)t + m_{16})u \\ &\quad + ((-m_2t + m_1 - m_3)x + m_{19}t + m_{23}), \\ \eta &= (m_2t + m_3)u + (-m_2x + m_{19}). \end{aligned}$$

З точністю до лінійних замін одержуємо наступний базис максимальної алгебри лівівської інваріантності:

$$\begin{aligned} Q^1 &= \partial_t, \quad Q^2 = \partial_x, \quad Q^3 = t\partial_x + \partial_u, \quad Q^4 = 4t\partial_t + 5x\partial_x + u\partial_u, \\ Q^5 &= u\partial_x, \quad Q^6 = (2tu - x)\partial_x + u\partial_u, \quad Q^7 = (tu - x)(t\partial_x + \partial_u). \end{aligned}$$

$k = 1$. У цьому випадку

$$\xi^0 = \mu^0, \tag{3.29}$$

де μ^0 — довільна константа. Порівнюючи з третім рівнянням із (3.12), маємо

$$0 = -2m_2t + \lambda_0^2 - 2m_3 + m_1, \quad (3.30)$$

звідки після диференціювання за змінною t отримаємо $\lambda_{00}^2 = 2m_2$, іншими словами,

$$\lambda^2 = m_2t^2 + m_{23}t + m_{24}.$$

Підставляючи щойно наведений вираз у (3.30), одержимо

$$0 = -2m_2t + 2m_2t + m_{23} - 2m_3 + m_1,$$

звідки слідує, що $m_{23} = 2m_3 - m_1$, тобто

$$\lambda^2 = m_2t^2 + (2m_3 - m_1)t + m_{24}. \quad (3.31)$$

Після підстановки (3.31) у друге рівняння системи (3.12) маємо

$$\lambda_0^5 + (m_2t + m_3)H + (-3m_2t + (2m_1 - 3m_3))u_{11}H' = 0. \quad (3.32)$$

Після диференціювання двічі за змінною t отримаємо $\lambda_{000}^5 = 0$, що свідчить про те, що функція λ^5 — квадратична, тобто

$$\lambda^5 = m_{25}t^2 + m_{26}t + m_{27}.$$

Підставимо цей вираз назад у рівняння (3.32), одержимо

$$2m_{25}t + m_{26} + (m_2t + m_3)H + (-3m_2t + (2m_1 - 3m_3))u_{11}H' = 0.$$

Розщеплюючи за змінною t , приходимо до системи:

$$\begin{aligned} 2m_{25} + m_2H - 3m_2u_{11}H' &= 0, \\ m_{26} + m_3H + (2m_1 - 3m_3)u_{11}H' &= 0. \end{aligned} \quad (3.33)$$

Підставимо тепер функції λ^5 і λ^2 у перше рівняння системи (3.12):

$$\begin{aligned} (m_{25}t^2 + m_{26}t + m_{27} - \lambda_0^4) - (m_2t^2 + (2m_3 - m_1)t + m_{24})H \\ + 3(m_2t^2 + (2m_3 - m_1)t + m_{24})u_{11}H' = 0. \end{aligned} \quad (3.34)$$

Диференціювання тричі за змінною t показує, що $\lambda_{0000}^4 = 0$, що свідчить про те, що функція λ^4 — кубічна. Отже,

$$\lambda^4 = m_{28}t^3 + m_{29}t^2 + m_{30}t + m_{31}.$$

Підставляючи функцію λ^4 назад у рівняння (3.34), маємо

$$\begin{aligned} (m_{25}t^2 + m_{26}t + m_{27} - 3m_{28}t^2 - 2m_{29}t - m_{30}) \\ - (m_2t^2 + (2m_3 - m_1)t + m_{24})H \\ + 3(m_2t^2 + (2m_3 - m_1)t + m_{24})u_{11}H' = 0. \end{aligned}$$

Розщеплюючи за змінною t , одержуємо таку систему:

$$(m_{25} - 3m_{28}) - m_2H + 3m_2u_{11}H' = 0,$$

$$\begin{aligned}(m_{26} - 2m_{29}) - (2m_3 - m_1)H + 3(2m_3 - m_1)u_{11}H' &= 0, \\ (m_{27} - m_{30}) - m_{24}H + 3m_{24}u_{11}H' &= 0.\end{aligned}\quad (3.35)$$

Бачимо, що всі ці рівняння мають загальний вигляд (2.27) із деякими сталими параметрами a, b, c і d . З точністю до еквівалентності, визначеної в теоремі 3.1, існує тільки три можливості для розв'язків рівняння (2.27), а саме, $e^{u_{11}}$, $\ln(u_{11})$ і u_{11}^p , де $p \neq 0, 1$.

Якщо $H = e^{u_{11}}$, то із систем (3.33) і (3.35) одержуємо

$$\xi^0 = \mu^0, \quad \xi^1 = m_{27}t + m_{31}, \quad \eta = m_{27}.$$

Отже, у випадку функції $H = e^{u_{11}}$ отримуємо максимальну алгебру ліівської інваріантності з теореми 3.2.

Якщо $H = \ln(u_{11})$, то із систем (3.33) і (3.35) отримуємо

$$\xi^0 = \mu^0, \quad \xi^1 = m_{27}t + m_{31}, \quad \eta = m_{27}.$$

Таким чином, за умови $H = \ln(u_{11})$ базис максимальної алгебри ліівської інваріантності визначається випадком $k = 2$.

Якщо $H = u_{11}^p$, $p \neq 0, 1$, то із систем (3.33) і (3.35) отримуємо

$$\begin{aligned}2m_{25} + m_2 u_{11}^p - 3m_2 p u_{11}^p &= 0, \\ m_{26} + m_3 u_{11}^p + (2m_1 - 3m_3) p u_{11}^p &= 0, \\ (m_{25} - 3m_{28}) - m_2 u_{11}^p + 3m_2 p u_{11}^p &= 0, \\ (m_{26} - 2m_{29}) - (2m_3 - m_1) u_{11}^p + 3(2m_3 - m_1) p u_{11}^p &= 0, \\ (m_{27} - m_{30}) - m_{24} u_{11}^p + 3m_{24} p u_{11}^p &= 0.\end{aligned}\quad (3.36)$$

Після розщеплення цієї системи за u_{11} отримуємо наступні обмеження на сталі: $m_{25} = 0$, $m_{26} = 0$, $m_{28} = 0$, $m_{29} = 0$, $m_{27} = m_{30}$. Далі, якщо $p \neq \frac{1}{3}$, то з першого й п'ятого рівнянь системи (3.36) маємо ще наступні обмеження: $m_2 = 0$, $m_{24} = 0$. Якщо $p \neq -1$, то з другого й четвертого рівнянь системи (3.36) маємо ще наступні обмеження: $m_1 = 0$, $m_3 = 0$.

Таким чином, при $p \neq \frac{1}{3}, -1$ компоненти векторного поля Q мають наступний вигляд:

$$\xi^0 = \mu^0, \quad \xi^1 = m_{27}t + m_{31}, \quad \eta = m_{27}.$$

Отже, базис максимальної алгебри ліівської інваріантності визначається випадком $k = 2$.

Якщо $p = \frac{1}{3}$, то базис максимальної алгебри ліівської інваріантності також визначається випадком $k = 2$.

Якщо $p = -1$, то $m_1 = 2m_3$, й отримуємо частинний випадок для степеневі нелінійності (див. зауваження 3.1).

Отримані результати підсумовано в наступному твердженні.

Теорема 3.3 (результат групової класифікації, [1]). *Повний список $G^\sim$ -нееквівалентних (максимальних) розширень ліївських симетрій у класі (3.1) вичерпують такі випадки, які наведено в таблиці 3.1.*

ТАБЛИЦЯ 3.1. Результати групової класифікації класу (3.1).

$H(u_{xx})$	Ліївська алгебра інваріантності
$\forall$	$\langle \partial_t, \partial_x, t\partial_x + \partial_u \rangle$
$\ln u_{xx}$	$\langle \partial_t, \partial_x, t\partial_x + \partial_u, t\partial_t + (2x - \frac{3}{2}t^2)\partial_x + (u - 3t)\partial_u \rangle$
u_{xx}	$\langle \partial_t, \partial_x, t\partial_x + \partial_u, 2t\partial_t + x\partial_x - u\partial_u, t^2\partial_t + tx\partial_x + (x - tu)\partial_u \rangle$
$u_{xx}^p, p \neq 0, \frac{1}{3}, 1$	$\langle \partial_t, \partial_x, t\partial_x + \partial_u, (p+1)t\partial_t + (2-p)x\partial_x + (1-2p)u\partial_u \rangle$
$u_{xx}^{1/3}$	$\langle \partial_t, \partial_x, t\partial_x + \partial_u, 4t\partial_t + 5x\partial_x + u\partial_u, u\partial_x, (2tu - x)\partial_x + u\partial_u, (tu - x)(t\partial_x + \partial_u) \rangle$

Третій випадок таблиці відповідає добре відомому рівнянню Бюргерса $u_t + uu_x = u_{xx}$, яке допускає п'ятивимірну алгебру максимальної ліївської інваріантності.

4. ВИСНОВКИ

Вперше задача групової класифікації цих рівнянь була розв'язана у рамках класичного інфінітезимального підходу у роботах Ахатова–Газізова–Ібрагімова та Бойко–Фушича відповідно. Ці доведення були досить громіздкими. Завдяки застосуванню деяких алгебраїчних технік вдалося не лише перевірити та підтвердити достовірність результатів, отриманих раніше в рамках класичного інфінітезимального підходу, але й значно спростити технічні викладки. В обох випадках принциповим кроком було суттєве спрощення доведення із застосуванням алгебраїчного підходу, який полягав в аналізі придатних алгебр ліївської інваріантності. Спочатку був використаний відомий результат, згідно з яким для довільного векторного поля, яке допускається еволюційним рівнянням, його t -компонента залежить лише від змінної t . Після цього був проведений аналіз розмірності проєкції алгебри на цю t -компоненту з використанням класичної теореми Лі про реалізації алгебр Лі векторними полями на прямій.

ЛІТЕРАТУРА

- [1] В. І. Фущич, В. М. Бойко. Галілей-інваріантні рівняння типу Бюргерса та Кортевега–де Фріза високого порядку. *Укр. матем. ж.*, 48(12):1589–1601, 1996. URL: <https://umj.imath.kiev.ua/index.php/umj/article/view/5182>.
- [2] В. М. Бойко, Р. О. Попович. Групова класифікація галілей-інваріантних рівнянь високого порядку. volume 36, pages 45–50. 2001. URL: <https://www.imath.kiev.ua/~boyko/collection2001slava.pdf>.
- [3] В. М. Бойко. Узагальнені оператори Казіміра, сингулярні модулі редукції та симетрії диференціальних рівнянь, 2018. URL: <https://www.imath.kiev.ua/~boyko/BoykoThesis.pdf>.
- [4] О. В. Локазіук. Реалізації алгебр Лі на прямій та групова класифікація диференціальних рівнянь, 2022. URL: https://events.imath.kiev.ua/event/1353/attachments/104/296/Lokaziuk_OV_thesis_PhD_2022.pdf.
- [5] I. Sh. Akhatov, R. K. Gazizov, N. Kh. Ibragimov. Nonlocal symmetries. A heuristic approach. *J. Soviet Math.*, 5(1):1401–1450, 1991.
- [6] A. Bihlo, R. O. Popovych. Group classification of linear evolution equations. *J. Math. Anal. Appl.*, 448(2):982–1005, 2017. arXiv:1605.09251, doi:10.1016/j.jmaa.2016.11.020.
- [7] G. W. Bluman, S. Kumei. *Symmetries and differential equations*, volume 81 of *Applied Mathematical Sciences*. Springer, New York, 1989. doi:10.1007/978-1-4757-4307-4.
- [8] V. M. Boyko. On new generalizations of the Burgers and Korteweg–de Vries equations. In *Symmetry in nonlinear mathematical physics, Vol. 1, 2 (Kyiv, 1997)*, pages 122–129. Natl. Acad. Sci. Ukraine, Inst. Math., Kyiv, 1997.
- [9] V. M. Boyko, O. V. Lokaziuk, R. O. Popovych. Realizations of Lie algebras on the line and the new group classification of $(1 + 1)$ -dimensional generalized nonlinear Klein-Gordon equations. *Anal. Math. Phys.*, 11(3):article no. 127, 38 pp., 2021. arXiv:2008.05460, doi:10.1007/s13324-021-00550-z.
- [10] V. M. Boyko, O. V. Lokaziuk, R. O. Popovych. Admissible transformations and Lie symmetries of linear systems of second-order ordinary differential equations. *J. Math. Anal. Appl.*, 539(2):article no. 128543, 51 pp., 2024. arXiv:2024.12854, doi:10.1016/j.jmaa.2024.128543.
- [11] V. M. Boyko, R. O. Popovych, N. M. Shapoval. Equivalence groupoids of classes of linear ordinary differential equations and their group classification. *J. Phys. Conf. Ser.*, 621:Paper No. 012001, 17, 2015. URL: <https://doi.org/10.1088/1742-6596/621/1/012002>, doi:10.1016/j.jmaa.2024.128543.
- [12] W. I. Fushchich, A. G. Nikitin. *Symmetries of equations of quantum mechanics*. Allerton Press, Inc., New York, 1994.
- [13] W. I. Fushchich, W. M. Shtelen, N. I. Serov. *Symmetry analysis and exact solutions of equations of nonlinear mathematical physics*, volume 246 of *Mathematics and its Applications*. Kluwer Academic Publishers Group, Dordrecht, 1993. doi:10.1007/978-94-017-3198-0.
- [14] N. H. Ibragimov. *A practical course in differential equations and mathematical modelling. Classical and new methods, nonlinear mathematical models, symmetry and invariance principles*. Higher Education Press, Beijing, 2010.
- [15] J. G. Kingston. On point transformations of evolution equations. *J. Phys. A*, 24(14):L769–L774, 1991. doi:10.1088/0305-4470/24/14/003.

- [16] S. D. Koval, R. O. Popovych. Point and generalized symmetries of the heat equation revisited. *J. Math. Anal. Appl.*, 527(2):article no. 127430, 21 pp., 2023. arXiv:2023.12743, doi:10.1016/j.jmaa.2023.127430.
- [17] C. Kurujyibwami, P. Basarab-Horwath, R. O. Popovych. Algebraic method for group classification of $(1 + 1)$ -dimensional linear Schrödinger equations. *Acta Appl. Math.*, 157:171–203, 2018. arXiv:1607.04118, doi:10.1007/s10440-018-0169-y.
- [18] C. Kurujyibwami, R. O. Popovych. Equivalence groupoids and group classification of multidimensional nonlinear Schrödinger equations. *J. Math. Anal. Appl.*, 491(1):article no. 124271, 35 pp., 2020. arXiv:2020.12427, doi:10.1016/j.jmaa.2020.124271.
- [19] S. Lie. Theorie der Transformationsgruppen I. *Math. Ann.*, 16(4):441–528, 1880. doi:10.1007/BF01446218.
- [20] B. A. Magadeev. Group classification of nonlinear evolution equations. *St. Petersburg Math. J.*, 5(2):345–359, 1994.
- [21] P. J. Olver. *Applications of Lie groups to differential equations*, volume 107 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer, New York, 1993. doi:10.1007/978-1-4612-4350-2.
- [22] P. J. Olver. *Equivalence, invariants, and symmetry*. Cambridge University Press, Cambridge, 1995. doi:10.1017/CBO9780511609565.
- [23] S. Opanasenko, A. Bihlo, R. O. Popovych. Group analysis of general Burgers-Korteweg–de Vries equations. *J. Math. Phys.*, 58(8):article no. 081511, 37 pp., 2017. arXiv:1703.06932, doi:10.1063/1.4997574.
- [24] V. V. Sokolov. Symmetries of evolution equations. *Russian Math. Surveys*, 43(5):165–204, 1988. doi:10.1070/RM1988v043n05ABEH001927.
- [25] R. Zhdanov. On relation between potential and contact symmetries of evolution equations. *J. Math. Phys.*, 50(5):article no. 053522, 9 pp., 2009. doi:10.1063/1.3138147.

C. Т. Гупака

DEPARTMENT OF MATHEMATICAL AND STATISTICAL SCIENCES, UNIVERSITY OF ALBERTA,
EDMONTON, ALBERTA, T6G 2G1 CANADA

Email: sophiahuraka@gmail.com

ORCID: 0009-0002-8655-0478

О. В. Локазюк

ІНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ НАН УКРАЇНИ, М. КИЇВ

Email: sasha.lokazuik@gmail.com

ORCID: 0000-0001-9663-251X

Залежність ефективних властивостей від регулярних збурень

М. Далла Ріва, П. Луцціні, П. Мусоліно, Р. Пухтаєвич

Abstract. In this review, we present some of our results on the behavior of the effective properties in the presence of perturbations of the geometric and physical parameters. We will first show that the average longitudinal flow of a Newtonian fluid flowing at low Reynolds numbers around a periodic array of cylinders depends analytically on the perturbations of the periodicity structure and the cross section of the cylinders. Next, we will show the analytical dependence of the effective conductivity of a periodic two-phase composite with ideal and non-ideal contacts at the interface on the perturbations of the shape of the inclusions, the periodicity structure, and the conductivity of each material.

Анотація. У цьому огляді ми представляємо деякі наші результати щодо поведінки ефективних властивостей за наявності збурень геометричних і фізичних параметрів. Ми спочатку покажемо, що середній поздовжній потік ньютонівської рідини, що тече з низькими числами Рейнольдса навколо періодичного масиву циліндрів, аналітично залежить від збурень структури періодичності та поперечного перерізу циліндрів. Далі ми покажемо аналітичну залежність ефективної провідності періодичного двофазного композиту з ідеальним і неідеальним контактами на межі від збурень форми включень, структури періодичності та провідності кожного матеріалу.

1. ВСТУП

У статті представлені нещодавні результати щодо впливу збурень геометрії та фізичних параметрів на ефективні властивості. Спочатку розглядається випадок ньютонівської рідини, що тече при низьких числах Рейнольдса навколо періодичного масиву циліндрів і показано, що середнє значення поздовжньої складової швидкості потоку аналітично залежить від збурень структури періодичності та поперечного перерізу циліндрів (див. [7, 9]).

2020 *Mathematics Subject Classification*: 35J25, 35J05, 31B10, 45A05, 74E30, 74G10, 74M15

Ключові слова: longitudinal flow, periodic composite, effective conductivity, transmission problem, perturbed domain, integral equations

DOI: <https://doi.org/10.3842/trim.v21n1.540>

Далі розглядаються теплові властивості двофазних композитів із періодичними включеннями в однорідній матриці. Показано, що ефективна провідність аналітично залежить від збурень форми включень, структури періодичності та провідності матеріалів. Представлено результати для ідеального [8] та неідеального контактів на межі [4].

Середній поздовжній потік та ефективна провідність визначаються як функціонали розв'язків періодичних крайових задач, які ми формуємо в областях, форма яких залежить від певних параметрів збурення. Для їх дослідження ми перетворюємо крайові задачі в системи інтегральних рівнянь на межі цих областей, а потім через зміну змінних переводимо їх на межі фіксованих множин. Далі, за допомогою теореми про неявну функцію для аналітичних відображень у банахових просторах виводяться результати про аналітичну залежність розв'язків, що дає необхідні характеристики ефективних властивостей. Під «аналітичним» завжди мається на увазі "дійсно аналітичний".

Також варто зазначити, що на відміну від багатьох існуючих методів у літературі, які застосовуються до періодичних структур зі специфічними формами (наприклад, дво- чи тривимірні періодичні масиви кругів/сфер або еліпсів/еліпсоїдів), наш метод можна застосовувати до довільних форм за умови дотримання певних припущень щодо регулярності. Крім того, результати щодо аналітичності, які ми отримуємо, передбачають диференційованість відносно параметрів, а тому можна обчислити відповідні похідні з метою характеристики критичних конфігурацій.

Стаття організована наступним чином. У Розділі 2 ми вводимо геометричні позначення розглянутих періодичних структур. Розділ 3 містить результат щодо середнього поздовжнього потоку вздовж періодичного масиву циліндрів. У Розділі 4 та Розділі 5 ми представляємо результат щодо ефективної провідності двофазного періодичного композиту з умовою ідеального та неідеального контактів відповідно.

2. ГЕОМЕТРИЧНІ ПОЗНАЧЕННЯ

Позначимо через $n \in \{2, 3\}$ і $\{e_1, \dots, e_n\}$ розмірність і канонічний базис простору $\mathbb{R}^n$. Якщо $q_{11}, \dots, q_{nn} \in]0, +\infty[$, то ми будемо використовувати наступне позначення:

$$q = \begin{cases} \begin{pmatrix} q_{11} & 0 \\ 0 & q_{22} \end{pmatrix}, & \text{якщо } n = 2, \\ \begin{pmatrix} q_{11} & 0 & 0 \\ 0 & q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & q_{33} \end{pmatrix}, & \text{якщо } n = 3 \end{cases} \quad (2.1)$$

i

$$Q \equiv \prod_{j=1}^n (0, q_{jj}) \subseteq \mathbb{R}^n. \quad (2.2)$$

Множина Q є періодичною коміркою, тоді як q є діагональною матрицею, що включає інформацію про періодичність. Очевидно, що $|Q|_n \equiv \prod_{j=1}^n q_{jj}$ є мірою комірки Q , а $q\mathbb{Z}^n \equiv \{qz : z \in \mathbb{Z}^n\}$ — це множина вершин періодичного поділу $\mathbb{R}^n$, що відповідає комірці Q . Крім того, покладемо $\tilde{Q} \equiv]0, 1[^n$.

Нехай $\mathbb{D}_n(\mathbb{R})$ — простір $n \times n$ діагональних матриць з дійсними елементами, а $\mathbb{D}_n^+(\mathbb{R})$ — множина елементів з $\mathbb{D}_n(\mathbb{R})$ з діагональними елементами в $]0, +\infty[$. Якщо Ω_Q є підмножиною $\mathbb{R}^n$, такою що $\overline{\Omega_Q} \subseteq Q$, ми визначаємо наступні дві періодичні області: $\mathbb{S}_q[\Omega_Q] \equiv \bigcup_{z \in \mathbb{Z}^n} (qz + \Omega_Q)$, $\mathbb{S}_q[\Omega_Q]^- \equiv \mathbb{R}^n \setminus \overline{\mathbb{S}_q[\Omega_Q]}$. Символ ‘ $\bar{\cdot}$ ’ позначає замикання множини.

Якщо u є дійснозначною функцією, визначеною на $\mathbb{S}_q[\Omega_Q]$ або $\mathbb{S}_q[\Omega_Q]^-$, ми говоримо, що u є q -періодичною, якщо $u(x + qz) = u(x)$ для всіх $z \in \mathbb{Z}^n$ та для всіх x з області визначення u . Якщо $k \in \mathbb{N}$, покладемо

$$C_b^k(\overline{\mathbb{S}_q[\Omega_Q]^-}) \equiv \left\{ u \in C^k(\overline{\mathbb{S}_q[\Omega_Q]^-}) : D^\gamma u \text{ обмежена } \forall \gamma \in \mathbb{N}^n \text{ та } |\gamma| \leq k \right\}.$$

На $C_b^k(\overline{\mathbb{S}_q[\Omega_Q]^-})$ ми розглядаємо звичну норму

$$\|u\|_{C_b^k(\overline{\mathbb{S}_q[\Omega_Q]^-})} \equiv \sum_{|\gamma| \leq k} \sup_{x \in \overline{\mathbb{S}_q[\Omega_Q]^-}} |D^\gamma u(x)|, \quad \forall u \in C_b^k(\overline{\mathbb{S}_q[\Omega_Q]^-}),$$

де $|\gamma| \equiv \sum_{i=1}^n \gamma_i$ позначає довжину мультиіндексу $\gamma \equiv (\gamma_1, \dots, \gamma_n) \in \mathbb{N}^n$. Крім того, якщо $\beta \in]0, 1]$, ми покладемо

$$C_b^{k,\beta}(\overline{\mathbb{S}_q[\Omega_Q]^-}) \equiv \left\{ u \in C_b^{k,\beta}(\overline{\mathbb{S}_q[\Omega_Q]^-}) : D^\gamma u \text{ обмежена } \forall \gamma \in \mathbb{N}^n \text{ та } |\gamma| \leq k \right\},$$

а на $C_b^{k,\beta}(\overline{\mathbb{S}_q[\Omega_Q]^-})$ ми розглядаємо звичну норму

$$\|u\|_{C_b^{k,\beta}(\overline{\mathbb{S}_q[\Omega_Q]^-})} \equiv \sum_{|\gamma| \leq k} \sup_{x \in \overline{\mathbb{S}_q[\Omega_Q]^-}} |D^\gamma u(x)| + \sum_{|\gamma|=k} |D^\gamma u : \overline{\mathbb{S}_q[\Omega_Q]^-}|_\beta \quad \forall u \in C_b^{k,\beta}(\overline{\mathbb{S}_q[\Omega_Q]^-}),$$

де $|D^\gamma u : \overline{\mathbb{S}_q[\Omega_Q]^-}|_\beta$ позначає β -Гельдерівську константу $D^\gamma u$ (див. наприклад, Гілбарг і Трудінгер [6] для визначення множин і функцій класу Шаудера $C^{k,\beta}$). Тоді, $C_b^k(\overline{\mathbb{S}_q[\Omega_Q]^-})$ - банаховий підпростір $C_b^k(\overline{\mathbb{S}_q[\Omega_Q]^-})$, визначений як $C_b^k(\overline{\mathbb{S}_q[\Omega_Q]^-}) \equiv \left\{ u \in C_b^k(\overline{\mathbb{S}_q[\Omega_Q]^-}) : u \text{ є } q\text{-періодичною} \right\}$,

а $C_q^{k,\beta}(\overline{\mathbb{S}_q[\Omega_Q]^-})$ - банаховий підпростір $C_b^{k,\beta}(\overline{\mathbb{S}_q[\Omega_Q]^-})$, визначену як

$$C_q^{k,\beta}(\overline{\mathbb{S}_q[\Omega_Q]^-}) \equiv \left\{ u \in C_b^{k,\beta}(\overline{\mathbb{S}_q[\Omega_Q]^-}) : u \in q\text{-періодичною} \right\}.$$

Простори $C_b^k(\overline{\mathbb{S}_q[\Omega_Q]})$, $C_b^{k,\beta}(\overline{\mathbb{S}_q[\Omega_Q]})$, $C_q^k(\overline{\mathbb{S}_q[\Omega_Q]})$ і $C_q^{k,\beta}(\overline{\mathbb{S}_q[\Omega_Q]})$ можуть бути визначені аналогічним чином.

Ми позначаємо через ν_{Ω_Q} одиничну зовнішню нормаль до $\partial\Omega_Q$, а через $d\sigma$ — елемент площі на $\partial\Omega_Q$. Ми зберігаємо стандартні позначення для простору Лебега $L^1(\partial\Omega_Q)$ функцій, інтегрованих за Лебегом. Позначимо через $|\partial\Omega_Q|_{n-1}$ $(n-1)$ -вимірну міру $\partial\Omega_Q$.

Тепер ми вводимо збурення форми. Щоб розглядати області змінної форми, ми фіксуємо множину та розглядаємо клас дифеоморфізмів, що діють на її межі. Тоді збурення дифеоморфізму можна розглядати як збурення області. З цією метою ми фіксуємо наступне

Нехай $\alpha \in]0, 1[$ і нехай Ω є обмеженою відкритою зв'язною підмножиною $\mathbb{R}^n$ класу $C^{1,\alpha}$ такою що $\mathbb{R}^n \setminus \overline{\Omega}$ є зв'язною. (2.3)

Ми позначаємо через $\mathcal{A}_{\partial\Omega}$ множину функцій класу $C^1(\partial\Omega, \mathbb{R}^n)$, які є ін'єктивними та у яких диференціал є ін'єктивним в усіх точках $\partial\Omega$. Тоді нам зручно позначити через $\mathcal{A}_{\partial\Omega}^{\tilde{Q}} \equiv \{\phi \in \mathcal{A}_{\partial\Omega} : \phi(\partial\Omega) \subseteq \tilde{Q}\}$ множину дифеоморфізмів з $\mathcal{A}_{\partial\Omega}$, образ яких міститься у $\tilde{Q}$ (див. Рисунок 2.1).

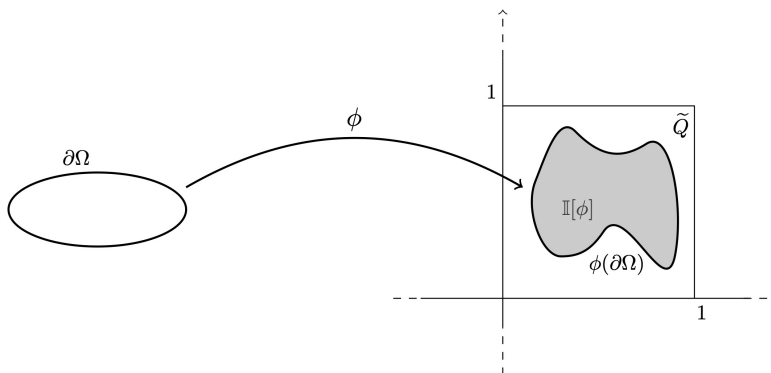
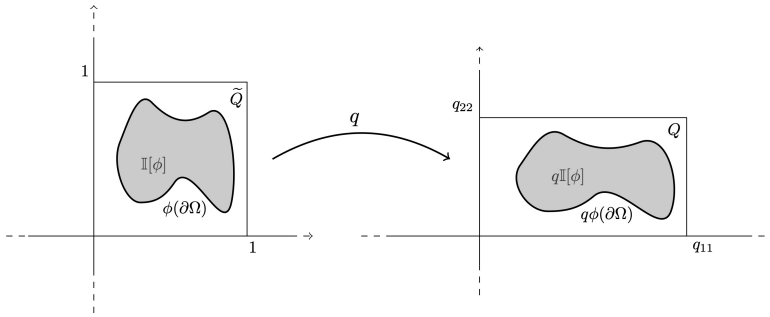
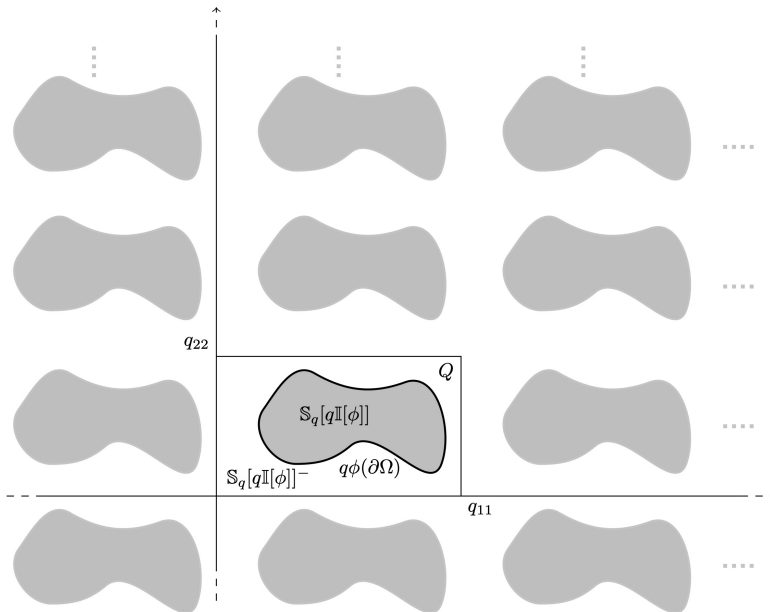


Рис. 2.1. Дифеоморфізм $\phi \in \mathcal{A}_{\partial\Omega}^{\tilde{Q}}$ в $\mathbb{R}^2$.

Якщо $\phi \in \mathcal{A}_{\partial\Omega}^{\tilde{Q}}$, то $\mathbb{R}^n \setminus \phi(\partial\Omega)$ має рівно дві відкриті зв'язні компоненти, і ми позначаємо обмежену з них як $\mathbb{I}[\phi]$. Очевидно, що множина $q\mathbb{I}[\phi] = \{qx : x \in \mathbb{I}[\phi]\}$ міститься у періодичній комірці Q (див. Рисунок 2.2).

Рис. 2.2. Перетворення викликане q в $\mathbb{R}^2$.

Тоді $\mathbb{S}_q[q\mathbb{I}[\phi]]$ та $\mathbb{S}_q[q\mathbb{I}[\phi]]^-$ є двома необмеженими та періодичними множинами, які залежать від (q, ϕ) і моделюють періодичну структуру об'єктів, розглянутих у цій статті (див. Рисунок 2.3). Якщо ми змінюємо елементи q , це призведе до зміни періодичності наборів. Натомість, зміна ϕ викликає зміни у формі періодичних включень.

Рис. 2.3. Множини $\mathbb{S}_q[q\mathbb{I}[\phi]]^-$, $\mathbb{S}_q[q\mathbb{I}[\phi]]$, і $q\phi(\partial\Omega)$ в $\mathbb{R}^2$.

3. СЕРЕДНІЙ ПОЗДОВЖНИЙ ПОТІК ВЗДОВЖ ПЕРІОДИЧНОГО МАСИВУ ЦИЛІНДРІВ

Цей розділ присвячено поздовжньому потоку ньютонівської рідини, що тече при низьких числах Рейнольдса вздовж періодичного масиву циліндрів. Ми досліджуємо вплив збурень структури періодичності (періодична комірка є прямокутником який асоціюється з матрицею q) та форми поперечного перерізу циліндрів (визначається образом фіксованої області через дифеоморфізм ϕ). Оскільки поперечний переріз циліндра є двовимірним, у цьому розділі ми покладаємо $n = 2$.

Додатково припустивши, що градієнт тиску паралельний циліндрам, поле швидкості має лише одну ненульову компоненту. Тоді, інтегруючи поздовжню компоненту поля швидкості по фундаментальній комірці, для кожної пари (q, ϕ) ми визначаємо середнє значення поздовжньої компоненти швидкості потоку $\Sigma[q, \phi]$ (див. (3.2)). Зазначимо, що $\Sigma[q, \phi]$ є мірою кількості рідини, що тече через одну періодичну комірку, яку іноді називають поздовжньою проникністю масиву циліндрів (або її протилежністю, див., наприклад, Мітюшев та Адлер [10, 11]).

Тут нас цікавить залежність (середньої) поздовжньої швидкості від довжини сторін прямокутної комірки та форми поперечного перерізу циліндрів.

Якщо $q \in \mathbb{D}_2^+(\mathbb{R})$ та $\phi \in \mathcal{A}_{\partial\Omega}^{\tilde{Q}}$, то множина $\overline{\mathbb{S}_q[q\mathbb{I}[\phi]]} \times \mathbb{R}$ — нескінченний масив паралельних циліндрів. Натомість, множина $\mathbb{S}_q[q\mathbb{I}[\phi]]^- \times \mathbb{R}$ є областю, в якій ньютонівська рідина тече при низьких числах Рейнольдса. Ми припускаємо, що градієнт тиску, який призводить до руху, є постійним і паралельним до циліндрів. Як наслідок, використовуючи стандартний підхід, заснований на специфічній геометрії задачі, ми можемо перетворити систему Стокса в рівняння Пуассона для ненульової компоненти поля швидкості. Без втрати загальності ми можемо вважати, що в'язкість рідини та ненульова компонента градієнта тиску рівні одиниці. Відповідно, якщо $q \in \mathbb{D}_2^+(\mathbb{R})$ та $\phi \in \mathcal{A}_{\partial\Omega}^{\tilde{Q}}$, то задача зводиться до задачі Діріхле для рівняння Пуассона

$$\begin{cases} \Delta u = 1, & \text{в } \mathbb{S}_q[q\mathbb{I}[\phi]]^-, \\ u(x + qe_i) = u(x), & \forall x \in \overline{\mathbb{S}_q[q\mathbb{I}[\phi]]^-}, \forall i \in \{1, 2\}, \\ u(x) = 0, & \forall x \in \partial\mathbb{S}_q[q\mathbb{I}[\phi]]^-. \end{cases} \quad (3.1)$$

Задача (3.1) має єдиний розв'язок в просторі $C_q^{1,\alpha}(\overline{\mathbb{S}_q[q\mathbb{I}[\phi]]^-})$ і ми позначимо його як $u[q, \phi]$. З фізичної точки зору, функція $u[q, \phi]$ представляє ненульовий компонент векторного поля швидкості (див. Мітюшев та Адлер [10, §2]). Тоді ми можемо визначити $\Sigma[q, \phi]$ як інтеграл швидкості потоку $u[q, \phi]$ по періодичній комірці (див. Мітюшев та Адлер

[10, §3]), а саме

$$\Sigma[q, \phi] \equiv \frac{1}{|Q|_2} \int_{Q \setminus q\mathbb{I}[\phi]} u[q, \phi](x) dx \quad (3.2)$$

$$\forall (q, \phi) \in \mathbb{D}_2^+(\mathbb{R}) \times \left(C^{1,\alpha}(\partial\Omega, \mathbb{R}^2) \cap \mathcal{A}_{\partial\Omega}^{\tilde{Q}} \right).$$

В роботах [7, 9] ми досліджували властивості регулярності $\Sigma[q, \phi]$ як функції від (q, ϕ) . Серед інших результатів, ми довели, що відображення $(q, \phi) \mapsto \Sigma[q, \phi]$ є аналітичним, про що говорить наступна теорема.

Теорема 3.1. *Нехай α, Ω визначені в (2.3). Тоді відображення з*

$$\mathbb{D}_2^+(\mathbb{R}) \times \left(C^{1,\alpha}(\partial\Omega, \mathbb{R}^2) \cap \mathcal{A}_{\partial\Omega}^{\tilde{Q}} \right)$$

в $\mathbb{R}$, що відображає пару (q, ϕ) в $\Sigma[q, \phi]$, є аналітичним.

4. ЕФЕКТИВНА ПРОВІДНІСТЬ ПЕРІОДИЧНОГО ДВОХФАЗНОГО КОМПОЗИТУ З ІДЕАЛЬНИМИ УМОВАМИ КОНТАКТУ

У цьому розділі ми розглядаємо ефективну провідність n -вимірного періодичного двофазного композиту ($n \in \{2, 3\}$) з ідеальним контактом на межі. Композит отримується шляхом введення в однорідну матрицю періодичного набору включень достатньо гладких форм. Як матриця, так і множина включень, заповнені двома різними однорідними та ізотропними теплопровідними матеріалами з провідностями λ^- та λ^+ відповідно, де $(\lambda^+, \lambda^-) \in [0, +\infty]_*^2 \equiv [0, +\infty]^2 \setminus \{(0, 0)\}$. Граничний випадок матеріалу з нульовою провідністю відповідає тепловому ізолятору. Отже, ми припускаємо, що два матеріали не є одночасно ізоляторами. З іншого боку, якщо провідність наближається до $+\infty$, матеріал є ідеальним провідником.

Як відомо, можна визначити ефективну теплопровідність композиційного матеріалу, $\lambda^{\text{eff}, \text{id}}$, за допомогою розв'язку задачі передачі для рівняння Лапласа (див. Означення 4.1, Мітюшев, Обносков, Песецькая, Рогозін [12, §5]). Ефективну теплопровідність можна розглядати як теплопровідність однорідного матеріалу, чії глобальні характеристики теплопровідника є "еквівалентними" характеристикам композита.

З метою введення визначення ефективної провідності спочатку необхідно ввести сім'ю крайових задач для рівняння Лапласа. Якщо $q \in \mathbb{D}_n^+(\mathbb{R})$, $\phi \in C^{1,\alpha}(\partial\Omega, \mathbb{R}^n) \cap \mathcal{A}_{\partial\Omega}^{\tilde{Q}}$ і $(\lambda^+, \lambda^-) \in [0, +\infty]_*^2$, для кожного $j \in \{1, \dots, n\}$ ми розглянемо наступну задачу передачі для пари функцій $(u_j^+, u_j^-) \in C_{\text{loc}}^{1,\alpha}(\mathbb{S}_q[q\mathbb{I}[\phi]]) \times C_{\text{loc}}^{1,\alpha}(\mathbb{S}_q[q\mathbb{I}[\phi]]^-)$:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \Delta u_j^+ = 0 & \text{в } \mathbb{S}_q[q\mathbb{I}[\phi]], \\ \Delta u_j^- = 0 & \text{в } \mathbb{S}_q[q\mathbb{I}[\phi]]^-, \\ u_j^+(x + qe_h) = u_j^+(x) + \delta_{hj}q_{jj} & \forall x \in \overline{\mathbb{S}_q[q\mathbb{I}[\phi]]}, \quad \forall h \in \{1, \dots, n\}, \\ u_j^-(x + qe_h) = u_j^-(x) + \delta_{hj}q_{jj} & \forall x \in \overline{\mathbb{S}_q[q\mathbb{I}[\phi]]}^-, \quad \forall h \in \{1, \dots, n\}, \\ \lambda^+ \frac{\partial}{\partial \nu_{q\mathbb{I}[\phi]}} u_j^+ - \lambda^- \frac{\partial}{\partial \nu_{q\mathbb{I}[\phi]}} u_j^- = 0 & \text{на } \partial q\mathbb{I}[\phi], \\ u_j^+ - u_j^- = 0 & \text{на } \partial q\mathbb{I}[\phi], \\ \int_{\partial q\mathbb{I}[\phi]} u_j^+ d\sigma = 0, \end{array} \right. \quad (4.1)$$

де $\nu_{q\mathbb{I}[\phi]}$ — зовнішня одинична нормаль до $\partial q\mathbb{I}[\phi]$. Нагадуємо, що для $(h, j) \in \{1, \dots, n\}^2$ символ δ_{hj} позначає символ дельта Кронекера, тому $\delta_{hj} = 1$ для $h = j$ і $\delta_{hj} = 0$ в іншому випадку. Задача (4.1) має єдиний розв'язок (u_j^+, u_j^-) в $C_{\text{loc}}^{1,\alpha}(\overline{\mathbb{S}_q[q\mathbb{I}[\phi]])} \times C_{\text{loc}}^{1,\alpha}(\overline{\mathbb{S}_q[q\mathbb{I}[\phi]]}^-)$, який ми позначимо як $(u_j^+[q, \phi, (\lambda^+, \lambda^-)], u_j^-[q, \phi, (\lambda^+, \lambda^-)])$. Цей розв'язок використовується для визначення ефективної провідності (див., наприклад, Мітюшев, Обносков, Песецькая та Рогозін [12, §5]).

Означення 4.1. Нехай $q \in \mathbb{D}_n^+(\mathbb{R})$, $\phi \in C^{1,\alpha}(\partial\Omega, \mathbb{R}^n) \cap \mathcal{A}_{\partial\Omega}^{\tilde{Q}}$, $i, (\lambda^+, \lambda^-) \in [0, +\infty]_{*}^2$. Тоді ефективна провідність

$$\lambda_{ij}^{\text{eff}, \text{id}}[q, \phi, (\lambda^+, \lambda^-)] \equiv (\lambda_{ij}^{\text{eff}, \text{id}}[q, \phi, (\lambda^+, \lambda^-)])_{i,j=1,\dots,n}$$

є матрицею розміром $n \times n$ з елементом (i, j) , визначеним наступним чином

$$\begin{aligned} \lambda_{ij}^{\text{eff}, \text{id}}[q, \phi, (\lambda^+, \lambda^-)] \equiv \frac{1}{|Q|_n} \left\{ \lambda^+ \int_{q\mathbb{I}[\phi]} \frac{\partial}{\partial x_i} u_j^+[q, \phi, (\lambda^+, \lambda^-)](x) dx \right. \\ \left. + \lambda^- \int_{Q \setminus q\mathbb{I}[\phi]} \frac{\partial}{\partial x_i} u_j^-[q, \phi, (\lambda^+, \lambda^-)](x) dx \right\} \\ \forall i, j \in \{1, \dots, n\}. \end{aligned}$$

Аналогічно до вивчення середнього поздовжнього потоку в розділі 3, нас цікавить функція $(q, \phi, (\lambda^+, \lambda^-)) \mapsto \lambda_{ij}^{\text{eff}, \text{id}}[q, \phi, (\lambda^+, \lambda^-)]$. Наступний результат [8, Теорема 5.1] описує регулярність матриці ефективної провідності $\lambda_{ij}^{\text{eff}, \text{id}}[q, \phi, (\lambda^+, \lambda^-)]$ композиту з ідеальними умовами за трійкою "періодичність-форма-провідність". Більш детально, він показує, що елемент (i, j) матриці $\lambda_{ij}^{\text{eff}, \text{id}}[q, \phi, (\lambda^+, \lambda^-)]$ може бути виражений через провідність λ^- матриці, провідність λ^+ включень та аналітичну

залежність від періодичності q , форми включень ϕ і співвідношення $\frac{\lambda^+ - \lambda^-}{\lambda^+ + \lambda^-}$, яке іноді називають параметром контрасту.

Теорема 4.1. *Нехай α, Ω визначені в (2.3). Нехай $i, j \in \{1, \dots, n\}$. Тоді існує відкритий окіл $\mathcal{U}$ в $\mathbb{D}_n^+(\mathbb{R}) \times \left(C^{1,\alpha}(\partial\Omega, \mathbb{R}^n) \cap \mathcal{A}_{\partial\Omega}^{\tilde{Q}}\right) \times [-1, 1]$ простору $\mathbb{D}_n^+(\mathbb{R}) \times \left(C^{1,\alpha}(\partial\Omega, \mathbb{R}^n) \cap \mathcal{A}_{\partial\Omega}^{\tilde{Q}}\right) \times \mathbb{R}$ та аналітична функція Λ_{ij} з $\mathcal{U}$ в $\mathbb{R}$, така що $\lambda_{ij}^{\text{eff}, \text{id}}[q, \phi, (\lambda^+, \lambda^-)] \equiv \delta_{ij}\lambda^- + (\lambda^+ + \lambda^-)\Lambda_{ij}\left[q, \phi, \frac{\lambda^+ - \lambda^-}{\lambda^+ + \lambda^-}\right]$ для всіх $(q, \phi, (\lambda^+, \lambda^-)) \in \mathbb{D}_n^+(\mathbb{R}) \times \left(C^{1,\alpha}(\partial\Omega, \mathbb{R}^n) \cap \mathcal{A}_{\partial\Omega}^{\tilde{Q}}\right) \times [0, +\infty[^2$.*

Варто згадати, що в роботі [14] четвертий автор явно обчислив ефективну теплопровідність періодичного розрідженого композиту з ідеальним контактом у вигляді ряду по розміру включень (див. також [13]).

5. ЕФЕКТИВНА ПРОВІДНІСТЬ ПЕРІОДИЧНОГО ДВОХФАЗНОГО КОМПОЗИТУ З НЕІДЕАЛЬНИМИ УМОВАМИ КОНТАКТУ

Тепер ми звертаємося до вивчення ефективної теплопровідності n -вимірною періодичного двофазного композиту ($n \in \{2, 3\}$) з недосконалим (або неідеальним) контактом на межі.

Як матриця, так і множина періодичних включень заповнені двома однорідними та ізотропними теплопровідними матеріалами з теплопровідністю λ^- та λ^+ , відповідно, де $(\lambda^+, \lambda^-) \in]0, +\infty[^2$. Нормальна компонента теплового потоку вважається неперервною на двофазному інтерфейсі, тоді як ми накладаємо умову, що температурне поле має стрибок, пропорційний нормальному тепловому потоку, за допомогою параметра $r \in [0, +\infty[$. Для зручності, ми введемо наступне позначення $\mathcal{P} \equiv]0, +\infty[^2 \times [0, +\infty[$. Нехай $q \in \mathbb{D}_n^+(\mathbb{R})$, $\phi \in C^{1,\alpha}(\partial\Omega, \mathbb{R}^n) \cap \mathcal{A}_{\partial\Omega}^{\tilde{Q}}$, $(\lambda^+, \lambda^-, r) \in \mathcal{P}$. Для визначення ефективної провідності в неідеальному випадку розглянемо наступну крайову задачу:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \Delta u_j^+ = 0 & \text{в } \mathbb{S}_q[q\mathbb{I}[\phi]], \\ \Delta u_j^- = 0 & \text{в } \mathbb{S}_q[q\mathbb{I}[\phi]]^-, \\ u_j^+(x + qe_h) = u_j^+(x) + \delta_{hj}q_{jj} & \forall x \in \mathbb{S}_q[q\mathbb{I}[\phi]], \forall h \in \{1, \dots, n\}, \\ u_j^-(x + qe_h) = u_j^-(x) + \delta_{hj}q_{jj} & \forall x \in \mathbb{S}_q[q\mathbb{I}[\phi]]^-, \forall h \in \{1, \dots, n\}, \\ \lambda^+ \frac{\partial}{\partial \nu_{q\mathbb{I}[\phi]}} u_j^+ - \lambda^- \frac{\partial}{\partial \nu_{q\mathbb{I}[\phi]}} u_j^- = 0 & \text{на } \partial q\mathbb{I}[\phi], \\ \lambda^+ \frac{\partial}{\partial \nu_{q\mathbb{I}[\phi]}} u_j^+ + r(u_j^+ - u_j^-) = 0 & \text{на } \partial q\mathbb{I}[\phi], \\ \int_{\partial q\mathbb{I}[\phi]} u_j^+ d\sigma = 0, \end{array} \right. \quad (5.1)$$

де $j \in \{1, \dots, n\}$. Задача (5.1) має єдиний розв'язок (u_j^+, u_j^-) у просторі $C_{\text{loc}}^{1,\alpha}(\mathbb{S}_q[q\mathbb{I}[\phi]]) \times C_{\text{loc}}^{1,\alpha}(\mathbb{S}_q[q\mathbb{I}[\phi]]^-)$, який ми позначаємо як $(u_j^+[q, \phi, \lambda^+, \lambda^-, r], u_j^-[q, \phi, \lambda^+, \lambda^-, r])$.

Тоді, ефективну провідність можна визначити наступним чином.

Означення 5.1. Нехай $q \in \mathbb{D}_n^+(\mathbb{R})$, $\phi \in C^{1,\alpha}(\partial\Omega, \mathbb{R}^n) \cap \mathcal{A}_{\partial\Omega}^{\tilde{Q}}$, $(\lambda^+, \lambda^-, r) \in \mathcal{P}$. Тоді ефективна провідність

$$\lambda_{ij}^{\text{eff}, \text{nonid}}[q, \phi, \lambda^+, \lambda^-, r] \equiv (\lambda_{ij}^{\text{eff}}[q, \phi, \lambda^+, \lambda^-, r])_{i,j=1,\dots,n}$$

є $n \times n$ матрицею, де елемент (i, j) визначається наступним чином:

$$\begin{aligned} \lambda_{ij}^{\text{eff}, \text{nonid}}[q, \phi, \lambda^+, \lambda^-, r] \equiv & \frac{1}{|Q|_n} \left\{ \lambda^+ \int_{q\mathbb{I}[\phi]} \frac{\partial}{\partial x_i} u_j^+[q, \phi, \lambda^+, \lambda^-, r](x) dx \right. \\ & \left. + \lambda^- \int_{Q \setminus \overline{q\mathbb{I}[\phi]}} \frac{\partial}{\partial x_i} u_j^-[q, \phi, \lambda^+, \lambda^-, r](x) dx \right\}, \\ & \forall i, j \in \{1, \dots, n\}. \end{aligned}$$

Наступний результат (див. [4]) описує регулярність відображення

$$(q, \phi, \lambda^+, \lambda^-, r) \mapsto \lambda^{\text{eff}, \text{nonid}}[q, \phi, \lambda^+, \lambda^-, r].$$

Теорема 5.1. Нехай α, Ω визначені в (2.3). Нехай $i, j \in \{1, \dots, n\}$. Тоді існує відкритий окіл $\mathcal{V}$ множини $\mathbb{D}_n^+(\mathbb{R}) \times (C^{1,\alpha}(\partial\Omega, \mathbb{R}^n) \cap \mathcal{A}_{\partial\Omega}^{\tilde{Q}}) \times \mathcal{P}$ у просторі $\mathbb{D}_n^+(\mathbb{R}) \times (C^{1,\alpha}(\partial\Omega, \mathbb{R}^n) \cap \mathcal{A}_{\partial\Omega}^{\tilde{Q}}) \times \mathbb{R}^3$, та аналітичне відображення Λ_{ij} з $\mathcal{V}$ в $\mathbb{R}$, таке що

$$\lambda_{ij}^{\text{eff}, \text{nonid}}[q, \phi, \lambda^+, \lambda^-, r] \equiv \delta_{ij} \lambda^- + \Lambda_{ij}[q, \phi, \lambda^+, \lambda^-, r]$$

для всіх $(q, \phi, \lambda^+, \lambda^-, r) \in \mathbb{D}_n^+(\mathbb{R}) \times (C^{1,\alpha}(\partial\Omega, \mathbb{R}^n) \cap \mathcal{A}_{\partial\Omega}^{\tilde{Q}}) \times \mathcal{P}$.

Зазначимо, що композити з умовами контакту, відмінними від ідеальних, вивчаються, зокрема, у працях Дриґаса та Мітйусева [5], Кастро, Капанадзе та Песетської [1]. Також варто зазначити, що асимптотичну поведінку ефективної теплопровідності періодичного розрідженого композиту з недосконалим контактом було досліджено в [2, 3].

ЛІТЕРАТУРА

- [1] L. P. Castro, D. Kapanadze, E. Pesetskaya. Effective conductivity of a composite material with stiff imperfect contact conditions. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 38(18):4638–4649, 2015. doi:10.1002/mma.3423.
- [2] M. Dalla Riva, P. Musolino. A singularly perturbed nonideal transmission problem and application to the effective conductivity of a periodic composite. *SIAM J. Appl. Math.*, 73(1):24–46, 2013. doi:10.1137/120886637.
- [3] M. Dalla Riva, P. Musolino, R. Pukhtaievych. Series expansion for the effective conductivity of a periodic dilute composite with thermal resistance at the two-phase interface. *Asymptotic Analysis*, 111(3-4):217–250, February 2019. doi:10.3233/asy-181495.
- [4] M. Dalla Riva, P. Paolo Luzzini, P. Musolino, R. Pukhtaievych. Chapter 14 - dependence of effective properties upon regular perturbations. In Igor Andrianov, Simon Gluzman, Vladimir Mityushev, editors, *Mechanics and Physics of Structured Media*, pages 271–301. Academic Press, 2022. doi:10.1016/B978-0-32-390543-5.00019-0.
- [5] P. Drygaś, V. Mityushev. Effective conductivity of unidirectional cylinders with interfacial resistance. *Q. J. Mech. Appl. Math.*, 62(3):235–262, 2009. doi:10.1093/qjmam/hbp010.
- [6] D. Gilbarg, N. S. Trudinger. *Elliptic partial differential equations of second order*, volume 224 of *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences]*. Springer-Verlag, Berlin, second edition, 1983. doi:10.1007/978-3-642-61798-0.
- [7] P. Luzzini, P. Musolino. Perturbation analysis of the effective conductivity of a periodic composite. *Networks and Heterogeneous Media*, 15(4):581–603, 2020. doi:10.3934/nhm.2020015.
- [8] P. Luzzini, P. Musolino. Perturbation analysis of the effective conductivity of a periodic composite. *Networks and Heterogeneous Media*, 15(4):581–603, 2020. doi:10.3934/nhm.2020015.
- [9] P. Luzzini, P. Musolino, R. Pukhtaievych. Shape analysis of the longitudinal flow along a periodic array of cylinders. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 477(2):1369–1395, 2019. doi:10.1016/j.jmaa.2019.05.017.
- [10] V. Mityushev, P. M. Adler. Longitudinal permeability of spatially periodic rectangular arrays of circular cylinders. I. A single cylinder in the unit cell. *ZAMM Z. Angew. Math. Mech.*, 82(5):335–345, 2002. doi:10.1002/1521-4001(200205)82:5<335::AID-ZAMM335>3.0.CO;2-D.
- [11] V. Mityushev, P. M. Adler. Longitudinal permeability of spatially periodic rectangular arrays of circular cylinders. II. An arbitrary distribution of cylinders inside the unit cell. *Z. Angew. Math. Phys.*, 53(3):486–517, 2002. doi:10.1007/s00033-002-8164-5.
- [12] V. Mityushev, Yu. Obnosov, E. Pesetskaya, S. Rogosin. Analytical methods for heat conduction in composites. *Math. Model. Anal.*, 13(1):67–78, 2008. doi:10.3846/1392-6292.2008.13.67-78.
- [13] R. Pukhtaievych. Asymptotic behavior of the solution of singularly perturbed transmission problems in a periodic domain. *Math. Methods Appl. Sci.*, 41(9):3392–3413, 2018. doi:10.1002/mma.4832.

- [14] R. Pukhtaievych. Effective conductivity of a periodic dilute composite with perfect contact and its series expansion. *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik*, 69(3):83, May 2018. doi:10.1007/s00033-018-0976-z.

Matteo Dalla Riva

DEPARTMENT OF ENGINEERING, UNIVERSITY OF PALERMO, 8, VIALE DELLE SCIENZE, 90128 PALERMO, ITALY

Email: `matteo.dallariva@unipa.it`

ORCID: 0000-0002-5519-3327

Paolo Luzzini

DEPARTMENT OF SCIENCE, TECHNOLOGY, AND INNOVATION, UNIVERSITY OF EASTERN PIEDMONT “AMEDEO AVOGADRO”, 11, VIALE TERESA MICHEL, 15121 ALESSANDRIA, ITALY

Email: `paolo.luzzini@uniupo.it`

ORCID: 0000-0002-0765-001X

Paolo Musolino

DEPARTMENT OF MATHEMATICS “TULLIO LEVI-CIVITA”, UNIVERSITY OF PADOVA, 63, VIA TRIESTE, 35121 PADOVA, ITALY

Email: `paolo.musolino@unipd.it`

ORCID: 0000-0001-7366-5124

Roman Pukhtaievych

DEPARTMENT OF COMPLEX ANALYSIS AND POTENTIAL THEORY, INSTITUTE OF MATHEMATICS OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF UKRAINE, 3, TERESHCHENKIVSKA ST., 01004 KYIV, UKRAINE

Email: `rpukhtaievych@gmail.com`

ORCID: 0000-0002-7279-8213

Екстремальне розбиття комплексної площини з вільними полюсами на одиничному колі

І. В. Денега, Я. В. Заболотний

Abstract. This paper is an attempt to follow the path taken by the open problem of V.N. Dubinin on extremal decomposition of the complex plane with free poles on the unit circle. Currently, the problem is not completely solved. In this work, its partial solution for $n \geq 40$ is obtained for the case of simply connected domains.

Анотація. Ця стаття є спробою прослідкувати шлях, який пройшла відкрита проблема В.М. Дубініна про екстремальне розбиття комплексної площини з вільними полюсами на одиничному колі. На даний час ця проблема повністю не розв'язана. У даній роботі одержано її частковий розв'язок при $n \geq 40$ для випадку однозв'язних областей.

1. ФОРМУЛЮВАННЯ ПРОБЛЕМИ ТА ВІДОМІ РЕЗУЛЬТАТИ

Нехай $\mathbb{N}$ і $\mathbb{R}$ – множини натуральних і дійсних чисел, відповідно, $\mathbb{C}$ – комплексна площина, $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ – розширена комплексна площина, $U = \{z : |z| < 1\}$ – відкритий одиничний круг.

Нехай функція $f(z)$, мероморфна в крузі U , однолисто відображає даний круг на область $B \subset \overline{\mathbb{C}}$ так, що $f(0) = a$, де $a \in B$ і $a \neq \infty$.

Означення 1.1. Величина $|f'(0)|$ називається конформним радіусом області B в точці a .

Конформний радіус області B в точці a будемо позначати $R(B, a)$.

Для багатозв'язних областей аналогом поняття конформного радіуса є поняття внутрішнього радіуса [1–3, 18, 20].

Означення 1.2. Функцією Гріна $g_B(z, a)$ області B з полюсом в скінченній точці $a \in B$ називається дійсна функція, гармонічна по z в $B \setminus a$,

2020 Mathematics Subject Classification: 30C75

Ключові слова: конформний і внутрішній радіус області, функціонал, квадратичний диференціал

DOI: <https://doi.org/10.3842/trim.v21n1.541>

яка прямує до нуля, коли z прямує до межі B , і для якої в деякому околі точки a правильний асимптотичний розклад:

$$g_B(z, a) = -\ln |z - a| + \gamma + o(1), \quad z \rightarrow a.$$

Означення 1.3. Внутрішнім радіусом $r(B, a)$ області B відносно скінченної точки a називається величина e^γ .

Відзначимо, що для однозв'язних областей внутрішній радіус області дорівнює її конформному радіусу.

Означення 1.4. Нехай B – область розширеної комплексної площини $\mathbb{C}_z$. Під квадратичним диференціалом в B розумітимемо символ

$$Q(z)dz^2, \quad (1.1)$$

де $Q(z)$ – функція, мероморфна в B (див. [1, 2, 18, 19, 21]).

Означення 1.5. Скінченна точка $z_0 \in B$ називається нулем або полюсом порядку n диференціала (1.1), якщо вона є нулем або полюсом функції $Q(z)$.

Означення 1.6. Круговою областю квадратичного диференціала $Q(z)dz^2$ називається однозв'язна область $G \subset \mathbb{C}_z$, яка містить єдиний полюс другого порядку цього квадратичного диференціала в точці $w = a \in G$, така, що при конформному однолистому відображенні $w = f(z)$ ($f(a) = 0$) області G на одиничний круг площини $\mathbb{C}_w$, дійсна тотожність

$$Q(z)dz^2 \equiv -k \frac{dw^2}{w^2}, \quad k \in \mathbb{R}^+ = (0, \infty).$$

В даній роботі досліджується наступна проблема.

Проблема 1. [18] При всіх значеннях параметра $\gamma \in (0, n]$ показати, що максимум функціонала

$$I_n(\gamma) = r^\gamma(B_0, 0) \prod_{k=1}^n r(B_k, a_k),$$

де $B_0, B_1, B_2, \dots, B_n$, $n \geq 2$, – області, що взаємно не перетинаються, в $\mathbb{C}$, $a_0 = 0$, $|a_k| = 1$, $k = \overline{1, n}$, досягається для конфігурації з областей B_k і точок a_k , які володіють n -кратною симетрією.

Ця проблема була сформульована в якості відкритої в 1994 році у роботі [4] (див. також [18]). На даний час вона повністю не розв'язана, її часткові випадки вивчалися в багатьох роботах. У статті [4] сформульована вище задача була розв'язана для значення параметра $\gamma = 1$ і всіх значень натурального параметра $n \geq 2$. А саме, було показано, що

при її умовах справедлива нерівність

$$r(B_0, 0) \prod_{k=1}^n r(B_k, a_k) \leq r(D_0, 0) \prod_{k=1}^n r(D_k, d_k),$$

де d_k , D_k , $k = \overline{0, n}$, – полюси та кругові області квадратичного диференціала

$$Q(w)dw^2 = -\frac{(n^2 - 1)w^n + 1}{w^2(w^n - 1)^2} dw^2.$$

Л.В. Ковальов в 1996 році в роботі [5] отримав розв'язок цієї задачі при досить жорстких обмеженнях на розташування систем точок на одиничному колі, а саме, для таких систем точок, для яких виконуються наступні умови

$$0 < \alpha_k \leq 2/\sqrt{\gamma}, \quad k = \overline{1, n}, \quad n \geq 5,$$

де $\alpha_k = \arg a_{k+1} - \arg a_k$, $\arg a_{n+1} := \arg a_1$. Пізніше в [9] було показано, що результат Л.В. Ковальова справедливий і при $n = 4$. В 2003 році в [6] одержано розв'язок проблеми 1 для $\gamma \in (0, 1]$. Далі, в монографії [1] 2008 року було показано, що аналог результату В.М. Дубініна [4] виконується для довільного $\gamma \in \mathbb{R}^+$, але починаючи з деякого невідомого номера $n_0(\gamma)$. Також в [1] був запропонований метод "керуючих" функціоналів, який дозволяє послабити вимоги на геометрію розташування систем точок.

Надалі дослідження проблеми 1 розвивалося в основному в трьох напрямках. Першим з даних напрямків було дослідження даної проблеми для конкретних значень натурального параметра n .

Нехай

$$I_n^0(\gamma) = \left(\frac{4}{n}\right)^n \frac{\left(\frac{4\gamma}{n^2}\right)^{\frac{\gamma}{n}}}{\left(1 - \frac{\gamma}{n^2}\right)^{n+\frac{\gamma}{n}}} \left(\frac{1 - \frac{\sqrt{\gamma}}{n}}{1 + \frac{\sqrt{\gamma}}{n}}\right)^{2\sqrt{\gamma}}. \quad (1.2)$$

У роботі [10] одержано розв'язок проблеми 1 при $n = 2$.

Теорема 1.1 ([10]). *Нехай $\gamma \in (1, 2]$. Тоді для довільних різних точок a_1 і a_2 одиничного кола і довільних областей, що взаємно не перетинаються, B_0 , B_1 , B_2 , $a_0 = 0 \in B_0 \subset \overline{\mathbb{C}}$, $a_1 \in B_1 \subset \overline{\mathbb{C}}$, $a_2 \in B_2 \subset \overline{\mathbb{C}}$, справедлива нерівність*

$$r^\gamma(B_0, 0) r(B_1, a_1) r(B_2, a_2) \leq I_2^0(\gamma) \left(\frac{1}{2} |a_1 - a_2|\right)^{2-\gamma}.$$

Знак рівності в цій нерівності досягається, коли точки a_0 , a_1 , a_2 й області B_0 , B_1 , B_2 , є, відповідно, полюсами і круговими областями

квадратичного диференціала

$$Q(w)dw^2 = -\frac{(4-\gamma)w^2 + \gamma}{w^2(w^2-1)^2}dw^2. \quad (1.3)$$

При $n = 2$ і $\gamma \in (0, 2]$ розглядалася також дещо загальніша задача про максимум функціонала $I_2(\gamma)$ для довільних фіксованих точок $a_1, a_2 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ комплексної площини. Тоді справедливий такий результат.

Теорема 1.2 ([10]). *Нехай $\gamma \in (0, 2]$. Тоді для довільних різних точок $A_2 = \{a_1, a_2\} \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, таких, що*

$$|a_1 a_2| \leq 1, \quad \left(\frac{1}{2}|a_1 - a_2|\right)^{2-\gamma} \leq 1,$$

і будь-яких областей, що взаємно не перетинаються, $B_0, B_1, B_2, a_0 = 0 \in B_0 \subset \overline{\mathbb{C}}, a_1 \in B_1 \subset \overline{\mathbb{C}}, a_2 \in B_2 \subset \overline{\mathbb{C}}$, справедлива нерівність

$$r^\gamma(B_0, 0) r(B_1, a_1) r(B_2, a_2) \leq \frac{4\gamma^{\frac{\gamma}{2}}}{(1 - \frac{\gamma}{4})^{2+\frac{\gamma}{2}}} \left(\frac{1 - \frac{\sqrt{\gamma}}{2}}{1 + \frac{\sqrt{\gamma}}{2}}\right)^{2\sqrt{\gamma}}.$$

Знак рівності в цій нерівності досягається, коли точки a_0, a_1, a_2 й області B_0, B_1, B_2 , є, відповідно, полюсами і круговими областями квадратичного диференціала (1.3).

Для значень $n = 3$ і $n = 4$ найкращі на даний момент результати були отримані в роботі [8].

Другим напрямком в дослідженні проблеми 1 був пошук її розв'язання з деякими додатковими обмеженнями на системи областей і точок.

Використовуючи результат теореми 1.1, було отримано таку оцінку зверху функціонала $I_n(\gamma)$.

Теорема 1.3 ([10]). *Нехай $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$, $\gamma \in (1, n]$. Тоді для будь-якої системи різних точок $A_n = \{a_k\}_{k=1}^n$ одиничного кола і будь-якого набору областей, що взаємно не перетинаються, $B_0, B_k, a_0 = 0 \in B_0 \subset \overline{\mathbb{C}}, a_k \in B_k \subset \overline{\mathbb{C}}, k = \overline{1, n}$, справедлива нерівність*

$$r^\gamma(B_0, 0) \prod_{k=1}^n r(B_k, a_k) \leq \left(\sin \frac{\pi}{n}\right)^{n-\gamma} \left(I_2^0\left(\frac{2\gamma}{n}\right)\right)^{\frac{n}{2}}.$$

Наступна теорема дає частковий розв'язок проблеми 1 для $n \geq 4$, $\gamma \in (1, n]$, однак при деякому обмеженні на внутрішній радіус області, яка містить точку нуль.

Теорема 1.4 ([10]). Нехай $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 4$, $\gamma \in (1, n]$ і

$$K(n, \gamma) = [I_n^0(\gamma) \cdot \mu_n(\gamma)]^{\frac{1}{\gamma}},$$

де $I_n^0(\gamma)$ визначається співвідношенням (1.2), а

$$\mu_n(\gamma) = \left[\frac{4^n}{(n-1)^{n-1}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\gamma}} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{\gamma}} \right)^{n-1} \right]^{-1}.$$

Тоді для будь-якої системи різних точок $A_n = \{a_k\}_{k=1}^n$ одиничного кола і будь-якого набору областей, що взаємно не перетинаються, B_0, B_k , $a_0 = 0 \in B_0 \subset \mathbb{C}$, $a_k \in B_k \subset \mathbb{C}$, $k = \overline{1, n}$, таких, що

$$r(B_0, 0) \leq K(n, \gamma),$$

справедлива нерівність

$$r^\gamma(B_0, 0) \prod_{k=1}^n r(B_k, a_k) \leq \left(\frac{4}{n} \right)^n \frac{\left(\frac{4\gamma}{n^2} \right)^{\frac{\gamma}{n}}}{\left(1 - \frac{\gamma}{n^2} \right)^{n + \frac{\gamma}{n}}} \left(\frac{1 - \frac{\sqrt{\gamma}}{n}}{1 + \frac{\sqrt{\gamma}}{n}} \right)^{2\sqrt{\gamma}}.$$

Знак рівності в цій нерівності досягається тоді, коли a_k і B_k , $k = \overline{0, n}$, є, відповідно, полюсами і круговими областями квадратичного диференціала

$$Q(w)dw^2 = -\frac{(n^2 - \gamma)w^n + \gamma}{w^2(w^n - 1)^2} dw^2. \quad (1.4)$$

Іншим напрямком в дослідженні проблеми 1 був пошук зростаючої мажоранти для всіх значень n , починаючи з деякого номера.

Теорема 1.5 ([10]). Нехай $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$, $\gamma \in (1, \sqrt{n}]$. Тоді для будь-якої системи різних точок $A_n = \{a_k\}_{k=1}^n$ одиничного кола і будь-якого набору областей, що взаємно не перетинаються, B_0, B_k , $a_0 = 0 \in B_0 \subset \mathbb{C}$, $a_k \in B_k \subset \mathbb{C}$, $k = \overline{1, n}$, справедлива нерівність

$$r^\gamma(B_0, 0) \prod_{k=1}^n r(B_k, a_k) \leq r^\gamma(D_0, 0) \prod_{k=1}^n r(D_k, d_k),$$

де d_k, D_k , $k = \overline{0, n}$, $d_0 = 0$, є, відповідно, полюсами і круговими областями квадратичного диференціала (1.4).

В попередній теоремі в ролі мажоранти виступає $\gamma = \sqrt{n}$. Однак виявляється, що в ролі даної мажоранти можна також взяти $\gamma = n^\alpha$ для довільного $\alpha \in (\frac{1}{2}; \frac{2}{3})$. Зокрема, правильна наступна теорема.

Теорема 1.6 ([7]). Для довільного натурального $n \geq e^9$ і

$0 < \gamma \leq n^{\frac{2}{3} - \frac{1}{\sqrt{\ln n}}}$ виконується нерівність:

$$r^\gamma(B_0, a_0) \prod_{k=1}^n r(B_k, a_k) \leq r^\gamma(D_0, a_0^0) \prod_{k=1}^n r(D_k, a_k^0),$$

де $B_0, B_1, B_2, \dots, B_n$, – попарно неперетинні області в $\overline{\mathbb{C}}$, $a_0 = 0$, $|a_k| = 1$, $a_1 = 1$, $k = \overline{1, n}$, причому знак рівності досягається, наприклад, для $a_k = a_k^0$, $B_k = D_k$, $k = \overline{0, n}$, де a_k^0 , D_k , – відповідно полюси і кругові області квадратичного диференціала (1.4).

Суттєвим недоліком попередньої теореми є те, що номер, починаючи з якого можна брати $\gamma = n^\alpha$ для $\alpha \in (\frac{1}{2}; \frac{2}{3})$, є дуже великим.

Загалом, найкращі відомі на даний момент результати в даній проблемі як для деяких конкретних значень n , так і для загального випадку відображено в наступній таблиці.

n	2	3	4	$n \geq 3$	$n \geq e^9$
γ	$(0, 2]$	$(0, 2.1]$	$(0, 2.5]$	$(0, \sqrt{n}]$	$(0, n^{\frac{2}{3} - \frac{1}{\sqrt{\ln n}}}]$

2. ОСНОВНИЙ РЕЗУЛЬТАТ

В наступній теоремі наводиться деякий аналог теореми 1.6, однак для $n \geq 40$, причому суттєво розширено діапазон γ , для яких твердження проблеми 1 правильне.

Теорема 2.1. Нехай $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 40$ і $1 < \gamma \leq n^{\frac{2}{3} - \frac{2}{3} \frac{\ln(\frac{5}{8} \ln(n))}{\ln(n)}}$. Тоді для довільного набору функцій f_k , $k = \overline{0, n}$, регулярних і однолистих в крузі $|z| < 1$, таких, що $f_0(0) = 0$, $|f_k(0)| = 1$ для $k = \overline{1, n}$, причому $f_i(z_1) \neq f_j(z_2)$ для довільних натуральних $1 \leq i, j \leq n$, $i \neq j$, та довільних різних $z_1, z_2 \in U$, правильна нерівність:

$$|f'_0(0)|^\gamma \prod_{k=1}^n |f'_k(0)| \leq \left(\frac{4}{n}\right)^n \frac{\left(\frac{4\gamma}{n^2}\right)^{\frac{\gamma}{n}}}{\left(1 - \frac{\gamma}{n^2}\right)^{n + \frac{\gamma}{n}}} \left(\frac{1 - \frac{\sqrt{\gamma}}{n}}{1 + \frac{\sqrt{\gamma}}{n}}\right)^{2\sqrt{\gamma}}. \quad (2.1)$$

Зауважимо, що результат теореми не зміниться для випадку, якщо одна з функцій f_k буде мероморфною.

Доведення. Зауважимо, що набір функцій f_k , $k = \overline{0, n}$, відображає відкритий одиничний круг на деяку систему неперетинних однозв'язних областей, причому $|f'_k(0)| = R(B_k, a_k) = r(B_k, a_k)$, де $a_k = f_k(0)$. Нехай для конкретності

$$0 = \arg a_1 < \arg a_2 < \dots < \arg a_n < 2\pi.$$

Позначимо

$$\alpha_1 := \frac{1}{\pi}(\arg a_2 - \arg a_1), \alpha_2 := \frac{1}{\pi}(\arg a_3 - \arg a_2), \dots, \alpha_n := \frac{1}{\pi}(2\pi - \arg a_n).$$

Позначимо також $\alpha_0 = \max_k \alpha_k$, $k = \overline{1, n}$. Тоді правильне наступне твердження:

Лема 2.1 ([8]). *Нехай $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, $\gamma > 0$. Нехай система взаємно неперетинних однозв'язних областей $\{B_0, B_1, B_2, \dots, B_n\}$ така, що $0 \in B_0$, $a_k \in B_k \subset \overline{\mathbb{C}}$, $k = \overline{1, n}$, i $r^\gamma(B_0, 0) \prod_{k=1}^n r(B_k, a_k) > I_n^0(\gamma)$. Тоді правильна нерівність*

$$r(B_0, 0) \leq n^{-\frac{n}{2(n-\gamma)}} I_n^0(\gamma)^{-\frac{1}{n-\gamma}},$$

де $I_n^0(\gamma)$ – див. (1.2).

Врахувавши результат роботи [5], а також лему 2.1, нам досить розглянути випадок

$$|f'_0(0)| \leq n^{-\frac{n}{2(n-\gamma)}} I_n^0(\gamma)^{-\frac{1}{n-\gamma}} \quad \text{і} \quad \alpha_0 > \frac{2}{\sqrt{\gamma}}.$$

Доведемо, що для даних умов правильна нерівність:

$$\frac{|f'_0(0)|^\gamma \prod_{k=1}^n |f'_k(0)|}{\left(\frac{4}{n}\right)^n \frac{\left(\frac{4\gamma}{n^2}\right)^{\frac{\gamma}{n}}}{\left(1-\frac{\gamma}{n^2}\right)^{n+\frac{\gamma}{n}}} \left(\frac{1-\frac{\sqrt{\gamma}}{n}}{1+\frac{\sqrt{\gamma}}{n}}\right)^{2\sqrt{\gamma}}} < 1. \quad (2.2)$$

Врахувавши лему 1, отримаємо, що

$$|f'_0(0)|^\gamma \leq n^{-\frac{n\gamma}{2(n-\gamma)}} I_n^0(\gamma)^{-\frac{\gamma}{n-\gamma}}.$$

Підставивши даний вираз в нерівність (2.2), одержимо, що для доведення теореми нам достатньо довести таке співвідношення

$$n^{-\frac{n\gamma}{2(n-\gamma)}} I_n^0(\gamma)^{-\frac{\gamma}{n-\gamma}} \prod_{k=1}^n |f'_k(0)| < 1. \quad (2.3)$$

Також, згідно з теоремою 5.2.3 роботи [1] правильна наступна нерівність:

$$\begin{aligned} \prod_{k=1}^n |f'_k(0)| &\leq 2^n \prod_{k=1}^n \alpha_k \leq 2^n \alpha_0 \left(\frac{2-\alpha_0}{n-1}\right)^{n-1} < \\ &< \frac{4^n}{(n-1)^{n-1} \sqrt{\gamma}} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{\gamma}}\right)^{n-1}. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Підставивши нерівність (2.4) в (2.3), отримаємо, що нам потрібно довести нерівність

$$P_n(\gamma) := n^{-\frac{n\gamma}{2(n-\gamma)}} \frac{4^n}{(n-1)^{n-1} \sqrt{\gamma}} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{\gamma}}\right)^{n-1} I_n^0(\gamma)^{-\frac{n}{n-\gamma}} < 1. \quad (2.5)$$

Використавши рівність (1.2), отримаємо, що

$$P_n(\gamma) = n^{\frac{n\gamma+2n+2\gamma}{2(n-\gamma)}} \left(\frac{n}{n-1}\right)^{n-1} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{\gamma}}\right)^{n-1} \left(1 - \frac{\gamma}{n^2}\right)^{\frac{n^2+\gamma}{n-\gamma}} \left(\frac{1}{4\sqrt{\gamma}}\right)^{\frac{n+\gamma}{n-\gamma}} \left(\frac{1 + \frac{\sqrt{\gamma}}{n}}{1 - \frac{\sqrt{\gamma}}{n}}\right)^{\frac{2n\sqrt{\gamma}}{n-\gamma}}. \quad (2.6)$$

Оцінимо вираз $P_n(\gamma)$ при умовах теореми. Зокрема, $\left(\frac{n}{n-1}\right)^{n-1} < e$. Відзначимо також, що $\left(1 - \frac{\gamma}{n^2}\right)^{\frac{n^2+\gamma}{n-\gamma}} < 1$. Також правильна наступна оцінка:

$$\left(\frac{1 + \frac{\sqrt{\gamma}}{n}}{1 - \frac{\sqrt{\gamma}}{n}}\right)^{\frac{2n\sqrt{\gamma}}{n-\gamma}} \left(\frac{1}{4\sqrt{\gamma}}\right)^{\frac{n+\gamma}{n-\gamma}} < 0.06 < \frac{1}{e}.$$

Таким чином,

$$P_n(\gamma) < n^{\frac{n\gamma+2n+2\gamma}{2(n-\gamma)}} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{\gamma}}\right)^{n-1}. \quad (2.7)$$

Оцінимо тепер вираз $n^{\frac{n\gamma+2n+2\gamma}{2(n-\gamma)}} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{\gamma}}\right)^{n-1}$ при умовах даної теореми. Правильні наступні перетворення:

$$\begin{aligned} n^{\frac{n\gamma+2n+2\gamma}{2(n-\gamma)}} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{\gamma}}\right)^{n-1} &= n^{\frac{n\gamma+2n+2\gamma}{2(n-\gamma)}} \left(\left(1 - \frac{1}{\sqrt{\gamma}}\right)^{\sqrt{\gamma}}\right)^{\frac{n-1}{\sqrt{\gamma}}} < \\ &< \left(n \left(\frac{1}{e}\right)^{\frac{2n^2-2n-2n\gamma+2\gamma}{n\gamma\sqrt{\gamma}+2n\sqrt{\gamma}+2\gamma\sqrt{\gamma}}}\right)^{\frac{n\gamma+2n+2\gamma}{2(n-\gamma)}} = \\ &= \left(n \left(\frac{1}{e}\right)^{\frac{n}{\gamma^{\frac{3}{2}}} \frac{2-\frac{2}{n}-\frac{2\gamma}{n}+\frac{2\gamma}{n^2}}{1+\frac{2}{\gamma}+\frac{2}{n}}}\right)^{\frac{n\gamma+2n+2\gamma}{2(n-\gamma)}}. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Оскільки в роботі [10] задачу було розв'язано для $n \geq 3$ і $1 < \gamma \leq \sqrt{n}$, то нам достатньо розглянути тільки $\gamma > \sqrt{n}$. Для $n \geq 40$ і $\sqrt{n} < \gamma < n^{\frac{2}{3} - \frac{2}{3} \frac{\ln(\frac{5}{6} \ln(n))}{\ln(n)}}$ правильна нерівність

$$\frac{2 - \frac{2}{n} - \frac{2\gamma}{n} + \frac{2\gamma}{n^2}}{1 + \frac{2}{\gamma} + \frac{2}{n}} > \frac{6}{5},$$

тому отримаємо:

$$n \left(\frac{1}{e} \right)^{\frac{n}{\gamma^{\frac{3}{2}}} \frac{2 - \frac{2}{n} - \frac{2\gamma}{n} + \frac{2\gamma}{n^2}}{1 + \frac{2}{\gamma} + \frac{2}{n}}} < n \left(\frac{1}{e} \right)^{\frac{6}{5} \frac{n}{\gamma^{\frac{3}{2}}}}. \quad (2.9)$$

Врахувавши, що $\gamma < n^{\frac{2}{3} - \frac{2}{3} \frac{\ln(\frac{5}{6} \ln(n))}{\ln(n)}}$, отримаємо, що

$$\frac{6}{5} \frac{n}{\gamma^{\frac{3}{2}}} > \frac{6}{5} \frac{n}{n^{\frac{3}{2} \left(\frac{2}{3} - \frac{2}{3} \frac{\ln(\frac{5}{6} \ln(n))}{\ln(n)} \right)}} = \frac{6}{5} n^{\frac{\ln(\frac{5}{6} \ln(n))}{\ln(n)}}.$$

Таким чином,

$$n \left(\frac{1}{e} \right)^{\frac{6}{5} \frac{n}{\gamma^{\frac{3}{2}}}} \leq n \left(\frac{1}{e} \right)^{\frac{6}{5} n^{\frac{\ln(\frac{5}{6} \ln(n))}{\ln(n)}}} = n \left(\frac{1}{e} \right)^{\frac{6}{5} n^{\log_n(\frac{5}{6} \ln(n))}} = 1.$$

Підставивши даний результат в нерівності (2.9) і (2.8), маємо

$$n^{\frac{n\gamma + 2n + 2\gamma}{2(n-\gamma)}} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{\gamma}} \right)^{n-1} < 1.$$

Таким чином, в нерівності (2.7) отримаємо, що для заданих n і γ виконується нерівність

$$P_n(\gamma) < 1,$$

а звідси, врахувавши нерівності (2.2) – (2.5), і впливає нерівність (2.1). Теорему 2.1 доведено. $\square$

Зауваження 2.1. Враховуючи поведінку виразу

$$H(n, \gamma) := \frac{2 - \frac{2}{n} - \frac{2\gamma}{n} + \frac{2\gamma}{n^2}}{1 + \frac{2}{\gamma} + \frac{2}{n}}$$

при збільшенні n ми можемо дещо уточнити значення γ , для яких виконується нерівність (2.1). Так, наприклад, для $n \geq 47$ і $\gamma > \sqrt{n}$ правильна нерівність $H(n, \gamma) > \frac{5}{4}$, а тому, провівши аналогічні міркування, можна довести, що для даних n нерівність (2.1) виконується для

$1 < \gamma \leq n^{\frac{2}{3} - \frac{2}{3} \frac{\ln(\frac{4}{5} \ln(n))}{\ln(n)}}$; для $n \geq 119$ правильна нерівність $H(n, \gamma) > \frac{3}{2}$,

а тому нерівність (2.1) виконується для $1 < \gamma \leq n^{\frac{2}{3} - \frac{2}{3} \frac{\ln(\frac{2}{3} \ln(n))}{\ln(n)}}$, тобто можна дещо розширити діапазон γ в умові теореми 2.1.

Зауваження 2.2. Доведена вище теорема 2.1 розв'язує проблему 1 для $n \geq 40$ і $1 < \gamma \leq n^{\frac{2}{3} - \frac{2}{3} \frac{\ln(\frac{5}{6} \ln(n))}{\ln(n)}}$ для випадку однозв'язних областей.

З подібними результатами про оцінки добутків внутрішніх радіусів областей можна ознайомитися в роботах [11–17, 22].

ЛІТЕРАТУРА

- [1] А. К. Бахтин, Г. П. Бахтина, Ю. Б. Зелинский. *Тополого-алгебраические структуры и геометрические методы в комплексном анализе*. Праці ін-ту мат-ки НАН Укр., 2008.
- [2] Дж. А. Дженкинс. *Однолистные функции и конформные отображения*. М.: Изд-во иностр. лит., 1962.
- [3] Н. А. Лебедев. *Принцип площадей в теории однолистных функций*. М.: Наука, 1975.
- [4] В. Н. Дубинин. Метод симметризации в геометрической теории функций комплексного переменного. *Успехи мат. наук.*, 49 (295)(1):3 – 76, 1994.
- [5] Л. В. Ковалев. К задаче об экстремальном разбиении со свободными полюсами на окружности. *Дальневосточный матем. сборник*, (2):96 – 98, 1996.
- [6] Г. В. Кузьмина. Метод экстремальной метрики в задачах о максимуме произведения степеней конформных радиусов неналегающих областей принадлежности свободных параметров. *Зап. научн. сем. ПОМИ*, 302:52 – 67, 2003.
- [7] Я. В. Заболотний. Задача про обчислення максимуму добутку внутрішніх радіусів неперетинних областей на комплексній площині. *Збірник праць Ін-ту мат-ки НАН України*, 10(4-5):557–564, 2013.
- [8] A. K. Bakhtin. Separating transformation and extremal problems on nonoverlapping simply connected domains. *J. Math. Sci.*, 234(1):1 – 13, 2018.
- [9] A. K. Bakhtin, I. V. Denega. Addendum to a theorem on extremal decomposition of the complex plane. *Bull. Soc. Sci. Lett. Lodz, Ser. Rech. Deform.*, 62(2):83 – 92, 2012.
- [10] A. K. Bakhtin, I. V. Denega. Extremal decomposition of the complex plane with free poles. *J. Math. Sci.*, 246(1):1–17, 2020.
- [11] A. K. Bakhtin, I. V. Denega. Extremal decomposition of the complex plane with free poles ii. *J. Math. Sci.*, 246(5):602–616, 2020.
- [12] A. K. Bakhtin, I. V. Denega. Generalized m. a. lavrentiev's inequality. *J. Math. Sci.*, 262(2):138–153, 2022.
- [13] A. K. Bakhtin, A. L. Targonskii. Generalized (n, d)-ray systems of points and inequalities for nonoverlapping domains and open sets. *Ukr. Math. J.*, 63(7):999–1012, 2011.
- [14] A. K. Bakhtin, Ya. V. Zabolotnii. Estimates of the products on inner radii for multi-connected domains. *Ukr. Math. J.*, 73(1):6–12, 2021.

- [15] I. V. Denega, Ya. V. Zabolotnii. Estimates of products of inner radii of non-overlapping domains in the complex plane. *Complex Variables and Elliptic Equations*, 62(11):1611–1618, 2017.
- [16] I. V. Denega, Ya. V. Zabolotnii. An extremal problem on non-overlapping domains containing ellipse points. *Eurasian Math. J.*, 12(4):82–91, 2021.
- [17] I. V. Denega, Y. V. Zabolotnyi. Application of upper estimates for products of inner radii to distortion theorems for univalent functions. *Matematychni Studii*, 60(2):138–144, 2023.
- [18] V. N. Dubinin. *Condenser capacities and symmetrization in geometric function theory*. Birkhäuser/Springer, Basel, 2014.
- [19] P. Duren. *Univalent functions*. Heidelberg and New York: Springer-Verlag, 1983.
- [20] G. M. Goluzin. *Geometric theory of functions of a complex variable*. Amer. Math. Soc. Providence, R.I., 1969.
- [21] K. Strebel. *Quadratic differentials*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1984.
- [22] A. L. Targonskii. Extreme problem for a mosaic system of points on the open sets and non-overlapping domains. *Proceedings of the International Geometry Center*, 16(1):91–104, 2023.

І. В. Денега

ІНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ НАН УКРАЇНИ, М. КИЇВ

Email: iradenega@gmail.com

ORCID: 0000-0001-8122-4257

Я. В. Заболотний

ІНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ НАН УКРАЇНИ, М. КИЇВ

Email: yaroslavzabolotnii@gmail.com

ORCID: 0000-0002-1878-2077

Про асимптотичну поведінку на нескінченності кільцевих та нижніх Q -гомеоморфізмів відносно p -модуля

Б. А. Кліщук, Р. Р. Салімов, М. В. Стефанчук

Abstract. In the paper the asymptotic behavior at infinity of ring Q -homeomorphisms with respect to the p -modulus as $p \geq n$ and lower Q -homeomorphisms with respect to the p -modulus as $n - 1 < p \leq n$ in the space $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, has been investigated.

Анотація. У статті досліджується асимптотична поведінка на нескінченності кільцевих Q -гомеоморфізмів відносно p -модуля при $p \geq n$ та нижніх Q -гомеоморфізмів відносно p -модуля при $n - 1 < p \leq n$ у просторі $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$.

1. ВСТУП

Нагадаємо деякі означення, див. [68]. Нехай задано сім'ю Γ кривих γ у просторі $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$. Борелеву функцію $\rho : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, \infty]$ називають *допустимого* для Γ (пишуть $\rho \in \text{adm } \Gamma$), якщо

$$\int_{\gamma} \rho(x) ds \geq 1$$

для кожної (локально спрямлюваної) кривої $\gamma \in \Gamma$.

Нехай $p \in (1, \infty)$. Тоді p -модулем сім'ї Γ називається величина

$$M_p(\Gamma) = \inf_{\rho \in \text{adm } \Gamma} \int_{\mathbb{R}^n} \rho^p(x) dm(x),$$

де $dm(x)$ позначає міру Лебега в $\mathbb{R}^n$.

Нехай D – область в $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, $x_0 \in D$ та $d_0 = \text{dist}(x_0, \partial D)$. Для довільних множин E , F і G простору $\mathbb{R}^n$ позначимо через $\Delta(E, F, G)$

Робота була підтримана грантом Simons Foundation (1290607, Б.А.К., Р.Р.С., М.В.С.).

2020 Mathematics Subject Classification: 30C65

Ключові слова: p -модуль сім'ї кривих, p -модуль сім'ї поверхонь, кільцеві Q -гомеоморфізми відносно p -модуля, нижні Q -гомеоморфізми відносно p -модуля

DOI: <https://doi.org/10.3842/trim.v21n1.542>

сім'ю всіх неперервних кривих $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$, які з'єднують E і F у G , тобто $\gamma(a) \in E$, $\gamma(b) \in F$ і $\gamma(t) \in G$ при $a < t < b$. Покладемо

$$\mathbb{A}(x_0, r_1, r_2) = \{x \in \mathbb{R}^n : r_1 < |x - x_0| < r_2\},$$

$$S_i = S(x_0, r_i) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x - x_0| = r_i\}, \quad i = 1, 2.$$

Нехай $Q : D \rightarrow [0, \infty]$ – вимірна функція. Нагадаємо, що гомеоморфізм $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ називається Q -гомеоморфізмом відносно p -модуля, якщо нерівність

$$M_p(f\Gamma) \leq \int_D Q(x) \rho^p(x) \, dm(x) \quad (1.1)$$

виконується для довільної сім'ї Γ кривих в області D та довільної допустимої функції ρ для Γ .

Це означення є природним узагальненням геометричного означення квазіконформного відображення: якщо $Q(x) \leq K < \infty$ м.с. (майже скрізь), то f є квазіконформним для $p = 2$ на комплексній площині $\mathbb{C}$ (див. означення А, с. 21–22 у [19]), для $p = n$ у просторі $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, (див. 13.1 та 34.6 у [68]), має властивість локальної ліпшицевості для $n - 1 < p < n$ та f^{-1} є ліпшицевим для $p > n$, причому межі для p є точними (див. [25]). Зауважимо, що оцінка типу (1.1) вперше була встановлена у класичній квазіконформній теорії (див. [38], с. 221). Далі це було отримано у [20], лема 2.1, для квазіконформних відображень у просторі $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$. Клас Q -гомеоморфізмів відносно n -модуля вперше було розглянуто у роботах [40, 41], див. також монографію [42]. Головною метою теорії Q -гомеоморфізмів є встановлення різноманітних взаємозв'язків між властивостями мажоранти $Q(x)$ та відповідними властивостями самих відображень. Зокрема, задачі про локальну та межу поведінку Q -гомеоморфізмів були досліджені у просторі $\mathbb{R}^n$ спочатку для випадку $Q \in BMO$ (обмеженого середнього коливання) у роботах [40, 41], а потім для випадку $Q \in FMO$ (скінченного середнього коливання) та для інших випадків у роботах [6, 7, 51].

Наступне означення узагальнює та локалізує означення Q -гомеоморфізму. Воно зумовлене кільцевим означенням квазіконоформних відображень за Герінгом (див. [24]), спочатку введене В. Рязановим, У. Сребро та Е. Якубовим на площині (див. [45–50]) та пізніше узагальнене В. Рязановим і Є. Севостьяновим у просторі $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, (див. [42], розділи VII, XI).

Нехай $Q : D \rightarrow [0, \infty]$ – вимірна за Лебегом функція. Гомеоморфізм $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ називається *кільцевим Q -гомеоморфізмом відносно*

p -модуля в точці $x_0 \in D$, якщо співвідношення

$$M_p(\Delta(fS_1, fS_2, fD)) \leq \int_{\mathbb{A}} Q(x) \eta^p(|x - x_0|) dm(x) \quad (1.2)$$

виконується для будь-якого кільця $\mathbb{A} = \mathbb{A}(x_0, r_1, r_2)$, $0 < r_1 < r_2 < d_0$, $d_0 = \text{dist}(x_0, \partial D)$, і для кожної вимірної функції $\eta : (r_1, r_2) \rightarrow [0, \infty]$ такої, що

$$\int_{r_1}^{r_2} \eta(r) dr = 1.$$

Гомеоморфізм $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ називають *кільцевим Q -гомеоморфізмом відносно p -модуля в області D* , якщо умова (1.2) виконується для будь-якої точки $x_0 \in D$. Кільцеві Q -гомеоморфізми відносно p -модуля при $p = n$ називають кільцевими Q -гомеоморфізмами (у точці $x_0 \in D$ чи в області D).

Теорія кільцевих Q -гомеоморфізмів відносно p -модуля у просторі $\mathbb{R}^n$ при $p = n$ досліджувалась у роботах [42, 47, 62], при $1 < p < n$ див. [26, 29, 31, 53, 54] та при $p > n$ див. [10, 37, 43, 55–60, 66, 67]. Більш загальні класи відображень досліджувались у [21–23, 32–34, 36, 61, 64, 65].

Нехай ω_{n-1} – площа одиничної сфери $\mathbb{S}^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| = 1\}$ в $\mathbb{R}^n$ та

$$q_{x_0}(r) = \frac{1}{\omega_{n-1} r^{n-1}} \int_{S(x_0, r)} Q(x) d\mathcal{A}$$

середнє інтегральне значення по сфері $S(x_0, r) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x - x_0| = r\}$, тут $d\mathcal{A}$ – елемент площі поверхні.

Нижче наведено критерій належності гомеоморфізмів класу кільцевих Q -гомеоморфізмів відносно p -модуля при $p > 1$ у просторі $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, див. теорему 3.1 у [1].

Твердження 1.1 ([1]). *Нехай D – область в $\mathbb{R}^n$, $x_0 \in D$ та $Q : D \rightarrow [0, \infty]$ – вимірна за Лебегом функція така, що середнє інтегральне значення $q_{x_0}(r)$ скінченне для м.в. (майже всіх) $r \in (0, d_0)$, $d_0 = \text{dist}(x_0, \partial D)$. Гомеоморфізм $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ є кільцевим Q -гомеоморфізмом у точці x_0 тоді і тільки тоді, коли для будь-яких r_1, r_2 таких, що $0 < r_1 < r_2 < d_0$,*

$$M_p(\Delta(fS_1, fS_2; fD)) \leq \frac{\omega_{n-1}}{\left(\int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r^{\frac{n-1}{p-1}} q_{x_0}^{\frac{1}{p-1}}(r)} \right)^{p-1}},$$

де S_1 та S_2 – сфери $S(x_0, r_1)$ і $S(x_0, r_2)$.

Вельми корисним інструментом при дослідженні плоских та просторових відображень виявилися також так звані нижні Q -гомеоморфізми відносно p -модуля, що були вперше введені і вивчалися при $p = n$ у роботі Д. Ковтонюка і В. Рязанова, див. [8] або розд. 9 у монографії [42] та при $p \neq n$ у роботі [28]. Їх означення також носить геометричний характер і мотивовано кільцевим означенням Герінга для квазіконформних відображень.

Далі нагадаємо, що $(n - 1)$ -вимірною поверхнею S в $\mathbb{R}^n$ називають довільне неперервне відображення $S : \omega \rightarrow \mathbb{R}^n$, де ω – відкрита множина в $\overline{\mathbb{R}^{n-1}} := \mathbb{R}^{n-1} \cup \{\infty\}$. Функцією кратності поверхні S називається число прообразів елемента $y \in \mathbb{R}^n$:

$$N(S, y) = \text{card } S^{-1}(y) = \text{card } \{x \in \omega : S(x) = y\}.$$

Для борелевої функції $\rho : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, \infty]$ інтеграл по поверхні S визначається рівністю

$$\int_S \rho d\mathcal{A} := \int_{\mathbb{R}^n} \rho(y) N(S, y) dH^{n-1}(y),$$

де через H^{n-1} позначено $(n - 1)$ -вимірну міру Хаусдорфа в $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$. Надалі покладемо $d\mathcal{A} := d\mathcal{A}_{n-1}$.

Борелеву функцію $\rho : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, \infty]$ називають допустимою для сім'ї Γ $(n - 1)$ -вимірних поверхонь і пишуть $\rho \in \text{adm } \Gamma$, якщо

$$\int_S \rho^{n-1} d\mathcal{A} \geq 1 \tag{1.3}$$

для кожної поверхні $S \in \Gamma$. Тоді p -модулем сім'ї Γ при $p > 1$ називають величину

$$M_p(\Gamma) = \inf_{\rho \in \text{adm } \Gamma} \int_{\mathbb{R}^n} \rho^p(x) dm(x).$$

Кажуть, що деяка властивість виконується для p -майже всіх $(n - 1)$ -вимірних поверхонь сім'ї Γ , якщо підсім'я поверхонь сім'ї Γ , для яких ця властивість порушується, має p -модуль нуль.

Вимірну за Лебегом функцію $\rho : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, \infty]$ називають узагальнено p -допустимою для сім'ї Γ , що складається із $(n - 1)$ -вимірних поверхонь в $\mathbb{R}^n$, і пишуть $\rho \in \text{ext}_p \text{adm } \Gamma$, якщо нерівність (1.3) виконується для p -майже всіх $S \in \Gamma$.

Нехай D – область в $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, $Q : D \rightarrow (0, \infty)$ – вимірна за Лебегом функція. Гомеоморфізм $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ називають *нижнім Q -гомеоморфізмом відносно p -модуля у точці $x_0 \in D$* , якщо

$$M_p(f\Sigma_{\mathbb{A}}) \geq \inf_{\rho \in \text{ext}_p \text{ adm } \Sigma_{\mathbb{A}}} \int_{\mathbb{A}} \frac{\rho^p(x)}{Q(x)} dm(x) \quad (1.4)$$

для кожного кільця $\mathbb{A} = \mathbb{A}(x_0, \varepsilon_1, \varepsilon_2)$, $0 < \varepsilon_1 \leq \varepsilon_2 < d_0$, де $\Sigma_{\mathbb{A}}$ – сім'я всіх сфер $S(x_0, r)$, $r \in (\varepsilon_1, \varepsilon_2)$.

Гомеоморфізм $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ називають *нижнім Q -гомеоморфізмом відносно p -модуля в області D* , якщо умова (1.4) виконується для будь-якої точки $x_0 \in D$. Нижні Q -гомеоморфізми відносно p -модуля при $p = n$ називають нижніми Q -гомеоморфізмами (у точці $x_0 \in D$ чи в області D).

Теорія нижніх Q -гомеоморфізмів відносно p -модуля у просторі $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, при $p = n$ досліджувалась у роботах [8, 42], при $p > n - 1$ див. [28], при $p > n$ див. [14, 16], а також на комплексній площині при $1 < p < 2$ див. [18].

Останнім часом нижні і кільцеві Q -гомеоморфізми знайшли важливі застосування, як в теорії крайових задач для рівнянь Бельтрамі на площині, так і в теорії просторових гомеоморфізмів класів Соболева і більш загальних класів Орліча-Соболева, див. [2–5, 9, 12, 13, 15, 35, 44, 52]. Також теорія нижніх та кільцевих Q -гомеоморфізмів відносно p -модуля може бути застосована до відображень квазіконформних в середньому (див. [11, 27]).

На комплексній площині теорія кільцевих Q -гомеоморфізмів відносно p -модуля використовується при вивченні асимптотичних властивостей регулярних розв'язків нелінійних рівнянь Бельтрамі (див. [30, 63]). Також теорія кільцевих Q -гомеоморфізмів може бути застосована до дослідження відображень зі скінченним спотворенням, які належать класам Орліча-Соболева $W_{\text{loc}}^{1,\varphi}$ за умови типу умови Кальдерона, та, зокрема, класам Соболева $W_{\text{loc}}^{1,p}$ при $p > n - 1$, (див. [31]).

У наступній теоремі встановлено критерій належності гомеоморфізмів класу нижніх Q -гомеоморфізмів відносно p -модуля при $p > n - 1$. Вперше цей критерій було доведено при $p = n$ у роботі [8, теорема 2.1], див. також монографію [42, теорема 9.2], а також у просторі $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, при $p > n - 1$ див. [28, теорема 6.1].

Теорема 1.1 ([28]). *Нехай D – область в $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, $x_0 \in D$. Припустимо, що $Q : D \rightarrow (0, \infty)$ – вимірна функція. Гомеоморфізм $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ є нижнім Q -гомеоморфізмом відносно p -модуля у точці x_0 при $p > n - 1$ тоді і тільки тоді, коли*

$$M_p(f\Sigma_{\mathbb{A}}) \geq \int_{\varepsilon_1}^{\varepsilon_2} \frac{dr}{\|Q\|_{\frac{n-1}{p-n+1}}(x_0, r)} \quad \text{для всіх } 0 < \varepsilon_1 \leq \varepsilon_2 < d_0,$$

де $d_0 = \text{dist}(x_0, \partial D)$, $\Sigma_{\mathbb{A}}$ – сім'я всіх сфер $S(x_0, r)$, $r \in (\varepsilon_1, \varepsilon_2)$, і

$$\|Q\|_{\frac{n-1}{p-n+1}}(x_0, r) := \left(\int_{S(x_0, r)} Q^{\frac{n-1}{p-n+1}}(x) d\mathcal{A} \right)^{\frac{p-n+1}{n-1}}.$$

Інфімум в (1.4) досягається для функції

$$\rho_0(x) = \left(\frac{Q(x)}{\|Q\|_{\frac{n-1}{p-n+1}}(|x - x_0|)} \right)^{\frac{1}{p-n+1}}.$$

У наступній теоремі встановлено зв'язок між нижніми і кільцевими Q -гомеоморфізмами відносно p -модуля.

Теорема 1.2 ([17]). Нехай D – область в $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, $x_0 \in D$. Припустимо, що $Q : D \rightarrow (0, \infty)$ – вимірна за Лебегом функція така, що $\|Q\|_{\frac{n-1}{p-n+1}}(x_0, r) \neq \infty$ для м.в. $r \in (0, d_0)$, $d_0 = \text{dist}(x_0, \partial D)$, і $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ – нижній Q -гомеоморфізм відносно p -модуля у точці x_0 при $p > n - 1$. Тоді f є кільцевим Q_* -гомеоморфізмом відносно $\tilde{p}$ -модуля у точці x_0 при $\tilde{p} = \frac{p}{p-n+1}$ та $Q_*(x) = Q^{\frac{n-1}{p-n+1}}(x)$.

Наслідок 1.1. ([28]) У просторі $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, будь-який нижній Q -гомеоморфізм $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ відносно p -модуля у точці $x_0 \in D$ за умов $p > n - 1$ та $Q \in L_{\text{loc}}^{\frac{n-1}{p-n+1}}(D)$ є кільцевим Q_* -гомеоморфізмом відносно $\tilde{p}$ -модуля в точці x_0 при $\tilde{p} = \frac{p}{p-n+1}$ та $Q_*(x) = Q^{\frac{n-1}{p-n+1}}(x)$.

2. ПОВЕДІНКА НА НЕСКІНЧЕННОСТІ КІЛЬЦЕВИХ Q -ГОМЕОМОРФІЗМІВ

У цьому пункті наведено теореми про асимптотичну поведінку на нескінченності кільцевих Q -гомеоморфізмів відносно p -модуля, які є аналогами теореми Мартіо-Рікмана-Вайсяля про ріст на нескінченності квазірегулярних відображень (див. [39]). У роботі [62] було досліджено випадок при $p = n$.

Нижче наведено теорему про асимптотичну поведінку на нескінченності кільцевих Q -гомеоморфізмів, див. [62].

Нехай $R > 0$ і $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Для гомеоморфізму $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ покладемо

$$M(x_0, f, R) = \max_{|x-x_0|=R} |f(x) - f(x_0)|.$$

Теорема 2.1. ([62]) *Нехай $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ – кільцевий Q -гомеоморфізм у точці $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $r_0 > 0$ та $Q : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, \infty]$ – вимірна за Лебегом функція така, що середнє інтегральне значення $q_{x_0}(r)$ скінченне для м.в. $r > 0$. Тоді*

$$\liminf_{R \rightarrow \infty} M(x_0, R, f) \exp \left(- \int_{r_0}^R \frac{dt}{t q_{x_0}^{\frac{1}{n-1}}(t)} \right) > 0.$$

Наслідок 2.1. ([62]) *Нехай $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ – кільцевий Q -гомеоморфізм у точці $x_0 \in \mathbb{R}^n$ та для деяких чисел $r_0 > 0$, $\kappa = \kappa(x_0) > 0$ виконується умова $q_{x_0}(t) \leq \kappa$ для м.в. $t \in [r_0, \infty)$. Тоді*

$$\liminf_{R \rightarrow \infty} \frac{M(x_0, R, f)}{R^\gamma} > 0,$$

де $\gamma = \kappa^{\frac{1}{1-n}}$.

Наслідок 2.2. ([62]) *Нехай $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ – кільцевий Q -гомеоморфізм у точці $x_0 \in \mathbb{R}^n$ та для деяких чисел $r_0 > 1$, $\kappa = \kappa(x_0) > 0$ виконується умова $q_{x_0}(t) \leq \kappa (\ln t)^{n-1}$ для м.в. $t \in [r_0, \infty)$. Тоді*

$$\liminf_{R \rightarrow \infty} \frac{M(x_0, R, f)}{(\ln R)^\gamma} > 0,$$

де $\gamma = \kappa^{\frac{1}{1-n}}$.

Нижче наведено результати робіт [58], [60] про асимптотичну поведінку на нескінченності кільцевих Q -гомеоморфізмів відносно p -модуля при $p > n$.

Надалі для множини $E \subset \mathbb{R}^n$ через $\text{diam } E$ будемо позначати евклідовий діаметр E .

Теорема 2.2. ([58]) *Припустимо, що $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ – кільцевий Q -гомеоморфізм відносно p -модуля у точці x_0 при $p > n$, де x_0 – деяка точка простору $\mathbb{R}^n$, та для деяких чисел $r_0 > 0$, $\kappa = \kappa(x_0) > 0$ виконується умова*

$$q_{x_0}(t) \leq \kappa t^\alpha \tag{2.1}$$

для м.в. $t \in [r_0, +\infty)$.

1) Якщо $\alpha \in [0, p - n)$, то

$$\liminf_{R \rightarrow \infty} \frac{\text{diam } f(B(x_0, R))}{R^{\frac{p-n-\alpha}{p-n}}} \geq 2 \kappa^{\frac{1}{n-p}} \left(\frac{p-n}{p-n-\alpha} \right)^{\frac{p-1}{p-n}} > 0. \quad (2.2)$$

2) Якщо $\alpha = p - n$, то

$$\liminf_{R \rightarrow \infty} \frac{\text{diam } f(B(x_0, R))}{(\ln R)^{\frac{p-1}{p-n}}} \geq 2 \kappa^{\frac{1}{n-p}} \left(\frac{p-n}{p-1} \right)^{\frac{p-1}{p-n}} > 0, \quad (2.3)$$

де $B(x_0, R) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x - x_0| \leq R\}$.

При $\alpha = 0$ з теореми 2.2 безпосередньо випливає наступне твердження.

Наслідок 2.3. ([58]) Припустимо, що $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ – кільцевий Q -гомеоморфізм відносно p -модуля у точці x_0 при $p > n$, де x_0 – деяка точка простору $\mathbb{R}^n$, та для деяких чисел $r_0 > 0$, $\kappa = \kappa(x_0) > 0$ виконується умова $q_{x_0}(t) \leq \kappa$ для м.в. $t \in [r_0, +\infty)$. Тоді

$$\liminf_{R \rightarrow \infty} \frac{\text{diam } f(B(x_0, R))}{R} \geq 2 \kappa^{\frac{1}{n-p}} > 0,$$

де $B(x_0, R) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x - x_0| \leq R\}$.

Розглянемо наступний приклад.

Приклад 2.1. Нехай $x_0 \in \mathbb{R}^n$ та $f_1 : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, де

$$f_1(x) = \begin{cases} \kappa^{\frac{1}{n-p}} \left(\frac{p-n}{p-n-\alpha} \right)^{\frac{p-1}{p-n}} |x - x_0|^{\frac{p-n-\alpha}{p-n}} \frac{x - x_0}{|x - x_0|}, & x \neq x_0, \\ 0, & x = x_0. \end{cases} \quad (2.4)$$

Зауважимо, що відображення f_1 відображає кулю $B(x_0, R)$ на кулю $B(0, \tilde{R})$, де

$$\tilde{R} = \kappa^{\frac{1}{n-p}} \left(\frac{p-n}{p-n-\alpha} \right)^{\frac{p-1}{p-n}} R^{\frac{p-n-\alpha}{p-n}}.$$

Легко бачити, що

$$\begin{aligned} \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{\text{diam } f_1(B(x_0, R))}{R^{\frac{p-n-\alpha}{p-n}}} &= \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{\text{diam } B(0, \tilde{R})}{R^{\frac{p-n-\alpha}{p-n}}} = \\ &= \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{2\tilde{R}}{R^{\frac{p-n-\alpha}{p-n}}} = 2\kappa^{\frac{1}{n-p}} \left(\frac{p-n}{p-n-\alpha} \right)^{\frac{p-1}{p-n}}. \end{aligned}$$

Покажемо, що відображення f_1 є кільцевим Q -гомеоморфізмом відносно p -модуля з функцією $Q(x) = \kappa |x - x_0|^\alpha$ у точці x_0 . Зрозуміло,

що $q_{x_0}(t) = \kappa t^\alpha$. Розглянемо кільце $\mathbb{A}(x_0, r_1, r_2)$, $0 < r_1 < r_2 < \infty$. Зауважимо, що гомеоморфізм f_1 відображає кільце $\mathbb{A}(x_0, r_1, r_2)$ на кільце $\tilde{\mathbb{A}}(0, \tilde{r}_1, \tilde{r}_2)$, де

$$\tilde{r}_i = \kappa^{\frac{1}{n-p}} \left(\frac{p-n}{p-n-\alpha} \right)^{\frac{p-1}{p-n}} r_i^{\frac{p-n-\alpha}{p-n}}, \quad i = 1, 2.$$

Позначимо через Γ множину всіх кривих, які з'єднують сфери $S(x_0, r_1)$ та $S(x_0, r_2)$ у кільці $\mathbb{A}(x_0, r_1, r_2)$. Тоді обчислимо p -модуль сім'ї кривих $f_1\Gamma$:

$$M_p(f_1\Gamma) = \omega_{n-1} \left(\frac{p-n}{p-1} \right)^{p-1} \left(\tilde{r}_2^{\frac{p-n}{p-1}} - \tilde{r}_1^{\frac{p-n}{p-1}} \right)^{1-p}$$

(див., напр., формулу (2) у [25]). Підставляючи у вищеведену нерівність значення $\tilde{r}_1$ та $\tilde{r}_2$, означені вище, отримаємо

$$M_p(f_1\Gamma) = \omega_{n-1} \kappa \left(\frac{p-n-\alpha}{p-1} \right)^{p-1} \left(r_2^{\frac{p-n-\alpha}{p-1}} - r_1^{\frac{p-n-\alpha}{p-1}} \right)^{1-p}.$$

Зауважимо, що останню нерівність можна переписати у вигляді

$$M_p(f_1\Gamma) = \frac{\omega_{n-1}}{\left(\int_{r_1}^{r_2} \frac{dt}{t^{\frac{n-1}{p-1}} q_{x_0}^{\frac{1}{p-1}}(t)} \right)^{p-1}},$$

де $q_{x_0}(t) = \kappa t^\alpha$.

Отже, за твердженням 1.1 гомеоморфізм f_1 є кільцевим Q -гомеоморфізмом відносно p -модуля при $p > n$ з функцією $Q(x) = \kappa |x - x_0|^\alpha$ у точці x_0 .

Зауваження 2.1. Приклад 2.1 показує, що оцінка (2.2) у теоремі 2.2 є точною, тобто досягається на відображенні (2.4).

Теорема 2.3. ([60]) *Припустимо, що $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ – кільцевий Q -гомеоморфізм відносно p -модуля у точці x_0 при $p > n$, де x_0 – деяка точка простору $\mathbb{R}^n$, та для деяких чисел $r_0 > 1$, $\kappa = \kappa(x_0) > 0$ виконується умова*

$$q_{x_0}(t) \leq \kappa t^{p-n} (\ln t)^\alpha \quad (2.5)$$

для м.в. $t \in [r_0, +\infty)$.

1) Якщо $\alpha \in [0, p-1)$, то

$$\liminf_{R \rightarrow \infty} \frac{\text{diam } f(B(x_0, R))}{(\ln R)^{\frac{p-\alpha-1}{p-n}}} \geq 2 \kappa^{\frac{1}{n-p}} \left(\frac{p-n}{p-\alpha-1} \right)^{\frac{p-1}{p-n}} > 0. \quad (2.6)$$

2) Якщо $\alpha = p - 1$, то

$$\liminf_{R \rightarrow \infty} \frac{\text{diam } f(B(x_0, R))}{(\ln \ln R)^{\frac{p-1}{p-n}}} \geq 2 \kappa^{\frac{1}{n-p}} \left(\frac{p-n}{p-1} \right)^{\frac{p-1}{p-n}} > 0, \quad (2.7)$$

де $B(x_0, R) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x - x_0| \leq R\}$.

Зауваження 2.2. У теоремах 2.2, 2.3 оцінки (2.3), (2.6), (2.7) є точними. Аналогічно до прикладу 2.1 можна побудувати приклади кільцевих Q -гомеоморфізмів відносно p -модуля при $p > n$, на яких вони досягаються.

Зауваження 2.3. При виконанні умов теорем 2.2 або 2.3 $\text{diam } f(B(x_0, R)) \rightarrow \infty$ при $R \rightarrow \infty$.

3. ТЕОРЕМИ НЕІСНУВАННЯ КІЛЬЦЕВИХ Q -ГОМЕОМОРФІЗМІВ

У цьому пункті наведено теореми про неіснування кільцевих Q -гомеоморфізмів відносно p -модуля при $p \geq n$.

Теорема 3.1. Нехай x_0 – деяка точка простору $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, $r_0 > 0$ та $Q: \mathbb{R}^n \rightarrow [0, \infty]$ – вимірна за Лебегом функція така, що середнє інтегральне значення $q_{x_0}(r)$ скінченне для м.в. $r > 0$. Тоді не існує кільцевого Q -гомеоморфізму $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ у точці x_0 з асимптотичною умовою

$$\liminf_{R \rightarrow \infty} M(x_0, R, f) \exp \left(- \int_{r_0}^R \frac{dt}{t q_{x_0}^{\frac{1}{n-1}}(t)} \right) = 0.$$

Наслідок 3.1. Нехай x_0 – деяка точка простору $\mathbb{R}^n$ ($n \geq 2$) та для деяких чисел $r_0 > 0$, $\kappa = \kappa(x_0) > 0$ виконується умова $q_{x_0}(t) \leq \kappa$ для м.в. $t \in [r_0, +\infty)$. Тоді не існує кільцевого Q -гомеоморфізму $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ у точці x_0 з асимптотичною умовою

$$\liminf_{R \rightarrow \infty} \frac{M(x_0, R, f)}{R^\gamma} = 0,$$

де $\gamma = \kappa^{\frac{1}{1-n}}$.

Наслідок 3.2. Нехай x_0 – деяка точка простору $\mathbb{R}^n$ ($n \geq 2$) та для деяких чисел $r_0 > 1$, $\kappa = \kappa(x_0) > 0$ виконується умова

$$q_{x_0}(t) \leq \kappa (\ln t)^{n-1}$$

для м.в. $t \in [r_0, +\infty)$. Тоді не існує кільцевого Q -гомеоморфізму $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ у точці x_0 з асимптотичною умовою

$$\liminf_{R \rightarrow \infty} \frac{M(x_0, R, f)}{(\ln R)^\gamma} = 0,$$

де $\gamma = \kappa^{\frac{1}{1-n}}$.

Теорема 3.2. Нехай x_0 – деяка точка простору $\mathbb{R}^n$ ($n \geq 2$) та для деяких чисел $r_0 > 0$, $\kappa = \kappa(x_0) > 0$ виконується умова $q_{x_0}(t) \leq \kappa t^\alpha$ для м.в. $t \in [r_0, +\infty)$.

1) Якщо $\alpha \in [0, p - n)$, то не існує кільцевого Q -гомеоморфізму $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ відносно p -модуля при $p > n$ у точці x_0 з асимптотичною умовою

$$\liminf_{R \rightarrow \infty} \frac{M(x_0, f, R)}{R^{\frac{p-n-\alpha}{p-n}}} = 0.$$

2) Якщо $\alpha = p - n$, то не існує кільцевого Q -гомеоморфізму $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ відносно p -модуля при $p > n$ у точці x_0 з асимптотичною умовою

$$\liminf_{R \rightarrow \infty} \frac{M(x_0, f, R)}{(\ln R)^{\frac{p-1}{p-n}}} = 0.$$

Наслідок 3.3. Нехай x_0 – деяка точка простору $\mathbb{R}^n$ ($n \geq 2$) та для деяких чисел $r_0 > 0$, $\kappa = \kappa(x_0) > 0$ виконується умова $q_{x_0}(t) \leq \kappa$ для м.в. $t \in [r_0, +\infty)$. Тоді не існує кільцевого Q -гомеоморфізму $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ відносно p -модуля при $p > n$ у точці x_0 з асимптотичною умовою

$$\liminf_{R \rightarrow \infty} \frac{\text{diam } f(B(x_0, R))}{R} = 0.$$

Теорема 3.3. Нехай x_0 – деяка точка простору $\mathbb{R}^n$ ($n \geq 2$) та для деяких чисел $r_0 > 1$, $\kappa = \kappa(x_0) > 0$ виконується умова

$$q_{x_0}(t) \leq \kappa t^{p-n} (\ln t)^\alpha$$

для м.в. $t \in [r_0, +\infty)$.

1) Якщо $\alpha \in [0, p - 1)$, то не існує кільцевого Q -гомеоморфізму $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ відносно p -модуля при $p > n$ у точці x_0 з асимптотичною умовою

$$\liminf_{R \rightarrow \infty} \frac{M(x_0, f, R)}{(\ln R)^{\frac{p-\alpha-1}{p-n}}} = 0.$$

2) Якщо $\alpha = p - 1$, то не існує кільцевого Q -гомеоморфізму $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ відносно p -модуля при $p > n$ у точці x_0 з асимптотичною

умовою

$$\liminf_{R \rightarrow \infty} \frac{M(x_0, f, R)}{(\ln \ln R)^{\frac{p-1}{p-n}}} = 0.$$

4. ПОВЕДІНКА НА НЕСКІНЧЕННОСТІ НИЖНІХ Q -ГОМЕОМОРФІЗМІВ

У цьому пункті наведено теореми про асимптотичну поведінку на нескінченності нижніх Q -гомеоморфізмів відносно p -модуля.

Нижче наведено теорему про асимптотичну поведінку на нескінченності нижніх Q -гомеоморфізмів, яка є аналогом результату Мартіо-Рікмана-Вайсяля про "сильне" зростання в околі нескінченності відображень з обмеженим спотворенням (див. [39]).

Теорема 4.1. ([17]) *Нехай $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ – нижній Q -гомеоморфізм у точці $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $r_0 > 0$ та $Q : \mathbb{R}^n \rightarrow (0, \infty)$ – вимірна за Лебегом функція така, що $\|Q\|_{n-1}(x_0, r) \neq \infty$ для м.в. $r > 0$. Тоді*

$$\liminf_{R \rightarrow \infty} M(x_0, R, f) \exp \left(-\omega_{n-1}^{\frac{1}{n-1}} \int_{r_0}^R \frac{dt}{\|Q\|_{n-1}(x_0, t)} \right) = M_0 > 0, \quad (4.1)$$

$$de \|Q\|_{n-1}(x_0, t) = \left(\int_{S(x_0, t)} Q^{n-1}(x) d\mathcal{A} \right)^{\frac{1}{n-1}}.$$

Наведемо деякі позначення. Для цілих значень $k \geq 0$ покладемо

$$e_0 = 1, \quad e_1 = e, \quad e_2 = e^e, \quad \dots, \quad e_{k+1} = \exp e_k$$

$$\text{і} \quad \ln_0 t = t, \quad \ln_1 t = \ln t, \quad \ln_2 t = \ln \ln t, \quad \dots, \quad \ln_{k+1} t = \ln \ln_k t.$$

Наслідок 4.1. ([17]) *Нехай $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ – нижній Q -гомеоморфізм у деякій точці $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Якщо для деяких чисел $r_0 > e_N$, $C_0 = C_0(x_0) > 0$ виконується умова*

$$\|Q\|_{n-1}(x_0, r) \leq C_0 \prod_{k=0}^N \ln_k r$$

для м.в. $r \in [r_0, \infty)$, то

$$\liminf_{R \rightarrow \infty} \frac{M(x_0, R, f)}{(\ln_N R)^\gamma} = M_0 > 0,$$

$$de \gamma = \frac{\omega_{n-1}^{\frac{1}{n-1}}}{C_0}.$$

Наслідок 4.2. ([17]) *Якщо для деяких чисел $r_0 > 0$, $C_0 = C_0(x_0) > 0$ виконується умова $\|Q\|_{n-1}(x_0, r) \leq C_0 r$ для м.в. $r \in [r_0, \infty)$, то*

$$\liminf_{R \rightarrow \infty} \frac{M(x_0, R, f)}{R^\gamma} = M_0 > 0,$$

$$\text{де } \gamma = \frac{\frac{1}{n-1}}{C_0}.$$

Нижче наведено теореми про асимптотичну поведінку на нескінченності нижніх Q -гомеоморфізмів відносно p -модуля при $n - 1 < p < n$. Аналогічні результати отримано на комплексній площині при $1 < p < 2$ у роботі [18].

Теорема 4.2. *Припустимо, що $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ – нижній Q -гомеоморфізм відносно p -модуля у точці x_0 при $n - 1 < p < n$, де x_0 – деяка точка простору $\mathbb{R}^n$, та для деяких чисел $r_0 > 0$, $C_0 = C_0(x_0) > 0$ виконується умова*

$$\|Q\|_{\frac{n-1}{p-n+1}}(x_0, t) \leq C_0 t^\beta \quad (4.2)$$

для м.в. $t \in [r_0, +\infty)$.

1) *Якщо $\beta \in [p - n + 1, 1)$, то*

$$\liminf_{R \rightarrow \infty} \frac{\text{diam } f(B(x_0, R))}{R^{\frac{1-\beta}{n-p}}} \geq 2 C_0^{\frac{1}{p-n}} \lambda_{n,p} \left(\frac{n-p}{1-\beta} \right)^{\frac{1}{n-p}} > 0. \quad (4.3)$$

2) *Якщо $\beta = 1$, то*

$$\liminf_{R \rightarrow \infty} \frac{\text{diam } f(B(x_0, R))}{(\ln R)^{\frac{1}{n-p}}} \geq 2 C_0^{\frac{1}{p-n}} \lambda_{n,p} (n-p)^{\frac{1}{n-p}} > 0, \quad (4.4)$$

де $B(x_0, R) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x - x_0| \leq R\}$, $\lambda_{n,p} = \omega_{n-1}^{\frac{p-n+1}{(n-1)(n-p)}}$.

Доведення. Дійсно, за теоремою 1.2 нижній Q -гомеоморфізм відносно p -модуля у точці x_0 при $n - 1 < p < n$ є кільцевим Q_* -гомеоморфізмом відносно $\tilde{p}$ -модуля у точці x_0 з параметром $\tilde{p} = \frac{p}{p-n+1} > n$ при $Q_*(x) = Q_{\frac{n-1}{p-n+1}}(x)$. Застосовуючи теорему 2.2 з параметрами $\kappa = \frac{C_0^{\frac{n-1}{p-n+1}}}{\omega_{n-1}}$ та $\alpha = \frac{(n-1)(\beta-p+n-1)}{p-n+1}$, приходимо до висновків теореми. $\square$

Поклавши у теоремі 4.2 $\beta = p - n + 1$, отримаємо наступне твердження.

Наслідок 4.3. *Припустимо, що $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ – нижній Q -гомеоморфізм відносно p -модуля у точці x_0 при $n - 1 < p < n$, де x_0 – деяка точка простору $\mathbb{R}^n$, та для деяких чисел $r_0 > 0$, $C_0 = C_0(x_0) > 0$*

виконується умова $\|Q\|_{\frac{n-1}{p-n+1}}(x_0, t) \leq C_0 t^{p-n+1}$ для м.в. $t \in [r_0, +\infty)$.

Тоді

$$\liminf_{R \rightarrow \infty} \frac{\text{diam } f(B(x_0, R))}{R} \geq 2 C_0^{\frac{1}{p-n}} \lambda_{n,p} > 0,$$

де $B(x_0, R) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x - x_0| \leq R\}$, $\lambda_{n,p} = \omega_{n-1}^{\frac{p-n+1}{(n-1)(n-p)}}$.

Теорема 4.3. Припустимо, що $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ – нижній Q -гомеоморфізм відносно p -модуля у точці x_0 при $n-1 < p < n$, де x_0 – деяка точка простору $\mathbb{R}^n$, та для деяких чисел $r_0 > 1$, $C_0 = C_0(x_0) > 0$ виконується умова

$$\|Q\|_{\frac{n-1}{p-n+1}}(x_0, t) \leq C_0 t (\ln t)^\beta \quad (4.5)$$

для м.в. $t \in [r_0, +\infty)$.

1) Якщо $\beta \in [0, 1)$, то

$$\liminf_{R \rightarrow \infty} \frac{\text{diam } f(B(x_0, R))}{(\ln R)^{\frac{1-\beta}{n-p}}} \geq 2 C_0^{\frac{1}{p-n}} \lambda_{n,p} \left(\frac{n-p}{1-\beta} \right)^{\frac{1}{n-p}} > 0. \quad (4.6)$$

2) Якщо $\beta = 1$, то

$$\liminf_{R \rightarrow \infty} \frac{\text{diam } f(B(x_0, R))}{(\ln \ln R)^{\frac{1}{n-p}}} \geq 2 C_0^{\frac{1}{p-n}} \lambda_{n,p} (n-p)^{\frac{1}{n-p}} > 0, \quad (4.7)$$

де $B(x_0, R) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x - x_0| \leq R\}$, $\lambda_{n,p} = \omega_{n-1}^{\frac{p-n+1}{(n-1)(n-p)}}$.

Доведення. Дійсно, за теоремою 1.2 нижній Q -гомеоморфізм відносно p -модуля у точці x_0 при $n-1 < p < n$ є кільцевим Q_* -гомеоморфізмом відносно $\tilde{p}$ -модуля у точці x_0 з параметром $\tilde{p} = \frac{p}{p-n+1} > n$ при $Q_*(x) =$

$Q^{\frac{n-1}{p-n+1}}(x)$. Застосовуючи теорему 2.3 з параметрами $\kappa = \frac{C_0^{\frac{n-1}{p-n+1}}}{\omega_{n-1}}$ та $\alpha = \frac{\beta(n-1)}{p-n+1}$, приходимо до висновків теореми. $\square$

Зауваження 4.1. У теоремах 4.2, 4.3 оцінки (4.3), (4.4), (4.6), (4.7) є точними. Можна побудувати приклади нижніх Q -гомеоморфізмів відносно p -модуля при $n-1 < p < n$, на яких вони досягаються.

5. ТЕОРЕМИ НЕІСНУВАННЯ НИЖНІХ Q -ГОМЕОМОРФІЗМІВ

У цьому пункті наведено теореми про неіснування нижніх Q -гомеоморфізмів відносно p -модуля при $n-1 < p \leq n$. При $1 < p < 2$ на комплексній площині аналогічні результати отримано у роботі [18].

Теорема 5.1. Нехай x_0 – деяка точка простору $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, $r_0 > 0$ та $Q : \mathbb{R}^n \rightarrow (0, \infty)$ – вимірна за Лебегом функція така, що $\|Q\|_{n-1}(x_0, r) \neq \infty$ для м.в. $r > 0$. Тоді не існує нижнього Q -гомеоморфізму $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ у точці x_0 з асимптотичною умовою

$$\liminf_{R \rightarrow \infty} M(x_0, R, f) \exp \left(-\omega_{n-1}^{\frac{1}{n-1}} \int_{r_0}^R \frac{dt}{\|Q\|_{n-1}(x_0, t)} \right) = 0,$$

$$de \|Q\|_{n-1}(x_0, t) = \left(\int_{S(x_0, t)} Q^{n-1}(x) d\mathcal{A} \right)^{\frac{1}{n-1}}.$$

Наслідок 5.1. Нехай x_0 – деяка точка простору $\mathbb{R}^n$ ($n \geq 2$) та для деяких чисел $r_0 > e_N$, $C_0 = C_0(x_0) > 0$ виконується умова

$$\|Q\|_{n-1}(x_0, r) \leq C_0 \prod_{k=0}^N \ln_k r$$

для м.в. $t \in [r_0, \infty)$. Тоді не існує нижнього Q -гомеоморфізму $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ у точці x_0 з асимптотичною умовою

$$\liminf_{R \rightarrow \infty} \frac{M(x_0, R, f)}{(\ln_N R)^\gamma} = 0,$$

$$de \gamma = \frac{\omega_{n-1}^{\frac{1}{n-1}}}{C_0}.$$

Наслідок 5.2. Нехай x_0 – деяка точка простору $\mathbb{R}^n$ ($n \geq 2$) та для деяких чисел $r_0 > 0$, $C_0 = C_0(x_0) > 0$ виконується умова $\|Q\|_{n-1}(x_0, r) \leq C_0 r$ для м.в. $t \in [r_0, \infty)$. Тоді не існує нижнього Q -гомеоморфізму $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ у точці x_0 з асимптотичною умовою

$$\liminf_{R \rightarrow \infty} \frac{M(x_0, R, f)}{R^\gamma} = 0,$$

$$de \gamma = \frac{\omega_{n-1}^{\frac{1}{n-1}}}{C_0}.$$

Теорема 5.2. Нехай x_0 – деяка точка простору $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, та для деяких чисел $r_0 > 0$, $C_0 = C_0(x_0) > 0$ виконується умова

$$\|Q\|_{\frac{n-1}{p-n+1}}(x_0, t) \leq C_0 t^\beta$$

для м.в. $t \in [r_0, +\infty)$.

1) Якщо $\beta \in [p - n + 1, 1)$, то не існує нижнього Q -гомеоморфізму $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ відносно p -модуля при $n - 1 < p < n$ у точці x_0 з асимптотичною умовою

$$\liminf_{R \rightarrow \infty} \frac{M(x_0, f, R)}{R^{\frac{1-\beta}{n-p}}} = 0.$$

2) Якщо $\beta = 1$, то не існує нижнього Q -гомеоморфізму $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ відносно p -модуля при $n - 1 < p < n$ у точці x_0 з асимптотичною умовою

$$\liminf_{R \rightarrow \infty} \frac{M(x_0, f, R)}{(\ln R)^{\frac{1}{n-p}}} = 0.$$

Наслідок 5.3. Нехай x_0 – деяка точка простору $\mathbb{R}^n$ ($n \geq 2$) та для деяких чисел $r_0 > 0$, $C_0 = C_0(x_0) > 0$ виконується умова

$$\|Q\|_{\frac{n-1}{p-n+1}}(x_0, t) \leq C_0 t^{p-n+1}$$

для м.в. $t \in [r_0, +\infty)$. Тоді не існує нижнього Q -гомеоморфізму $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ відносно p -модуля при $n - 1 < p < n$ у точці x_0 з асимптотичною умовою

$$\liminf_{R \rightarrow \infty} \frac{\text{diam } f(B(x_0, R))}{R} = 0.$$

Теорема 5.3. Нехай x_0 – деяка точка простору $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, та для деяких чисел $r_0 > 1$, $C_0 = C_0(x_0) > 0$ виконується умова $\|Q\|_{\frac{n-1}{p-n+1}}(x_0, t) \leq C_0 t (\ln t)^\beta$ для м.в. $t \in [r_0, +\infty)$.

1) Якщо $\beta \in [0, 1)$, то не існує нижнього Q -гомеоморфізму $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ відносно p -модуля при $n - 1 < p < n$ у точці x_0 з асимптотичною умовою

$$\liminf_{R \rightarrow \infty} \frac{M(x_0, f, R)}{(\ln R)^{\frac{1-\beta}{n-p}}} = 0.$$

2) Якщо $\beta = 1$, то не існує нижнього Q -гомеоморфізму $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ відносно p -модуля при $n - 1 < p < n$ у точці x_0 з асимптотичною умовою

$$\liminf_{R \rightarrow \infty} \frac{M(x_0, f, R)}{(\ln \ln R)^{\frac{1}{n-p}}} = 0.$$

ЛІТЕРАТУРА

- [1] Д. А. Ковтонюк, Р. Салімов, Е. Севостьянов. *К теории отображений классов Соболева и Орлича-Соболева*. Наукова думка, Київ, 2013.
- [2] В. Рязанов, Р. Салімов, Е. Севостьянов. О классах Орлича-Соболева и отображениях с ограниченным интегралом Дирихле. *Укр. мат. журн.*, 65(9):1254–1265, 2013.
- [3] В. Рязанов, Р. Салімов, Е. Севостьянов. Нормальность классов Орлича-Соболева. *Укр. мат. журн.*, 68(1):106–116, 2016.
- [4] Е. Афанасьева, В. Рязанов, Р. Салімов. К теории отображений класса Соболева с критическим показателем. *Український математичний вісник*, 15(2):154–176, 2018.
- [5] Е. Афанасьева, В. Рязанов, Р. Салімов. К теории классов Соболева с критическим показателем. *Доповіді НАН України*, (8):3–8, 2019.
- [6] А. Игнатьев, В. Рязанов. Конечное среднее колебание в теории отображений. *Український математичний вісник*, 2(3):395–417, 2005.
- [7] А. Игнатьев, В. Рязанов. К теории граничного поведения пространственных отображений. *Український математичний вісник*, 3(2):199–211, 2006.
- [8] Д. Ковтонюк, В. Рязанов. К теории нижних Q -гомеоморфизмов. *Український математичний вісник*, 5(2):157–181, 2008.
- [9] Е. Афанасьева, Р. Салімов. Асимптотическое поведение на бесконечности решений уравнения Бельтрами. *Збірник праць Ін-ту математики НАНУ*, 12(3):9–16, 2015.
- [10] Р. Салімов, Б. Клищук. Экстремальная задача для площади образа круга. *Доповіді НАН України*, (10):22–27, 2016.
- [11] В. Кругликов. Ёмкости конденсаторов и пространственные отображения, квазиконформные в среднем. *Мат. сб.*, 130(2):185–206, 1986.
- [12] Р. Салімов. Асимптотическое поведение классов Орлича-Соболева на бесконечности. *Збірник праць Ін-ту математики НАНУ*, 12(4):273–284, 2015.
- [13] Р. Салімов. О новом условии конечной липшицевости классов Орлича-Соболева. *Математичні Студії*, 44(1):27–35, 2015.
- [14] Р. Салімов. Нижние Q -гомеоморфизмы относительно p -модуля. *Український математичний вісник*, 12(4):484–510, 2015.
- [15] Р. Салімов. Метрические свойства классов Орлича-Соболева. *Український математичний вісник*, 13(1):129–141, 2016.
- [16] Р. Салімов. Об оценке меры образа шара для нижних Q -гомеоморфизмов. *Доповіді НАН України*, 12(1):19–25, 2016.
- [17] Р. Салімов. *Метод неконформного модуля у теорії відображень зі скінченним спотворенням*. Рукопис дис. докт. фіз.-мат. наук, 2021.
- [18] М. Стефанчук. Про асимптотичну поведінку на нескінченності нижніх Q -гомеоморфізмів відносно p -модуля на комплексній площині. *Праці ПММ НАН України*, 38(2):103–118, 2024.
- [19] L. V. Ahlfors. *Lectures on quasiconformal mappings*. Number 10 in Van Nostrand Mathematical Studies. D. Van Nostrand Co., Inc., Toronto, Ont.-New York-London, 1966.
- [20] C. J. Bishop, V. Ya. Gutlyanskii, O. Martio, M. Vuorinen. On conformal dilatation in space. *Intern. Journ. Math. and Math. Scie.*, 22:1397–1420, 2003.
- [21] M. Cristea. Local homeomorphisms satisfying generalized modular inequalities. *Complex Variables and Elliptic Equations*, 59(2):232–246, 2014.

- [22] M. Cristea. Some properties of open discrete generalized ring mappings. *Complex Variables and Elliptic Equations*, 61(5):623–643, 2016.
- [23] M. Cristea. Elimination results for mappings satisfying generalized modular inequalities. *Complex Variables and Elliptic Equations*, 64(4):676–684, 2019.
- [24] F. W. Gehring. Rings and quasiconformal mappings in space. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 103:353–393, 1962.
- [25] F. W. Gehring. Lipschitz mappings and the p -capacity of ring in n -space. *Advances in the theory of Riemann surfaces (Proc. Conf. Stonybrook, N.Y., 1969)*, *Ann. of Math. Studies*, 66:175–193, 1971.
- [26] A. Golberg. Differential properties of (α, Q) -homeomorphisms. *Further Progress in Analysis, Proc. 6th ISAAC Congr.*, pages 218–228, 2009.
- [27] A. Golberg. Integrally quasiconformal mappings in space. *Збірник праць Ін-ту математики НАНУ*, 7(2):53–64, 2010.
- [28] A. Golberg, R. Salimov. Topological mappings of integrally bounded p -moduli. *Ann. Univ. Bucharest, Ser. Math.*, 3 (LXI):49–66, 2012.
- [29] A. Golberg, R. Salimov. Logarithmic Holder continuity of ring homeomorphisms with controlled p -module. *Complex Variables and Elliptic Equations*, 59(1):91–98, 2014.
- [30] A. Golberg, R. Salimov. Nonlinear Beltrami equation. *Complex Variables and Elliptic Equations*, 65(1):6–21, 2019.
- [31] A. Golberg, R. Salimov, E. Sevost'yanov. Distortion estimates under mappings with controlled p -module. *Ann. Univ. Bucharest, Ser. Math.*, 5 (LXIII):95–114, 2014.
- [32] A. Golberg, R. Salimov, E. Sevost'yanov. Singularities of discrete open mappings with controlled p -module. *J. Anal. Math.*, 127:303–328, 2015.
- [33] A. Golberg, R. Salimov, E. Sevost'yanov. Normal families of discrete open mappings with controlled p -module. *Contemporary Mathematics*, 667:83–103, 2016.
- [34] A. Golberg, R. Salimov, E. Sevost'yanov. Poletskii type inequality for mappings from the Orlicz-Sobolev classes. *Complex Analysis and Operator Theory*, 10:881–901, 2016.
- [35] A. Golberg, R. Salimov, E. Sevost'yanov. Poletskii type inequality for mappings from the Orlicz-Sobolev classes. *Complex Analysis and Operator Theory*, 10:881–901, 2016.
- [36] A. Golberg, R. Salimov, E. Sevost'yanov. Estimates for Jacobian and dilatation coefficients of open discrete mappings with controlled p -module. *Complex Analysis and Operator Theory*, 11(7):1521–1542, 2017.
- [37] B. Klishchuk. On Power-Law Behavior of Some Mapping Class at Infinity. *Journal of Mathematical Sciences*, 268(2):192–198, 2022.
- [38] O. Lehto, K. Virtanen. *Quasiconformal mappings in the Plane*. Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1973.
- [39] O. Martio, S. Rickman, J. Väisälä. Distortion and singularities of quasiregular mappings. *Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A1. Math.*, 465:1–13, 1970.
- [40] O. Martio, V. Ryazanov, U. Srebro, E. Yakubov. Mappings with finite length distortion. *J. Anal. Math.*, 93:215–236, 2004.
- [41] O. Martio, V. Ryazanov, U. Srebro, E. Yakubov. On Q -homeomorphisms. *Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A1. Math.*, 30:49–69, 2005.
- [42] O. Martio, V. Ryazanov, U. Srebro, E. Yakubov. *Moduli in Modern Mapping Theory*. Springer Monographs in Mathematics. Springer, New York, 2009.
- [43] I. Petkov, R. Salimov, M. Stefanchuk. On the distortion of the disk image diameter. *Journal of Mathematical Sciences*, 274(3):352–369, 2023.

- [44] V. Ryazanov, R. Salimov, U. Srebro, E. Yakubov. On Boundary Value Problems for the Beltrami Equations. *Contemporary Mathematics*, 591:211–242, 2013.
- [45] V. Ryazanov, U. Srebro, E. Yakubov. *Degenerate Beltrami equation and radial Q -homeomorphisms*, volume 369. Preprint, Department of Mathematics, University of Helsinki, 2003.
- [46] V. Ryazanov, U. Srebro, E. Yakubov. Beltrami equation and FMO functions. *Contemporary Mathematics*, 382:357–364, 2005.
- [47] V. Ryazanov, U. Srebro, E. Yakubov. On ring solutions of Beltrami equation. *J. Anal. Math.*, 96:117–150, 2005.
- [48] V. Ryazanov, U. Srebro, E. Yakubov. Finite mean oscillation and the Beltrami equation. *Israel J. Math.*, 153:247–266, 2006.
- [49] V. Ryazanov, U. Srebro, E. Yakubov. On the theory of the Beltrami equation. *Ukrainian Mathematical Journal*, 58(11):1786–1798, 2006.
- [50] V. Ryazanov, U. Srebro, E. Yakubov. The Beltrami equation and ring homeomorphisms. *Ukrain. Math. Bull.*, 4(1):79–115, 2007.
- [51] R. Salimov. ACL and differentiability of Q -homeomorphisms. *Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A1. Math.*, 33:295–301, 2008.
- [52] R. Salimov. On regular homeomorphisms in the plane. *Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A1. Math.*, 35:285–289, 2010.
- [53] R. Salimov. One property of ring Q -homeomorphisms with respect to a p -module. *Ukrainian Mathematical Journal*, 65(5):806–813, 2013.
- [54] R. Salimov. To a theory of ring Q -homeomorphisms with respect to a p -modulus. *Journal of Mathematical Sciences*, 196:679–692, 2014.
- [55] R. Salimov, B. Klishchuk. Extremal problem for the area of the image of a disk. *Journal of Mathematical Sciences*, 234(3):373–380, 2018.
- [56] R. Salimov, B. Klishchuk. An extremal problem for the volume functional. *Matematychni Studii*, 50(1):36–43, 2018.
- [57] R. Salimov, B. Klishchuk. Lower bounds for the volume of the image of a ball. *Ukrainian Mathematical Journal*, 71:883–895, 2019.
- [58] R. Salimov, B. Klishchuk. On the asymptotic behavior at infinity of ring Q -homeomorphisms with respect to p -modulus. *Праці ІПММ НАН України*, 36(1):26–35, 2022.
- [59] R. Salimov, B. Klishchuk. On the Behavior at Infinity of One Class of Homeomorphisms. *Current Trends in Analysis, its Applications and Computation. Trends in Mathematics. Birkhäuser, Cham*, pages 173–180, 2022.
- [60] R. Salimov, B. Klishchuk, M. Stefanchuk. On the asymptotic behavior at infinity of one mapping class. *Proceedings of the International Geometry Center*, 16(1):50–58, 2023.
- [61] R. Salimov, E. Sevost'yanov, A. Markish. On the lower estimate of the distortion of distance for one class of mappings. *Ukrainian Mathematical Journal*, 70:1791–1802, 2019.
- [62] R. Salimov, E. Smolovaya. On the order of growth of ring Q -homeomorphisms at infinity. *Ukrainian Mathematical Journal*, 62(6):961–969, 2010.
- [63] R. Salimov, M. Stefanchuk. Finite Lipschitzness of regular solutions to nonlinear Beltrami equation. *Complex Variables and Elliptic Equations*, 69(6):913–923, 2024.
- [64] E. Sevost'yanov, S. Skvortsov, P. Dovhopiatyi. On nonhomeomorphic mappings with the inverse Poletsky inequality. *Journal of Mathematical Sciences*, 252(4):541–557, 2021.

- [65] E. Sevost'yanov, A. Ukhlov. Sobolev mappings and moduli inequalities on Carnot groups. *Journal of Mathematical Sciences*, 249(5):754–768, 2020.
- [66] M. Stefanchuk. On exponential asymptotics of one class of homeomorphisms at a point of the complex plane. *Proceedings of the International Geometry Center*, 17(2):158–170, 2024.
- [67] M. Stefanchuk. On exponential asymptotics of ring Q -homeomorphisms at infinity. *Journal of Mathematical Sciences*, 282(1):83–92, 2024.
- [68] J. Väisälä. *Lectures on n -dimensional quasiconformal mappings*, volume 229 of *Lecture Notes in Math.* Springer-Verlag, Berlin, 1971.

Б. А. Кліщук

ІНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ НАН УКРАЇНИ, м. Київ

Email: kban1988@gmail.com

ORCID: 0000-0001-9632-2079

Р. Р. Салімов

ІНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ НАН УКРАЇНИ, м. Київ

Email: ruslan.salimov1@gmail.com

ORCID: 0000-0001-9395-3334

М. В. Стефанчук

ІНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ НАН УКРАЇНИ, м. Київ

Email: stefanmv43@gmail.com

ORCID: 0000-0003-3672-8346

Представлення деяких класів кватерніонних гіперголоморфних функцій

Т. С. Кузьменко, В. С. Шпаківський

Abstract. In the algebra of complex quaternions $\mathbb{H}(\mathbb{C})$ we consider the left- and right- ψ -hyperholomorphic functions, and left- $\Lambda - \psi$ -hyperholomorphic functions. We justify the transition in left- and right- ψ -hyperholomorphic functions to a simpler basis i.e., to the Cartan basis. Using Cartan's basis we find the solution of Cauchy-Fueter equation. By the same method we find representations of left- and right- ψ -hyperholomorphic functions, and representation of left- $\Lambda - \psi$ -hyperholomorphic functions.

Анотація. В алгебрі комплексних кватерніонів $\mathbb{H}(\mathbb{C})$ розглянуто ліво- і право- ψ -гіперголоморфні функції, а також ліво- $\Lambda - \psi$ -гіперголоморфні функції. Обґрунтовано перехід у ліво- і право- ψ -гіперголоморфних функціях до простішого базису, а саме до базису Картана. Використовуючи базис Картана, знайдено розв'язок рівняння Коші-Фуєтера. Таким же методом знайдено представлення ліво- і право- ψ -гіперголоморфних функцій, а також представлення ліво- $\Lambda - \psi$ -гіперголоморфних функцій.

1. ВСТУП

Основним об'єктом дослідження є множина, яку зазвичай називають множиною комплексних кватерніонів і яка традиційно позначається через $\mathbb{H}(\mathbb{C})$. Це асоціативна некомутативна алгебра над полем комплексних чисел, породжена елементами $1, I, J, K$ такими, що виконуються наступні правила множення:

$$\begin{aligned} I^2 &= J^2 = K^2 = IJK = -1, \\ IJ &= -JI = K, \quad JK = -KJ = I, \quad KI = -IK = J, \end{aligned}$$

і комплексна уявна одиниця i комутує з I, J, K . Для алгебри $\mathbb{H}(\mathbb{C})$ також використовується назва — алгебра бікватерніонів.

2020 Mathematics Subject Classification: 30G35; 32A10

Ключові слова: комплексні кватерніони, базис Картана, ліво- і право- ψ -гіперголоморфна функція, ваговий оператор Дірака, рівняння типу Коші-Фуєтера, ліво- $\Lambda - \psi$ -гіперголоморфна функція

DOI: <https://doi.org/10.3842/trim.v21n1.543>

Розглянемо в $\mathbb{H}(\mathbb{C})$ інший базис $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$, який є базисом Картана [7], розклад елементів якого в базисі Гамільтона має вигляд:

$$e_1 = \frac{1}{2}(1 + iI), \quad e_2 = \frac{1}{2}(1 - iI), \quad (1.1)$$

де i — комплексна уявна одиниця.

Таблиця множення в базисі Картана подається у вигляді

$$\begin{array}{c|cccc} \cdot & e_1 & e_2 & e_3 & e_4 \\ \hline e_1 & e_1 & 0 & e_3 & 0 \\ e_2 & 0 & e_2 & 0 & e_4 \\ e_3 & 0 & e_3 & 0 & e_1 \\ e_4 & e_4 & 0 & e_2 & 0 \end{array}. \quad (1.2)$$

При цьому одиниця алгебри має розклад $1 = e_1 + e_2$.

Відмітимо, що підалгебра з базисом $\{e_1, e_2\}$ є алгеброю бікомплексних чисел $\mathbb{BC}$ або алгеброю комутативних кватерніонів Сегре (див., наприклад, [3, 16]).

Справедливі також рівності:

$$1 = e_1 + e_2, \quad I = -ie_1 + ie_2, \quad J = -ie_3 - ie_4, \quad K = e_4 - e_3. \quad (1.3)$$

Очевидно, що формули (1.1) і (1.3) є формулами переходу від базису Гамільтона до базису Картана і навпаки.

Разом з базисом Гамільтона і Картана розглянемо також базис Паулі. Відомо, що комплексні кватерніони можуть бути представлені через матриці Паулі:

$$\sigma_0 := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \sigma_1 := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 := \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

В цьому базисі таблиця множення набуває вигляду:

$$\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma_3^2 = \sigma_0, \quad \sigma_1\sigma_2\sigma_3 = i\sigma_0,$$

$$\sigma_1\sigma_2 = -\sigma_2\sigma_1 = i\sigma_3, \quad \sigma_2\sigma_3 = -\sigma_3\sigma_2 = i\sigma_1, \quad \sigma_1\sigma_3 = -\sigma_3\sigma_1 = i\sigma_2.$$

При цьому формули переходу від базису Картана до базису Паулі мають вигляд:

$$\begin{aligned} e_1 &= -\frac{1}{2}(\sigma_0 - \sigma_3), & e_2 &= \frac{1}{2}(\sigma_0 + \sigma_3), \\ e_3 &= \frac{1}{2}(-\sigma_2 - i\sigma_1), & e_4 &= \frac{1}{2}(-\sigma_2 + i\sigma_1). \end{aligned} \quad (1.4)$$

2. КЛАСИ ГІПЕРГОЛОМОРФНИХ ФУНКЦІЙ

Нехай $\psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_4$ — фіксовані елементи алгебри $\mathbb{H}(\mathbb{C})$ з наступним розкладом в базисі Картана:

$$\psi_1 := \sum_{s=1}^4 \alpha_s e_s, \quad \alpha_s \in \mathbb{C}, \quad \psi_2 := \sum_{s=1}^4 \beta_s e_s, \quad \beta_s \in \mathbb{C}, \quad (2.1)$$

$$\psi_3 := \sum_{s=1}^4 \gamma_s e_s, \quad \gamma_s \in \mathbb{C}, \quad \psi_4 := \sum_{s=1}^4 \delta_s e_s, \quad \delta_s \in \mathbb{C}.$$

Розглянемо змінну $z = z_1 e_1 + z_2 e_2 + z_3 e_3 + z_4 e_4$, $z_s \in \mathbb{C}$, $s = 1, 2, 3, 4$ і функцію

$$f(z) = \sum_{s=1}^4 f_s(z_1, z_2, z_3, z_4) e_s, \quad f_s : \Omega \rightarrow \mathbb{H}(\mathbb{C}),$$

де Ω — область в $\mathbb{C}^4$. Нехай компоненти f_s , $s = 1, 2, 3, 4$, — голоморфні функції чотирьох комплексних змінних z_1, z_2, z_3, z_4 в Ω .

Розглянемо оператори

$$\psi D[f](z) := \psi_1 \frac{\partial f}{\partial z_1} + \psi_2 \frac{\partial f}{\partial z_2} + \psi_3 \frac{\partial f}{\partial z_3} + \psi_4 \frac{\partial f}{\partial z_4}, \quad (2.2)$$

$$D^\psi[f](z) := \frac{\partial f}{\partial z_1} \psi_1 + \frac{\partial f}{\partial z_2} \psi_2 + \frac{\partial f}{\partial z_3} \psi_3 + \frac{\partial f}{\partial z_4} \psi_4. \quad (2.3)$$

Означення 2.1. Функція $f : \Omega \rightarrow \mathbb{H}(\mathbb{C})$, $\Omega \subset \mathbb{C}^4$, називається *ліво- ψ -гіперголоморфною* (або *право- ψ -гіперголоморфною*), якщо компоненти f_s є голоморфними функціями чотирьох комплексних змінних z_1, z_2, z_3, z_4 в Ω і f задовольняє рівняння

$$\psi D[f](z) = 0. \quad (2.4)$$

(або $D^\psi[f](z) = 0$.)

Клас ψ -гіперголоморфних функцій в алгебрі дійсних кватерніонів вперше було введено М. Шапіро та Н. Василевським в роботах [21, 22].

Такий клас функцій зацікавив багатьох дослідників. Зокрема, К. Гюрлебек та його учень Х. М. Нгуєн приділяють особливу увагу застосуванню ψ -гіперголоморфних функцій (див., наприклад, статті [5, 11, 12] та дисертацію Г. М. Нгуєна [17]). Зауважимо, що оператори (2.2) і (2.3) також називають ваговими операторами Дірака. Аналіз і застосування таких операторів вивчаються в статтях [23, 24].

Активно досліджуються різні узагальнення ψ -гіперголоморфних функцій. Останнім часом стали цікавими узагальнення на випадок дробових похідних (наприклад, роботи [9, 10]).

Також почали розглядати оператори більш загального вигляду ніж (2.2). А саме, у статті [8] досліджено оператор вигляду

$${}^{\psi}_{\Lambda}D[f] := \Lambda f + \psi_1 \frac{\partial f}{\partial z_1} + \psi_2 \frac{\partial f}{\partial z_2} + \psi_3 \frac{\partial f}{\partial z_3} + \psi_4 \frac{\partial f}{\partial z_4}, \quad \Lambda \in \mathbb{H}(\mathbb{C}). \quad (2.5)$$

Означення 2.2. Функція $f : \Omega \rightarrow \mathbb{H}(\mathbb{C})$, $\Omega \subset \mathbb{C}^4$, називається ліво- Λ - ψ -гіперголоморфною, якщо компоненти f_s є голоморфними функціями чотирьох комплексних змінних z_1, z_2, z_3, z_4 в Ω і f задовольняє рівняння

$${}^{\psi}_{\Lambda}D[f](z) = 0. \quad (2.6)$$

В роботі [2] розвинуто теорію так званих (ϕ, ψ) -гіперголоморфних функцій. Завдяки матричному підходу, для таких функцій узагальнено формулу Бореля–Помпею та встановлено формули Племеля–Сохоцького. Дослідження [2] було продовжено в статтях [1, 18–20].

Разом з тим залишається відкритою проблема представлення (або опису в явному вигляді) ψ -гіперголоморфних і ліво- Λ - ψ -гіперголоморфних функцій. Ця робота присвячена вивченню саме цього питання.

2.1. Приклади. Спочатку розглянемо приклади ліво- і право- ψ -гіперголоморфних функцій.

Приклад 2.1. Розглянемо область $\Omega \subset \mathbb{C}^2 \simeq \mathbb{BC}$, змінну $\zeta = z_1 e_1 + z_2 e_2$ і функцію $f : \Omega \rightarrow \mathbb{H}(\mathbb{C})$ вигляду

$$f = \sum_{s=1}^4 f_s(z_1, z_2) e_s, \quad f_s : \Omega \rightarrow \mathbb{C}.$$

Це слід розуміти наступним чином. Ми ототожнюємо $\mathbb{C}^2$ з $\mathbb{BC}$. Після цього множина Ω в $\mathbb{BC}$ стає підмножиною в $\mathbb{H}(\mathbb{C})$, а не в $\mathbb{C}^2$. Далі ми розглядаємо деякі об'єкти як такі, що знаходяться в $\mathbb{H}(\mathbb{C})$. Зокрема, множина Ω знаходиться в $\mathbb{H}(\mathbb{C})$. Тому ми працюємо з функціями, які визначені і приймають значення в $\mathbb{H}(\mathbb{C})$. Тобто, ζ міститься в області з $\mathbb{H}(\mathbb{C})$: ми все вкладаємо в $\mathbb{H}(\mathbb{C})$.

Враховуючи такі припущення, введемо наступні означення.

Функція $f : \Omega \rightarrow \mathbb{H}(\mathbb{C})$, $\Omega \subset \mathbb{BC}$, називається право- $\mathbb{BC}$ -гіперголоморфною, якщо існує елементи алгебри $\mathbb{H}(\mathbb{C})$ $f'_r(\zeta)$ такий, що

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{f(\zeta + \varepsilon h) - f(\zeta)}{\varepsilon} = h \cdot f'_r(\zeta) \quad \forall h \in \mathbb{BC}. \quad (2.7)$$

Функція $f : \Omega \rightarrow \mathbb{H}(\mathbb{C})$, $\Omega \subset \mathbb{BC}$, називається *ліво- $\mathbb{BC}$ -гіперголоморфною*, якщо існує елемент алгебри $\mathbb{H}(\mathbb{C})$ $f'_l(\zeta)$ такий, що

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{f(\zeta + \varepsilon h) - f(\zeta)}{\varepsilon} = f'_l(\zeta) \cdot h \quad \forall h \in \mathbb{BC}. \quad (2.8)$$

Умова (2.7) означає, що

$$\frac{\partial f}{\partial z_1} = e_1 f'_r(\zeta) \quad \text{при} \quad h = e_1 \quad (2.9)$$

і

$$\frac{\partial f}{\partial z_2} = e_2 f'_r(\zeta) \quad \text{при} \quad h = e_2. \quad (2.10)$$

З рівностей (2.9) і (2.10) випливає аналог умов Коші–Рімана

$$e_2 \frac{\partial f}{\partial z_1} = e_1 \frac{\partial f}{\partial z_2}. \quad (2.11)$$

Аналогічно, з рівності (2.8) випливає

$$\frac{\partial f}{\partial z_1} e_2 = \frac{\partial f}{\partial z_2} e_1. \quad (2.12)$$

Отже, право- і ліво- $\mathbb{BC}$ -гіперголоморфна функція є узагальненням теорії голоморфних функцій в алгебрі $\mathbb{BC}$ (див., наприклад, [3, 16]).

Легко побачити, що множина право- $\mathbb{BC}$ -гіперголоморфних функцій і ліво- $\mathbb{BC}$ -гіперголоморфних функцій є підмножиною ліво- ψ -гіперголоморфних і право- ψ -гіперголоморфних функцій, відповідно. Справді, для $\zeta = z_1 e_1 + z_2 e_2$ рівність (2.11) набуває вигляду (2.4) при $\psi_1 = e_2$, $\psi_2 = -e_1$, $\psi_3 = \psi_4 = 0$. Аналогічно, право- $\mathbb{BC}$ -гіперголоморфні функції є підмножиною право- ψ -гіперголоморфних функцій.

Ще один приклад відображень з області в $\mathbb{R}^3$ в алгебру $\mathbb{H}(\mathbb{C})$, який є частинним випадком ліво- і право- ψ -гіперголоморфних функцій, розглянуто в роботах [13, 14].

В рівності (2.4) покладемо $\psi_1 = 1$, $\psi_2 = I$, $\psi_3 = J$, $\psi_4 = K$. У цьому випадку

$$\alpha_1 = \alpha_2 = 1, \quad \alpha_3 = \alpha_4 = 0, \quad \beta_1 = -i, \quad \beta_2 = i, \quad \beta_3 = \beta_4 = 0,$$

$$\gamma_1 = \gamma_2 = 0, \quad \gamma_3 = -i, \quad \gamma_4 = -i, \quad \delta_1 = \delta_2 = 0, \quad \delta_3 = -1, \quad \delta_4 = 1.$$

Тоді рівність (2.4) набуває вигляду

$$\frac{\partial f}{\partial z_1} + I \frac{\partial f}{\partial z_2} + J \frac{\partial f}{\partial z_3} + K \frac{\partial f}{\partial z_4} = 0$$

— добре відоме рівняння типу Коші–Фуєтера (див., наприклад, [6, 15]).

2.2. Основна властивість ліво- і право- ψ -гіперголоморфних функцій.

Теорема 2.1. *Нехай функція f ліво- ψ -гіперголоморфна (або право- ψ -гіперголоморфна) в деякому базисі алгебри $\mathbb{H}(\mathbb{C})$. Тоді в іншому базисі алгебри $\mathbb{H}(\mathbb{C})$ існує набір функцій $\Psi := (\Psi_1, \Psi_2, \Psi_3, \Psi_4)$, $\Psi_s \in \mathbb{H}(\mathbb{C})$, $s = 1, 2, 3, 4$, таких, що функція f є ліво- Ψ -гіперголоморфною (або право- Ψ -гіперголоморфною).*

Доведення. Доведемо цю теорему у випадку ліво- ψ -гіперголоморфних функцій. Нехай $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ — базис Картана в $\mathbb{H}(\mathbb{C})$ і $\{i_1, i_2, i_3, i_4\}$ — інший базис в $\mathbb{H}(\mathbb{C})$. Це означає, що

$$\begin{aligned} e_1 &= k_1 i_1 + k_2 i_2 + k_3 i_3 + k_4 i_4, \\ e_2 &= m_1 i_1 + m_2 i_2 + m_3 i_3 + m_4 i_4, \\ e_3 &= n_1 i_1 + n_2 i_2 + n_3 i_3 + n_4 i_4, \\ e_4 &= r_1 i_1 + r_2 i_2 + r_3 i_3 + r_4 i_4, \end{aligned}$$

де k_i, m_i, n_i, r_i при $i = 1, 2, 3, 4$, — комплексні числа.

Розглянемо рівність

$${}^\psi D[f](t) := \psi_1 \frac{\partial f}{\partial t_1} + \psi_2 \frac{\partial f}{\partial t_2} + \psi_3 \frac{\partial f}{\partial t_3} + \psi_4 \frac{\partial f}{\partial t_4} = 0, \quad (2.13)$$

де $t := t_1 e_1 + t_2 e_2 + t_3 e_3 + t_4 e_4$, $t_1, t_2, t_3, t_4 \in \mathbb{C}$. У змінній t перейдемо до базису $\{i_1, i_2, i_3, i_4\}$. Тоді

$$\begin{aligned} t &= i_1(t_1 k_1 + t_2 m_1 + t_3 n_1 + t_4 r_1) + i_2(t_1 k_2 + t_2 m_2 + t_3 n_2 + t_4 r_2) \\ &\quad + i_3(t_1 k_3 + t_2 m_3 + t_3 n_3 + t_4 r_3) + i_4(t_1 k_4 + t_2 m_4 + t_3 n_4 + t_4 r_4). \end{aligned}$$

Покладемо

$$\begin{aligned} z_1 &:= t_1 k_1 + t_2 m_1 + t_3 n_1 + t_4 r_1, \\ z_2 &:= t_1 k_2 + t_2 m_2 + t_3 n_2 + t_4 r_2, \\ z_3 &:= t_1 k_3 + t_2 m_3 + t_3 n_3 + t_4 r_3, \\ z_4 &:= t_1 k_4 + t_2 m_4 + t_3 n_4 + t_4 r_4. \end{aligned} \quad (2.14)$$

З рівностей (2.14) отримаємо

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial t_1} &= k_1 \frac{\partial f}{\partial z_1} + k_2 \frac{\partial f}{\partial z_2} + k_3 \frac{\partial f}{\partial z_3} + k_4 \frac{\partial f}{\partial z_4}, \\ \frac{\partial f}{\partial t_2} &= m_1 \frac{\partial f}{\partial z_1} + m_2 \frac{\partial f}{\partial z_2} + m_3 \frac{\partial f}{\partial z_3} + m_4 \frac{\partial f}{\partial z_4}, \\ \frac{\partial f}{\partial t_3} &= n_1 \frac{\partial f}{\partial z_1} + n_2 \frac{\partial f}{\partial z_2} + n_3 \frac{\partial f}{\partial z_3} + n_4 \frac{\partial f}{\partial z_4}, \\ \frac{\partial f}{\partial t_4} &= r_1 \frac{\partial f}{\partial z_1} + r_2 \frac{\partial f}{\partial z_2} + r_3 \frac{\partial f}{\partial z_3} + r_4 \frac{\partial f}{\partial z_4}. \end{aligned}$$

Тоді рівність (2.13) рівносильна наступній рівності:

$$\begin{aligned} {}^\psi D[f](t) = & (\psi_1 k_1 + \psi_2 m_1 + \psi_3 n_1 + \psi_4 r_1) \frac{\partial f}{\partial z_1} + (\psi_1 k_2 + \psi_2 m_2 + \psi_3 n_2 + \psi_4 r_2) \frac{\partial f}{\partial z_2} \\ & + (\psi_1 k_3 + \psi_2 m_3 + \psi_3 n_3 + \psi_4 r_3) \frac{\partial f}{\partial z_3} + (\psi_1 k_4 + \psi_2 m_4 + \psi_3 n_4 + \psi_4 r_4) \frac{\partial f}{\partial z_4}. \end{aligned} \quad (2.15)$$

Використовуючи позначення (2.1), маємо:

$$\begin{aligned} \psi_1 &= \sum_{s=1}^4 \alpha_s e_s = \sum_{s=1}^4 i_s (\alpha_1 k_s + \alpha_2 m_s + \alpha_3 n_s + \alpha_4 r_s), \\ \psi_2 &= \sum_{s=1}^4 \beta_s e_s = \sum_{s=1}^4 i_s (\beta_1 k_s + \beta_2 m_s + \beta_3 n_s + \beta_4 r_s), \\ \psi_3 &= \sum_{s=1}^4 \gamma_s e_s = \sum_{s=1}^4 i_s (\gamma_1 k_s + \gamma_2 m_s + \gamma_3 n_s + \gamma_4 r_s), \\ \psi_4 &= \sum_{s=1}^4 \delta_s e_s = \sum_{s=1}^4 i_s (\delta_1 k_s + \delta_2 m_s + \delta_3 n_s + \delta_4 r_s), \end{aligned}$$

З (2.15) отримаємо

$$\begin{aligned} {}^\psi D[f](t) &= \sum_{s=1}^4 i_s \left[(\alpha_1 k_s + \alpha_2 m_s + \alpha_3 n_s + \alpha_4 r_s) k_1 + (\beta_1 k_s + \beta_2 m_s + \beta_3 n_s + \beta_4 r_s) m_1 \right. \\ &\quad \left. + (\gamma_1 k_s + \gamma_2 m_s + \gamma_3 n_s + \gamma_4 r_s) n_1 + (\delta_1 k_s + \delta_2 m_s + \delta_3 n_s + \delta_4 r_s) r_1 \right] \frac{\partial f}{\partial z_1} \\ &+ \sum_{s=1}^4 i_s \left[(\alpha_1 k_s + \alpha_2 m_s + \alpha_3 n_s + \alpha_4 r_s) k_2 + (\beta_1 k_s + \beta_2 m_s + \beta_3 n_s + \beta_4 r_s) m_2 \right. \\ &\quad \left. + (\gamma_1 k_s + \gamma_2 m_s + \gamma_3 n_s + \gamma_4 r_s) n_2 + (\delta_1 k_s + \delta_2 m_s + \delta_3 n_s + \delta_4 r_s) r_2 \right] \frac{\partial f}{\partial z_2} \\ &+ \sum_{s=1}^4 i_s \left[(\alpha_1 k_s + \alpha_2 m_s + \alpha_3 n_s + \alpha_4 r_s) k_3 + (\beta_1 k_s + \beta_2 m_s + \beta_3 n_s + \beta_4 r_s) m_3 \right. \\ &\quad \left. + (\gamma_1 k_s + \gamma_2 m_s + \gamma_3 n_s + \gamma_4 r_s) n_3 + (\delta_1 k_s + \delta_2 m_s + \delta_3 n_s + \delta_4 r_s) r_3 \right] \frac{\partial f}{\partial z_3} \\ &+ \sum_{s=1}^4 i_s \left[(\alpha_1 k_s + \alpha_2 m_s + \alpha_3 n_s + \alpha_4 r_s) k_4 + (\beta_1 k_s + \beta_2 m_s + \beta_3 n_s + \beta_4 r_s) m_4 \right. \\ &\quad \left. + (\gamma_1 k_s + \gamma_2 m_s + \gamma_3 n_s + \gamma_4 r_s) n_4 + (\delta_1 k_s + \delta_2 m_s + \delta_3 n_s + \delta_4 r_s) r_4 \right] \frac{\partial f}{\partial z_4} \\ &=: \Psi_1 \frac{\partial f}{\partial z_1} + \Psi_2 \frac{\partial f}{\partial z_2} + \Psi_3 \frac{\partial f}{\partial z_3} + \Psi_4 \frac{\partial f}{\partial z_4} = 0. \end{aligned}$$

□

Зауваження 2.1. З цієї теореми випливає, що надалі достатньо розглядати константи ψ і функцію f в найпростішому базисі, тобто в базисі Картана.

Зауваження 2.2. Відомо, що в алгебрах Кліффорда рівності

$$\frac{\partial f}{\partial t_0} + I \frac{\partial f}{\partial t_1} + J \frac{\partial f}{\partial t_2} + K \frac{\partial f}{\partial t_3} = 0$$

і ${}^\psi D[f](t) = 0$ співпадають з точністю до ортогонального перетворення.

Зазначимо, що теорема 2.1 є саме цим твердженням, але сформульоване в інших термінах.

3. ЗАСТОСУВАННЯ ДО РОЗВ'ЯЗАННЯ РІВНЯННЯ ТИПУ КОШІ–ФУЕТЕРА

Тепер встановимо зв'язок між розв'язками рівняння

$$D[f](t) := \frac{\partial f}{\partial t_0} + I \frac{\partial f}{\partial t_1} + J \frac{\partial f}{\partial t_2} + K \frac{\partial f}{\partial t_3} = 0, \quad (3.1)$$

де $t := t_0 + t_1 I + t_2 J + t_3 K$, $t_0, t_1, t_2, t_3 \in \mathbb{C}$, і розв'язками рівняння (2.4). З цією метою в змінній t перейдемо до базису Картана. Тоді

$$\begin{aligned} t &= t_0(e_1 + e_2) + t_1(-ie_1 + ie_2) + t_2(-ie_3 - ie_4) + t_3(e_4 - e_3) \\ &= (t_0 - it_1)e_1 + (t_0 + it_1)e_2 + (-it_2 - t_3)e_3 + (-it_2 + t_3)e_4. \end{aligned}$$

Позначимо через

$$z_1 := t_0 - it_1, \quad z_2 := t_0 + it_1, \quad z_3 := -it_2 - t_3, \quad z_4 := -it_2 + t_3. \quad (3.2)$$

З рівностей (3.2) отримаємо

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial t_0} &= \frac{\partial f}{\partial z_1} + \frac{\partial f}{\partial z_2}, & \frac{\partial f}{\partial t_1} &= -i \frac{\partial f}{\partial z_1} + i \frac{\partial f}{\partial z_2}, \\ \frac{\partial f}{\partial t_2} &= -i \frac{\partial f}{\partial z_3} - i \frac{\partial f}{\partial z_4}, & \frac{\partial f}{\partial t_3} &= -\frac{\partial f}{\partial z_3} + \frac{\partial f}{\partial z_4}. \end{aligned}$$

Тоді рівняння (3.1) рівносильне рівнянню

$$\begin{aligned} D[f] &= \frac{\partial f}{\partial z_1} + \frac{\partial f}{\partial z_2} - iI \frac{\partial f}{\partial z_1} + iI \frac{\partial f}{\partial z_2} - iJ \frac{\partial f}{\partial z_3} - iJ \frac{\partial f}{\partial z_4} - K \frac{\partial f}{\partial z_3} + K \frac{\partial f}{\partial z_4} \\ &= (1 - iI) \frac{\partial f}{\partial z_1} + (1 + iI) \frac{\partial f}{\partial z_2} + (-iJ - K) \frac{\partial f}{\partial z_3} + (-iJ + K) \frac{\partial f}{\partial z_4} \\ &= 2 \left(e_2 \frac{\partial f}{\partial z_1} + e_1 \frac{\partial f}{\partial z_2} - e_4 \frac{\partial f}{\partial z_3} - e_3 \frac{\partial f}{\partial z_4} \right) = 0. \end{aligned}$$

Таким чином доведено теорему.

Теорема 3.1. Функція f змінної $t = t_0 + t_1 I + t_2 J + t_3 K$ задовольняє рівняння (3.1) тоді і тільки тоді, коли функція f змінної $z = z_1 e_1 + z_2 e_2 + z_3 e_3 + z_4 e_4$ задовольняє рівняння

$$e_2 \frac{\partial f}{\partial z_1} + e_1 \frac{\partial f}{\partial z_2} - e_4 \frac{\partial f}{\partial z_3} - e_3 \frac{\partial f}{\partial z_4} = 0, \quad (3.3)$$

де z і t пов'язані співвідношеннями (3.2).

Тепер розв'яжемо рівняння (3.3).

$$\begin{aligned} e_2 \frac{\partial f}{\partial z_1} &= e_2 \left(\frac{\partial f_1}{\partial z_1} e_1 + \frac{\partial f_2}{\partial z_1} e_2 + \frac{\partial f_3}{\partial z_1} e_3 + \frac{\partial f_4}{\partial z_1} e_4 \right) = \frac{\partial f_2}{\partial z_1} e_2 + \frac{\partial f_4}{\partial z_1} e_4, \\ e_1 \frac{\partial f}{\partial z_2} &= \frac{\partial f_1}{\partial z_2} e_1 + \frac{\partial f_3}{\partial z_2} e_3, \\ e_4 \frac{\partial f}{\partial z_3} &= \frac{\partial f_1}{\partial z_3} e_4 + \frac{\partial f_3}{\partial z_3} e_2, \\ e_3 \frac{\partial f}{\partial z_4} &= \frac{\partial f_2}{\partial z_4} e_3 + \frac{\partial f_4}{\partial z_4} e_1. \end{aligned}$$

Рівняння (3.3) рівносильне системі рівнянь

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_1}{\partial z_2} &= \frac{\partial f_4}{\partial z_4}, & \frac{\partial f_2}{\partial z_1} &= \frac{\partial f_3}{\partial z_3}, \\ \frac{\partial f_3}{\partial z_2} &= \frac{\partial f_2}{\partial z_4}, & \frac{\partial f_4}{\partial z_1} &= \frac{\partial f_1}{\partial z_3}. \end{aligned}$$

Маємо дві незалежні системи

$$\frac{\partial f_1}{\partial z_2} = \frac{\partial f_4}{\partial z_4}, \quad \frac{\partial f_1}{\partial z_3} = \frac{\partial f_4}{\partial z_1} \quad (3.4)$$

і

$$\frac{\partial f_2}{\partial z_1} = \frac{\partial f_3}{\partial z_3}, \quad \frac{\partial f_2}{\partial z_4} = \frac{\partial f_3}{\partial z_2}. \quad (3.5)$$

Розв'язком системи (3.4) в однозв'язній області Ω є довільна голоморфна функція

$$f_1 = f_1(z_2, z_3)$$

і

$$f_4 = z_4 \frac{\partial f_1}{\partial z_2} + z_1 \frac{\partial f_1}{\partial z_3}.$$

Розв'язком системи (3.5) в однозв'язній області Ω є довільна голоморфна функція

$$f_2 = f_2(z_1, z_4)$$

і

$$f_3 = z_3 \frac{\partial f_2}{\partial z_1} + z_2 \frac{\partial f_2}{\partial z_4}.$$

Отже, маємо розв'язок рівняння (3.3):

$$\begin{aligned} f(z) &= f_1(z_2, z_3)e_1 + f_2(z_1, z_4)e_2 \\ &+ \left(z_3 \frac{\partial f_2}{\partial z_1} + z_2 \frac{\partial f_2}{\partial z_4} \right) e_3 + \left(z_4 \frac{\partial f_1}{\partial z_2} + z_1 \frac{\partial f_1}{\partial z_3} \right) e_4. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Таким чином, згідно з теоремою 3.1 ми отримали

Теорема 3.2. *В однозв'язній області функція (3.6), де z_1, z_2, z_3, z_4 задані співвідношеннями (3.2), задовольняє рівність (3.1).*

Твердження 3.1. *В однозв'язній області функція (3.6) задовольняє чотиривимірне комплексне рівняння Лапласа*

$$\Delta_{\mathbb{C}^4} f := \frac{\partial^2 f}{\partial t_1^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial t_2^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial t_3^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial t_4^2} = 0. \quad (3.7)$$

Про рівняння (3.7) та його зв'язок з рівнянням Коші-Футера див. у [15].

4. ПРЕДСТАВЛЕННЯ ЛІВО- ψ -ГІПЕРГОЛОМОРФНИХ ФУНКЦІЙ У СПЕЦІАЛЬНОМУ ВИПАДКУ

Знайдемо загальний розв'язок рівняння (2.4) для спеціального вибору параметрів ψ_1, ψ_2, ψ_3 і ψ_4 . З цією метою, перетворимо рівняння (2.4) в систему чотирьох диференціальних рівнянь в частинних похідних. Тепер маємо

$$\begin{aligned} \psi_1 \frac{\partial f}{\partial z_1} &= (\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3 + \alpha_4 e_4) \left(\frac{\partial f_1}{\partial z_1} e_1 + \frac{\partial f_2}{\partial z_1} e_2 + \frac{\partial f_3}{\partial z_1} e_3 + \frac{\partial f_4}{\partial z_1} e_4 \right) \\ &= \frac{\partial f_1}{\partial z_1} \alpha_1 e_1 + \frac{\partial f_3}{\partial z_1} \alpha_1 e_3 + \frac{\partial f_2}{\partial z_1} \alpha_2 e_2 + \frac{\partial f_4}{\partial z_1} \alpha_2 e_4 \\ &\quad + \frac{\partial f_2}{\partial z_1} \alpha_3 e_3 + \frac{\partial f_4}{\partial z_1} \alpha_3 e_1 + \frac{\partial f_1}{\partial z_1} \alpha_4 e_4 + \frac{\partial f_3}{\partial z_1} \alpha_4 e_2 \\ &= \frac{\partial}{\partial z_1} (\alpha_1 f_1 + \alpha_3 f_4) e_1 + \frac{\partial}{\partial z_1} (\alpha_2 f_2 + \alpha_4 f_3) e_2 \\ &\quad + \frac{\partial}{\partial z_1} (\alpha_1 f_3 + \alpha_3 f_2) e_3 + \frac{\partial}{\partial z_1} (\alpha_2 f_4 + \alpha_4 f_1) e_4. \end{aligned}$$

Аналогічно,

$$\begin{aligned} \psi_2 \frac{\partial f}{\partial z_2} &= \frac{\partial}{\partial z_2} (\beta_1 f_1 + \beta_3 f_4) e_1 + \frac{\partial}{\partial z_2} (\beta_2 f_2 + \beta_4 f_3) e_2 \\ &\quad + \frac{\partial}{\partial z_2} (\beta_1 f_3 + \beta_3 f_2) e_3 + \frac{\partial}{\partial z_2} (\beta_2 f_4 + \beta_4 f_1) e_4, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\psi_3 \frac{\partial f}{\partial z_3} &= \frac{\partial}{\partial z_3} (\gamma_1 f_1 + \gamma_3 f_4) e_1 + \frac{\partial}{\partial z_3} (\gamma_2 f_2 + \gamma_4 f_3) e_2 \\
&\quad + \frac{\partial}{\partial z_3} (\gamma_1 f_3 + \gamma_3 f_2) e_3 + \frac{\partial}{\partial z_3} (\gamma_2 f_4 + \gamma_4 f_1) e_4, \\
\psi_4 \frac{\partial f}{\partial z_4} &= \frac{\partial}{\partial z_4} (\delta_1 f_1 + \delta_3 f_4) e_1 + \frac{\partial}{\partial z_4} (\delta_2 f_2 + \delta_4 f_3) e_2 \\
&\quad + \frac{\partial}{\partial z_4} (\delta_1 f_3 + \delta_3 f_2) e_3 + \frac{\partial}{\partial z_4} (\delta_2 f_4 + \delta_4 f_1) e_4.
\end{aligned}$$

Тоді рівняння (2.4) рівносильне системі

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial z_1} (\alpha_1 f_1 + \alpha_3 f_4) + \frac{\partial}{\partial z_2} (\beta_1 f_1 + \beta_3 f_4) + \frac{\partial}{\partial z_3} (\gamma_1 f_1 + \gamma_3 f_4) + \frac{\partial}{\partial z_4} (\delta_1 f_1 + \delta_3 f_4) &= 0, \\
\frac{\partial}{\partial z_1} (\alpha_2 f_2 + \alpha_4 f_3) + \frac{\partial}{\partial z_2} (\beta_2 f_2 + \beta_4 f_3) + \frac{\partial}{\partial z_3} (\gamma_2 f_2 + \gamma_4 f_3) + \frac{\partial}{\partial z_4} (\delta_2 f_2 + \delta_4 f_3) &= 0, \\
\frac{\partial}{\partial z_1} (\alpha_1 f_3 + \alpha_3 f_2) + \frac{\partial}{\partial z_2} (\beta_1 f_3 + \beta_3 f_2) + \frac{\partial}{\partial z_3} (\gamma_1 f_3 + \gamma_3 f_2) + \frac{\partial}{\partial z_4} (\delta_1 f_3 + \delta_3 f_2) &= 0, \\
\frac{\partial}{\partial z_1} (\alpha_2 f_4 + \alpha_4 f_1) + \frac{\partial}{\partial z_2} (\beta_2 f_4 + \beta_4 f_1) + \frac{\partial}{\partial z_3} (\gamma_2 f_4 + \gamma_4 f_1) + \frac{\partial}{\partial z_4} (\delta_2 f_4 + \delta_4 f_1) &= 0.
\end{aligned} \tag{4.1}$$

Теорема 4.1. *Нехай*

$$\begin{aligned}
\psi_1 &= \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3 + \alpha_4 e_4, & \alpha_1 \alpha_2 &\neq \alpha_3 \alpha_4, \\
\psi_2 &= \lambda \alpha_1 e_1 + \mu \alpha_2 e_2 + \mu \alpha_3 e_3 + \lambda \alpha_4 e_4, \\
\psi_3 &= \theta \alpha_1 e_1 + \vartheta \alpha_2 e_2 + \vartheta \alpha_3 e_3 + \theta \alpha_4 e_4, \\
\psi_4 &= \nu \alpha_1 e_1 + \eta \alpha_2 e_2 + \eta \alpha_3 e_3 + \nu \alpha_4 e_4,
\end{aligned} \tag{4.2}$$

де $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \lambda, \mu, \theta, \vartheta, \nu, \eta$ — довільні комплексні числа. Тоді кожна ліво- ψ -гіперголоморфна функція набуває вигляду

$$f(z) = f_1(\tilde{\zeta}_2, \tilde{\zeta}_3, \tilde{\zeta}_4) e_1 + f_2(\zeta_2, \zeta_3, \zeta_4) e_2 + f_3(\tilde{\zeta}_2, \tilde{\zeta}_3, \tilde{\zeta}_4) e_3 + f_4(\zeta_2, \zeta_3, \zeta_4) e_4, \tag{4.3}$$

де

$$\begin{aligned}
\tilde{\zeta}_2 &:= \lambda z_1 - z_2, & \tilde{\zeta}_3 &:= \theta z_1 - z_3, & \tilde{\zeta}_4 &:= \nu z_1 - z_4, \\
\zeta_2 &:= \mu z_1 - z_2, & \zeta_3 &:= \vartheta z_1 - z_3, & \zeta_4 &:= \eta z_1 - z_4,
\end{aligned} \tag{4.4}$$

і f_1, f_2, f_3, f_4 — довільні голоморфні функції своїх трьох аргументів.

Доведення. Для вибраних параметрів (4.2) перше рівняння системи (4.1) набуває вигляду

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial z_1} (\alpha_1 f_1 + \alpha_3 f_4) + \frac{\partial}{\partial z_2} (\lambda \alpha_1 f_1 + \mu \alpha_3 f_4) \\ & + \frac{\partial}{\partial z_3} (\theta \alpha_1 f_1 + \vartheta \alpha_3 f_4) + \frac{\partial}{\partial z_4} (\nu \alpha_1 f_1 + \eta \alpha_3 f_4) = 0. \end{aligned} \quad (4.5)$$

Аналогічно, для вибраних параметрів (4.2) четверте рівняння системи (4.1) набуває вигляду

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial z_1} (\alpha_4 f_1 + \alpha_2 f_4) + \frac{\partial}{\partial z_2} (\lambda \alpha_4 f_1 + \mu \alpha_2 f_4) \\ & + \frac{\partial}{\partial z_3} (\theta \alpha_4 f_1 + \vartheta \alpha_2 f_4) + \frac{\partial}{\partial z_4} (\nu \alpha_4 f_1 + \eta \alpha_2 f_4) = 0. \end{aligned} \quad (4.6)$$

Розглянемо різницю між рівнянням (4.5), домноженим на α_2 , і рівнянням (4.6), домноженим на α_3 . Тоді отримаємо рівність

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial z_1} \left(f_1 (\alpha_1 \alpha_2 - \alpha_3 \alpha_4) + f_4 (\alpha_2 \alpha_3 - \alpha_2 \alpha_3) \right) \\ & + \frac{\partial}{\partial z_2} \left(f_1 (\lambda \alpha_1 \alpha_2 - \lambda \alpha_3 \alpha_4) + f_4 (\mu \alpha_2 \alpha_3 - \mu \alpha_2 \alpha_3) \right) \\ & + \frac{\partial}{\partial z_3} \left(f_1 (\theta \alpha_1 \alpha_2 - \theta \alpha_3 \alpha_4) + f_4 (\vartheta \alpha_2 \alpha_3 - \vartheta \alpha_2 \alpha_3) \right) \\ & + \frac{\partial}{\partial z_4} \left(f_1 (\nu \alpha_1 \alpha_2 - \nu \alpha_3 \alpha_4) + f_4 (\eta \alpha_2 \alpha_3 - \eta \alpha_2 \alpha_3) \right) = 0. \end{aligned}$$

Отже, маємо

$$\frac{\partial f_1}{\partial z_1} + \lambda \frac{\partial f_1}{\partial z_2} + \theta \frac{\partial f_1}{\partial z_3} + \nu \frac{\partial f_1}{\partial z_4} = 0. \quad (4.7)$$

Для рівняння (4.7) розглянемо характеристичне рівняння

$$\frac{dz_1}{1} = \frac{dz_2}{\lambda} = \frac{dz_3}{\theta} = \frac{dz_4}{\nu}. \quad (4.8)$$

Розв'язками системи (4.8) є інтеграли

$$c_2 = \lambda z_1 - z_2, \quad c_3 = \theta z_1 - z_3, \quad c_4 = \nu z_1 - z_4.$$

Отже, загальний розв'язок рівняння (4.7) має вигляд

$$f_1 = f_1(\tilde{\zeta}_2, \tilde{\zeta}_3, \tilde{\zeta}_4),$$

де $\tilde{\zeta}_2, \tilde{\zeta}_3, \tilde{\zeta}_4$ визначені рівностями (4.4).

Відмітимо, що поліноми (4.4) є аналогами добре відомих поліномів Фуєтера [4].

Аналогічно можна отримати представлення для компонент f_2, f_3, f_4 . $\square$

Отже, формула (4.3) дає представлення ліво- ψ -гіперголоморфної функції за умови спеціального вибору ψ .

Зауваження 4.1. Використовуючи формули (1.4), можна записати представлення (4.3) в базисі Паулі:

$$f(z) = \left(f_1(\tilde{\zeta}_2, \tilde{\zeta}_3, \tilde{\zeta}_4) + f_2(\zeta_2, \zeta_3, \zeta_4) \right) \sigma_0 + \left(i f_3(\tilde{\zeta}_2, \tilde{\zeta}_3, \tilde{\zeta}_4) - i f_4(\zeta_2, \zeta_3, \zeta_4) \right) \sigma_1 + \left(-f_3(\tilde{\zeta}_2, \tilde{\zeta}_3, \tilde{\zeta}_4) - f_4(\zeta_2, \zeta_3, \zeta_4) \right) \sigma_2 + \left(f_2(\zeta_2, \zeta_3, \zeta_4) - f_1(\tilde{\zeta}_2, \tilde{\zeta}_3, \tilde{\zeta}_4) \right) \sigma_3.$$

5. ПРЕДСТАВЛЕННЯ ПРАВО- ψ -ГІПЕРГОЛОМОРФНИХ ФУНКЦІЙ У СПЕЦІАЛЬНОМУ ВИПАДКУ

В цьому розділі будемо шукати загальний розв'язок рівняння

$$D^\psi[f](z) = \frac{\partial f}{\partial z_1} \psi_1 + \frac{\partial f}{\partial z_2} \psi_2 + \frac{\partial f}{\partial z_3} \psi_3 + \frac{\partial f}{\partial z_4} \psi_4 = 0 \quad (5.1)$$

при спеціальному виборі параметрів ψ_1, ψ_2, ψ_3 і ψ_4 . З цією метою перетворимо рівняння (5.1) в систему чотирьох диференціальних рівнянь в частинних похідних. Маємо

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial z_1} \psi_1 &= \left(\frac{\partial f_1}{\partial z_1} e_1 + \frac{\partial f_2}{\partial z_1} e_2 + \frac{\partial f_3}{\partial z_1} e_3 + \frac{\partial f_4}{\partial z_1} e_4 \right) (\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3 + \alpha_4 e_4) \\ &= \frac{\partial f_1}{\partial z_1} \alpha_1 e_1 + \frac{\partial f_1}{\partial z_1} \alpha_3 e_3 + \frac{\partial f_2}{\partial z_1} \alpha_2 e_2 + \frac{\partial f_2}{\partial z_1} \alpha_4 e_4 \\ &\quad + \frac{\partial f_3}{\partial z_1} \alpha_2 e_3 + \frac{\partial f_3}{\partial z_1} \alpha_4 e_1 + \frac{\partial f_4}{\partial z_1} \alpha_1 e_4 + \frac{\partial f_4}{\partial z_1} \alpha_3 e_2 \\ &= \frac{\partial}{\partial z_1} (\alpha_1 f_1 + \alpha_4 f_3) e_1 + \frac{\partial}{\partial z_1} (\alpha_2 f_2 + \alpha_3 f_4) e_2 \\ &\quad + \frac{\partial}{\partial z_1} (\alpha_3 f_1 + \alpha_2 f_3) e_3 + \frac{\partial}{\partial z_1} (\alpha_4 f_2 + \alpha_1 f_4) e_4. \end{aligned}$$

Аналогічно,

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial z_2} \psi_2 &= \frac{\partial}{\partial z_2} (\beta_1 f_1 + \beta_4 f_3) e_1 + \frac{\partial}{\partial z_2} (\beta_2 f_2 + \beta_3 f_4) e_2 \\ &\quad + \frac{\partial}{\partial z_2} (\beta_3 f_1 + \beta_2 f_3) e_3 + \frac{\partial}{\partial z_2} (\beta_4 f_2 + \beta_1 f_4) e_4, \\ \frac{\partial f}{\partial z_3} \psi_3 &= \frac{\partial}{\partial z_3} (\gamma_1 f_1 + \gamma_4 f_3) e_1 + \frac{\partial}{\partial z_3} (\gamma_2 f_2 + \gamma_3 f_4) e_2 \\ &\quad + \frac{\partial}{\partial z_3} (\gamma_3 f_1 + \gamma_2 f_3) e_3 + \frac{\partial}{\partial z_3} (\gamma_4 f_2 + \gamma_1 f_4) e_4, \\ \frac{\partial f}{\partial z_4} \psi_4 &= \frac{\partial}{\partial z_4} (\delta_1 f_1 + \delta_4 f_3) e_1 + \frac{\partial}{\partial z_4} (\delta_2 f_2 + \delta_3 f_4) e_2 \end{aligned}$$

$$+ \frac{\partial}{\partial z_4} (\delta_3 f_1 + \delta_2 f_3) e_3 + \frac{\partial}{\partial z_4} (\delta_4 f_2 + \delta_1 f_4) e_4.$$

Тоді рівняння (5.1) рівносильне системі

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial z_1} (\alpha_1 f_1 + \alpha_4 f_3) + \frac{\partial}{\partial z_2} (\beta_1 f_1 + \beta_4 f_3) + \frac{\partial}{\partial z_3} (\gamma_1 f_1 + \gamma_4 f_3) + \frac{\partial}{\partial z_4} (\delta_1 f_1 + \delta_4 f_3) &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial z_1} (\alpha_2 f_2 + \alpha_3 f_4) + \frac{\partial}{\partial z_2} (\beta_2 f_2 + \beta_3 f_4) + \frac{\partial}{\partial z_3} (\gamma_2 f_2 + \gamma_3 f_4) + \frac{\partial}{\partial z_4} (\delta_2 f_2 + \delta_3 f_4) &= 0, \end{aligned} \quad (5.2)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial z_1} (\alpha_3 f_1 + \alpha_2 f_3) + \frac{\partial}{\partial z_2} (\beta_3 f_1 + \beta_2 f_3) + \frac{\partial}{\partial z_3} (\gamma_3 f_1 + \gamma_2 f_3) + \frac{\partial}{\partial z_4} (\delta_3 f_1 + \delta_2 f_3) &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial z_1} (\alpha_4 f_2 + \alpha_1 f_4) + \frac{\partial}{\partial z_2} (\beta_4 f_2 + \beta_1 f_4) + \frac{\partial}{\partial z_3} (\gamma_4 f_2 + \gamma_1 f_4) + \frac{\partial}{\partial z_4} (\delta_4 f_2 + \delta_1 f_4) &= 0. \end{aligned}$$

Теорема 5.1. *Нехай*

$$\begin{aligned} \psi_1 &= \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3 + \alpha_4 e_4, & \alpha_1 \alpha_2 &\neq \alpha_3 \alpha_4, \\ \psi_2 &= \mu \alpha_1 e_1 + \lambda \alpha_2 e_2 + \mu \alpha_3 e_3 + \lambda \alpha_4 e_4, \\ \psi_3 &= \vartheta \alpha_1 e_1 + \theta \alpha_2 e_2 + \vartheta \alpha_3 e_3 + \theta \alpha_4 e_4, \\ \psi_4 &= \eta \alpha_1 e_1 + \nu \alpha_2 e_2 + \eta \alpha_3 e_3 + \nu \alpha_4 e_4, \end{aligned} \quad (5.3)$$

де $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \lambda, \mu, \theta, \vartheta, \nu, \eta$ — довільні комплексні числа. Тоді кожна право- ψ -гіперголоморфна функція набуває вигляду

$$f(z) = f_1(\zeta_2, \zeta_3, \zeta_4) e_1 + f_2(\tilde{\zeta}_2, \tilde{\zeta}_3, \tilde{\zeta}_4) e_2 + f_3(\tilde{\zeta}_2, \tilde{\zeta}_3, \tilde{\zeta}_4) e_3 + f_4(\zeta_2, \zeta_3, \zeta_4) e_4, \quad (5.4)$$

де $\zeta_2, \zeta_3, \zeta_4, \tilde{\zeta}_2, \tilde{\zeta}_3, \tilde{\zeta}_4$ визначені рівностями (4.4) і f_1, f_2, f_3, f_4 — довільні голоморфні функції трьох відповідних аргументів.

Доведення. Для вибраних параметрів (5.3) перше рівняння системи (5.2) набуває вигляду

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial z_1} (\alpha_1 f_1 + \alpha_4 f_3) + \frac{\partial}{\partial z_2} (\mu \alpha_1 f_1 + \lambda \alpha_4 f_3) + \\ + \frac{\partial}{\partial z_3} (\vartheta \alpha_1 f_1 + \theta \alpha_4 f_3) + \frac{\partial}{\partial z_4} (\eta \alpha_1 f_1 + \nu \alpha_4 f_3) &= 0. \end{aligned} \quad (5.5)$$

Аналогічно, для вибраних параметрів (5.3) третє рівняння системи (5.2) має вигляд

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial z_1} (\alpha_3 f_1 + \alpha_2 f_3) + \frac{\partial}{\partial z_2} (\mu \alpha_3 f_1 + \lambda \alpha_2 f_3) \\ + \frac{\partial}{\partial z_3} (\vartheta \alpha_3 f_1 + \theta \alpha_2 f_3) + \frac{\partial}{\partial z_4} (\eta \alpha_3 f_1 + \nu \alpha_2 f_3) &= 0. \end{aligned} \quad (5.6)$$

Розглянемо різницю між рівнянням (5.5), домноженим на α_2 і рівнянням (5.6), домноженим на α_4 . Тоді отримаємо наступну рівність

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial z_1} \left(f_1(\alpha_1 \alpha_2 - \alpha_3 \alpha_4) + f_3(\alpha_2 \alpha_4 - \alpha_2 \alpha_4) \right) \\ & + \frac{\partial}{\partial z_2} \left(\mu f_1(\alpha_1 \alpha_2 - \alpha_3 \alpha_4) + \lambda f_3(\alpha_2 \alpha_4 - \alpha_2 \alpha_4) \right) \\ & + \frac{\partial}{\partial z_3} \left(\vartheta f_1(\alpha_1 \alpha_2 - \alpha_3 \alpha_4) + \theta f_3(\alpha_2 \alpha_4 - \alpha_2 \alpha_4) \right) \\ & + \frac{\partial}{\partial z_4} \left(\eta f_1(\alpha_1 \alpha_2 - \alpha_3 \alpha_4) + \nu f_3(\alpha_2 \alpha_3 - \alpha_2 \alpha_3) \right) = 0. \end{aligned}$$

Отже, маємо рівняння

$$\frac{\partial f_1}{\partial z_1} + \mu \frac{\partial f_1}{\partial z_2} + \vartheta \frac{\partial f_1}{\partial z_3} + \eta \frac{\partial f_1}{\partial z_4} = 0. \quad (5.7)$$

Для рівняння (5.7) розглянемо характеристичне рівняння

$$\frac{dz_1}{1} = \frac{dz_2}{\mu} = \frac{dz_3}{\vartheta} = \frac{dz_4}{\eta}. \quad (5.8)$$

Розв'язками системи (5.8) є інтеграли

$$c_2 = \mu z_1 - z_2, \quad c_3 = \vartheta z_1 - z_3, \quad c_4 = \eta z_1 - z_4.$$

Таким чином, загальний розв'язок рівняння (5.7) набуває вигляду

$$f_1 = f_1(\zeta_2, \zeta_3, \zeta_4),$$

де $\zeta_2, \zeta_3, \zeta_4$ визначені рівностями (4.4).

Аналогічно, отримуємо розклади компонент f_2, f_3, f_4 . $\square$

Отже, формула (5.4) дає представлення право- ψ -гіперголоморфної функції при спеціальному виборі ψ .

Порівнюючи представлення (4.3) і (5.4), отримаємо наступне твердження.

Твердження 5.1. *Нехай виконуються умови теореми 4.1. Тоді функція f є одночасно ліво- і право- ψ -гіперголоморфною, якщо вона приймає значення на множині $\{h_3 e_3 + h_4 e_4 : h_3, h_4 \in \mathbb{C}\}$.*

Зауваження 5.1. Використовуючи формули (1.4) можемо записати представлення (5.4) в базисі Паулі:

$$\begin{aligned} f(z) = & \left(f_1(\zeta_2, \zeta_3, \zeta_4) + f_2(\tilde{\zeta}_2, \tilde{\zeta}_3, \tilde{\zeta}_4) \right) \sigma_0 + \left(i f_3(\tilde{\zeta}_2, \tilde{\zeta}_3, \tilde{\zeta}_4) - i f_4(\zeta_2, \zeta_3, \zeta_4) \right) \sigma_1 \\ & + \left(-f_3(\tilde{\zeta}_2, \tilde{\zeta}_3, \tilde{\zeta}_4) - f_4(\zeta_2, \zeta_3, \zeta_4) \right) \sigma_2 + \left(f_2(\tilde{\zeta}_2, \tilde{\zeta}_3, \tilde{\zeta}_4) - f_1(\zeta_2, \zeta_3, \zeta_4) \right) \sigma_3. \end{aligned}$$

6. ПРЕДСТАВЛЕННЯ ЛІВО- Λ - ψ -ГІПЕРГОЛОМОРФНИХ ФУНКЦІЙ У СПЕЦІАЛЬНОМУ ВИПАДКУ

У цьому розділі розглянемо оператор (2.5) і рівняння (2.6). Тепер будемо шукати представлення ліво- Λ - ψ -гіперголоморфних функцій при спеціальному виборі параметрів $\psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_4$ і Λ . З цією метою перетворимо рівняння (2.6) в систему чотирьох диференціальних рівнянь в частинних похідних. Позначимо через

$$\Lambda := \Lambda_1 e_1 + \Lambda_2 e_2 + \Lambda_3 e_3 + \Lambda_4 e_4. \quad (6.1)$$

Використовуючи результати розділу 4, отримаємо рівняння (2.6) рівносильне неоднорідній системи диференціальних рівнянь в частинних похідних

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial z_1}(\alpha_1 f_1 + \alpha_3 f_4) + \frac{\partial}{\partial z_2}(\beta_1 f_1 + \beta_3 f_4) + \frac{\partial}{\partial z_3}(\gamma_1 f_1 + \gamma_3 f_4) + \frac{\partial}{\partial z_4}(\delta_1 f_1 + \delta_3 f_4) \\ = -\Lambda_1 f_1 - \Lambda_3 f_4 \\ \frac{\partial}{\partial z_1}(\alpha_2 f_2 + \alpha_4 f_3) + \frac{\partial}{\partial z_2}(\beta_2 f_2 + \beta_4 f_3) + \frac{\partial}{\partial z_3}(\gamma_2 f_2 + \gamma_4 f_3) + \frac{\partial}{\partial z_4}(\delta_2 f_2 + \delta_4 f_3) \\ = -\Lambda_2 f_2 - \Lambda_4 f_3 \\ \frac{\partial}{\partial z_1}(\alpha_1 f_3 + \alpha_3 f_2) + \frac{\partial}{\partial z_2}(\beta_1 f_3 + \beta_3 f_2) + \frac{\partial}{\partial z_3}(\gamma_1 f_3 + \gamma_3 f_2) + \frac{\partial}{\partial z_4}(\delta_1 f_3 + \delta_3 f_2) \\ = -\Lambda_1 f_3 - \Lambda_3 f_2 \\ \frac{\partial}{\partial z_1}(\alpha_2 f_4 + \alpha_4 f_1) + \frac{\partial}{\partial z_2}(\beta_2 f_4 + \beta_4 f_1) + \frac{\partial}{\partial z_3}(\gamma_2 f_4 + \gamma_4 f_1) + \frac{\partial}{\partial z_4}(\delta_2 f_4 + \delta_4 f_1) \\ = -\Lambda_4 f_1 - \Lambda_2 f_4 \end{aligned} \quad (6.2)$$

Теорема 6.1. *Нехай*

$$\begin{aligned} \psi_1 &= \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3 + \alpha_4 e_4, & \alpha_1 \alpha_2 &\neq \alpha_3 \alpha_4, \\ \psi_2 &= \lambda \alpha_1 e_1 + \mu \alpha_2 e_2 + \mu \alpha_3 e_3 + \lambda \alpha_4 e_4, \\ \psi_3 &= \theta \alpha_1 e_1 + \vartheta \alpha_2 e_2 + \vartheta \alpha_3 e_3 + \theta \alpha_4 e_4, \\ \psi_4 &= \nu \alpha_1 e_1 + \eta \alpha_2 e_2 + \eta \alpha_3 e_3 + \nu \alpha_4 e_4, \end{aligned} \quad (6.3)$$

де $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \lambda, \mu, \theta, \vartheta, \nu, \eta$ — довільні комплексні числа. Крім того, нехай Λ має вигляд (6.1) такий, що

$$\alpha_2 \Lambda_3 = \alpha_3 \Lambda_2, \quad \alpha_1 \Lambda_4 = \alpha_4 \Lambda_1. \quad (6.4)$$

Тоді кожна ліво- Λ - ψ -гіперголоморфна функція набуває вигляду

$$\begin{aligned} f(z) &= e_1 \Phi_1(\tilde{\zeta}_2, \tilde{\zeta}_3, \tilde{\zeta}_4) \cdot \exp\left(\frac{\alpha_3 \Lambda_4 - \alpha_2 \Lambda_1}{\alpha_1 \alpha_2 - \alpha_3 \alpha_4} z_1\right) \\ &+ e_2 \Phi_2(\zeta_2, \zeta_3, \zeta_4) \cdot \exp\left(\frac{\alpha_4 \Lambda_3 - \alpha_1 \Lambda_2}{\alpha_1 \alpha_2 - \alpha_3 \alpha_4} z_1\right) \\ &+ e_3 \Phi_3(\tilde{\zeta}_2, \tilde{\zeta}_3, \tilde{\zeta}_4) \cdot \exp\left(\frac{\alpha_3 \Lambda_4 - \alpha_2 \Lambda_1}{\alpha_1 \alpha_2 - \alpha_3 \alpha_4} z_1\right) \end{aligned} \quad (6.5)$$

$$+ e_4 \Phi_4(\zeta_2, \zeta_3, \zeta_4) \cdot \exp\left(\frac{\alpha_4 \Lambda_3 - \alpha_1 \Lambda_2}{\alpha_1 \alpha_2 - \alpha_3 \alpha_4} z_1\right),$$

де $\tilde{\zeta}_2, \tilde{\zeta}_3, \tilde{\zeta}_4, \zeta_2, \zeta_3, \zeta_4$ визначені співвідношеннями (4.4), а $\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3, \Phi_4$ — довільні голоморфні функції трьох комплексних змінних.

Доведення. Для заданих параметрів (6.3) перше рівняння системи (6.2) набуває вигляду

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial z_1} (\alpha_1 f_1 + \alpha_3 f_4) + \frac{\partial}{\partial z_2} (\lambda \alpha_1 f_1 + \mu \alpha_3 f_4) + \\ & + \frac{\partial}{\partial z_3} (\theta \alpha_1 f_1 + \vartheta \alpha_3 f_4) + \frac{\partial}{\partial z_4} (\nu \alpha_1 f_1 + \eta \alpha_3 f_4) = -\Lambda_1 f_1 - \Lambda_3 f_4. \end{aligned} \quad (6.6)$$

Аналогічно, для параметрів (6.3) четверте рівняння системи (6.2) набуває вигляду

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial z_1} (\alpha_4 f_1 + \alpha_2 f_4) + \frac{\partial}{\partial z_2} (\lambda \alpha_4 f_1 + \mu \alpha_2 f_4) + \\ & + \frac{\partial}{\partial z_3} (\theta \alpha_4 f_1 + \vartheta \alpha_2 f_4) + \frac{\partial}{\partial z_4} (\nu \alpha_4 f_1 + \eta \alpha_2 f_4) = -\Lambda_4 f_1 - \Lambda_2 f_4. \end{aligned} \quad (6.7)$$

Розглянемо різницю між рівнянням (6.6), домноженим на α_2 , і рівнянням (6.7), домноженим на α_3 . Тоді враховуючи (6.4), отримаємо наступну рівність

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial z_1} \left(f_1 (\alpha_1 \alpha_2 - \alpha_3 \alpha_4) + f_4 (\alpha_2 \alpha_3 - \alpha_2 \alpha_3) \right) \\ & + \frac{\partial}{\partial z_2} \left(f_1 (\lambda \alpha_1 \alpha_2 - \lambda \alpha_3 \alpha_4) + f_4 (\mu \alpha_2 \alpha_3 - \mu \alpha_2 \alpha_3) \right) \\ & + \frac{\partial}{\partial z_3} \left(f_1 (\theta \alpha_1 \alpha_2 - \theta \alpha_3 \alpha_4) + f_4 (\vartheta \alpha_2 \alpha_3 - \vartheta \alpha_2 \alpha_3) \right) \\ & + \frac{\partial}{\partial z_4} \left(f_1 (\nu \alpha_1 \alpha_2 - \nu \alpha_3 \alpha_4) + f_4 (\eta \alpha_2 \alpha_3 - \eta \alpha_2 \alpha_3) \right) = (\Lambda_4 \alpha_3 - \Lambda_1 \alpha_2) f_1. \end{aligned}$$

Отже, маємо рівняння

$$\frac{\partial f_1}{\partial z_1} + \lambda \frac{\partial f_1}{\partial z_2} + \theta \frac{\partial f_1}{\partial z_3} + \nu \frac{\partial f_1}{\partial z_4} = \frac{\Lambda_4 \alpha_3 - \Lambda_1 \alpha_2}{\alpha_1 \alpha_2 - \alpha_3 \alpha_4} f_1. \quad (6.8)$$

Для рівняння (6.8) розглянемо характеристичне рівняння

$$\frac{dz_1}{1} = \frac{dz_2}{\lambda} = \frac{dz_3}{\theta} = \frac{dz_4}{\nu} = \frac{(\alpha_1 \alpha_2 - \alpha_3 \alpha_4) df_1}{(\Lambda_4 \alpha_3 - \Lambda_1 \alpha_2) f_1}. \quad (6.9)$$

Розв'язками системи (6.9) є інтеграли

$$\begin{aligned} c_2 &= \lambda z_1 - z_2, \quad c_3 = \theta z_1 - z_3, \quad c_4 = \nu z_1 - z_4, \\ c_5 &= \ln f_1 + \frac{\alpha_2 \Lambda_1 - \alpha_3 \Lambda_4}{\alpha_1 \alpha_2 - \alpha_3 \alpha_4} z_1. \end{aligned}$$

Отже, загальний розв'язок рівняння (6.8) має вигляд

$$f_1 = \Phi_1(\tilde{\zeta}_2, \tilde{\zeta}_3, \tilde{\zeta}_4) \cdot \exp\left(\frac{\alpha_3\Lambda_4 - \alpha_2\Lambda_1}{\alpha_1\alpha_2 - \alpha_3\alpha_4} z_1\right),$$

де $\tilde{\zeta}_2, \tilde{\zeta}_3, \tilde{\zeta}_4$ визначені рівностями (4.4), а Φ_1 — довільна голоморфна функція трьох комплексних змінних.

Аналогічно можна отримати представлення для компонент f_2, f_3, f_4 . $\square$

Отже, формула (6.5) дає представлення ліво- Λ - ψ -гіперголоморфної функції при спеціальному виборі Λ і ψ .

Зауваження 6.1. З рівностей (2.2) і (2.5) випливає, що при $\Lambda = 0$ множина ліво- Λ - ψ -гіперголоморфних функцій співпадає з множиною ліво- ψ -гіперголоморфних функцій. Це засвідчують теоремами 4.1 і 6.1, оскільки представлення (6.5) співпадає з представленням (4.3) при $\Lambda = 0$.

ЛІТЕРАТУРА

- [1] R. Abreu Blaya, J. Bory Reyes, A. Guzmán, U. Kähler. On the ϕ -hyperderivative of the ψ -cauchy-type integral in clifford analysis. *Comput. Methods Funct. Theory*, 17(1):101–119, 2017.
- [2] R. Abreu Blaya, J. Bory Reyes, A. Guzmán Adán, U. Kaehler. On some structural sets and a quaternionic (ϕ, ψ) -hyperholomorphic function theory. *Mathematische Nachrichten*, 288(13):1451–1475, 2015.
- [3] D. Alpay, M. E. Luna-Elizarraras, M. Shapiro, D. C. Struppa. Basics of functional analysis with bicomplex scalars, and bicomplex schur analysis. *Springer: SpringerBriefs in Mathematics*, 2014.
- [4] D. Alpay, M. Shapiro, D. Volok. Rational hyperholomorphic functions in $\mathbb{R}^4$. *Journal of Functional Analysis*, 221:122–149, 2005.
- [5] S. Bock, K. Gürlebeck, D. Legatiuk, H. Nguyen. ψ -hyperholomorphic functions and a kolosov-muskhelishvili formula. *Math. Meth. Appl. Sci.*, 38(18):5114–5123, 2015.
- [6] J. Bory Reyes, M. Shapiro. Clifford analysis versus its quaternionic counterparts. *Math. Meth. Appl. Sci.*, 33(9):1089–1101, 2010.
- [7] E. Cartan. Les groupes bilinéaires et les systèmes de nombres complexes. *Annales de la faculté des sciences de Toulouse*, 12(1):1–64, 1898.
- [8] J. González-Cervantes. On a left- α - ψ -hyperholomorphic bergman space. *Complex Variables and Elliptic Equations*, 68(2):222–236, 2023.
- [9] J. González-Cervantes, J. Bory-Reyes. A fractional borel-pompeiu type formula and a related fractional ψ -fueter operator with respect to a vectorvalued function. *Math. Meth. Appl. Sci.*, 46(2):2012–2022, 2023.
- [10] J. González-Cervantes, I. Paulino-Basurto, J. Bory-Reyes. The borel-pompieu formula involving proportional fractional ψ -cauchy-riemann operators. *arXiv:2308.14158v1*.
- [11] K. Gürlebeck, H. Nguyen. On ψ -hyperholomorphic functions in $\mathbb{R}^3$. *AIP Conf. Proc.*, 1558:496–501, 2013.

- [12] K. Gürlebeck, H. Nguyen. ψ -hyperholomorphic functions and an application to elasticity problems. *AIP Conference Proceedings*, 1648, 2015.
- [13] T. Kuzmenko, V. Shpakivskyi. Quaternionic g -monogenic mappings in e_m . *Int. J. Adv. Res. Math.*, 12:1–34, 2018.
- [14] T. Kuzmenko, V. Shpakivskyi. A theory of quaternionic g -monogenic mappings in e_3 . *In: Models and Theories in Social Systems (Eds. C. Flaut etc.)*, Springer, 179:451–508, 2019.
- [15] M. Luna-Elizarraras, M. Shapiro, D. Struppa. On Clifford analysis for holomorphic mappings. *Advances in Geometry*, 14(3):413–426, 2014.
- [16] M. E. Luna-Elizarraras, M. Shapiro, D. C. Struppa, A. Vajiac. Bicomplex holomorphic functions: the algebra, geometry and analysis of bicomplex numbers. *Birkhäuser: Frontiers in Mathematics*, 2015.
- [17] H. Nguyen. ψ -hyperholomorphic function theory in $\mathbb{R}^3$: geometric mapping properties and applications. *Dissertation*, 2015.
- [18] D. Santiesteban, R. Abreu Blaya, M. P. Á. Alejandre. On a generalized lamé-navier system in $\mathbb{R}^3$. *Mathematica Slovaca*, 72(6):1527–1540, 2022.
- [19] D. Santiesteban, R. Blaya, M. P. Á. Alejandre. On (ϕ, ψ) -inframonogenic functions in clifford analysis. *Bull. Braz. Math. Soc.*, 53(2):605–621, 2022.
- [20] J. Serrano, R. Blaya, J. Sánchez-Ortiz. On a riemann-hilbert problem for ϕ -hyperholomorphic functions in $\mathbb{R}^m$. *Analysis and Mathematical Physics*, 13(84), 2023.
- [21] M. Shapiro, N. Vasilevski. Quaternionic ψ -hyperholomorphic functions, singular integral operators and boundary value problems i. ψ -hyperholomorphic function theory. *Complex Variables Theory and Application*, 27(1):17–46, 1995.
- [22] M. Shapiro, N. Vasilevski. Quaternionic ψ -hyperholomorphic functions, singular integral operators and boundary value problems ii. algebras of singular Integral operators and riemann type boundary value problems. *Complex Variables Theory and Application*, 27(1):67–96, 1995.
- [23] J. Vanegas, F. Vargas. On weighted dirac operators and their fundamental solutions for anisotropic media. *Adv. Appl. Clifford Algebras*, 28(46), 2018.
- [24] J. Vanegas, F. Vargas. On weighted dirac operators and their fundamental solutions. *Quaestiones Mathematicae*, 43(3):383–393, 2020.

Т. С. Кузьменко

Житомирський військовий інститут імені С. П. Корольова, м. Житомир

Email: kuzmenko.ts15@gmail.com

ORCID: 0000-0001-9052-6230

В. С. Шпаківський

Інститут математики НАН України, м. Київ

Email: shpakivskyi86d@gmail.com

ORCID: 0000-0003-4256-8975

Зображення і когомології груп і напівгруп

А. І. Плакош

Abstract. This article surveys results related to the cohomology of lattices over group rings, particularly over the group ring of the Klein four-group. It is shown that in this setting, syzygies coincide with the Auslander–Reiten translation, enabling the full computation of Tate cohomology for all lattices and the explicit description of the action of group automorphisms. Special attention is paid to regular lattices and their applications to the classification of multidimensional crystallographic and Chernikov groups. The article also explores the connection between the cohomology and representations of crossed group rings and those of coefficient rings, especially for semidirect product group rings. The approach is illustrated by a new classification of integral representations of the alternating group A_4 , leading to explicit cohomological invariants. The results are of interdisciplinary interest for group theory, homological algebra, crystallography, and coding theory.

Анотація. У статті узагальнено результати, пов’язані з когомологіями решіток над груповими кільцями, зокрема над груповим кільцем четверної групи Кляйна. Показано, що в цьому випадку сизигії збігаються з трансляцією Ауслендера–Райтен, що дозволило повністю обчислити когомології Тейта для всіх решіток та описати дію автоморфізмів групи. Окрему увагу приділено регулярним решіткам і їхнім застосуванням до класифікації багатовимірних кристалографічних і черніківських груп. Також розглянуто зв’язок когомологій і зображень схрещених групових кілець із когомологіями кілець коефіцієнтів, зокрема для групових кілець напівпрямих добутків. Узагальнено підхід до обчислення когомологій на прикладі цілих зображень альтернативної групи A_4 , що дозволило отримати нову класифікацію та повні когомологічні інваріанти. Результати мають міждисциплінарне значення для теорії груп, гомологічної алгебри, кристалографії та теорії кодування.

2020 Mathematics Subject Classification: 55Q05, 57K20, 57M05

Ключові слова: зображення, когомології, група, напівгрупа, решітка, групове кільце, кристалографічна група, черніківська група

DOI: <https://doi.org/10.3842/trim.v21n1.544>

ВСТУП

Теорія когомологій груп була натхненна роботами В. Гуревича про когомології ациклічних просторів і розвинена у 1940-х рр. С. Ейленбергом, С. Маклейном, В. Екманом, Х. Хопфом, Д. К. Фаддєєвим та іншими. Вони також були пов'язані з теорією розширень груп та проєктивними зображеннями, де когомології виникають як набори факторів. Поряд з загальною теорією, багато робіт було присвячено обчисленням когомологій конкретних груп. Тут у багатьох випадках виникає потреба у розробці спеціальних методів. Наприклад, Ш. Такахаші [21] запропонував нову, спрощену резольвенту для скінченних абелевих груп. Важливий випадок, коли група розкладається у напівпрямий добуток, досліджувався Маккі та іншими авторами, але загальних результатів про зображення та когомології досі не отримано. У цьому випадку природно виникають схрещені групові алгебри, зображення яких вивчалися І. Райтен, К. Рідтман, Ю. Дроздом та іншими. Ці роботи вказують на перспективні напрямки у обчисленні когомологій, особливо, коли порядок групи є оборотним у базовому кільці. Дослідження в цих напрямках і становлять основу дослідження.

Обчислення когомологій заданої групи є важливою та цікавою, але звичай громіздкою задачею. Тому відомі лише деякі випадки, коли такі обчислення були здійснені для досить широкого класу модулів. Якщо група є скінченною, особливий інтерес викликають когомології *решіток*, тобто G -модулів, які є скінченно породженими та вільними від кручення як групи. Вони мають значення, наприклад, у теорії кристалографічних груп і груп Чернікова. Очевидно, що якщо ми хочемо знати всі когомології решіток, слід мати класифікацію G -решіток. У випадку скінченних p -груп така класифікація відома лише для циклічних груп порядку p і p^2 для простого числа p [5, §.34В, §.34С], для циклічної групи порядку 8 [22] і для Кляйнівської 4-групи [16, 17]. В інших випадках така класифікація є *дику*, тобто включає опис зображень усіх скінченновимірних алгебр.

У першому згаданому випадку існує лише скінченна кількість незвідних зображень, когомології $\hat{H}^n(G, m)$ є періодичними з періодом 2, тож відповідь можна отримати без особливих труднощів. Це було використано в [1], де було складено повний список p -груп Чернікова з циклічним факторгрупою порядку p або p^2 . Для кляйнівської групи задача стає значно складнішою, оскільки, по-перше, існує нескінченно багато незвідних, попарно неізоморфних решіток, а по-друге, когомології більше не є періодичними. У цій роботі ми використовуємо опис незвідних решіток із [17] та деякі загальні факти про когомології p -груп і даємо повний опис когомологій решіток над кляйнівською групою.

У статті [15] Назарова описує 2-адичні зображення знакозмінної групи $\mathfrak{A}_4$ порядку 4. На жаль, важко використовувати цей опис для інших цілей, таких як обчислення когомологій. У цій роботі пропонується інший підхід, аналогічний вивченню зображень та когомологій групи Кляйна [14]. Зокрема, використовується техніка порядків Бакстра з [18, 20], і таким чином пов'язується опис 2-адичних зображень $\mathfrak{A}_4$ з зображеннями зваженого графа [6]. Це дозволяє повністю описати сагайдак Ауслендера-Рейтен 2-адичних зображень. Оскільки перетворення Ауслендера-Рейтен в цьому випадку збігається з сизигієм, це майже одразу дає значення всіх когомологій Тейта 2-адичних $\mathfrak{A}_4$ -решіток. Оскільки 3-адичні зображення $\mathfrak{A}_4$ є дуже простими, також описуються всі цілочисельні представлення та їх когомології. Слід зазначити, що знання когомологій є важливим для класифікації кристалографічних та Черніковських груп і т. д.

1. КОГОМОЛОГІЇ ЧЕТВЕРНОЇ ГРУПИ КЛЯЙНА

1.1. Решітки над Кляйнівською 4-групою. Нехай K позначає Кляйнівську 4-групу, $K = \langle a, b \mid a^2 = b^2 = 1, ab = ba \rangle$. Ми вивчаємо когомології цієї групи зі значеннями в K -решітках, тобто K -модулях M , для яких адитивна група M є вільною абелевою групою скінченного рангу, а також у їхніх *дуальних* модулях, тобто модулях $\text{Hom}_{\mathbb{Z}}(M, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$. Нехай $R = \mathbb{Z}K$. Ми вбудовуємо його в $R^\sharp = \mathbb{Z}^4$, ототожнюючи a з четвіркою $(1, 1, -1, -1)$ і b з $(1, -1, 1, -1)$. Зауважимо, що $R^\sharp$ є цілочисельним замиканням R в $\mathbb{Q} *_{\mathbb{Z}} R$.

Нехай $\mathbb{Z}_p$ – кільце p -адичних цілих чисел, $M_p = M * \mathbb{Z}\mathbb{Z}_p$ для кожної абелевої групи M . Тоді $R_p = \mathbb{Z}_p^4$ для $p \neq 2$, і $R_2 \simeq 4\mathbb{Z}_2^4$. З [8, Th., 3.7] випливає, що дві K -решітки M, N є ізоморфними тоді і тільки тоді, коли вони *одного роду*, тобто $M_p \simeq N_p$ для всіх p . Більше того, якщо $p \neq 2$, то R_p -решітка M_p однозначно визначається раціональною оболонкою $\mathbb{Q} * \mathbb{Z}M$. Тому K -решітка M є однозначно визначеною через її 2-адичне доповнення, яке позначається як $\hat{M}$.

Позначимо $R\text{-lat}$ категорію R -решіток, а $\hat{R}\text{-lat}$ – категорію $\hat{R}$ -решіток, тобто $\hat{R}$ -модулів, які є скінченно породженими і модулями без скруту (отже, вільними) як $\mathbb{Z}_2$ -модулі. Функтор $M \mapsto \hat{M}$ є *зображувальною еквівалентністю* між категоріями $R\text{-lat}$ і $\hat{R}\text{-lat}$, тобто він відображає неізоморфні модулі в неізоморфні, нерозкладні в нерозкладні, і кожна $\hat{R}$ -решітка є ізоморфною до $\hat{M}$ для однозначно визначеної R -решітки M .

Оскільки $4\hat{H}^n(K, M) = 0$ для будь-якого K -модуля M [4, Prop., XII.2.5], маємо ізоморфізм $\hat{H}^n(K, M) \simeq \hat{H}^n(K, \hat{M})$. Нехай $\mathbb{D} = \mathbb{Q}_2/\mathbb{Z}_2$, де $\mathbb{Q}_2$ – поле 2-адичних чисел. Ця група є *групою типу* 2^∞ , тобто прямою

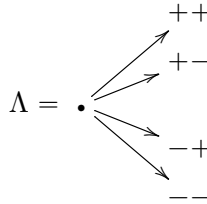
границею $\varinjlim_n \mathbb{Z}/2^n\mathbb{Z}$ скінченних циклічних 2-груп відносно натуральних вкладень $\mathbb{Z}/2^n\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/2^{n+1}\mathbb{Z}$. Ми називаємо K -модулі вигляду

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(M, \mathbb{D}) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}_2}(\hat{M}, \mathbb{D}),$$

де M – K -решітка, K -корешітка.

Кільце R є Горенштейновим, тобто $\mathrm{inj.dim}_R R = 1$. Оскільки R_p є максимальним надкілцем для $p \neq 2$, а R_2 є локальним, з [12, Лема 2.9] випливає, що R має єдине мінімальне власне надкілце A , і кожна нерозкладна R -решітка, окрім самого R , є A -решіткою. Насправді, A збігається з підкілцем у $R^\# = \mathbb{Z}^4$, яке складається з усіх четвірок (z_1, z_2, z_3, z_4) таких, що $z_1 \equiv z_2 \equiv z_3 \equiv z_4 \pmod{2}$.

Нехай $\mathfrak{m}$ – ідеал кільця A , що складається з усіх четвірок (z_1, z_2, z_3, z_4) , для яких $z_1 \equiv z_2 \equiv z_3 \equiv z_4 \equiv 0 \pmod{2}$. Тоді $\hat{\mathfrak{m}} = \mathrm{rad} \hat{A} = \mathrm{rad} \hat{R}^\#$. Отже, $\hat{A}$ є порядком Бакстрема у сенсі [18]. Тому, згідно з [18], решітки над $\hat{A}$, а отже і над A , класифікуються зображеннями сагайдака



Нагадаємо відповідну конструкцію (на рівні A -решіток). Для будь-якого K -модуля M позначимо через $M_{\alpha\beta}$, де $\alpha, \beta \in +, -$, підмодуль $\{u \in M \mid au = \alpha u, bu = \beta u\}$.

Якщо M є A -решіткою, покладемо $M^\# = R^\# M$ (тобто добуток решіток у $\mathbb{Q} * \mathbb{Z}M$, який збігається з образом природного гомоморфізму $R^\# * AM \rightarrow \mathbb{Q} * \mathbb{Z}M$). Це найменший $R^\#$ -модуль, що містить M . Тоді $M^\# = \bigoplus \alpha\beta M_{\alpha\beta}^\#$. Позначимо $V_\bullet = M/\mathfrak{m}M$ та $V_{\alpha\beta} = M_{\alpha\beta}^\# / 2M_{\alpha\beta}^\#$. Вибираючи як $f_{\alpha\beta}$ природні гомоморфізми $V_\bullet \rightarrow V_{\alpha\beta}$, ми отримуємо зображення сагайдака Λ , яке позначаємо через $\Phi(V)$. Таким чином, ми визначаємо функтор Φ з категорії $A\text{-lat}$ A -решіток у категорію $\mathrm{ger} \Lambda$ зображень сагайдака Λ над полем $\mathbb{k} = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Маємо такий результат, аналогічний результату з [18].

Теорема 1.1. *Нехай $\mathcal{R}$ – категорія зображень*

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{ccccc}
 & & & & V_{++} \\
 & & & \nearrow & \\
 & & f_{++}, & & \\
 & & \nearrow & & \\
 & & f_{+-}, & & V_{+-} \\
 & & \nearrow & & \\
 V = V_{\bullet} & & & & \\
 & \searrow & & & \\
 & f_{-+}, & & & \\
 & \searrow & & & \\
 & f_{--}, & & & V_{-+} \\
 & \searrow & & & \\
 & & & & V_{--}
 \end{array}
 \end{array} \quad (1.1)$$

сагайдака Λ над полем $\mathbb{k}$, таких що всі відображення $f_{\alpha\beta}$ є сюр'єктивними, а індуковане відображення $f_{+} : V_{\bullet} \rightarrow V_{+} = \bigoplus_{\alpha\beta} V_{\alpha\beta}$ є ін'єктивним. Тоді функтор Φ є зображувальною еквівалентністю $\Phi : A\text{-lat} \rightarrow \mathcal{R}$, причому всі індуковані гомоморфізми

$$\Phi_{M,N} : \text{Hom}_A(M, N) \rightarrow \text{Hom}_{\Lambda}(\Phi(M), \Phi(N))$$

є сюр'єктивними, а також виконується рівність:

$$\text{Ker } \Phi_{M,N} = \text{Hom}_A(M, \mathfrak{m}N) = 2 \text{Hom}_{R^{\#}}(\tilde{M}, N^{\#}). \quad (1.2)$$

Ми називаємо п'ятірку $(d_{\bullet}, d_{\alpha\beta})$ ($\alpha, \beta \in +, -$) розмірністю зображення V або відповідної решітки $M = M(V)$, позначаємо її як $\mathbf{dim} V$ або $\mathbf{dim} M$ і зазвичай записуємо у вигляді

$$\boxed{
 \begin{array}{c}
 d_{++} \\
 d_{+-} \\
 d_{\bullet} \\
 d_{-+} \\
 d_{--}
 \end{array}
 }$$

За потреби також вводимо позначення $d_{\bullet} = d_{\bullet}(M)$, $d_{\alpha\beta} = d_{\alpha\beta}(M)$ і $d_{+} = d_{+}(M) = \sum_{\alpha\beta} d_{\alpha\beta}(M)$.

Зауважимо, що ранг M як $\mathbb{Z}$ -модуля дорівнює $d_{+}(M)$, тоді як $d_{\bullet} = \dim_{\mathbb{k}} M/\mathfrak{m}M$.

Нам також потрібні аналоги деяких результатів із [20]. З цією метою сформулюємо лему. Для будь-якої $\mathbb{Z}$ -решітки або $R^{\#}$ -решітки M покладемо $\bar{M} = M/2M$, а якщо $\alpha : M \rightarrow N$ — гомоморфізм решіток, то через $\bar{\alpha}$ позначатимемо індуковане відображення $\bar{M} \rightarrow \bar{N}$.

Відомо, що для четверної групи Кляйна G кожна $\mathbb{Z}_2G$ -решітка, де $\mathbb{Z}_2$ — це кільце p -адичних цілих чисел, збігається з 2-адичним завершенням $\hat{M}_2$ деякої $\mathbb{Z}G$ -решітки M , і виконується $\hat{M}_2 \simeq \hat{N}_2$ тоді і тільки тоді, коли $M \simeq N$ (див. [16]). Оскільки $\hat{H}^n(G, M) = \hat{H}^n(G, \hat{M}_2)$, нам достатньо розглядати лише $\mathbb{Z}_2G$ -решітки.

1.2. Когомології. У цьому розділі ми також встановлюємо деякі результати щодо трансляції Ауслендера-Райтен та когомологій p -груп.

Нехай R – локальне повне нетерове кільце, рівновимірне з Крулловою розмірністю 1 і без нільпотентних елементів, а $R\text{-lat}$ – категорія R -решіток, тобто максимальних Коена-Макколея R -модулів або, що те саме, R -модулів, вільних від кручення. Відомо, що R має канонічний модуль $\omega_R \in R\text{-lat}$, такий що функтор $D = \text{Hom}_R(, \omega_R)$ є точною дуальністю на категорії $R\text{-lat}$ [3, Corollary 3.3.8].

Зокрема, він індукує бієкцію на множині $R\text{-ind}$ класів ізоморфізму незвідних R -решіток.

Нагадаємо, що *послідовність Ауслендера-Райтен* у $R\text{-lat}$ – це нерозщеплювана точна послідовність

$$0 \rightarrow M' \xrightarrow{\beta} N \xrightarrow{\alpha} M \rightarrow 0, \quad (\text{AR})$$

де M і M' – незвідні R -решітки, і

- для кожного гомоморфізму $\xi : L \rightarrow M$, де L – незвідна R -решітка, і ξ не є ізоморфізмом, існує $\xi' : L \rightarrow N$, таке що $\xi = \alpha\xi'$;
- для кожного гомоморфізму $\eta : M' \rightarrow L$, де L – незвідна R -решітка, і η не є ізоморфізмом, існує $\eta' : N \rightarrow L$, таке що $\eta = \eta'\beta$!

У цьому випадку M і M' визначають одне одного з точністю до ізоморфізму. Вони позначаються: $M' = \tau_R M$ і $M = \tau_R^{-1} M'$. τ_R називається *трансляцією Ауслендера-Райтен* для R -решіток. Відомо [2], що для кожної незвідної R -решітки $M \neq R$ (для кожної незвідної R -решітки $M' \neq \omega_R$) існує послідовність Ауслендера-Райтен (AR), тож $\tau_R M$ (відповідно, $\tau_R^{-1} M'$) визначена. Якщо R є Горенштейновим, тобто $\omega_R \simeq R$, τ_R індукує бієкцію на множині $R\text{-ind} = R$.

Нехай у послідовності Ауслендера-Райтен (AR) $N = \bigoplus_{i=1}^m N_i$, де N_i – незвідні зображення, $\alpha_i : N_i \rightarrow M$ та $\beta_i : M' \rightarrow N_i$ є компонентами α та β відносно цього розкладу.

Сагайдак Ауслендера-Райтен категорії $R\text{-lat}$ – це сагайдак, вершинами якого є класи ізоморфізму незвідних R -решіток, а стрілки визначаються за такими правилами:

- Якщо $M \neq R$, стрілки, що завершуються в M , – це просто $\alpha_i : N_i \rightarrow M$.
- Якщо $M' \neq \omega_R$, стрілки, що починаються в M , – це просто $\beta_i : M' \rightarrow N_i$.
- Якщо $\text{rad } R = \bigoplus_{i=1}^k Q_i$, де Q_i – незвідні, стрілки, що завершуються в R , – це просто вкладення $\iota_i : Q_i \rightarrow R$.
- Стрілки, що починаються в ω_R , – це просто $D\iota_i : DQ_i \rightarrow \omega_R$.

Нехай у послідовності Ауслендера-Райтен (AR) $N = \bigoplus_{i=1}^m N_i$, де N_i – незвідні зображення, $\alpha_i : N_i \rightarrow M$ та $\beta_i : M' \rightarrow N_i$ є компонентами α та β відносно цього розкладу.

Сагайдак Ауслендера-Райтен категорії $R\text{-lat}$ – це сагайдак, вершинами якого є класи ізоморфізму незвідних R -решіток, а стрілки визначаються за такими правилами:

- Якщо $M \neq R$, стрілки, що завершуються в M , – це просто $\alpha_i : N_i \rightarrow M$.
- Якщо $M' \neq \omega_R$, стрілки, що починаються в M , – це просто $\beta_i : M' \rightarrow N_i$.
- Якщо $\text{rad } R = \bigoplus_{i=1}^k Q_i$, де Q_i – незвідні, стрілки, що завершуються в R , – це просто вкладення $\iota_i : Q_i \rightarrow R$.
- Стрілки, що починаються в ω_R , – це просто $D\iota_i : DQ_i \rightarrow \omega_R$.

Позначимо через ΩM сизигій M , тобто ядро епіморфізму $\varphi : P \rightarrow M$, де P – проєктивний, а $\text{Ker } \varphi \subseteq \text{rad } P$. Знову ж, якщо R є Горенштейновим, то Ω задає бієкцію на множині $R\text{-ind}=R$. Тож у цьому випадку $\Omega^{-1}M$ коректно визначений для будь-якої незвідної решітки $M \neq R$.

Твердження 1.1. *Якщо R є Горенштейновим, то $\tau_R M \simeq \Omega M$ для кожної незвідної R -решітки $M \neq R$.*

Нагадаємо, що якщо R є Горенштейновим, але не регулярним, то існує єдине кільце $A \supset R$ таке, що $A/R \simeq R/\text{rad } R$, $A \in R\text{-lat}$ (тому $A\text{-lat}$ є повною підкатегорією $R\text{-lat}$), і кожна незвідна R -решітка $M \neq R$ є A -решіткою. A називається мінімальним надкільцем R (див. [9]). За дуальністю, $DA \simeq \text{rad } R$.

Твердження 1.2. *Нехай кільце R є горенштейновим і не регулярним, а A – мінімальне надкільце R .*

- (1) *Якщо $0 \rightarrow M' \xrightarrow{\beta} N \xrightarrow{\alpha} M \rightarrow 0$ – послідовність Ауслендера-Райтен у $A\text{-lat}$, то вона також є послідовністю у $R\text{-lat}$.*
- (2) *Нехай M – незвідна A -решітка. Якщо $M \neq A$, то $\tau_R M = \tau_A M$, а якщо $M \neq \omega_A$, то $\tau_R^{-1} M = \tau_A^{-1} M$.*

Надалі покладемо $R = \mathbb{Z}_p G$, де G – скінченна комутативна p -група. Це локальне, горенштейнове, нерегулярне кільце, і $R/\text{rad } R \simeq \mathbb{F}_p$ (з тривіальною дією). Нехай A – мінімальне надкільце R .

Твердження 1.3. $\tau_R A \simeq \omega_A$.

Твердження 1.4.

$$\hat{H}^n(G, A) \simeq \hat{H}^n(G, \mathbb{F}_p) \simeq \begin{cases} (n+1)\mathbb{F}_p, & \text{якщо } n \geq 0, \\ (-n)\mathbb{F}_p, & \text{якщо } n < 0. \end{cases}$$

Твердження 1.5. Нехай $M \in \text{CM}(R)$, $M \neq R$. Тоді

$$\hat{H}^n(G, M) \simeq \hat{H}^{n+1}(G, \tau_R M) \simeq \hat{H}^{n-1}(G, \tau_R^{-1} M)$$

Тепер G – це кляйнівська четвірна група: $G = \langle a, b, |, a^2 = b^2 = 1, ab = ba \rangle$. Тоді $\mathbb{Z}_2 G$ має 4 незвідні решітки L_{uv} , де $u, v \in +, -$. А саме, $L_{uv} = \mathbb{Z}_2$ як $\mathbb{Z}_2$ -модуль, a діє як $u1$, а b – як $v1$.

Твердження 1.6.

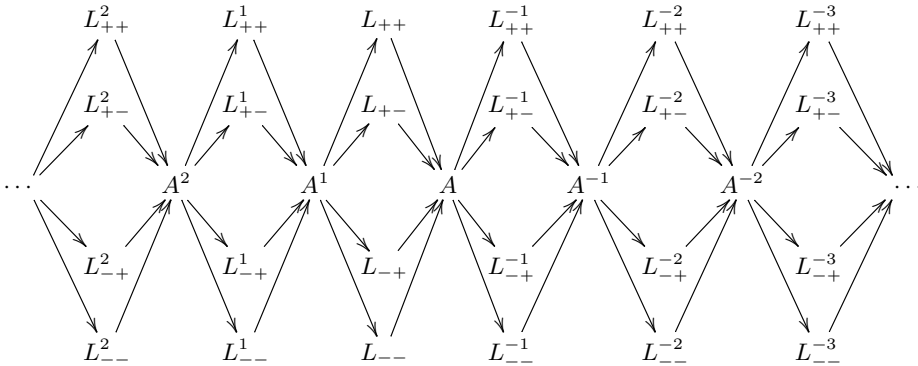
$$\hat{H}^n(G, L_{++}) = \begin{cases} (|n|/2 + 1)\mathbb{F}_2, & \text{якщо } n \neq 0 \text{ парне,} \\ (|n|/2)\mathbb{F}_2, & \text{якщо } n \text{ непарне,} \\ \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}, & \text{якщо } n = 0, \end{cases}$$

а якщо $(u, v) \neq (+, +)$, то

$$\hat{H}^n(G, L_{uv}) = ([(|n| + 1)/2])\mathbb{F}_2$$

Покладемо $R = \mathbb{Z}_2 G$, де G – кляйнівська четвірна група, а A – мінімальне надкільце R . Згадаємо структуру сагайдака Ауслендера-Райтен для $A\text{-lat}$. Із [19] та [17] випливає, що цей сагайдак складається з *препроективно-преін'єктивної* компоненти та *труб*.

Препроективно-преін'єктивна компонента має вигляд



Тут M^k позначає $\tau_R^k M$. Зокрема, $A^1 = \omega_A$. Твердження 1.5 та 1.6 виводять наступні значення когомологій для цих решіток.

Теорема 1.2.

$$\hat{H}^n(G, A^k) = \begin{cases} (n - k + 1)\mathbb{F}_2, & \text{якщо } n \geq k, \\ (k - n)\mathbb{F}_2, & \text{якщо } n < k; \end{cases}$$

$$\hat{H}^n(G, L_{++}^k) = \begin{cases} (|n - k|/2 + 1)\mathbb{F}_2, & \text{якщо } n - k \neq 0 \text{ — парне,} \\ (|n - k|/2)\mathbb{F}_2, & \text{якщо } n - k \text{ — непарне,} \\ \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}, & \text{якщо } n = k; \end{cases}$$

і якщо $(u, v) \neq (+, +)$, тоді

$$\hat{H}^n(G, L_{uv}^k) = [(|n - k| + 1)/2]\mathbb{F}_2. \quad \square$$

Щоб обчислити когомології решіток, що належать трубам, необхідні такі міркування. Нехай $\tilde{A}$ — це ціле замикання A в $A * \mathbb{Q}_p$. Для будь-якої A -решітки M решітка $\tilde{M} = \tilde{A}M$ є прямою сумою $\bigoplus_{u,v \in +, -} M_{uv}$, де $M_{uv} \simeq (r_{uv}M)L_{uv}$ для деяких цілих чисел $r_{uv}M$. Зазначимо, що кожен $\mathbb{Z}_2$ -підмодуль M_{uv} насправді є $\tilde{A}$ -підмодулем.

Лема 1.1. Якщо $M \not\simeq L_{++}$ є незвідною R -решіткою, то $\hat{H}^0(G, M) = (r_{++}M)\mathbb{F}_2$.

Тепер нагадаємо структуру труб [17]. Однорідні труби параметризуються незвідними однорідними поліномами $f \in \mathbb{F}_2[x]$, де $f \notin x, x - 1$. Труба $\mathcal{T}^f$ має вигляд

$$T_1^f \begin{matrix} \xrightarrow{\quad} \\ \xleftarrow{\quad} \end{matrix} T_2^f \begin{matrix} \xrightarrow{\quad} \\ \xleftarrow{\quad} \end{matrix} T_3^f \begin{matrix} \xrightarrow{\quad} \\ \xleftarrow{\quad} \end{matrix} T_4^f \begin{matrix} \xrightarrow{\quad} \\ \xleftarrow{\quad} \end{matrix} \dots$$

де $r_{++}(T_k^f) = kd$ для $d = \deg f$ та $\tau_R T_k^f = T_k^f$.

Є також 3 спеціальних труб $\mathcal{T}^j$ ($j \in 2, 3, 4$). Вони мають вигляд

$$\begin{array}{ccccccc} T_1^{j1} & \longrightarrow & T_2^{j1} & \longrightarrow & T_3^{j1} & \longrightarrow & T_4^{j1} & \longrightarrow & \dots \\ & \swarrow & & \swarrow & & \swarrow & & \swarrow & \\ & T_1^{j2} & \longrightarrow & T_2^{j2} & \longrightarrow & T_3^{j2} & \longrightarrow & T_4^{j2} & \longrightarrow & \dots \end{array}$$

де $r_{++}T_{2k}^{j1} = r_{++}T_{2k}^{j2} = k$, $r_{++}T_{2k-1}^{j1} = k$, $r_{++}T_{2k-1}^{j2} = k - 1$ та $\tau_R T_k^{j1} = T_k^{j2}$, $\tau_R T_k^{j2} = T_k^{j1}$.

Використовуючи Лему 1.1 та Твердження 1.5, ми отримуємо наступний результат, який завершує обчислення когомологій решіток над кляйнівською групою.

Теорема 1.3.

$$\hat{H}^n(G, T_k^f) = kd\mathbb{F}_2, \text{ де } d = \deg f,$$

та для всієї $j \in \{2, 3, 4\}$

$$\hat{H}^n(G, T_{2k}^{j_i}) = k\mathbb{F}_2 \text{ для обох } i = 1, 2,$$

$$\hat{H}^n(G, T_{2k-1}^{j_1}) = \begin{cases} k\mathbb{F}_2, & \text{якщо } |n| \text{ — парне,} \\ (k-1)\mathbb{F}_2, & \text{якщо } |n| \text{ — непарне,} \end{cases}$$

$$\hat{H}^n(G, T_{2k-1}^{j_2}) = \begin{cases} k\mathbb{F}_2, & \text{якщо } |n| \text{ — парне,} \\ (k-1)\mathbb{F}_2, & \text{якщо } |n| \text{ — непарне.} \end{cases}$$

2. КОГОМОЛОГІЇ РЕГУЛЯРНИХ РЕШТОК НАД КЛЯЙНІВСЬКОЮ 4-ГРУПОЮ

Якщо M, N, L — решітки, то можна сформулювати наступну лему.

Лема 2.1. *Нехай дана точна послідовність $0 \rightarrow \bar{M} \xrightarrow{\bar{\alpha}} \bar{N} \xrightarrow{\bar{\beta}} \bar{L} \rightarrow 0$ $\mathbb{Z}$ -решіток або $R^\sharp$ -решіток. Тоді її можна підняти до точної послідовності $0 \rightarrow M \xrightarrow{\alpha} N \xrightarrow{\beta} L \rightarrow 0$.*

Наслідок 2.1. *Нехай $0 \rightarrow V' \xrightarrow{\bar{\alpha}} V \xrightarrow{\bar{\beta}} V'' \rightarrow 0$ — точна послідовність зображень з категорії $\mathcal{R}$. Тоді її можна підняти до точної послідовності A -решіток $0 \rightarrow M(V') \xrightarrow{\alpha} M(V) \xrightarrow{\beta} M(V'') \rightarrow 0$ ¹*

Ми кажемо, що мономорфізм решіток $\phi : M \rightarrow N$ є чистим, якщо $\text{Сокер } \phi$ є вільним від кручення (а отже, також є решіткою).

Наслідок 2.2. *Кожен епіморфізм (мономорфізм, ізоморфізм) $V \rightarrow V'$ зображень з категорії $\mathcal{R}$ можна підняти до епіморфізму (відповідно, чистого мономорфізму, ізоморфізму) A -решіток $\Phi(V) \rightarrow \Phi(V')$.*

Наслідок 2.3. *Нехай задано ланцюг підзображень*

$$V = V_0 \supset V_1 \supset V_2 \supset \dots \supset V_{m-1} \supset V_m = 0,$$

тоді існує ланцюг підрешіток у $M = M(V)$

$$M = M_0 \supset M_1 \supset M_2 \supset \dots \supset M_{m-1} \supset M_m = 0$$

¹Цей результат не впливає безпосередньо з [20, Лема 4], де розглядається випадок алгебр над повними кільцями дискретного нормування. Крім того, він суттєво залежить від Лема 2.1, а отже — від «маломірності» залишкового поля $\mathbb{k}$.

такий, що $M_k \simeq M(V_k)$ і $M_k/M_{k+l} \simeq M(V_k/V_{k+l})$ для всіх допустимих значень k, l .

2.1. Регулярні решітки. Нагадаємо структуру сагайдака Ауслендера–Райтен $\mathcal{Q}$ категорії $\hat{A}\text{-lat}$ [17]. Згідно з [20], він отримується з сагайдака Ауслендера–Райтен категорії гер Λ шляхом склеювання препроективної та преін'єктивної компонент в одну. Отримана *препроективно-преін'єктивна компонента* зображена на Рисунку 1. Усі решітки тут однозначно визначаються своїми розмірностями. Трансляція Ауслендера–Райтен τ у категорії $\hat{R}\text{-lat}$ діє на цій компоненті як зсув ліворуч. Зауважимо, що для кожної A -решітки M маємо $\tau\hat{M} \simeq \Omega\hat{M}$, де $\Omega\hat{M}$ – сизигій $\hat{M}$ як $\hat{R}$ -модуля [14, Prop. 1.1]. Відтак $\Omega M \simeq N$, якщо $\tau\hat{M} = \hat{N}$.

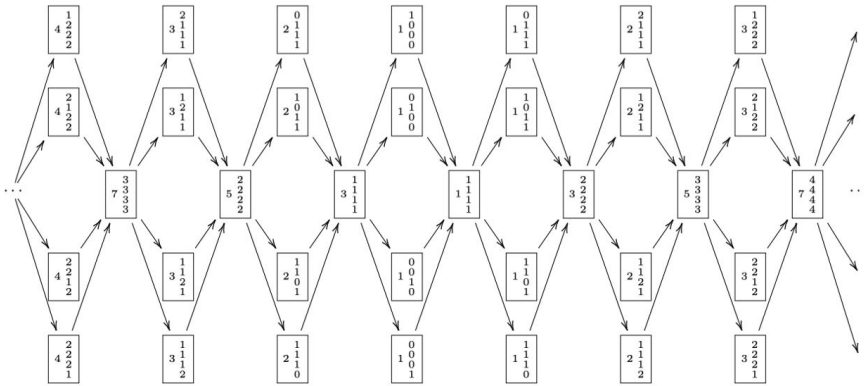


Рис. 2.1. Препроективно-преін'єктивна компонента

Інші компоненти, які називаються *регулярними*, – це *труби*. Вони параметризуються замкненими точками проективної прямої $\mathbb{P}^1_{\mathbb{k}}$ (розглянутої як схема), тобто однічними незвідними многочленами з $\mathbb{k}[t]$ та символом ∞ . Трубу, що відповідає многочлену $f(t)$, позначаємо через $\mathcal{T}^f$, а трубу, що відповідає ∞ , – через $\mathcal{T}^\infty$. Також пишемо $\mathcal{T}^0$ замість $\mathcal{T}^t$ і $\mathcal{T}^1$ замість $\mathcal{T}^{t-1}$. Описуючи труби, ми підставляємо A -решітки замість їхніх завершень і кажемо, що T належить трубі $\mathcal{T}^f$, якщо $\hat{T}$ належить цій трубі. Тоді ми називаємо T *регулярною K -решіткою*. Ми називаємо K -решітку M *регулярною*, якщо всі її незвідні прямі доданки є регулярними. Усі труби, окрім $\mathcal{T}^\lambda$ (де $\lambda \in 0, 1, \infty$), є *однорідними*, тобто для кожного M з цієї труби виконується $\tau M \simeq M$. Вони мають вигляд

$$T_1^f \rightleftarrows T_2^f \rightleftarrows T_3^f \rightleftarrows \dots \quad (2.1)$$

$\dim T_m^f = \begin{bmatrix} dm & dm \\ 2dm & dm \\ dm & dm \end{bmatrix}$, де $d = \deg f(t)$. Насправді, $T_m^f = M(\bar{T}_m^f)$, де $\bar{T}_m^f$ — це таке зображення сагайдака Λ :

$$\begin{array}{c} \mathbb{K}^{2dm} \begin{array}{l} \nearrow (I \ 0) \searrow \mathbb{K}^{dm} \\ \nearrow (0 \ I) \searrow \mathbb{K}^{dm} \\ \nearrow (I \ I) \searrow \mathbb{K}^{dm} \\ \searrow (I \ F) \searrow \mathbb{K}^{dm} \end{array} \end{array} \quad (2.2)$$

Тут I — одинична матриця розміру $dm \times dm$, а F — матриця Фробеніуса з характеристичним многочленом $f(t)^m$.

Труба $\mathcal{T}^\lambda$ для $\lambda \in 0, 1, \infty$ має вигляд

$$\begin{array}{ccccccc} T_1^{\lambda 1} & \longrightarrow & T_2^{\lambda 1} & \longrightarrow & T_3^{\lambda 1} & \longrightarrow & T_4^{\lambda 1} & \longrightarrow & \dots \\ & \nwarrow & \nearrow & \nwarrow & \nearrow & \nwarrow & \nearrow & \nwarrow & \\ T_1^{\lambda 2} & \longrightarrow & T_2^{\lambda 2} & \longrightarrow & T_3^{\lambda 2} & \longrightarrow & T_4^{\lambda 2} & \longrightarrow & \dots \end{array} \quad (2.3)$$

Тут $\tau T_n^{\lambda 1} \simeq T^{\lambda 2} n$ та $\tau T^{\lambda 2} n \simeq T^{\lambda 1} n$. Для $\lambda = 1$ маємо:

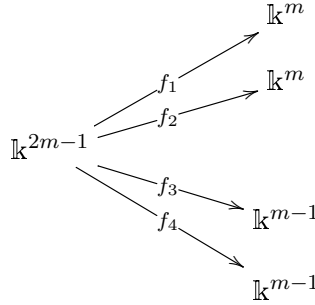
$$\dim T^{1j} 2m = \begin{bmatrix} m \\ 2m & m \\ m & m \end{bmatrix} \text{ для обох } j = 1 \text{ і } j = 2,$$

$$\dim T^{11} 2m - 1 = \begin{bmatrix} m \\ 2m-1 & m-1 \\ m-1 & m-1 \end{bmatrix},$$

$$\dim T^{12} 2m - 1 = \begin{bmatrix} m-1 \\ 2m-1 & m-1 \\ m & m \end{bmatrix}.$$

Насправді, $T^{11} 2m = M(\bar{T}^{11} 2m)$, де $\bar{T}^{11} 2m$ має вигляд (2.2) з $d = 1$ та $F = J_1$ — жорданова матриця розміру $m \times m$ з власним значенням 1.

$T^{11}2m - 1 = M(\bar{T}^{11}2m - 1)$, де $\bar{T}^{11}2m - 1$ має вигляд



Тут

$$\begin{aligned} f_1 &= \begin{pmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \\ f_2 &= \begin{pmatrix} 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \\ f_3 &= (I \quad I \quad 0), \\ f_4 &= (I \quad J_1 \quad e), \text{ де } e = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

де матриці I та J_1 мають розмір $(m-1) \times (m-1)$. Решітки T_n^{12} отримуються з T_n^{11} шляхом перестановки f_1 з f_3 та f_2 з f_4 відповідно.

Труба $\mathcal{T}^0$ (відповідно, $\mathcal{T}^\infty$) отримується з труби $\mathcal{T}^1$ перестановкою f_2 з f_4 (відповідно, f_2 з f_3).

Зауважимо, що незвідна решітка M належить трубі тоді і тільки тоді, коли

$$2d_\bullet(M) = \sum_{\alpha\beta} d_{\alpha\beta}(M). \quad (2.4)$$

В цьому випадку

$$d_\bullet(\Omega M) = d_\bullet(M) \quad \text{та} \quad d_{\alpha\beta}(\Omega M) = d_\bullet(M) - d_{\alpha\beta}(M). \quad (2.5)$$

Структура зображень сагайдаків, що належать трубам, описана у [6, 7] (див. також [10, Thm. 31 and 36]). У поєднанні з Твердженням 2.3 це дає наступний результат для решіток. Відтепер, пишучи T_m^f , ми завжди припускаємо, що $f \notin t, t-1$, а при позначенні $T_m^{\lambda j}$ завжди маємо на увазі, що $\lambda \in 0, 1, \infty$ і $j \in 1, 2$.

Теорема 2.1. *Кожен модуль T_m^f або $T^{\lambda j}t$ має ланцюг підмодулів*

$$M = M_0 \supset M_1 \supset M_2 \supset \dots \supset M_{t-1} \supset M_t = 0 \quad (2.6)$$

такий, що

- (1) $M_k/M_{k+1} \simeq \begin{cases} T_l^f & \text{якщо } M = T_m^f, \\ T_l^{\lambda j} & \text{якщо } M = T_m^{\lambda j} \text{ і } k \text{ парне,} \\ T_l^{\lambda i}, & \text{де } i \neq j, \text{ якщо } M = T_m^{\lambda j} \text{ і } k \text{ непарне.} \end{cases}$
- (2) Відображення $T_m^f \rightarrow T_{m+1}^f$ та $T_m^{\lambda j} \rightarrow T_{m+1}^{\lambda j}$ у діаграмах (2.1) та (2.3) відповідно можна вибрати ін'єктивними, з відповідними факторами T_1^f та $T_1^{\lambda j}$.
- (3) Відображення $T_{m+1}^f \rightarrow T_m^f$ та $T_{m+1}^{\lambda i} \rightarrow T_m^{\lambda j}$ ($i \neq j$) у діаграмах (2.1) та (2.3) відповідно можна вибрати сюр'єктивними, з відповідними ядрами T_1^f та $T_1^{\lambda i}$.
- (4) Якщо M і M' належать до різних труб, то для кожного гомоморфізму $\varphi : M \rightarrow N$ виконується $\text{Im } \varphi \subseteq 2N$.

Можна також отримати опис ендоморфізмів незвідних решіток, що належать трубам.

Для будь-якого комутативного кільця K та будь-якого одничного многочлена $f(t)$ степеня d існує природне вкладення $\varepsilon_m^f : K[t]/(f(t)^m) \rightarrow \text{Mat}(dm, K)$, яке виникає з регулярного зображення цього фактор-кільця над K . Позначимо через K_m^f образ цього вкладення $K[t]/(f(t)^m) \rightarrow \text{Mat}(dm, K)^4$, де всі його компоненти — це ε_m^f . Також позначимо через K_{m*}^t образ вкладення $K[t]/(t^m) \rightarrow \text{Mat}(m, K)^2 \times \text{Mat}(m-1, K)^2$, де перші дві компоненти — це ε_m^t , а дві інші — композиції $\varepsilon_{m-1}^t \pi_m$, де π_m — сюр'єкція $K[t]/(t^m) \rightarrow K[t]/(t^{m-1})$. Звісно, якщо $m = 1$, то це просто діагональне вкладення $K \rightarrow K \times K$.

Якщо M — A -решітка з $\dim M = \begin{bmatrix} d_{++} \\ d_{+-} \\ d_{-+} \\ d_{--} \end{bmatrix}$, то кільце ендоморфізмів

$\text{End}_A M$ природно вклене у $\text{End}_{R^\#} \tilde{M} = \prod_{\alpha\beta} \text{Mat}(d_{\alpha\beta}, \mathbb{Z})$, і ми ототожнюємо його з образом цього вкладення.

Теорема 2.2. Нехай $f(t) \in \mathbb{k}[t]$ — незвідний одничний многочлен. Виберемо одничний многочлен $\tilde{f}(t) \in \mathbb{Z}[t]$ такий, що $f(t) = \tilde{f}(t) \pmod{2}$.

- (1) $\text{End}_A T_m^f = \mathbb{Z}_m^{\tilde{f}} + 2 \text{Mat}(dm, \mathbb{Z})^4$, де $d = \deg f(t)$.
- (2) $\text{End}_A T_{2m}^{\lambda j} = \mathbb{Z}_{2m}^t + 2 \text{Mat}(m, \mathbb{Z})^4$ та
 $\text{End}_A T_{2m-1}^{\lambda j} = \mathbb{Z}_{m*}^t + 2(\text{Mat}(m, \mathbb{Z})^2 \times \text{Mat}(m-1, \mathbb{Z})^2)$.

Очевидно, що це не залежить від вибору многочлена $\tilde{f}(t)$.

2.2. Когомології. Ми надамо явний опис когомологій $H^n(K, M)$ та $H^n(K, DM)$ для $n > 0$ і регулярних K -решіток M . Очевидно, що достатньо обчислити їх лише для незвідних решіток.

Із [13] випливає, що вільну резольвенту $\mathbf{P}$ для тривіального K -модуля $\mathbb{Z}$ можна вибрати так: $\mathbf{P}_n$ — це простір однорідних многочленів степеня n з $R[x, y]$, і

$$d(x^k y^l) = (a + (-1)^k)x^{k-1}y^l + (-1)^k(b + (-1)^l)x^k y^{l-1}.$$

Отже, n -коцикл γ задається значеннями $\gamma(x^m y^{n-m})$ для $0 \leq m \leq n$.

Нехай M — незвідна регулярна решітка. Покладемо

$$M(n) = \begin{cases} M_{++}, & \text{якщо } n \text{ — парне,} \\ M_{-+}, & \text{якщо } n \text{ — непарне } M \notin \mathcal{T}^\infty, \\ M_{+-}, & \text{якщо } n \text{ — непарне } M \in \mathcal{T}^\infty, \end{cases}$$

Ми визначаємо гомоморфізм $\xi : M(n) \rightarrow H^n(K, M)$ ($n > 0$). Він відображає елемент $v \in M(n)$ у клас коцикла ξ_v , який задається наступним чином.

- Якщо n — парне, то $M \notin \mathcal{T}^\infty$ та $v \in M_{++}$,

$$\xi_v(x^m y^{n-m}) = \begin{cases} v, & \text{якщо } m = n, \\ 0, & \text{інакше.} \end{cases}$$

- Якщо n — парне, то $M \in \mathcal{T}^\infty$ та $v \in M_{++}$,

$$\xi_v(x^m y^{n-m}) = \begin{cases} v, & \text{якщо } m = 0, \\ 0, & \text{інакше.} \end{cases}$$

- Якщо n — парне, то $M \notin \mathcal{T}^\infty$ та $v \in M_{-+}$,

$$\xi_v(x^m y^{n-m}) = \begin{cases} v, & \text{якщо } m = n, \\ 0, & \text{інакше.} \end{cases}$$

- Якщо n — парне, то $M \in \mathcal{T}^\infty$ та $v \in M_{+-}$,

$$\xi_v(x^m y^{n-m}) = \begin{cases} v, & \text{якщо } m = 0, \\ 0, & \text{інакше.} \end{cases}$$

Легко перевірити, що ξ_v справді є коциклом.

Теорема 2.3. Для кожної незвідної регулярної K -решітки M і кожного $n > 0$ відображення ξ індукує ізоморфізм $\tilde{\xi} : M(n)/2M(n) \xrightarrow{\sim} H^n(K, M)$.

Для доведення ми використовуємо такі результати.

Лема 2.2. Якщо $0 \rightarrow M' \rightarrow M \rightarrow M'' \rightarrow 0$ — точна послідовність регулярних K -решіток, то індуковані послідовності

$$0 \rightarrow \Omega M' \rightarrow \Omega M \rightarrow \Omega M'' \rightarrow 0, \quad (2.7)$$

$$0 \rightarrow \Omega^{-1}M' \rightarrow \Omega^{-1}M \rightarrow \Omega^{-1}M'' \rightarrow 0 \quad (2.8)$$

також є точними.

Наслідок 2.4. Якщо $0 \rightarrow M' \rightarrow M \rightarrow M'' \rightarrow 0$ — точна послідовність регулярних K -решіток, то індукована послідовність когомологій

$$0 \rightarrow \hat{H}^n(K, M') \rightarrow \hat{H}^n(K, M) \rightarrow \hat{H}^n(K, M'') \rightarrow 0$$

також є точною для кожного $n \in \mathbb{Z}$.

Аналогічні міркування дають явний опис когомологій для регулярних модулів корешіток, тобто дуальних модулів до регулярних решіток. Для незвідного регулярного модуля корешітки $N = DM$ покладемо $\bar{N} = \{u \in N \mid 2u = 0\}$.

$$N(n) = \begin{cases} \bar{N}_{++}, & \text{якщо } n - \text{парне} \\ \bar{N}_{-+}, & \text{якщо } n - \text{непарне } M \notin T^\infty, \\ \bar{N}_{+-}, & \text{якщо } n - \text{непарне та } M \in T^\infty. \end{cases}$$

Ми визначаємо гомоморфізм $\eta : N(n) \rightarrow H^n(K, N)$ ($n > 0$). Він відображає елемент $u \in N(n)$ у клас коцикла η_u , який задається наступним чином.

- Якщо n — непарне, то $M \notin T^\infty$ та $u \in \bar{N}_{-+}$,

$$\eta_u(x^m y^{n-m}) = \begin{cases} u, & \text{якщо } m = n, \\ 0, & \text{інакше.} \end{cases}$$

- Якщо n — непарне, то $M \in T^\infty$ та $u \in \bar{N}_{+-}$,

$$\eta_u(x^m y^{n-m}) = \begin{cases} u, & \text{якщо } m = 0, \\ 0, & \text{інакше.} \end{cases}$$

- Якщо n — парне, то $u \in \bar{N}_{++}$,

$$\eta_u(x^m y^{n-m}) = \begin{cases} u, & \text{якщо } m = n, \\ 0, & \text{інакше.} \end{cases}$$

Легко перевірити, що η_u справді є коциклом.

Теорема 2.4. Для кожного незвідного регулярного модуля корешітки N і кожного $n > 0$ відображення η індукує ізоморфізм $N(n) \xrightarrow{\sim} H^n(K, N)$.

2.3. Дія автоморфізмів.

2.3.1. *Решітки.* Нам також потрібно знати, як автоморфізми решіток і групи діють на когомології. Нехай $M = T_m^f$ або $M = T^{\lambda j} m$. Розглянемо ланцюг підмодулів $M_k \subset M$ з Теорема 2.1. Позначимо через $E^f k, m, n$ або, відповідно, через $E^{\lambda j} k, m, n$ (де $0 \leq k < m$) множини

$$M_k(n) \setminus (2M_k(n) + Mk + 1(n)).$$

Зауважимо, що $E_{k,m,n}^{\lambda j} \neq \emptyset$ тоді і тільки тоді, коли $k < m$ і

$$k \equiv \begin{cases} j, & \text{якщо } n \text{ парне} \\ j+1, & \text{якщо } n \text{ непарне} \end{cases} \pmod{2} \quad (2.9)$$

Із Теорем 2.1 та 2.2 легко випливає наступний результат.

Теорема 2.5. *Нехай $e \in E_{k,m,n}^f$ або $e \in E_{k,m,n}^{\lambda j}$, а $e' \in E_{k',m',n}^f$ або, відповідно, $e' \in E_{k',m',n}^{\lambda j'}$. Тоді існує гомоморфізм $\theta : T_m^f \rightarrow T^{f'} m'$ або, відповідно, $\theta : T^{\lambda j} m \rightarrow T^{\lambda j'} m'$ такий, що $\theta(e) = e'$ тоді і тільки тоді, коли або $m \geq m'$ і $k \leq k'$, або $m \leq m'$ і $k \leq k' - m' + m$. Якщо $m = m'$ і $k = k'$, то θ можна вибрати ізоморфізмом.*

Означення 2.1. 1) Для кожної четвірки (f, m, k, n) , де $k < m$, фіксуємо елемент $e_{m,k,n}^f \in E_{m,k,n}^f$, а для кожної п'ятірки (λ, j, m, k, n) , де $k < m$ і k, j задовольняють умову (2.9), – елемент $e_{m,k,n}^{\lambda j} \in E_{m,k,n}^{\lambda j}$.

2) Для однорідної труби $\mathcal{T}^f$ наведемо стандартною послідовністю послідовність $\sigma = (m_i, k_i)$ ($1 \leq i \leq s$), де $m_1 > m_2 > \dots > m_s$, $1 \leq k_i < m_i$ і $k_{i'} < k_i < k_{i'} + m_i - m_{i'}$ для $i < i'$. Позначимо $M_\sigma^f = \bigoplus_{i=1}^s T_{m_i}^f$ і $e_{\sigma,n}^f = \sum_{i=1}^s e_{m_i,k_i,n}^f$.

3) Для спеціальної труби $\mathcal{T}^\lambda$ наведемо стандартною послідовністю послідовність $\sigma = (j_i, m_i, k_i)$ ($1 \leq i \leq s$), де $j_i \in \{1, 2\}$, $m_1 > m_2 > \dots > m_s$, $1 \leq k_i < m_i$ і $k_{i'} < k_i < k_{i'} + m_i - m_{i'}$ для $i < i'$. Позначимо $M_\sigma^\lambda = \bigoplus_{i=1}^s T_{m_i}^{\lambda j_i}$. Таку послідовність називаємо

- парною, якщо $k_i \equiv j_i \pmod{2}$ для всіх i ,
- непарною, якщо $k_i \equiv j_i + 1 \pmod{2}$ для всіх i .

Для парної (непарної) стандартної послідовності й парного (відповідно, непарного) n покладемо $e_{\sigma,n}^\lambda = \sum_{i=1}^s e_{m_i,k_i,n}^{\lambda j_i}$.

4) Ми називаємо стандартними даними пару $\Delta = (\Sigma, S)$, де $\Sigma = \mathcal{T}^{f_q}$, $1 \leq q \leq r$, – це набір різних труб, а $S = \sigma_q$, $1 \leq q \leq r$, – набір

стандартних послідовностей σ_q для кожної труби $\mathcal{T}^{f_q}$. Такі дані називаються спеціальними, якщо принаймні одна з труб $\mathcal{T}^{f_q}$ є спеціальною. Спеціальні стандартні дані називаються парними або непарними, якщо всі стандартні послідовності σ_q для спеціальних труб $\mathcal{T}^{f_q}$ є відповідно парними або непарними. Позначимо $M_\Delta = \bigoplus_{q=1}^r M^{f_q} \sigma_q$ та $e_{\Delta,n} = \sum_{q=1}^s e^{f_q} \sigma_{q,n}$. У цьому означенні припускаємо, що якщо Δ є спеціальними даними, то вони є парними, якщо n парне, і непарними, якщо n непарне (інакше елемент $e_{\Delta,n}$ не визначений).

Якщо в Σ трапляється труба $\mathcal{T}^\infty$, наприклад, $f_k = \infty$, то позначимо $e_{\Delta,n}^\infty = e_{\sigma_k,n}^\infty$, а $e_{\Delta,n}^0$ – як решту суми, що визначає $e_{\Delta,n}$. Звісно, можливо, що $e_{\Delta,n}^\infty = 0$ або $e_{\Delta,n}^0 = 0$.

З Теорема 2.5 випливає наступний результат.

Теорема 2.6. *Нехай M – регулярна R -решітка, а $\varepsilon \in H^n(K, M)$ ($n > 0$). Тоді існують стандартні дані Δ та розклад $\theta : M \xrightarrow{\sim} M_0 + M_\Delta$ такий, що проєкція $\theta(\varepsilon)$ на $H^n(K, M_0)$ дорівнює нулю, а проєкція $\theta(\varepsilon)$ на $H^n(K, M_\Delta)$ дорівнює $\bar{\xi}(e_{\Delta,n})$ (див. сторінку 135 для означення $\bar{\xi}$).*

Якщо $\varepsilon = 0$, то $M_\Delta = 0$.

Зокрема, ми отримуємо опис орбіт автоморфізмів незвідних регулярних решіток на когомологіях.

Наслідок 2.5. *Нехай M – незвідна регулярна решітка. Розглянемо ланцюг (2.6) її підрешіток і позначимо через $H_k^n(K, M)$ образ у $H^n(K, M)$ множини $H^n(K, M_k)$. Тоді орбіти $\text{Aut}_K M$ на $H^n(K, M)$ ($n > 0$) мають вигляд $H_k^n(K, M) \setminus H_{k+1}^n(K, M)$ для $0 \leq k < t$ та 0.*

Група автоморфізмів групи K – це симетрична група S_3 : вона просто переставляє елементи a, b та $c = ab$. Її породжують транспозиції $\tau_2 : a \leftrightarrow b$ та $\tau_3 : a \leftrightarrow c$. Вони переставляють $+-$ -компоненту діаграми (1.1), відповідно, з $+-$ -компонентою та з $--$ -компонентою. Таким чином, τ_2 переставляє труби $\mathcal{T}^1$ та $\mathcal{T}^0$, а τ_3 – труби $\mathcal{T}^1$ та $\mathcal{T}^\infty$. Досить прості матричні обчислення показують, що τ_2 переставляє $\mathcal{T}^f$ з $\mathcal{T}^{f^{(2)}}$, а τ_3 – з $\mathcal{T}^{f^{(3)}}$, де

$$f^{(2)}(t) = f(1)^{-1}(t-1)^d f\left(\frac{t}{t-1}\right), \quad f^{(3)}(t) = (-1)^d f(1-t),$$

де $d = \deg f$. Це визначає дію S_3 на множині стандартних даних. Зауважимо, що якщо $\psi \in \text{Aut } K$, то існує автоморфізм $\varphi \in \text{Aut } M_{\tau_\Delta}$ такий, що $\psi \xi(e_{\Delta,n}) = \varphi \xi(e_{\psi\Delta,n})$.

2.3.2. *Корешітки.* Нехай тепер $N = DM$, де M — K -решітка. Якщо M є регулярною, то N також називається регулярною. Якщо $N = DM$, де $M = T_m^f$ або $M = T_m^{\lambda j}$, тоді існує ланцюг підмодулів, дуальний до ланцюга (2.6) з Теорема 2.1:

$$0 = N_0 \subset N_1 \subset N_2 \subset \dots \subset Nm - 1 \subset N_m = N, \quad (2.10)$$

де $N_k = M_k^\perp$ і

$$N_{k+l}/N_k \simeq \begin{cases} DT_l^f & \text{якщо } N = DT_m^f, \\ DT_l^{\lambda j} & \text{якщо } N = DT_m^{\lambda j} \text{ і } k \text{ — непарне,} \\ DT_l^{\lambda i}, & \text{де } i \neq j, \text{ якщо } N = DT_m^{\lambda j} \text{ і } k \text{ — парне.} \end{cases}$$

Позначимо через $Z_{k,m,n}^f$ або, відповідно, $Z^{\lambda j}k, m, n$ множину $N_{k+1}(n) \setminus N_k$. Знову ж таки, $Z_{k,m,n}^{\lambda j} \neq \emptyset$ тоді і тільки тоді, коли $k < m$ та виконується умова (2.9).

Дуальність дає аналоги Теорем 2.5 і 2.6.

Теорема 2.7. Нехай $z \in Z_{k,m,n}^f$ або $z \in Z^{\lambda j}k, m, n$, а $z' \in Z^{f}k', m', n$ або, відповідно, $z' \in Z^{\lambda j'}k', m', n$. Тоді існує гомоморфізм $\theta : DT_m^f \rightarrow DT_{m'}^f$ або, відповідно, $\theta : DT_m^{\lambda j} \rightarrow DT_{m'}^{\lambda j'}$, такий, що $\theta(z) = z'$ тоді і тільки тоді, коли $m \leq m'$ і $k \geq k'$, або $m \geq m'$ і $k \geq k' - m' + m$. Якщо $m = m'$ і $k = k'$, θ можна вибрати ізоморфізмом.

Означення 2.2. 1) Для кожної четвірки (f, m, k, n) , де $k < m$, фіксуємо елемент $z_{m,k,n}^f \in Z_{m,k,n}^f$, а для кожної п'ятірки (λ, j, m, k, n) , де $k < m$ і k, j задовольняють умову (2.9), — елемент $z^{\lambda j}m, k, n \in Z^{\lambda j}m, k, n$.

2) Для однорідної труби $\mathcal{T}^f$ назовемо костандартною послідовністю послідовність $\sigma = (m_i, k_i)$ ($1 \leq i \leq s$), де $m_1 < m_2 < \dots < m_s$, $1 \leq k_i < m_i$, і $k_{i'} > k_i > k_{i'} + m_i - m_{i'}$ для $i < i'$. Позначимо $N_\sigma^f = \bigoplus_{i=1}^s P_{m_i}^f$ та $z_{\sigma,n}^f = \sum_{i=1}^s z_{m_i,k_i,n}^f$.

3) Для спеціальної труби $\mathcal{T}^\lambda$ назовемо костандартною послідовністю послідовність $\sigma = (j_i, m_i, k_i)$ ($1 \leq i \leq s$), де $j_i \in \{1, 2\}$, $m_1 < m_2 < \dots < m_s$, $1 \leq k_i < m_i$, $1 \leq k_i \leq m_i$ і $k_i < k_{i'} < k_i + m_{i'} - m_i$ для $i' < i$. Позначимо $N_\sigma^\lambda = \bigoplus_{i=1}^s T_{m_i}^{\lambda j_i}$. Таку послідовність називаємо

- парною, якщо $k_i \equiv j_i \pmod{2}$ для всіх i ,
- непарною, якщо $k_i \equiv j_i + 1 \pmod{2}$ для всіх i .

Для парної (непарної) костандартної послідовності й парного (відповідно, непарного) n покладемо $z_{\sigma,n}^\lambda = \sum_{i=1}^s z_{m_i,k_i,n}^{\lambda j_i}$.

4) Ми називаємо костандартними даними пару $\Delta = (\Sigma, S)$, де $\Sigma = \{\mathcal{T}^{f_q}\}$, $1 \leq q \leq r$, — набір різних труб, а $S = \{\sigma_q\}$, $1 \leq q \leq r$, — набір костандартних послідовностей σ_q для кожної труби $\mathcal{T}^{f_q}$. Такі дані називаються спеціальними, якщо принаймні одна з труб $\mathcal{T}^{f_q}$ є спеціальною. Спеціальні костандартні дані називаються парними або непарними, якщо всі костандартні послідовності σ_q для спеціальних труб $\mathcal{T}^{f_q}$ є відповідно парними або непарними. Позначимо $N_\Delta = \bigoplus_{q=1}^r M_{\sigma_q}^{f_q}$ і $z_{\Delta,n} = \sum_{q=1}^s z_{\sigma_q,n}^{f_q}$. У цьому означенні припускаємо, що якщо Δ є спеціальними даними, то вони є парними, якщо n парне, і непарними, якщо n непарне (інакше елементи $z_{\sigma_q,n}^{f_q}$, а отже, й $z_{\Delta,n}$ не визначені).

Якщо в Σ трапляється труба $\mathcal{T}^\infty$, наприклад, $f_k = \infty$, то позначимо $z_{\Delta,n}^\infty = z_{\sigma_k,n}^\infty$, а $z_{\Delta,n}^0$ — як решту суми, що визначає $z_{\Delta,n}$. Звісно, можливо, що $z_{\Delta,n}^\infty = 0$ або $z_{\Delta,n}^0 = 0$.

Теорема 2.8. Нехай $N = DM$, де M — регулярна R -решітка, $\varepsilon \in H^n(K, N)$, $n > 0$. Тоді існують костандартні дані Δ та розклад $\theta : N \xrightarrow{\sim} N_0 + N_\Delta$ такий, що проєкція $\theta(\varepsilon)$ на $H^n(K, N_0)$ дорівнює нулю, а проєкція $\theta(\varepsilon)$ на $H^n(K, N_\Delta)$ дорівнює $\eta(z_{\Delta,n})$ (див. сторінку 136 для означення η).

Якщо $\varepsilon = 0$, то $M_\Delta = 0$.

Наслідок 2.6. Нехай N — незвідна регулярна корешітка. Розглянемо ланцюг (2.10) її підмодулів і позначимо через $H_k^n(K, N)$ образ у $H^n(K, N)$ множини $H^n(K, N_k)$. Тоді орбіти $\text{Aut}_K N$ на $H^n(K, N)$ при $n > 0$ мають вигляд $H_k^n(K, N) \setminus H_{k-1}^n(K, N)$ при $0 < k \leq t$ та 0.

3. ЗОБРАЖЕННЯ І КОГОМОЛОГІЇ ЗНАКОЗМІННОЇ ГРУПИ СТЕПЕНЯ 4

3.1. Зображення. Нехай $G = \mathfrak{A}_4$ знакозмінна група степеня 4, N — її кляйнівська підгрупа, $N \simeq \{1, a, b, c | a^2 = b^1, ab = ba = c\}$, $H = G/K \simeq \langle \sigma | \sigma^3 = 1 \rangle$. Позначаємо через $A = \mathbb{Z}G$ групове кільце G і покладемо $A_p = A \otimes_{\mathbb{Z}_p}$ p -адичне доповнення A , і $QA = A \otimes \mathbb{Q}$ раціональну оболонку A . Через $A\text{-lat}$ (відповідно $A_p\text{-lat}$) позначимо категорію A -решіток, тобто A -модулів M , таких, що як група M вільна абелева скінченного рангу (відповідно, вільний $\mathbb{Z}_p$ -модуль скінченного рангу). Для A -решітки M також позначимо $QM = M \otimes \mathbb{Q}$ та $M_p = M \otimes \mathbb{Z}_p$. Відмітимо, що $QM_p \simeq M \otimes \mathbb{Q}_p$.

Кільце A можна розглядати як схрещений добуток $K * H$, де $K = \mathbb{Z}N$ і H природньо діє на K через спряження. Тут $QK \simeq \mathbb{Q}^4$ з базисом $\{e_1, e_a, e_b, e_c\}$, де

$$\begin{aligned}
e_1 &= \frac{1 + a + b + c}{4}, \\
e_a &= \frac{1 + a - b - c}{4}, \\
e_b &= \frac{1 - a + b - c}{4}, \\
e_c &= \frac{1 - a - b + c}{4}.
\end{aligned}$$

При таких визначеннях, $K_p = \mathbb{Z}_p^4$, якщо $p \neq 2$ та K_2 вкладається в $\mathbb{Z}_2^4$, так, що a, b, c визначаються, відповідно, елементами $(1, 1, -1, -1)$, $(1, -1, 1, -1)$ та $(1, -1, -1, 1)$. Дія H тривіальна на першій компоненті QK та циклічно переставляє три інші. Таким чином,

$$QA \simeq QK * H \simeq \mathbb{Q}H \times \text{Mat}(3, \mathbb{Q}) \simeq \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}[\theta] \times \text{Mat}(3, \mathbb{Q}),$$

де θ — первісний кубічний корінь з 1. Якщо $p \notin \{2, 3\}$, то

$$A_p \simeq \mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p[\theta] \times \text{Mat}(3, \mathbb{Z}_3) \text{ (максимальний порядок в } QA_p),$$

та

$$A_3 \simeq \mathbb{Z}_3 H \times \text{Mat}(3, \mathbb{Z}_3).$$

Отже, всі нерозкладні A_p -решітки для $p \notin \{2, 3\}$ є нерозкладними решітками $\mathbb{Z}_p$, $\mathbb{Z}_p[\theta]$ та $I_p = \mathbb{Z}_p^3$, і для A_3 є ще одна нерозкладна решітка $\mathbb{Z}_3 H$.

Випадок, коли $p = 2$ дуже відрізняється, так як $\mathbb{Z}_2 K$ більше не максимальний порядок. Нагадаємо, що кожне групове кільце є Горенштейновим, тобто $\text{inj.dim}_R R = 1$. Отже, всі непроективні R_p -решітки фактично є решітками над надкільцем $R^+ = \text{End}_R(\text{rad } R_p)$. Оскільки $\#(H)$ оборотний в $\mathbb{Z}_2$, то для схрещеного добутку $A_2 = K_2 * H$ ми маємо, що $\text{rad } A_2 = (\text{rad } K) * H$ та $A^+ = K^+ * H$. Зауважимо, що K^+ є порядком Бакстрема у розумінні [18]. Це означає, що існує спадковий порядок $\tilde{K}$ такий, що $\tilde{K} \supset K^+ \supset \text{rad } \tilde{K} = \text{rad } K^+$. У нашому випадку $\tilde{K} = \mathbb{Z}_2^4$ та $K^+ = \{(x_1, x_2, x_4, x_4) \mid x_1 \equiv x_2 \equiv x_3 \equiv x_4 \pmod{2}\}$. Оскільки $\tilde{A} = \tilde{K} * H$ також спадковий, то A^+ також порядок Бакстрема. А саме,

$$\tilde{A} \simeq \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2[\theta] \times \text{Mat}(3, \mathbb{Z}_2).$$

Можна легко побачити, що A^+ вкладається в $\tilde{A}$ як підкільце трійок (x_1, x_2, x_3) , де $x_1 \in \mathbb{Z}$, $x_2 \in \mathbb{Z}[\theta]$ та $x_3 = (\xi_{ij}) \in \text{Mat}(3, \mathbb{Z}_2)$, такі, що $x_1 \equiv \xi_{11} \pmod{2}$, $\xi_{12} \equiv \xi_{13} \equiv \xi_{21} \equiv \xi_{31} \equiv 0 \pmod{2}$ та $\rho(x_2) \equiv \begin{pmatrix} \xi_{22} & \xi_{23} \\ \xi_{32} & \xi_{33} \end{pmatrix} \pmod{2}$, де ρ позначає регулярне зображення $\mathbb{Z}_2[\theta]$: $\rho(u + v\theta) = \begin{pmatrix} u & -v \\ v & u-v \end{pmatrix}$.

Ми позначаємо через L_1, L_2, L_3 незвідні $\tilde{A}$ -решітки, що переважно належать, компонентам $\mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_2[\theta]$ та $\text{Mat}(3, \mathbb{Z}_2)$, також через P_1 та P_2 ми позначаємо нерозкладні проєктивні A^+ -решітки $P_i = A^+ e_i$, де $e_1 = \frac{1+\sigma+\sigma^2}{3}$ та $e_2 = 1 - e_1$. Зауважимо, що єдині нерозкладні A_2 -решітки, які не є A^+ -решітками є $B_i = A_2 e_i$. Вони бієктивні, тобто і проєктивні, і ін'єктивні в точній категорії $A_2\text{-lat}$.

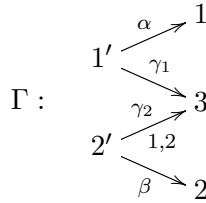
Нагадаємо [18], що зображення порядків Бакстрема класифікуються за допомогою зображень зваженого графа Γ у розумінні [6]. Зокрема, вершини Γ знаходяться у взаємнооднозначній відповідності з простими компонентами напівпростих алгебр $\bar{A} = A^+/\text{rad } A^+$ and $\bar{A}' = \tilde{A}/\text{rad } \tilde{A}$. У нашому випадку

$$\bar{A} = (K^+/\text{rad } K^+) * H \simeq \mathbb{F}_2 H \simeq \mathbb{F}_2 \times \mathbb{F}_4$$

та

$$\bar{A}' \simeq (\tilde{K}/\text{rad } \tilde{K}) * H \simeq \mathbb{F}_2 * H \times \text{Mat}(3, \mathbb{F}_2) \simeq \mathbb{F}_2 \times \mathbb{F}_4 \times \text{Mat}(3, \mathbb{F}_2).$$

Отже, відповідний граф Γ (орієнтований) є графом типу $\tilde{F}_{41}$:



Тут 1, 2, 3 відповідають, відповідно, компонентам $\mathbb{F}_2, \mathbb{F}_4$ та $\text{Mat}(3, \mathbb{F}_2)$ з $\bar{A}'$, тоді як $1'$ та $2'$ відповідають, відповідно, компонентам $\mathbb{F}_2$ та $\mathbb{F}_4$ з $\bar{A}$. Ваги усіх стрілок, окрім γ_2 – це $(1, 1)$, тому ми їх не записуємо. У зображеннях Γ стрілки α, γ_1 відповідають матрицям з елементами із $\mathbb{F}_2$, стрілки γ_2, β відповідають матрицям з елементами із $\mathbb{F}_4$. Вектор розмірностей зображення M графа Γ ми позначимо наступним чином

$$\begin{pmatrix} d_{1'} & d_1 \\ d_{2'} & d_3 \\ & d_2 \end{pmatrix}.$$

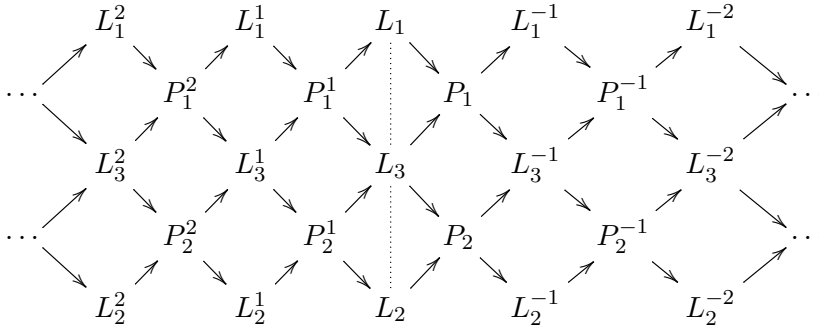
Нагадаємо, що A^+ -решітка M відповідає зображенню V цього графа і є прообразом в $\tilde{M} = L_1^{d_1} \oplus L_3^{d_3} \oplus L_2^{d_2}$ of $\text{Im } \varphi(V)$, де $\varphi(V) : V(1') \oplus V(2') \rightarrow$

$V(1) \oplus V(3) \oplus V(2)$ задано матрицею $\begin{pmatrix} V(\alpha) & 0 \\ V(\gamma_1) & V(\gamma_2) \\ 0 & V(\beta) \end{pmatrix}$. також ми визна-

чаємо $V(1) \oplus V(2) \oplus V(3)$ через $\tilde{M}/2\tilde{M}$.

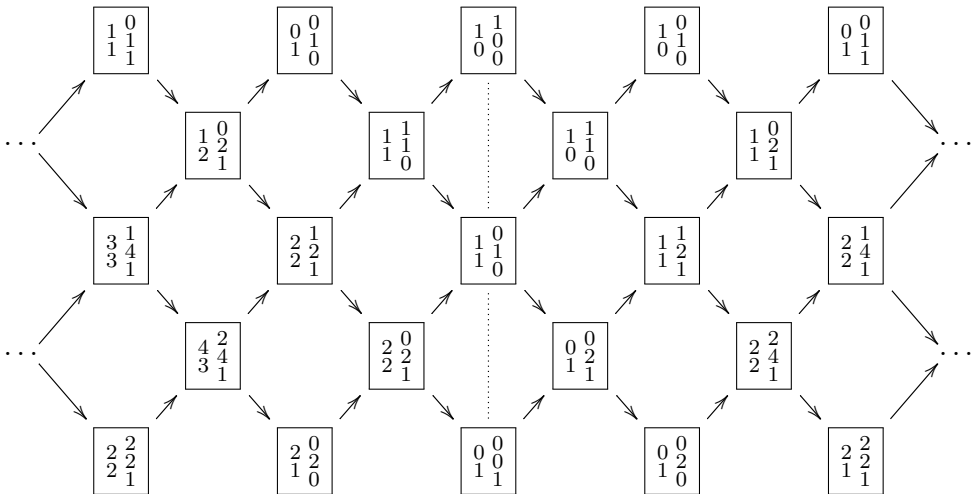
Сагйдак Ауслендера–Райтен категорії зображень графа Γ складається з препроєктивної, преін'єктивної та регулярної компоненти. Коли ми переходимо до зображень порядку Бакстрема, нам потрібно склеїти препроєктивну та преін'єктивну компоненти в одну компоненту(ми

називатимемо її основною) [20]. А саме, ми опустимо прості ін'єктивні та прості проєктивні модулі, а тоді додамо стрілки з тих ін'єктивних модулів, що залишилися в ті проєктивні модулі, що залишилися. У результаті, основна компонента для порядку A^+ матиме вигляд:



Через M^k ми позначаємо k -те перетворення Ауслендера-Райтен $\tau^k M$ решітки M над кільцем A_2 . Як показано в [11], $M^k \simeq \Omega^k M$, k -ий сизигій M як A_2 -модуль, а P_i^1 – це просто ін'єктивна A^+ -решітка, тобто дуальна до проєктивних, або, що те саме, ін'єктивна в точній категорії A^+ -lat. Насправді, P_i – єдиний мінімальний надмодуль, а P_i^1 – єдиний максимальний підмодуль $B_i = A_2 e_i$. Нагадаємо, що B_i – єдині нерозкладні A_2 -решітки, які не є A^+ -решітками. Вони бієктивні, тобто одночасно і проєктивні, і ін'єктивні в A_2 -lat. Зазначимо також, що інші незвідні A^+ -решітки – це $L_1^{\pm 1}$ (так само, як і L_3 вони належать компоненті $\text{Mat}(3, \mathbb{Z})$).

Розмірності відповідних зображень Γ задані на наступній діаграмі.



Зауважимо, що симетрія відносно центрального (пунктирного) стовпчика відповідає дуальності $M \mapsto M^* = \text{Hom}_{\mathbb{Z}_2}(M, \mathbb{Z}_2)$ в категорії A_2 -решіток.

Регулярна компонента для A^+ -решітки така ж, як і регулярна компонента для графа Γ . Вони складаються з однорідних труб $\mathcal{T}^f$, що відповідають однорідним незвідним многочленам з $\mathbb{F}_2[t]$, окрім $t - 1$ та $t^2 + t + 1$, а також двох спеціальних труб $\mathcal{T}^1$ та $\mathcal{T}^\theta$. Однорідні труби мають наступний вигляд:

$$T_1^f \rightrightarrows T_2^f \rightrightarrows T_3^f \rightrightarrows \dots$$

В цій компоненті перетворення Ауслендера-Райтен (або, що те саме, сизигій) діє тривіально. Розмірність зображення Γ , що відповідає T_k^f ,

дорівнює $\begin{bmatrix} 2kd & kd \\ 2kd & kd \end{bmatrix}$, де $d = \deg f$.

Спеціальні труби мають наступний вигляд:

$$\begin{array}{ccccccc} T_{11}^1 & \longrightarrow & T_{12}^1 & \longrightarrow & T_{13}^1 & \longrightarrow & \dots \\ & \searrow & & \swarrow & & \searrow & \\ T_{21}^1 & \longrightarrow & T_{22}^1 & \longrightarrow & T_{23}^1 & \longrightarrow & \dots \end{array}$$

та

$$\begin{array}{ccccccc} T_{11}^\theta & \longrightarrow & T_{12}^\theta & \longrightarrow & T_{13}^\theta & \longrightarrow & \dots \\ & \searrow & & \swarrow & & \searrow & \\ T_{21}^\theta & \longrightarrow & T_{22}^\theta & \longrightarrow & T_{23}^\theta & \longrightarrow & \dots \end{array}$$

Розмірності відповідних зображень Γ визначаються наступним чином:

$\begin{bmatrix} 2k & k \\ 2k & k \end{bmatrix}$	for $T_{i,2k}^1$
$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2k & k \\ 2k & k \end{bmatrix}$	for $T_{1,2k+1}^1$
$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2k & k \\ 2k & 3k \\ 2k & k \end{bmatrix}$	for $T_{2,2k+1}^1$
$\begin{bmatrix} 4k & 2k \\ 4k & 6k \\ 4k & 2k \end{bmatrix}$	for $T_{i,3k}^\theta$
$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4k & 2k \\ 4k & 6k \\ 4k & 2k \end{bmatrix}$	for $T_{1,3k+1}^\theta$

$$\begin{array}{lcl}
\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 2 \\ & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4k & 2k \\ 4k & 6k \\ & 2k \end{bmatrix} & \text{for } T_{2,3k+1}^\theta & \\
\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \\ & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4k & 2k \\ 4k & 6k \\ & 2k \end{bmatrix} & \text{for } T_{3,3k+1}^\theta & \\
\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 4 \\ & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4k & 2k \\ 4k & 6k \\ & 2k \end{bmatrix} & \text{for } T_{1,3k+2}^\theta & \\
\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 4 \\ & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4k & 2k \\ 4k & 6k \\ & 2k \end{bmatrix} & \text{for } T_{2,3k+2}^\theta & \\
\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \\ & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4k & 2k \\ 4k & 6k \\ & 2k \end{bmatrix} & \text{for } T_{3,3k+2}^\theta & .
\end{array}$$

Перетворення Аусленера-Райтен (або, що те саме, сизигій) діє наступним чином:

$$\begin{array}{c}
T_{1k}^1 \begin{array}{c} \xrightarrow{\quad} \\ \xleftarrow{\quad} \end{array} T_{2k}^1 \\
T_{1k}^\theta \begin{array}{c} \xrightarrow{\quad} \\ \xleftarrow{\quad} \end{array} T_{2k}^\theta \xrightarrow{\quad} T_{3k}^\theta
\end{array}$$

3.2. Когомології. Ми хочемо обчислити когомології Тейта для G -решіток. Оскільки $\#(G) = 12$, для кожного G -модуля M групи $\hat{H}^n(G, M)$ розкладаються 2-компонентні $\hat{H}^n(G, M)_2$ та 3-компонентні $\hat{H}^n(G, M)_3$. Крім того, якщо M – решітка, то $\hat{H}^n(G, M)_p \simeq \hat{H}^n(G, M_p)$. Отже, ми можемо окремо розглядати 2-адичний та 3-адичний випадки.

Для групи $G = \mathfrak{A}_4$ спектральна послідовність

$$E_2^{pq} = H^p(H, H^q(N, M)) \Rightarrow H^n(G, M)$$

вироджується в обох випадках, і в 2-адичному, і в 3-адичному. Зокрема, для 2-адичних решіток $E_2^{pq} = 0$, якщо $p \neq 0$. Таким чином, ми отримуємо ізоморфізм:

$$H^n(G, M) \simeq H^n(N, M)^H.$$

Для 3-адичних решіток $E_2^{pq} = 0$, якщо $q \neq 0$, а отже

$$H^n(G, M) \simeq H^n(C, M^K).$$

У 3-адичному випадку у нас є нерозкладні решітки $\mathbb{Z}, \mathbb{Z}[\varepsilon], \mathbb{Z}H$ та I_3 . Зазначимо, що K тривіально діє на $\mathbb{Z}_3, \mathbb{Z}_3[\varepsilon]$ та $\mathbb{Z}_3H$ і не має нерухомих точок на I_3 . Множник H – циклічний, тому його когомології періодичні з періодом 2. Прості розрахунки дають:

$$\hat{H}^n(G, \mathbb{Z}) = \begin{cases} \mathbb{F}_3, & \text{якщо } n - \text{парне,} \\ 0, & \text{якщо } n - \text{непарне;} \end{cases}$$

$$\hat{H}^n(G, \mathbb{Z}[\varepsilon]) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } n - \text{парне,} \\ \mathbb{F}_3, & \text{якщо } n - \text{непарне.} \end{cases}$$

Інші нерозкладні решітки є проєктивними, отже мають тривіальні ко-гомології Тейта.

Для 2-адичних решіток ми використовуємо наступний результат, аналогічний до результату в [14, Lem. 2.2] та аналогічне доведення.

Лема 3.1. *Нехай M – нерозкладна A^+ -решітка, що відповідає зображенню V сагайдака Γ розмірності $\begin{bmatrix} d_1' & d_1 \\ d_2' & d_2 \end{bmatrix}$. Якщо $M \neq L_1$, тоді*

$$\hat{H}^0(G, M) \simeq \mathbb{F}_2^{d_1}.$$

Зазначимо, що маючи сагайдак Ауслендера-Райтен, лише потрібно дізнатися $\hat{H}^0(G, M)$ для всіх нерозкладних M , оскільки

$$\hat{H}^n(G, M) \simeq \hat{H}^0(G, \tau^n M), \quad \text{та} \quad \tau M = \Omega M.$$

Насправді, для кожного зображення V з преін'єктивної компоненти сагайдака Ауслендера-Райтен існує число $m|6$ таке, що $\dim \tau^k M = \dim M + q\omega$, де $\omega = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ та $q \in \{1, 2\}$. Таким чином, значення d_1 просто змінюється на q . Це дає простий шлях для обчислення когомологій решіток головної компоненти. Нижче наведений результат обчислень.

Теорема 3.1. *Нехай M – нерозкладна A^+ -решітка з основної компоненти, а саме, $M = M_0^{n+mk+i}$, де $M_0 \in \{L_1, L_2, L_3, P_1, P_2\}$. Тоді*

$$\hat{H}^{qk+i-n}(G, M) \simeq \mathbb{F}^{qk+r_i}.$$

Величини m, k та r_i залежать від M_0 . А саме:

Якщо $M_0 = L_1$, тоді $m = 6$, $q = 1$ та

i	0	1	2	3	4	5
r_i	1	0	0	1	1	0

Якщо $M_0 = L_2$, тоді $m = 6$, $q = 2$ та

i	0	1	2	3	4	5
r_i	0	0	2	0	2	2

Якщо $M_0 = L_3$, тоді $m = 2$, $q = 1$ та $r = i$.

Якщо $M_0 = P_1$, тоді $m = 3$, $q = 1$ та

i	1	2	3
r	1	0	1

Якщо $M_0 = P_2$, тоді $m = 3$, $q = 2$ та

i	1	2	3
r	0	2	2

Для зображень із труб ситуація навіть простіша, так як значення d_1 , а отже і значення $\hat{H}^0$, задані на сторінці 144 після опису труб, і ми знаємо дію τ . Таким чином, ми можемо сформулювати наступні результати.

Теорема 3.2.

$$\hat{H}^n(G, T_{ij}^f) \simeq \hat{H}^0(G, T_{ij}^f).$$

$$\hat{H}^{2k+r}(G, T_{ij}^1) \simeq \hat{H}^0(G, T_{i',j}^1), \text{ де } i' \text{ залишок за модулем 2 від } i + r;$$

$$\hat{H}^{3k+r}(G, T_{ij}^\theta) \simeq \hat{H}^0(G, T_{i',j}^\theta), \text{ де } i' \text{ залишок за модулем 3 від } i + r.$$

ЛІТЕРАТУРА

- [1] П. М. Гудивок, И. В. Шапочка. О p -группах Черникова. *Укр. мат. журн.*, 51(3):291–304, 1999.
- [2] M. Auslander, I. Reiten. Almost split sequences for cohen–macaulay modules. *Math. Ann.*, 277:345–349, 1987.
- [3] W. Bruns, J. Herzog. *Cohen–Macaulay Rings*. Cambridge University Press, 1993.
- [4] H. Cartan, S. Eilenberg. *Homological Algebra*. Princeton University Press, 1956.
- [5] Ch. W. Curtis, I. Reiner. Methods of representation theory with applications to finite groups and orders, vol. 1. *Wiley Interscience Publications*, 1981.
- [6] V. Dlab, C. M. Ringel. Indecomposable representations of graphs and algebras. *Mem. Am. Math. Soc.*, 173:1–57, 1976.
- [7] P. Donovan, M. R. Freislich. The representation theory of finite graphs and associated algebras. *Carleton Mathematical Lecture Notes*, 5, 1973.
- [8] Y. A. Drozd. Adèles and integral representations. *Izv. Akad. Nauk SSSR, Ser. Mat.*, 33:1080–1088, 1969.
- [9] Y. A. Drozd. Ideals of commutative rings. *Mat. Sbornik*, 101:334–348, 1976.
- [10] Y. A. Drozd. Representations of quivers, 2020. URL: <https://www.imath.kiev.ua/~drozd/Quiv-beam.pdf>.
- [11] Y. A. Drozd. Rejection lemma and almost split sequences. *Ukr. Math. J.*, 73:908–929, 2021.
- [12] Y. A. Drozd, V. V. Kirichenko. On quasi-bass orders. *Izv. Akad. Nauk SSSR, Ser. Mat.*, 36:328–370, 1972.
- [13] Y. A. Drozd, A. I. Plakosh. Cohomologies of finite abelian groups. *Algebra Discrete Math.*, 24(1):144–157, 2017.

- [14] Y. A. Drozd, A. I. Plakosh. Cohomologies of the kleinian 4-group. *Arch. Math.*, 115(2):139–145, 2020.
- [15] L. A. Nazarova. Unimodular representations of the alternating group of degree four. *Ukrain. Mat. Z.*, 15:437–444, 1963.
- [16] L. A. Nazarova. Representations of a tetrad. *Izv. Akad. Nauk SSSR. Ser. Mat.*, 31:1361–1378, 1967.
- [17] A. I. Plakosh. On weak equivalence of representations of kleinian 4-group. *Algebra Discrete Math.*, 25(1):130–136, 2018.
- [18] C. M. Ringel, K. W. Roggenkamp. Diagrammatic methods in the representation theory of orders. *J. Algebra*, 60:11–42, 1979.
- [19] K. W. Roggenkamp. Auslander–reiten species of bäckström orders. *J. Algebra*, 85:440–476, 1983.
- [20] K. W. Roggenkamp. Auslander–reiten species of bäckström orders. *J. Algebra*, 85:449–476, 1983.
- [21] Sh. Takahashi. Cohomology groups of finite abelian groups. *Tohoku Math. J.*, 4(3):294–302, 1952.
- [22] A. V. Yakovlev. Classification of 2-adic representations of an eighth-order cyclic group. *Zap. Nauchn. Semin. LOMI*, 28:93–129, 1972. *J. Sov. Math.* 3 (1975), 654–680.

А. І. Плакош

ІНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ НАН УКРАЇНИ, М. КИЇВ

Email: andrianaplakoshmail@gmail.com

ORCID: 0000-0002-4269-5416

Оцінки характеристик нелінійної апроксимації класів періодичних функцій

К. В. Пожарська

Abstract. In the paper we make an overview of results concerning order estimates of the best m -term (sparse) trigonometric approximation and the best orthogonal trigonometric approximation of the Stepanets classes of multi- and univariate functions with bounded generalized derivatives in the Lebesgue space. In addition, we formulate exact-order estimates for these approximation characteristics for the isotropic Nikol'skii-Besov classes with bounded differences in a certain Lebesgue subspace. In particular, the case of small smoothness is considered of functions from the respective classes.

Анотація. У роботі зроблено огляд результатів щодо порядкових оцінок величин найкращого m -членного (розрідженого) тригонометричного наближення і найкращого ортогонального тригонометричного наближення класів Степанця функцій однієї і багатьох змінних з обмеженими узагальненими похідними у метриці просторів Лебега. Крім цього, наведено точні за порядком оцінки зазначених апроксимативних характеристик для ізотропних класів Нікольського-Бесова з обмеженими різницями у метриці деякого підпростору Лебега. Розглянуто, зокрема, випадок малої гладкості функцій з відповідних класів.

1. ВСТУП

У роботі зроблено огляд наших результатів щодо порядкових оцінок деяких величин нелінійної апроксимації. А саме, у розділі 4.2 наведено і прокоментовано оцінки найкращого m -членного тригонометричного наближення та найкращого ортогонального тригонометричного наближення класів функцій з обмеженими узагальненими похідними, які в частковому випадку збігаються з класами Соболева (Вейля-Надя), у метриці просторів Лебега. Ці результати встановлено для багатовимірного випадку, але у низці ситуацій вони є новими і для функцій однієї змінної. Далі, у розділі 4.3 наведено оцінки зазначених апроксимативних характеристик для ізотропних класів Нікольського-Бесова функцій

2020 Mathematics Subject Classification: 42A10, 41A46, 41A63

Ключові слова: найкраще m -членне тригонометричне наближення, найкраще ортогональне тригонометричне наближення, нелінійна апроксимація, узагальнена похідна

DOI: <https://doi.org/10.3842/trim.v21n1.545>

з обмеженими різницями у метриці деякого важливого підпростору Лебега.

Зауважимо, що апроксимативні характеристики, пов'язані з нелінійною апроксимацією, активно досліджуються вже понад пів століття. Невичерпний інтерес до таких наближень викликаний насамперед тим, що в багатьох ситуаціях виявлено переваги нелінійних методів наближення порівняно з лінійними.

При розгляді задач на класах періодичних функцій багатьох змінних $f := f(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$, $d \geq 1$, все більшого розповсюдження набуває метод m -членного (розрідженого) тригонометричного наближення, тобто наближення f поліномами вигляду

$$P(\Theta_m, \mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{k} \in \Theta_m} c_{\mathbf{k}} e^{i(\mathbf{k}, \mathbf{x})}, \quad c_{\mathbf{k}} \in \mathbb{C}, \quad (1.1)$$

де Θ_m — набір m довільних векторів $\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^d$, $(\mathbf{k}, \mathbf{x}) = k_1 x_1 + \dots + k_d x_d$.

Відповідна апроксимативна характеристика у більш загальній ситуації була введена в 1955 році С. Б. Стечкіним [1] при формулюванні критерію абсолютної збіжності ортогональних рядів у просторі L_2 . У роботі Р. С. Ісмагілова [2], при дослідженні поперечників класів Соболева, було отримано першу нетривіальну оцінку величини найкращого m -членного тригонометричного наближення для індивідуальної функції. Результат [2, Наслідок до Теорема 6] показав, що зазначена величина нелінійного наближення для функції $|x|$ спадає до нуля швидше у степеневій шкалі, ніж величина відповідного найкращого наближення лінійними методами. Згодом дослідження найкращих m -членних тригонометричних наближень індивідуальних функцій і, в більшій мірі, функціональних класів проводились у роботах Г. А. Акішева, Д. Б. Базарханова, Е. С. Белінського, Р. А. ДеВора, Д. Зунга, Р. С. Ісмагілова, Б. С. Кашина, В. Є. Майорова, К. І. Осколкова, А. С. Романюка, В. С. Романюка, А. С. Сердюка, В. Сіккеля, С. А. Стасюка, О. І. Степанця, Т. А. Степанюк, В. М. Темлякова, Т. Урліха, Г. Хансена, С. О. Чайченка, А. Л. Шидліча, С. Я. Янченка та інших. Одержані у цьому напрямі результати, з одного боку, мають самостійний інтерес, а з іншого — вони знаходять практичні застосування, зокрема, у питаннях кодування, передачі і відтворення зображень.

Відмітимо, що в літературі розглядають різні узагальнення величини найкращого тригонометричного наближення, де оптимізація проводиться відносно m -вимірних підпросторів, породжених елементами деякої визначеної ортонормованої системи функцій (так званого “словника”).

Було показано, що на класах Соболева і Нікольського-Бесова періодичних функцій багатьох змінних у багатьох випадках саме тригонометрична система є оптимальним словником у сенсі відповідних порядкових оцінок у метриці просторів Лебега. У ряді ситуацій, проте, величина найкращого m -членного наближення за іншими системами, зокрема системою вейвлетів, швидше спадає до нуля при $m \rightarrow \infty$. На даний час низка питань щодо точних порядків величини найкращого m -членного наближення на зазначених класах для граничних значень параметрів класу і метрики залишаються відкритими [18, Розділи 7.5, 7.7]. У даній роботі мова буде йти саме про оцінки найкращих m -членних тригонометричних наближень.

Оскільки при встановленні оцінок найкращих m -членних тригонометричних наближень тих або інших класів функцій не завжди вдається явно пред'явити поліном $P^*(\Theta_m, \mathbf{x})$, який реалізує відповідний порядок наближення, розглядають також близьку апроксимативну характеристику – найкраще ортогональне тригонометричне наближення. Особливістю найкращих ортогональних тригонометричних наближень порівняно з найкращими m -членними тригонометричними наближеннями є те, що коефіцієнти c_k у поліномах $P(\Theta_m, \mathbf{x})$ (1.1) є відповідними коефіцієнтами Фур'є $\hat{f}(\mathbf{k})$ функцій f . Дослідження цієї апроксимативної характеристики на класах функцій однієї і багатьох змінних отримали розвиток у роботах Е. С. Белінського, А. С. Романюка, В. С. Романюка, О. І. Степанця, Д. Б. Базарханова, С. А. Стасюка, А. С. Сердюка, Т. А. Степанюк, А. Л. Шидліча, С. Я. Янченка та інших.

Детальний огляд відомих оцінок величин найкращого m -членного тригонометричного і найкращого ортогонального тригонометричного наближень у метриці простору Лебега та відповідна бібліографія міститься у монографіях [11, 18, 31]. Безпосередньо пов'язані з нашими дослідженнями результати прокоментовано після відповідних тверджень у розділі 4.

Зазначимо, що згадані вище апроксимативні характеристики на теперішній час добре вивчені стосовно класів періодичних функцій багатьох змінних Соболева $\mathbf{W}_{\beta,p}^r$, Нікольського $\mathbf{H}_p^r$ і Бесова $\mathbf{B}_{p,\theta}^r$ у метриці простору Лебега L_q . У той же час, досі залишається низка відкритих питань щодо точних порядків досліджуваних характеристик. Так, при дослідженні питання про оцінки найкращих тригонометричних наближень відповідних класів суттєву роль відіграють особливості розташування параметрів p та q на області їхніх допустимих значень. Особливої уваги заслуговують випадки, коли принаймні один з параметрів $p, q \in \{1, \infty\}$, які є найбільш складними з точки зору методів отримання оцінок відповідних величин.

Саме для граничних випадків залишається низка відкритих питань щодо точних за порядком оцінок апроксимативних характеристик різних функціональних класів. Зокрема, для класів $\mathbf{W}_{\beta,p}^r$ багатьох змінних досі залишаються нерозв'язаними у загальному випадку задачі про порядкові оцінки величин найкращого m -членного тригонометричного наближення $e_m(\mathbf{W}_{\beta,1}^r)_1$ та $e_m(\mathbf{W}_{\beta,\infty}^r)_\infty$ (див. означення (2.1)).

Це викликало значний інтерес до дослідження відповідних характеристик у метриці підпросторів Лебега $B_{q,1}$, $1 \leq q \leq \infty$, де вдалося отримати точні за порядком оцінки, зокрема, для тих співвідношень між параметрами, де вони не були відомі для відповідних просторів L_q .

Постановка задачі щодо встановлення оцінок найкращих m -членних і ортогональних тригонометричних наближень класів функцій саме у метриці просторів $B_{q,1}$ (див. розділ 4.3) не є випадковою. Похибки різних методів апроксимації, зокрема, і у метриці цих так званих “нульових” просторів Бесова неодноразово досліджувалися у літературі. Так, у роботі [17] було показано, що оцінки апроксимаційних чисел періодичних функцій як ізотропної, так і домінуючої мішаної гладкості, з гільбертових класів Соболева у метриках просторів L_∞ та $B_{\infty,1}$ однакові за порядком. Оцінки ентропійних чисел на класах Трібеля-Лізоркіна, зокрема, у нормі нульових просторів Бесова були встановлені у [32]. Щодо оцінок величин найкращого наближення, наближення сумами Фур'є, лінійних, тригонометричних, колмогоровських поперечників, ентропійних чисел класів Соболева і Нікольського-Бесова у метриці простору $B_{\infty,1}$, тут варто виділити роботи [24, 25, 27].

Однією з важливих і складних задач є розгляд випадку так званої “малої гладкості” досліджуваних з точки зору апроксимації функцій. Цей термін бере початок з роботи Б. С. Кашина 1981 року, де, досліджуючи колмогоровські поперечники класів $\mathbf{W}_{\beta,1}^r$ періодичних функцій однієї змінної у просторі L_q , він виявив, що при $2 < q < \infty$ поведінка цих поперечників для $1 - 1/q < r < 1$ суттєво відрізняється від випадку $r > 1$. Згодом подібна особливість була виявлена у низки апроксимативних характеристик різних класів функцій. При дослідженні найкращих m -членних тригонометричних наближень, нами було розглянуто (теореми 4.7, 4.11) випадок малої гладкості функцій з відповідних класів та виявлено відмінності у порядках спадання до нуля цих величин.

Крім цього, нами було встановлено порядкові оцінки вище зазначених характеристик нелінійної апроксимації на класах типу Соболева, а саме, на класах $\mathbf{L}_{\beta,p}^\psi$, які в одновимірному випадку були введені у 1983 році О. І. Степанцем, і які є узагальненням за гладкісним параметром класів $\mathbf{W}_{\beta,p}^r$. Зауважимо, що ці класи є досі значно менш дослідженими і в той же час актуальними з точки зору сучасної теорії апроксимації.

Одержані результати будемо формулювати у термінах порядкових співвідношень. Для двох невід'ємних послідовностей $\{a(n)\}$ і $\{b(n)\}$ порядкова нерівність $a(n) \ll b(n)$ означає, що існує $C_1 > 0$, таке що $a(n) \leq C_1 b(n)$. Порядкова рівність $a(n) \asymp b(n)$ рівносильна тому, що $a(n) \ll b(n)$ і $b(n) \ll a(n)$. Зазначимо, що C_i у порядкових співвідношеннях, можуть залежати від деяких (окрім n) параметрів.

2. ОЗНАЧЕННЯ АПРОКСИМАТИВНИХ ХАРАКТЕРИСТИК

Нехай $\mathbb{R}^d$, $d \geq 1$, – евклідов простір із елементами $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_d)$. Через $L_q := L_q(\mathbb{T}^d)$, $1 \leq q \leq \infty$, $\mathbb{T}^d = [0, 2\pi)^d$, позначимо простір функцій f , які є 2π -періодичними за кожною змінною і такі, що

$$\|f\|_q := \|f\|_{L_q} = \left((2\pi)^{-d} \int_{\mathbb{T}^d} |f(\mathbf{x})|^q d\mathbf{x} \right)^{1/q} < \infty, \quad 1 \leq q < \infty,$$

$$\|f\|_\infty := \|f\|_{L_\infty} = \text{ess sup}_{\mathbf{x} \in \mathbb{T}^d} |f(\mathbf{x})| < \infty, \quad q = \infty.$$

Далі, нехай X – нормований d -вимірний простір із нормою $\|\cdot\|_X$. Для функції $f \in X$ розглянемо величину її *найкращого m -членного тригонометричного наближення*

$$e_m(f)_X := \inf_{c_{\mathbf{k}}} \inf_{\Theta_m} \left\| f - \sum_{\mathbf{k} \in \Theta_m} c_{\mathbf{k}} e^{i(\mathbf{k}, \mathbf{x})} \right\|_X = \inf_{c_{\mathbf{k}}} \inf_{\Theta_m} \|f - P(\Theta_m)\|_X, \quad (2.1)$$

тобто наближення поліномами (1.1) із гармоніками з множини Θ_m потужності не більше m .

У тому випадку, коли в означенні (2.1) довільні коефіцієнти $c_{\mathbf{k}}$ замінити на коефіцієнти Фур'є $\hat{f}(\mathbf{k})$ функції $f \in L_1$, тобто покласти

$$c_{\mathbf{k}} = \hat{f}(\mathbf{k}) = (2\pi)^{-d} \int_{\mathbb{T}^d} f(\mathbf{t}) e^{-i(\mathbf{k}, \mathbf{t})} d\mathbf{t}, \quad \mathbf{k} \in \Theta_m,$$

отримаємо величину

$$e_M^\perp(f)_X := \inf_{\Theta_m} \left\| f - \sum_{\mathbf{k} \in \Theta_m} \hat{f}(\mathbf{k}) e^{i(\mathbf{k}, \mathbf{x})} \right\|_X, \quad (2.2)$$

яку називають *найкращим ортогональним тригонометричним наближенням* функції f .

Якщо $F \subset X$ – деякий клас функцій, то покладемо, відповідно,

$$e_m(F)_X := \sup_{f \in F} e_m(f)_X, \quad e_m^\perp(F)_X := \sup_{f \in F} e_m^\perp(f)_X.$$

Величини $e_m(F)_X$ і $e_m^\perp(F)_X$ називають *найкращим m -членним тригонометричним і найкращим ортогональним тригонометричним наближеннями* класу F у просторі X . Одразу з означень бачимо, що

$$e_m(F)_X \leq e_m^\perp(F)_X.$$

Нами було встановлено порядкові оцінки величин (2.1) і (2.2) у випадках, коли похибка наближення вимірюється у метриці простору Лебега L_q , а також у метриці підпростору $B_{q,1}$, $1 \leq q \leq \infty$.

Означимо норму $\|\cdot\|_{B_{q,1}}$ у підпросторах функцій $f \in L_q$. Така норма схожа на декомпозиційну норму функцій із просторів Бесова (див. розділ 3).

Отже, нехай $V_l(\mathbf{x})$ – багатовимірне ядро Валле-Пуссена вигляду

$$V_l(\mathbf{x}) := \prod_{j=1}^d V_l(x_j), \quad l \in \mathbb{N}, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d,$$

де для $t \in \mathbb{R}$ покладемо $V_l(t) := l^{-1} \sum_{k=l}^{2l-1} D_k(t)$, а $D_k(t) := \sum_{m=-k}^k e^{imt}$ – ядро Діріхле. Розглянемо згортку функції $f \in L_1$ з ядром $V_l(\mathbf{x})$, тобто $V_l(f, \mathbf{x}) := (f * V_l)(\mathbf{x})$, та введемо такі позначення:

$$\sigma_0(f) := \sigma_0(f, \mathbf{x}) = V_1(f, \mathbf{x}),$$

$$\sigma_s(f) := \sigma_s(f, \mathbf{x}) = V_{2^s}(f, \mathbf{x}) - V_{2^{s-1}}(f, \mathbf{x}), \quad s \in \mathbb{N}.$$

Для поліномів t за кратною тригонометричною системою $\{e^{i(\mathbf{k}, \mathbf{x})}\}_{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^d}$ норму $\|t\|_{B_{q,1}}$, $1 \leq q \leq \infty$, задано згідно з формулою

$$\|t\|_{B_{q,1}} := \sum_{s \in \mathbb{Z}_+} \|\sigma_s(t)\|_q,$$

де $\mathbb{Z}_+ = \mathbb{N} \cup \{0\}$. Аналогічно означено норму $\|f\|_{B_{q,1}}$ і для будь-якої функції $f \in L_q$ такої, що ряд $\sum_{s \in \mathbb{Z}_+} \|\sigma_s(f)\|_q$ збігається. Зазначимо, що для $f \in B_{q,1}$, $1 \leq q \leq \infty$, виконуються співвідношення:

$$\|f\|_q \ll \|f\|_{B_{q,1}}; \quad \|f\|_{B_{1,1}} \ll \|f\|_{B_{q,1}} \ll \|f\|_{B_{\infty,1}}.$$

3. Класи функцій

У цій частині означимо простори 2π -періодичних функцій багатьох змінних мішаної гладкості: Соболева (Вейля–Надя) $W_{p,\alpha}^r$ і Степанця $L_{\beta,p}^\psi$, а також ізотропної гладкості Нікольського–Бесова $B_{p,\theta}^r$.

Під класами функцій будемо розуміти одиничні кулі відповідних просторів. Задля спрощення викладу, будемо використовувати для них спільне позначення.

Іноді для зручності ми будемо розглядати лише ті функції $f \in L_1$, для яких виконана умова

$$\int_0^{2\pi} f(\mathbf{x}) dx_j = 0 \quad \text{майже скрізь, } j = 1, \dots, d.$$

Множину таких функцій позначимо L_p^0 .

Ця умова не зменшує загальності постановки задачі завдяки еквівалентності відповідних класів функцій (див. [18, Зауваження 3.2.4]). Зауважимо проте, що такі відмінності в означенні класів суттєво впливатимуть на преасимптотичні оцінки апроксимативних характеристик, де важливою є залежність сталих у порядкових співвідношеннях від розмірності d (ця тема не розглядається у даній статті).

3.1. Простори Соболева (Вейля–Надя) функцій з обмеженою похідною. Наведемо означення класів функцій з обмеженою мішаною похідною через інтегральне представлення цих функцій у термінах згортки із ядром Бернуллі. Такий підхід дозволяє природнім чином поширити класи Вейля–Надя функцій з обмеженими дробовими похідними на багатовимірний випадок.

Нехай $F_{\alpha}^r(\mathbf{x})$, де $\mathbf{r}, \alpha \in \mathbb{R}^d$, $r_j > 0$, $j = 1, \dots, d$, – багатовимірні аналоги ядер Бернуллі, тобто

$$F_{\alpha}^r(\mathbf{x}) := 2^d \sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{N}^d} \prod_{j=1}^d k_j^{-r_j} \cos\left(k_j x_j - \frac{\alpha_j \pi}{2}\right).$$

Через $W_{p,\alpha}^r$ позначимо клас функцій $f \in L_p^0$ вигляду

$$f(\mathbf{x}) = \varphi(\mathbf{x}) * F_{\alpha}^r(\mathbf{x}) = (2\pi)^{-d} \int_{\mathbb{T}^d} \varphi(\mathbf{y}) F_{\alpha}^r(\mathbf{x} - \mathbf{y}) d\mathbf{y},$$

де $\varphi \in L_p^0$, $\|\varphi\|_p \leq 1$, а $*$ – операція згортки, з нормою $\|f\|_{W_{p,\alpha}^r} := \|\varphi\|_p$.

При $1 < \alpha_j < \infty$, $j = 1, \dots, d$, відповідні класи функцій є еквівалентними між собою. Будемо вважати, що координати вектора $\mathbf{r} \in \mathbb{R}^d$ впорядковані у порядку зростання.

Застосовуючи теорему Літтлвуда–Пелі, при $1 < p < \infty$ можна записати еквівалентні представлення норми просторів $W_{p,\alpha}^r$ у термінах двійкових блоків ряду Фур'є відповідних функцій. Такі еквівалентні представлення є зручними, зокрема, при аналізі величин наближення функцій поліномами з гармоніками, що належать так званим східчато-гіперболічним хрестам, які, як було показано у 60-х роках минулого століття, у багатьох ситуаціях реалізують точні порядки колмогоровських поперечників класів функцій з домінуючою мішаною гладкістю. Детальнішу інформацію можна знайти у [18, Розділ 3.1].

3.2. Простори Степанця функцій з обмеженою узагальненою похідною. Означимо класи функцій з обмеженою узагальненою (ψ, β) -похідною. В одновимірному випадку, вони були введені у 1983 році О. І. Степанцем (див. [10]) та згодом були поширені на випадок функцій багатьох змінних А. С. Романюком.

Отже, для $f \in L_1^0$ розглянемо її ряд Фур'є $\sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^d} \hat{f}(\mathbf{k}) e^{i(\mathbf{k}, \mathbf{x})}$, де $\hat{f}(\mathbf{k})$ – коефіцієнти Фур'є функції f .

Нехай $\psi := (\psi_1, \dots, \psi_d)$, де $\psi_j \neq 0$, $j = 1, \dots, d$, – деякі довільні послідовності, $\beta \in \mathbb{R}^d$, $\mathbb{Z}^d = (\mathbb{Z} \setminus \{0\})^d$. Припустимо, що ряд

$$\sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^d} \prod_{j=1}^d \frac{e^{i \frac{\pi \beta_j}{2} \operatorname{sgn} k_j}}{\psi_j(|k_j|)} \hat{f}(\mathbf{k}) e^{i(\mathbf{k}, \mathbf{x})}$$

є рядом Фур'є деякої сумовної функції. Цю функцію називають (ψ, β) -похідною функції f і позначають f_β^ψ .

Через $L_{\beta, p}^\psi$, $1 \leq p \leq \infty$, позначимо клас функцій f , для яких існують (ψ, β) -похідні і виконується умова $\|f_\beta^\psi\|_p \leq 1$.

Окрім класів, нами було досліджено також функції D_β^ψ , ряди Фур'є яких мають вигляд

$$\sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^d} \prod_{j=1}^d \psi_j(|k_j|) e^{i \frac{\pi \beta_j}{2} \operatorname{sgn} k_j} e^{i(\mathbf{k}, \mathbf{x})}.$$

З одного боку, функції D_β^ψ є цікавими з точки зору їх апроксимаційних властивостей, а з іншого – вони відіграють важливу роль при дослідженні апроксимативних характеристик класів $L_{\beta, p}^\psi$, зокрема, для граничного випадку $p = 1$. Так, кожен функцію f з класу $L_{\beta, p}^\psi$ можна зобразити у вигляді згортки

$$f(\mathbf{x}) = \varphi(\mathbf{x}) * D_\beta^\psi(\mathbf{x}) = (2\pi)^{-d} \int_{\mathbb{T}^d} \varphi(\mathbf{y}) D_\beta^\psi(\mathbf{x} - \mathbf{y}) d\mathbf{y},$$

де $\|\varphi\|_p \leq 1$ і функція φ майже скрізь співпадає з f_β^ψ .

При $\psi_j(|\tau|) = |\tau|^{-r_j}$, $\tau \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, $r_j > 0$, $\beta_j \in \mathbb{R}$, $j = 1, \dots, d$, відповідні класи $L_{\beta, p}^\psi$ є класами Соболева (Вейля–Надя) $W_{\beta, p}^r$, а функції D_β^ψ є ядрами Бернуллі, див. розділ 3.1

На послідовності ψ_j , $j = 1, \dots, d$, які визначають класи $L_{\beta, p}^\psi$ та функції D_β^ψ , будемо накладати деякі додаткові умови.

Означення 3.1. *Послідовність ϕ належить до множини D , якщо*

- ϕ – додатня та незростаюча;
- $\exists M > 0$ таке, що $\forall l \in \mathbb{N}$ виконується умова $\frac{\phi(l)}{\phi(2l)} \leq M$.

Елементами множини D є, зокрема, послідовності $\phi(|\tau|) = |\tau|^{-r}$, $r > 0$, $\tau \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$; $\phi(|\tau|) = \ln^\alpha(|\tau|+1)$, $\tau \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, $\alpha < 0$; $\phi(|\tau|) = |\tau|^{-r} \ln^\alpha(|\tau|+1)$, $r > 0$, $\tau \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

Результати будемо формулювати у термінах деяких функцій натурального аргументу $\Phi(n)$ та $\Psi(n)$ спеціального вигляду.

Означення 3.2. Для ψ_j , $j = 1, \dots, d$, $\mathbf{s}, \mathbf{1} \in \mathbb{N}^d$ і $n \in \mathbb{N}$ покладемо

$$\Phi(n) := \min_{(\mathbf{s}, \mathbf{1})=n} \prod_{j=1}^d \psi_j(2^{s_j}), \quad \Psi(n) := \max_{(\mathbf{s}, \mathbf{1})=n} \prod_{j=1}^d \psi_j(2^{s_j}).$$

Величини $\Phi(n)$ та $\Psi(n)$, залежно від вигляду відповідних послідовностей, можуть бути однакові чи різні за порядком. Так, наприклад, якщо покласти $\psi_j(|\tau|) = |\tau|^{-r}$, $\tau \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, $j = 1, \dots, d$, $r > 0$, то отримаємо

$$\Phi(n) = \Psi(n) = 2^{-nr}.$$

Якщо ж (для $d = 2$) $\psi_j(|\tau|) = |\tau|^{-r} \ln(|\tau|)$, $\tau \in \mathbb{Z} \setminus \{0, \pm 1\}$, $j = 1, 2$, $r > 0$, то

$$\Psi(n) = 2^{-nr-2}n^2, \quad \Phi(n) = 2^{-nr}(n-1),$$

а у випадку $\psi_j(|\tau|) = |\tau|^{-r}(\ln(|\tau|))^{-1}$, $\tau \in \mathbb{Z} \setminus \{0, \pm 1\}$, $j = 1, 2$, $r > 0$,

$$\Psi(n) = 2^{-nr}(n-1)^{-1}, \quad \Phi(n) = 4 \cdot 2^{-nr}n^{-2}.$$

Крім цього слід зазначити, що при $d = 1$ функції $\Phi(n)$ і $\Psi(n)$ збігаються і набувають вигляду $\psi_1(2^n)$.

3.3. Ізотропні простори Нікольського-Бєсова функцій з обмеженими різницями. Означимо простори функцій Нікольського-Бєсова через їхні модулі гладкості.

Нехай $\mathbf{h} \in \mathbb{R}^d$. Для $f \in L_p$ позначимо $\Delta_{\mathbf{h}}f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x} + \mathbf{h}) - f(\mathbf{x})$ та означимо різниці порядку $k \in \mathbb{Z}_+$ з кроком $\mathbf{h}$ таким чином:

$$\Delta_{\mathbf{h}}^0 f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}), \quad \Delta_{\mathbf{h}}^k f(\mathbf{x}) = \Delta_{\mathbf{h}} \Delta_{\mathbf{h}}^{k-1} f(\mathbf{x}), \quad k \in \mathbb{N}.$$

Модуль гладкості порядку k функції $f \in L_p$ задається згідно з формулою $w_k(f, t)_p := \sup_{|\mathbf{h}| \leq t} \|\Delta_{\mathbf{h}}^k f\|_p$, де $|\mathbf{h}| = \sqrt{h_1^2 + \dots + h_d^2}$, $t \in \mathbb{R}$, $t > 0$.

Будемо говорити, що функція $f \in L_p$ належить класу $\mathbf{B}_{p, \theta}^r$, $1 \leq p$, $\theta \leq \infty$, $r > 0$, якщо відповідна норма

$$\|f\|_{\mathbf{B}_{p, \theta}^r} := \|f\|_p + \left(\int_0^\infty (t^{-r} w_k(f, t)_p)^\theta \frac{dt}{t} \right)^{1/\theta} \leq 1, \quad 1 \leq \theta < \infty,$$

$$\|f\|_{\mathbf{B}_{p, \infty}^r} \equiv \|f\|_{H_p^r} := \|f\|_p + \sup_{t>0} t^{-r} w_k(f, t)_p \leq 1, \quad \theta = \infty,$$

для деякого $k > r$.

Простори $\mathbf{H}_p^r \equiv \mathbf{B}_{p,\infty}^r$ та $\mathbf{B}_{p,\theta}^r$, $1 \leq \theta < \infty$, були введені С. М. Нікольським та О. В. Бесовим, відповідно. Для них справедливі такі вкладення:

$$\mathbf{B}_{p,1}^r \subset \mathbf{B}_{p,\theta_1}^r \subset \mathbf{B}_{p,\theta_2}^r \subset \mathbf{B}_{p,\infty}^r \equiv \mathbf{H}_p^r, \quad 1 \leq \theta_1 \leq \theta_2 \leq \infty.$$

При встановленні порядкових оцінок апроксимативних характеристик класів Нікольського-Бесова, нами було використано еквівалентні представлення норми функцій f з просторів $\mathbf{B}_{p,\theta}^r$ у термінах величин $\sigma_s(f)$, $s \in \mathbb{Z}_+$, побудованих на основі ядер Валле-Пуссена. Ці блоки були означені раніше у розділі 2.

Отже, для $f \in \mathbf{B}_{p,\theta}^r$, $1 \leq p, \theta \leq \infty$, $r > 0$, виконується порядкові рівності [20]

$$\|f\|_{\mathbf{B}_{p,\theta}^r} \asymp \left(\sum_{s \in \mathbb{Z}_+} 2^{sr\theta} \|\sigma_s(f)\|_p^\theta \right)^{1/\theta}, \quad 1 \leq \theta < \infty,$$

$$\|f\|_{\mathbf{B}_{p,\infty}^r} \asymp \sup_{s \in \mathbb{Z}_+} 2^{sr} \|\sigma_s(f)\|_p, \quad \theta = \infty.$$

Зауважимо, що у випадку $1 < p < \infty$ можна записати аналогічні еквівалентні представлення норми у термінах блоків ряду Фур'є, але, на відміну від просторів функцій із домінуючою мішаною гладкістю, для ізотропного випадку відповідні гармоніки належатимуть так званім “двійковим коридорам”, а не східчасто-гіперболічним хрестам.

4. НАЙКРАЩІ ОРТОГОНАЛЬНІ ТА m -ЧЛЕННІ ТРИГОНОМЕТРИЧНІ НАБЛИЖЕННЯ

4.1. Оцінки величин апроксимації індивідуальних функцій у метриці простору Лебега. Спершу наведемо результати щодо порядкових оцінок найкращих ортогональних тригонометричних наближень та найкращих m -членних тригонометричних наближень аналогів ядер Бернуллі D_β^ψ у просторі L_q , $1 < q < \infty$.

Всі оцінки у цій частині роботи будемо формулювати у термінах означень 3.1, 3.2.

Теорема 4.1 ([14]). *Нехай $1 < q < \infty$, $\psi_j \in D$, $\beta_j \in \mathbb{R}$, $j = 1, \dots, d$, і, крім того, існує $\varepsilon > 0$ таке, що послідовності $\psi_j(|\tau|)|\tau|^{1-1/q+\varepsilon}$, $j = 1, \dots, d$, не зростають. Тоді для будь-яких натуральних m і n , що задовольняють умову $m = m(n) \asymp 2^n n^{d-1}$, мають місце співвідношення*

$$\Phi(n) m^{1-\frac{1}{q}} (\log m)^{2(d-1)(\frac{1}{q}-\frac{1}{2})} \ll e_m^\perp(D_\beta^\psi)_q \ll \Psi(n) m^{1-\frac{1}{q}} (\log m)^{2(d-1)(\frac{1}{q}-\frac{1}{2})}.$$

Зауваження 4.1. У випадку $d = 1$ з теореми 4.1 випливає точна за порядком оцінка

$$e_m^\perp(D_\beta^{\psi_1})_q \asymp \psi_1(m)m^{1-\frac{1}{q}},$$

яка при додаткових умовах на послідовність ψ_1 встановлена В. В. Шкапою [12].

Зауваження 4.2. При $\psi_j(|\tau|) = |\tau|^{-r_j}$, $\tau \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, $r_j > 1 - 1/q$, $\beta_j \in \mathbb{R}$, $j = 1, \dots, d$, для функцій $D_\beta^\psi \equiv F_\beta^r$ точні за порядком оцінки величини $e_M^\perp(F_\beta^r)_q$, $1 < q < \infty$, знайдено А. С. Романюком:

$$e_m^\perp(F_\beta^r)_q \asymp m^{-(r_1-1+\frac{1}{q})}(\log m)^{(d-1)(r_1-1+\frac{2}{q})}.$$

У випадку, коли $r = (r_1, \dots, r_1) \in \mathbb{R}^d$, $r_1 > 1 - 1/q$, $\beta \in \mathbb{R}^d$, цю оцінку можна отримати із результату теореми 4.1.

На відміну від найкращих ортогональних тригонометричних наближень, при дослідженні найкращих m -членних тригонометричних наближень функцій D_β^ψ у просторі L_q , $1 < q < \infty$, виникла необхідність окремо розглянути два суттєво різні випадки $1 < q \leq 2$ та $2 < q < \infty$.

Теорема 4.2 ([28]). *Нехай $1 < q \leq 2$, $\psi_j \in D$, $\beta_j \in \mathbb{R}$, $j = 1, \dots, d$, i , крім того, існує $\varepsilon > 0$ таке, що послідовності $\psi_j(|\tau|)|\tau|^{1-1/q+\varepsilon}$, $j = 1, \dots, d$, не зростають. Тоді для будь-яких натуральних m і n , що задовольняють умову $m = m(n) \asymp 2^n n^{d-1}$, мають місце співвідношення*

$$\Phi(n)m^{1-\frac{1}{q}}(\log m)^{2(d-1)(\frac{1}{q}-\frac{1}{2})} \ll e_m(D_\beta^\psi)_q \ll \Psi(n)m^{1-\frac{1}{q}}(\log m)^{2(d-1)(\frac{1}{q}-\frac{1}{2})}.$$

Теорема 4.3 ([29]). *Нехай $2 < q < \infty$, $\psi_j \in D$, $\beta_j \in \mathbb{R}$, $j = 1, \dots, d$, i , крім того, існує $\varepsilon > 0$ таке, що послідовності $\psi_j(|\tau|)|\tau|^{1+\varepsilon}$, $j = 1, \dots, d$, не зростають. Тоді для будь-яких натуральних m і n , що задовольняють умову $m = m(n) \asymp 2^n n^{d-1}$, справедливі співвідношення*

$$\Phi(n)m^{\frac{1}{2}} \ll e_m(D_\beta^\psi)_q \ll \Psi(n)m^{\frac{1}{2}}.$$

Результати теорем 4.2, 4.3 є новими і в одновимірному випадку. Сформулюємо відповідні твердження.

Наслідок 4.1 ([28]). *Нехай $d = 1$, $1 < q \leq 2$, $\psi_1 \in D$, $\beta \in \mathbb{R}$, i , крім того, існує $\varepsilon > 0$ таке, що послідовність $\psi_1(|\tau|)|\tau|^{1-1/q+\varepsilon}$ не зростає. Тоді справедлива оцінка*

$$e_m(D_\beta^{\psi_1})_q \asymp \psi_1(m)m^{1-\frac{1}{q}}.$$

Наслідок 4.2 ([29]). Нехай $d = 1$, $2 < q < \infty$, $\psi_1 \in D$, $\beta \in \mathbb{R}$, і, крім того, існує $\varepsilon > 0$ таке, що послідовність $\psi_1(|\tau|)|\tau|^{1+\varepsilon}$ не зростає. Тоді справедлива оцінка

$$e_m(D_{\beta}^{\psi_1})_q \asymp \psi_1(m)m^{\frac{1}{2}}.$$

Зауваження 4.3. Що стосується оцінки величини $e_m(F_{\beta}^r)_q$, то:

- при $1 < q \leq 2$, $r_j > 1 - 1/q$, $\beta_j \in \mathbb{R}$, $j = 1, \dots, d$, її порядок

$$e_m(F_{\beta}^r)_q \asymp m^{-r_1+1-\frac{1}{q}}(\log m)^{(d-1)(r_1-1+\frac{2}{q})}$$

було встановлено Е. С. Белінським [3];

- при $2 < q < \infty$, $r_j > 1$, $\beta_j \in \mathbb{R}$, $j = 1, \dots, d$, оцінка

$$e_m(F_{\beta}^r)_q \asymp m^{-r_1+\frac{1}{2}}(\log m)^{r_1(d-1)}$$

була анонсована Е. С. Белінським [4].

У випадку $r = (r_1, \dots, r_1) \in \mathbb{R}^d$, $\beta \in \mathbb{R}^d$ і відповідних обмеженнях на параметр r_1 ці оцінки випливають із результатів теорем 4.2, 4.3.

Зауваження 4.4. Порівнявши результати для найкращих ортогональних тригонометричних наближень, отримані у теоремі 4.1, з результатами для найкращих m -членних тригонометричних наближень, отриманих у теоремах 4.2, 4.3, бачимо, що при $1 < q \leq 2$ оцінки зверху величин $e_m(D_{\beta}^{\psi})_q$ та $e_m^{\perp}(D_{\beta}^{\psi})_q$ однакові за порядком. У випадку $2 < q < \infty$ оцінки відповідних апроксимативних характеристик відрізняються.

4.2. Оцінки величин апроксимації класів (ψ, β) -диференційовних функцій у метриці простору Лебега. Наведені у розділі 4.1 результати дали змогу одержати порядкові оцінки найкращих ортогональних та m -членних тригонометричних наближень класів (ψ, β) -диференційовних функцій у граничному випадку, коли параметр $p = 1$, тобто класів $L_{\beta,1}^{\psi}$ у просторі L_q , $1 < q < \infty$.

Теорема 4.4 ([14]). Нехай $1 < q < \infty$, $\psi_j \in D$, $\beta_j \in \mathbb{R}$, $j = 1, \dots, d$, і, крім того, існує $\varepsilon > 0$ таке, що послідовності $\psi_j(|\tau|)|\tau|^{1-1/q+\varepsilon}$, $j = 1, \dots, d$, не зростають. Тоді для будь-яких натуральних m і n , що задовольняють умову $m = m(n) \asymp 2^n n^{d-1}$, мають місце співвідношення

$$\Phi(n)m^{1-\frac{1}{q}}(\log m)^{2(d-1)(\frac{1}{q}-\frac{1}{2})} \ll e_m^{\perp}(L_{\beta,1}^{\psi})_q \ll \Psi(n)m^{1-\frac{1}{q}}(\log m)^{2(d-1)(\frac{1}{q}-\frac{1}{2})}.$$

Зауваження 4.5. В одновимірному випадку з теореми 4.4 випливає точна за порядком оцінка

$$e_m^{\perp}(L_{\beta,1}^{\psi_1})_q \asymp \psi_1(m)m^{1-\frac{1}{q}},$$

яка при додаткових умовах на послідовність ψ_1 була встановлена В. В. Шкапою [12].

Зауваження 4.6. У випадку $\psi_j(|\tau|) = |\tau|^{-r_j}$, $\tau \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, $r_j > 1 - 1/q$, $\beta_j \in \mathbb{R}$, $j = 1, \dots, d$, для класів $L_{\beta,1}^\psi \equiv W_{\beta,1}^r$ порядок величини $e_m^\perp(W_{\beta,1}^r)_q$, $1 < q < \infty$, отримано А. С. Романюком:

$$e_m^\perp(W_{\beta,1}^r)_q \asymp m^{-(r_1-1+\frac{1}{q})}(\log m)^{(d-1)(r_1-1+\frac{2}{q})}.$$

Для $\mathbf{r} = (r_1, \dots, r_1) \in \mathbb{R}^d$, $r_1 > 1 - 1/q$, $\beta \in \mathbb{R}^d$, цю оцінку можна отримати із результату теореми 4.4.

Зауваження 4.7. Відмітимо, що порядки найкращих m -членних ортогональних тригонометричних наближень у теоремі 4.4 реалізовані наближенням функцій $f \in L_{\beta,1}^\psi$ їхніми східчасто-гіперболічними сумами Фур'є $S_{Q_n}(f)$ (при $m = |Q_n| \asymp 2^n n^{d-1}$) вигляду

$$S_{Q_n}(f) := S_{Q_n}(f, \mathbf{x}) = \sum_{(\mathbf{s}, \mathbf{1}) < n} \sum_{\mathbf{k} \in \rho(\mathbf{s})} \hat{f}(\mathbf{k}) e^{i(\mathbf{k}, \mathbf{x})},$$

де $Q_n = \cup_{(\mathbf{s}, \mathbf{1}) < n} \rho(\mathbf{s})$ – східчасто-гіперболічний хрест,

$$\rho(\mathbf{s}) := \left\{ \mathbf{k} \in \mathbb{Z}^d : 2^{s_j-1} \leq |k_j| < 2^{s_j}, j = 1, \dots, d \right\}.$$

Теорема 4.5 ([28]). Нехай $1 < q \leq 2$, $\psi_j \in D$, $\beta_j \in \mathbb{R}$, $j = 1, \dots, d$, i , крім того, існує $\varepsilon > 0$ таке, що послідовності $\psi_j(|\tau|)|\tau|^{1-1/q+\varepsilon}$, $j = 1, \dots, d$, не зростають. Тоді для будь-яких натуральних m і n , що задовольняють умову $m = m(n) \asymp 2^n n^{d-1}$, мають місце співвідношення $\Phi(n)m^{1-\frac{1}{q}}(\log m)^{2(d-1)(\frac{1}{q}-\frac{1}{2})} \ll e_m(L_{\beta,1}^\psi)_q \ll \Psi(n)m^{1-\frac{1}{q}}(\log m)^{2(d-1)(\frac{1}{q}-\frac{1}{2})}$.

Теорема 4.6 ([29]). Нехай $2 < q < \infty$, $\psi_j \in D$, $\beta_j \in \mathbb{R}$, $j = 1, \dots, d$, i , крім того, існує $\varepsilon > 0$ таке, що послідовності $\psi_j(|\tau|)|\tau|^{1+\varepsilon}$, $j = 1, \dots, d$, не зростають. Тоді для будь-яких натуральних m і n , що задовольняють умову $m = m(n) \asymp 2^n n^{d-1}$, справедливі співвідношення

$$\Phi(n)m^{\frac{1}{2}} \ll e_m(L_{\beta,1}^\psi)_q \ll \Psi(n)m^{\frac{1}{2}}.$$

Оцінки теореми 4.5 є новими і в одновимірному випадку.

Наслідок 4.3 ([28]). Нехай $d = 1$, $1 < q \leq 2$, $\psi_1 \in D$, $\beta \in \mathbb{R}$, i , крім того, існує $\varepsilon > 0$ таке, що послідовність $\psi_1(|\tau|)|\tau|^{1-1/q+\varepsilon}$ не зростає. Тоді справедливе співвідношення

$$e_m(L_{\beta,1}^{\psi_1})_q \asymp \psi_1(m)m^{1-\frac{1}{q}}.$$

Оцінки теореми 4.6 у випадку $d = 1$ при деяких додаткових умовах на послідовність ψ_1 встановлено В. В. Шкапою [13]. А саме, справедливе наступне твердження.

Наслідок 4.4 ([29]). *Нехай $d = 1$, $2 < q < \infty$, $\psi_1 \in D$, $\beta \in \mathbb{R}$, і, крім того, існує $\varepsilon > 0$ таке, що послідовність $\psi_1(|\tau|)|\tau|^{1+\varepsilon}$ не зростає. Тоді має місце співвідношення*

$$e_m(L_{\beta,1}^{\psi_1})_q \asymp \psi_1(m)m^{\frac{1}{2}}.$$

Зауваження 4.8. Що стосується оцінки величини $e_m(W_{\beta,1}^{\mathbf{r}})_q$, то:

- при $1 < q \leq 2$, $r_j > 1 - 1/q$, $\beta_j \in \mathbb{R}$, $j = 1, \dots, d$, її порядок

$$e_m(W_{\beta,1}^{\mathbf{r}})_q \asymp m^{-r_1+1-\frac{1}{q}}(\log m)^{(d-1)(r_1-1+\frac{2}{q})}$$

було встановлено А. С. Романюком [6];

- при $2 < q < \infty$, $r_j > 1$, $\beta_j \in \mathbb{R}$, $j = 1, \dots, d$, оцінка

$$e_m(W_{\beta,1}^{\mathbf{r}})_q \asymp m^{-r_1+\frac{1}{2}}(\log^{d-1} m)^{r_1}$$

була анонсована Е. С. Белінським [4].

У випадку $\mathbf{r} = (r_1, \dots, r_1) \in \mathbb{R}^d$, $\beta \in \mathbb{R}^d$ і відповідних обмеженнях на параметр r_1 ці оцінки випливають із результатів теорем 4.5, 4.6.

Зауваження 4.9. Порівнявши результати теорем 4.4, 4.5 та 4.6 бачимо, що при $2 < q < \infty$ оцінки зверху величин $e_m(L_{\beta,1}^{\psi})_q$ та $e_m^{\perp}(L_{\beta,1}^{\psi})_q$ відрізняється за порядком.

Крім цього, нами було розглянуто випадок так званої “малої гладкості”, де вдалося знайти порядкові оцінки найкращих m -членних тригонометричних наближень класів $L_{\beta,p}^{\psi}$ періодичних функцій багатьох змінних у просторі L_q , $1 < p \leq 2 < q < \infty$.

Теорема 4.7 ([15]). *Нехай $1 < p \leq 2 < q < \infty$, $\psi_j \in D$, $\beta_j \in \mathbb{R}$, $j = 1, \dots, d$, і, крім того, існує $\varepsilon > 0$ таке, що послідовності $\psi_j(|\tau|)|\tau|^{1/p-\varepsilon}$, $j = 1, \dots, d$, не спадають, а $\psi_j(|\tau|)|\tau|^{q'(1/p-1/q)}$, $j = 1, \dots, d$, $1/q + 1/q' = 1$, не зростають. Тоді для будь-яких натуральних m і n , що задовольняють умову $m = m(n) \asymp 2^n n^{d-1}$, та числа $n_1 = qn/2 - (q/2 - 1)(d - 1) \log n$, справедливі оцінки*

$$\begin{aligned} \Phi([n_1])m^{\frac{q}{2}(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})}(\log m)^{(d-1)(1-\frac{q}{p})} &\ll e_m(L_{\beta,p}^{\psi})_q \ll \\ &\ll \Psi([n_1])m^{\frac{q}{2}(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})}(\log m)^{(d-1)(1-\frac{q}{p})}, \end{aligned}$$

де $[a]$ — ціла частина числа a .

Зауваження 4.10. В одновимірному випадку точні за порядком оцінки, які відповідають одержаним у теоремі 4.7 результатам, встановлені А. С. Федоренком [8].

Зауваження 4.11. Порядок величини $e_m(W_{\beta,p}^r)_q$, $1 < p \leq 2 < q < \infty$, $q'(1/p - 1/q) < r_j < 1/p$, $\beta_j \in \mathbb{R}$, $j = 1, \dots, d$, встановлено Е. С. Белінським [5]:

$$e_m(W_{\beta,p}^r)_q \asymp m^{-\frac{q}{2}(r_1 - \frac{1}{p} + \frac{1}{q})} (\log m)^{(d-1)(q-1)(r_1 - q'(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}))}.$$

У випадку $\mathbf{r} = (r_1, \dots, r_1) \in \mathbb{R}^d$, цю оцінку можна отримати із результату теореми 4.7.

Зауваження 4.12. Порівнюючи результат теореми 4.7 з оцінками найкращих ортогональних тригонометричних наближень $e_m^\perp(L_{\beta,p}^\psi)_q$, $1 < p \leq 2 < q < \infty$, $\beta \in \mathbb{R}^d$ [9], бачимо, що при відповідних умовах на послідовності ψ_j , $j = 1, \dots, d$, ці величини при $m \rightarrow \infty$ ведуть себе по різному.

Зауваження 4.13. За інших умов на послідовності ψ_j , $j = 1, \dots, d$ (велика гладкість) оцінки величини $e_m(L_{\beta,p}^\psi)_q$, $1 < p \leq 2 < q < \infty$, $\beta \in \mathbb{R}^d$, встановлено Н. М. Консевич [7].

4.3. Оцінки величин апроксимації класів функцій у метриці підпростору Лебега. Перейдемо до результатів, що стосуються оцінок найкращих ортогональних тригонометричних наближень та найкращих m -членних тригонометричних наближень у метриці підпросторів Лебега.

У низці робіт вивчалися питання наближення класів типу Нікольського-Бесова і Соболева періодичних функцій багатьох змінних з мішаною гладкістю у метриці просторів $B_{q,1}$. При цьому було виявлено, що в багатьох ситуаціях оцінки розглянутих там апроксимаційних характеристик відрізняються за порядком від оцінок відповідних характеристик у просторах L_q . Слід зазначити, що оптимальними (з точки зору порядкових значень) апаратами наближення згаданих класів функцій у просторах $B_{q,1}$, як і у просторах L_q , виявилися тригонометричні поліноми з “номерами” гармонік із східчастих гіперболічних хрестів.

Принципово інша ситуація спостерігається при дослідженні апроксимаційних характеристик ізотропних класів. Усі відомі оцінки характеристик як лінійної так і нелінійної апроксимації ізотропних класів Нікольського-Бесова $\mathbf{B}_{p,\theta}^r$ у метриках просторів $B_{q,1}$, співпадають за порядком з відповідними оцінками у просторах L_q . Крім цього, відповідні

оцінки реалізуються за допомогою наближення функцій з класів $\mathbf{B}_{p,\theta}^r$ тригонометричними поліномами зі спектром у кубічних областях.

Сформулюємо відповідні твердження. При цьому відмітимо, що, як і у розглянутих у розділах 4.1, 4.2 випадках, порядки найкращих ортогональних тригонометричних наближень є однаковими для всіх розглянутих співвідношень між параметрами досліджуваного класу і метрики, в якій вимірюється відповідне наближення. Щодо оцінок величини найкращого m -членного тригонометричного наближення, то тут виникає необхідність виділити низку різних випадків.

Теорема 4.8 ([26]). *Нехай $1 \leq p, q, \theta \leq \infty$, $(p, q) \notin \{(1, 1), (\infty, \infty)\}$. Тоді для $r > d(1/p - 1/q)_+$ справедлива оцінка*

$$e_m^\perp(\mathbf{B}_{p,\theta}^r)_{B_{q,1}} \asymp m^{-\frac{r}{d} + (\frac{1}{p} - \frac{1}{q})_+},$$

де $a_+ = \max\{a; 0\}$.

Зауваження 4.14. При $d = 1$ оцінку теореми 4.8 було одержано раніше у роботах [25] і [27] при $1 < p < \infty$ і $p = 1$ відповідно.

Зауваження 4.15. Порівнюючи результат теореми 4.8 з відповідною оцінкою у метриці простору L_q [23], бачимо, що для $1 \leq p, q, \theta \leq \infty$, $(p, q) \notin \{(1, 1), (\infty, \infty)\}$, $r > d(1/p - 1/q)_+$ виконується співвідношення

$$e_m^\perp(\mathbf{B}_{p,\theta}^r)_{B_{q,1}} \asymp e_m^\perp(\mathbf{B}_{p,\theta}^r)_q.$$

Зауваження 4.16. Порядки найкращих ортогональних тригонометричних наближень у теоремі 4.8 реалізовані наближенням функцій $f \in \mathbf{B}_{p,\theta}^r$ їхніми кубічними сумами Фур'є $S_n(f)$ вигляду

$$S_n(f) := S_n(f, \mathbf{x}) = f(0) + \sum_{s=1}^{n-1} \sum_{\mathbf{k} \in \mu(s)} \hat{f}(\mathbf{k}) e^{i(\mathbf{k}, \mathbf{x})},$$

де $\mu(s) := \{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^d: 2^{s-1} \leq \max_{j=1,\dots,d} |k_j| < 2^s\}$, за умови $m \asymp 2^{dn}$.

Нагадаємо, що для розглянутих у розділі 4.2 класів функцій узагальненої мішаної гладкості, порядкові оцінки відповідних найкращих ортогональних тригонометричних наближень у метриці простору Лебега були реалізовані наближенням функцій $f \in L_{\beta,1}^\psi$ їхніми східчато-гіперболічними сумами Фур'є $S_{Q_n}(f)$ при $m = |Q_n| \asymp 2^n n^{d-1}$ (див. зауваження 4.7).

Такі відмінності викликані особливостями класів функцій ізотропної та мішаної гладкості.

Перейдемо до оцінок найкращих m -членних тригонометричних наближень. Як уже було зазначено, порядки відповідної величини наближення класів $\mathbf{B}_{p,\theta}^r$ у метриці простору $B_{q,1}$ відрізняються залежно від розташування параметрів p і q на області їхнього визначення.

Теорема 4.9 ([26]). *Нехай $d \geq 1$ і $1 \leq p \leq q \leq 2$ або $1 \leq q \leq p \leq \infty$. Тоді для $r > d(1/p - 1/q)_+$, $1 \leq \theta \leq \infty$ справедлива оцінка*

$$e_m(\mathbf{B}_{p,\theta}^r)_{B_{q,1}} \asymp m^{-\frac{r}{d} + (\frac{1}{p} - \frac{1}{q})_+}.$$

Теорема 4.10 ([21]). *Нехай $d \geq 1$, $2 < p < q < \infty$. Тоді для $r > d/2$, $1 \leq \theta \leq \infty$, справедлива оцінка*

$$e_m(\mathbf{B}_{p,\theta}^r)_{B_{q,1}} \asymp m^{-\frac{r}{d}}.$$

Теорема 4.11 ([21]). *Нехай $d \geq 1$, $1 < p \leq 2 < q < \infty$, $1 \leq \theta \leq \infty$. Тоді справедливі співвідношення*

$$e_m(\mathbf{B}_{p,\theta}^r)_{B_{q,1}} \asymp \begin{cases} m^{-\frac{q}{2}(\frac{r}{d} - \frac{1}{p} + \frac{1}{q})}, & d(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}) < r < \frac{d}{p}, \\ m^{-\frac{r}{d} + \frac{1}{p} - \frac{1}{2}}, & r > \frac{d}{p}. \end{cases}$$

Зауваження 4.17. У теоремі 4.11 виникає ефект “малої гладкості”: при переході гладкішим параметром r граничного значення $r = d/p$ спостерігається “стрибок” у оцінці величини $e_m(\mathbf{B}_{p,\theta}^r)_{B_{q,1}}$. Іншими словами, показано, що для $1 < p \leq 2 < q < \infty$, у випадках $d(1/p - 1/q) < r < d/p$ та $r > d/p$ величини $e_m(\mathbf{B}_{p,\theta}^r)_{B_{q,1}}$ мають різні порядки.

Зауваження 4.18. Зауважимо, що у випадку $1 < p \leq 2 < q < p/(p-1)$, $r > d$, точний порядок величини $e_m(\mathbf{B}_{p,\theta}^r)_{B_{q,1}}$ було отримано у [26].

Зауваження 4.19. Порівнюючи результати теорем 4.10 і 4.11 із оцінкою теореми 4.8 для відповідних значень параметрів r, p, q бачимо, що порядки величин $e_m(\mathbf{B}_{p,\theta}^r)_{B_{q,1}}$ і $e_m^\perp(\mathbf{B}_{p,\theta}^r)_{B_{q,1}}$ різні.

Щодо випадків $1 \leq p \leq q \leq 2$ і $1 \leq q \leq p \leq \infty$, $(p, q) \notin \{(1, 1), (\infty, \infty)\}$, які були розглянуті у теоремі 4.9, виконується порядкова рівність

$$e_m^\perp(\mathbf{B}_{p,\theta}^r)_{B_{q,1}} \asymp e_m(\mathbf{B}_{p,\theta}^r)_{B_{q,1}}.$$

Зауваження 4.20. Питання порядків величини $e_m^\perp(\mathbf{B}_{p,\theta}^r)_{B_{q,1}}$ у випадку критичного значення $r = d/p$ параметра гладкості, який не був розглянутий у теоремі 4.11, залишається відкритим.

Зауваження 4.21. Оцінки найкращих m -членних тригонометричних наближень ізотропних класів Нікольського-Бесова у метриці простору L_q встановлено у роботах [16, 19, 30].

У одновимірному випадку нам вдалося встановити також точні за порядком оцінки величин $e_m(\mathbf{B}_{p,\theta}^r)_{B_{\infty,1}}$.

Теорема 4.12 ([21]). *Нехай $d = 1$, $1 \leq p, \theta \leq \infty$. Тоді для $r > \max\{1/p, 1/2\}$ справедливі співвідношення*

$$e_m(\mathbf{B}_{p,\theta}^r)_{B_{\infty,1}} \asymp m^{-r+(\frac{1}{p}-\frac{1}{2})_+}.$$

Зауваження 4.22. Порівнюючи результат теореми 4.12 з оцінкою відповідного найкращого m -членного наближення класу $\mathbf{B}_{p,\theta}^r$, у метриці простору L_{∞} [22], отримуємо, що

$$e_m(\mathbf{B}_{p,\theta}^r)_{B_{\infty,1}} \asymp e_m(\mathbf{B}_{p,\theta}^r)_{\infty} \asymp m^{-r+(\frac{1}{p}-\frac{1}{2})_+}.$$

З іншого боку, оцінки величини $e_m(\mathbf{B}_{p,\theta}^r)_{B_{\infty,1}}$, знайдені у теоремі 4.12, і величини $e_m^{\perp}(\mathbf{B}_{p,\theta}^r)_{B_{\infty,1}}$ (випадок $d = 1$ теореми 4.8) відрізняються за порядком.

Подяки. Автор висловлює щирю подяку доктору фіз.-мат. наук, професору Романуку Анатолію Сергійовичу за підтримку та цінні зауваження і поради. Роботу виконано за фінансування фонду Гумбольдта (Philipp Schwartz Fellowship of the Alexander von Humboldt Foundation).

ЛІТЕРАТУРА

- [1] С. Б. Стечкин. Об абсолютной сходимости ортогональных рядов. *Докл. АН СССР*, 102(1):37–40, 1955.
- [2] Р. С. Исагиллов. Поперечники множеств в линейных нормированных пространствах и приближение функций тригонометрическими многочленами. *Успехи мат. наук.*, 29(3):161–178, 1974.
- [3] Э. С. Белинский. Приближение периодических функций “плавающей” системой экспонент и тригонометрические поперечники. *Исследование по теории функций многих вещественных переменных*. — Ярославль: Яросл. ун-т., pages 10–24, 1984.
- [4] Э. С. Белинский. Приближение периодических функций многих переменных “плавающей” системой экспонент и тригонометрические поперечники. *Докл. АН СССР*, 284:1294–1297, 1985.
- [5] Э. С. Белинский. Приближение “плавающей” системой экспонент на классах периодических функций с ограниченной смешанной производной. *Исследование по теории функций многих вещественных переменных*. — Ярославль: Яросл. ун-т., pages 16–33, 1988.
- [6] А. С. Романюк. О наилучшей тригонометрической и билинейной аппроксимации классов Бесова функций многих переменных. *Укр. мат. журн.*, 47(8):1097–1111, 1995.
- [7] Н. М. Консевич. Найкращі m -членні тригонометричні наближення класів $L_{\beta,p}^{\psi}$ у просторі L_q . *Крайові задачі для диференціальних рівнянь: Зб. праць Ін-ту математики НАН України*, 3:204–219, 1998.

- [8] А. С. Федоренко. Наилучшие m -членные тригонометрические приближения классов (ψ, β) -дифференцируемых функций одной переменной. *Укр. мат. журн.*, 52(6):850–856, 2000.
- [9] Н. М. Консевич. Найкращі ортогональні тригонометричні наближення класів функцій багатьох змінних $L_{\beta,p}^{\psi}$. *Укр. мат. журн.*, 53(1):23–29, 2001.
- [10] А. И. Степанец. *Методы теории приближений*. Праці Ін-ту математики НАН України. 2012.
- [11] А. С. Романюк. *Аппроксимативные характеристики классов периодических функций многих переменных*. Праці Ін-ту математики НАН України. 2012.
- [12] В. В. Шкапа. Найкращі ортогональні тригонометричні наближення функцій із класів $L_{\beta,1}^{\psi}$. *Теорія наближення функцій та суміжні питання: Зб. праць Ін-ту математики НАН України*, 11(3):315–329, 2014.
- [13] В. В. Шкапа. Апроксимативні характеристики класів $L_{\beta,p}^{\psi}$ періодичних функцій у просторі L_q . *Укр. мат. журн.*, 67(8):1139–1150, 2015.
- [14] К. В. Швай. Оцінки найкращих ортогональних тригонометричних наближень узагальнених багатовимірних аналогів ядер Бернуллі та класів $L_{\beta,1}^{\psi}$ у просторі L_q . *Диференціальні рівняння і суміжні питання аналізу: Зб. праць Ін-ту математики НАН України*, 13(1):300–320, 2016.
- [15] К. В. Пожарська. Оцінки найкращих m -членних тригонометричних наближень класів $L_{\beta,p}^{\psi}$ періодичних функцій багатьох змінних малої гладкості у просторі L_q . *Диференціальні рівняння і суміжні питання аналізу: Зб. праць Ін-ту математики НАН України*, 14(3):293–318, 2017.
- [16] E. S. Belinsky. Approximation by a “floating” system of exponentials on classes of smooth periodic functions. *Math. Sb.*, 60:19–27, 1988.
- [17] F. Cobos, T. Kühn, W. Sickel. On optimal approximation in periodic Besov spaces. *J. Math. Anal. Appl.*, 474(2):1441–1462, 2019.
- [18] D. Dũng, V. Temlyakov, T. Ullrich. *Hyperbolic cross approximation*. Adv. Courses Math. Birkhäuser, CRM Barselona. 2018.
- [19] R. A. DeVore, V. N. Temlyakov. Nonlinear approximation by trigonometric sums. *J. Fourier Anal. Appl.*, 2(1):29–48, 1995.
- [20] P. I. Lizorkin. Generalized Holder spaces $B_{p,\theta}^{(r)}$ and their correlations with the Sobolev spaces $L_p^{(r)}$. *Sibirsk. Math. Zh.*, 9(5):1127–1152, 1968.
- [21] K. V. Pozharska, A. S. Romanyuk. The best m -term trigonometric approximations of the classes of periodic functions of one and many variables in the space $B_{q,1}$. *Res. Math.*, 32(2), 2024.
- [22] A. S. Romanyuk. Best trigonometric approximations for some classes of periodic functions of several variables in the uniform metric. *Math. Notes*, 82(2):216–228, 2007.
- [23] A. S. Romanyuk. Approximative characteristics of the isotropic classes of periodic functions of many variables. *Ukr. Math. J.*, 61:613–626, 2009.
- [24] A. S. Romanyuk, V. S. Romanyuk. Approximating characteristics of the classes of periodic multivariate functions in the space $B_{\infty,1}$. *Ukr. Math. J.*, 71(2):308–321, 2019.
- [25] A. S. Romanyuk, V. S. Romanyuk. Estimation of some approximating characteristics of the classes of periodic functions of one and many variables. *Ukr. Math. J.*, 71(8):1257–1272, 2020.

- [26] A. S. Romanyuk, V. S. Romanyuk, K. V. Pozharska, S. B. Hembars'ka. Characteristics of linear and nonlinear approximation of isotropic classes of periodic multivariate functions. *Carpathian Math. Publ.*, 15(1):78–94, 2023.
- [27] A. S. Romanyuk, S. Ya. Yanchenko. Approximation of the classes of periodic functions of one and many variables from the Nikol'skii-Besov and Sobolev spaces. *Ukr. Math. J.*, 74(6):967–980, 2022.
- [28] K. V. Shvai. The best m -term trigonometric approximations of classes of (ψ, β) -differentiable periodic multivariate functions in the space L_q . *J. Comput. Appl. Math.*, 122(2):83–91, 2016.
- [29] K. V. Shvai. The best m -term trigonometric approximations of the classes of periodic multivariate functions with bounded generalized derivative in the space L_q . *J. Math. Sci.*, 222(6):750–761, 2017.
- [30] S. A. Stasyuk. Best m -term trigonometric approximation of periodic functions of several variables from Nikol'skii-Besov classes for small smoothness. *J. Approx. Theory*, 177:1–16, 2014.
- [31] R. M. Trigub, E. S. Belinsky. *Fourier analysis and approximation of functions*. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 2004.
- [32] J. Vybiral. Function spaces with dominating mixed smoothness. *Dissertationes Mathematicae*, pages 1–73, 2006.

К. В. Пожарська

ІНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ НАН УКРАЇНИ, М. КИЇВ, УКРАЇНА; ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ М. ХЕМНІЦ, НІМЕЧЧИНА

Email: pozharska.k@gmail.com

ORCID: 0000-0001-7599-8117

Просторові коливання рідини в циліндричному вертикальному контейнері

І. А. Райновський

Abstract. Using the nonlinear Narimanov–Moiseev modal system with linear damping coefficients corresponding to the logarithmic decrement of the sloshing eigenmodes, steady-state damped resonant sloshing in a cylindrical tank has been investigated. The usage of Miles formula to estimate the damping coefficients shows that these effects can be of significant importance in laboratory conditions. Asymptotic steady-state solutions of the modal system have been obtained for a given motion of a cylindrical tank with four degrees of freedom when the forcing frequency approaches the lowest eigenfrequency of the fluid. This solution turns out to be asymptotically equivalent to a horizontal elliptical trajectory of the container. The response curves, which depend on the ratio of the semiaxes of the elliptical orbit and are related to the amplitudes of the two lowest eigenmodes of the sloshing, have been analyzed.

Анотація. За допомогою нелінійної модальної системи Наріманова–Моїсєєва з лінійними коефіцієнтами демпфування, що відповідають за логарифмічний декремент власних мод коливань рідини, досліджено усталені демпфовані резонансні хлюпання рідини у циліндричному резервуарі. Використання формули Майлза для оцінки коефіцієнтів демпфування показує, що ці ефекти можуть мати суттєве значення у лабораторних умовах. Отримано асимптотичні стійкі розв'язки модальної системи для заданого руху циліндричного резервуара з чотирма ступенями вільності, коли частота збурень наближається до найнижчої власної частоти рідини. Цей розв'язок виявляється є асимптотично еквівалентним горизонтальному еліптичному збуренню контейнера. Проаналізовано амплітудно-частотні характеристики, які залежать від співвідношення півосей еліптичної орбіти, і пов'язані з амплітудами двох найнижчих власних форм коливань рідини.

1. ВСТУП

Коливання рідини в резервуарах мають велике значення в багатьох галузях техніки, включаючи суднобудування, хімічну промисловість та

2020 Mathematics Subject Classification: 57R30

Ключові слова: коливання рідини, усталені розв'язки

DOI: <https://doi.org/10.3842/trim.v21n1.547>

біотехнології. Особливо важливим є вивчення резонансних станів і демпфування в лабораторних умовах, де геометрія резервуарів і властивості рідин відрізняються від промислових масштабів. Метою цієї статті є аналіз впливу демпфування на усталені резонансні коливання рідини в циліндричних резервуарах з використанням модальних систем типу Наріманова–Моїсєєва.

Резонансні коливання рідини в резервуарах круглої форми, спричинені гармонійними горизонтальними збуреннями з частотою, близькою до найнижчої власної частоти, активно досліджуються з 1960-х років. Огляд сучасних теоретичних і експериментальних досліджень представлено у роботах [7,8,12]. У промислових масштабах в'язке демпфування зазвичай ігнорується через великі геометричні розміри резервуарів, але для лабораторних баків, таких як біореактори, цей фактор набуває значення [5, 6]. Збільшення в'язкості рідини, динамічний контактний кут та поверхневі явища, такі як забруднення та розрив хвиль, суттєво впливають на коливання [4].

У попередніх роботах [1] досліджувались недемпфовані коливання за допомогою нелінійного мультимодального підходу Наріманова–Моїсєєва, який показав високу точність для резервуарів із відношенням глибини до радіуса $h \gtrsim 1.2$. Однак для менших глибин ці рівняння менш точні через явище вторинного резонансу ([2], глави 8-9). Теоретичні передбачення задовільно узгоджуються з експериментами [12], проте недемпфована теорія не враховує зсуву фаз, виміряного експериментально.

В цій роботі показано доповнення рівнянь Наріманова–Моїсєєва, враховуючи демпфування, і представляються асимптотичні періодичні розв'язки для класифікації демпфованих резонансних хвильових режимів. Демпфування розраховується з урахуванням ефектів на змоченій поверхні баку та об'ємної в'язкості, як запропоновано в [3]. Для води це справедливо за умови радіуса резервуара $r_0 \gtrsim 0.05$ м.

Модальні рівняння з'єднують узагальнені координати з різними асимптотичними порядками ($O(\epsilon^{1/3})$, $O(\epsilon^{2/3})$, $O(\epsilon)$), де $O(\epsilon) \ll 1$ відповідає безрозмірній амплітуді збурення. Демпфування враховується для нижчих форм власних коливань, тоді як для вищих мод воно нехтується. Основна увага приділяється стійкості режимів та залежності фазових зсувів ψ , φ від геометричних параметрів.

Ця робота також аналізує вплив демпфування на стійкість стоячих хвиль і спіральних режимів для різних типів збурень: горизонтальних, еліптичних і кругових.

2. МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ

Розглядається нестислива ідеальна рідина, яка частково заповнює вертикальний жорсткий круговий резервуар радіусом r_0 .

Резервуар виконує малі періодичні рухи в просторі, $\eta_1(t)$, $\eta_2(t)$ і $\eta_4(t)$, $\eta_5(t)$ відповідно, як показано на рисунку 2.1. Рух вільної поверхні $\Sigma(t)$, представлений функцією $z = \zeta(r, \theta, t)$, та динаміка коливання рідини досліджуються в безрозмірному формулюванні, яке базується на характерному розмірі баку r_0 та часі $1/\sigma$, де σ — частота коливань баку. Вводиться малий параметр $0 < \epsilon \ll 1$, який пов'язаний із безрозмірною величиною періодичного збурення, тобто $\eta_i(t) = O(\epsilon)$, $i = 1, 2, 4, 5$.

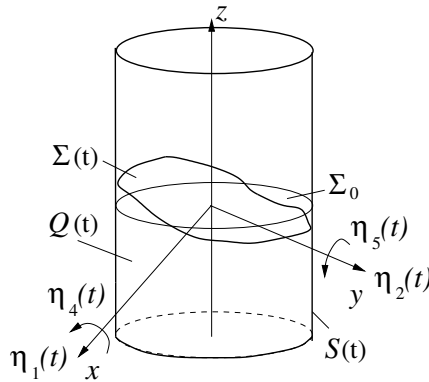


Рис. 2.1. Область рідини $Q(t)$ обмежена вільною поверхнею $\Sigma(t)$ та змоченою поверхнею баку $S(t)$. Коливання рідини розглядаються у системі координат, пов'язаній із самим баком.

На Рис.2.1 зображено область рідини $Q(t)$ з вільною поверхнею $\Sigma(t)$.

Задача базується на мультимодальному методі, суть якого у використанні наближеного розв'язку Фур'є (модального розв'язку) для підйому поверхні $z = \zeta(r, \theta, t)$ та потенціалу швидкості $\Phi(r, \theta, z, t)$ із залежними від часу невідомими коефіцієнтами ζ та Φ , які визначені у фіксованій системі координат $Oxyz$.

$$\zeta(r, \theta, t) = \sum_{M,i} \alpha_{Mi} J_M(k_{Mi} r) \cos(M\theta) p_{Mi}(t) + \sum_{m,i} \alpha_{mi} J_m(k_{mi} r) \sin(m\theta) r_{mi}(t), \quad (2.1)$$

$$\Phi(r, \theta, z, t) = \dot{\eta}_1(t) r \cos \theta + \dot{\eta}_2(t) r \sin \theta + F(r, z) [-\dot{\eta}_4(t) \sin \theta + \dot{\eta}_5(t) \cos \theta]. \quad (2.2)$$

Припустимо, що вторинних резонансів немає, а частота збурення баку є близькою до власної частоти коливання рідини через введення асимптотики Наріманова-Моїсєєва (розділ 8,9 книги [2]).

$$p_{11} \sim r_{11} = O(\epsilon^{1/3}); \quad p_{0j} \sim p_{2j} \sim r_{2j} = O(\epsilon^{2/3}); \quad (2.3)$$

$$r_{1(j+1)} \sim p_{1(j+1)} \sim r_{3j} \sim p_{3j} = O(\epsilon), \quad j \geq 1. \quad (2.4)$$

Через ряд перетворень (нехтуючи величинами порядку $o(\epsilon)$) та додаваючи члени лінійної дисипації [9] через формули Хендерсон-Майлза [3] можемо перейти від задачі гідродинаміки до задачі в термінах аналітичних механіки (через узагальнені координати та швидкості). Ми ці формули перевиводимо через наші величини.

Умовою розв'язності отриманих нелінійних модальних рівнянь типу Наріманова-Моїсєєва є наступна секулярна система відносно інтегральних амплітуд (A, B) та зсувів фаз ϕ, ψ .

$$\begin{cases} \boxed{1} : A[\Lambda + m_1 A^2 + (m_3 - \mathcal{F})B^2] = \epsilon_x \cos \psi, & \boxed{3} : A[\mathcal{D}B^2 + \xi] = \epsilon_x \sin \psi, \\ \boxed{2} : B[\Lambda + m_1 B^2 + (m_3 - \mathcal{F})A^2] = \epsilon_y \sin \varphi, & \boxed{4} : B[\mathcal{D}A^2 - \xi] = \epsilon_y \cos \varphi, \end{cases} \quad (2.5a)$$

$$\mathcal{F} = (m_3 - m_1) \cos^2(\alpha) = (m_3 - m_1)/(1 + C^2), \quad (2.5b)$$

$$\mathcal{D} = (m_3 - m_1) \sin(\alpha) \cos(\alpha) = (m_3 - m_1)C/(1 + C^2),$$

де

$$\Lambda = \bar{\sigma}_{11}^2 - 1, \quad \alpha = \varphi - \psi, \quad C = \tan \alpha, \quad 0 \leq \epsilon_y \leq \epsilon_x \neq 0,$$

$(\mathcal{F}(\alpha)$ та $\mathcal{D}(\alpha)$ є π -періодичними функціями зсувів фаз α).

3. ПОЗДОВЖНІ ПЕРІОДИЧНІ ЗБУРЕННЯ РЕЗЕРВУАРА ВЗДОВЖ ОСІ Ox ($\epsilon_y = 0$)

Стійкі коливання рідини без демпфування ($\xi = 0$) для поздовжніх гармонічних збурень ($\epsilon_y = 0$) досліджені в [1]. Було доведено, що за умов $\epsilon_y = \xi = 0$ існують два фізично різні стійкі розв'язки модальної системи: плоскі стоячі та кругові хвилі.

Для випадку $\xi = 0$, плоскі хвилі мають $A > 0$, $B = 0$, $\sin \psi = 0$, $C = 0$, тоді як кругові визначаються умовами $AB > 0$, $\sin \psi = \cos \varphi = 0$ ($C = \pm \infty$). Кругові хвилі є двома прогресуючими хвилями з протилежними напрямками.

Для $\xi > 0$ розв'язки залишаються фізично ідентичними, але фазовий зсув ψ більше не є кусково-неперервною функцією:

$$A^2 [(\Lambda + m_1 A^2)^2 + \xi^2] = \epsilon_x^2; \quad 0 < A \leq \frac{\epsilon_x}{\xi}; \quad \psi = \arccos \frac{A(\Lambda + m_1 A^2)}{\epsilon_x}. \quad (3.1)$$

Стійкі кругові хвилі характеризуються $AB > 0$, $C \neq 0$ та описуються рівняннями:

$$\begin{cases} A \left[\Lambda + m_1 A^2 + \frac{m_1 + m_3}{1 + C^2} B^2 \right] = \epsilon_x \cos \psi; \\ A \left[\frac{(m_3 - m_1)C}{1 + C^2} B^2 + \xi \right] = \epsilon_x \sin \psi; \\ B^2 = -\frac{1}{m_1} \left[\Lambda + \frac{m_1 + m_3}{1 + C^2} A^2 \right] > 0; \quad A^2 = \frac{\xi(1 + C^2)}{(m_3 - m_1)C} > 0. \end{cases} \quad (3.2)$$

Тут C визначається рівнянням:

$$Pl(C) = q_3 C^3 + q_2 C^2 + q_1 C + q_0 = 0, \quad (3.3)$$

де

$$\begin{aligned} q_3 &= \xi^3 (m_1 + m_3)^2 > 0, \quad q_2 = 2\xi^2 \Lambda (m_3^2 - m_1^2), \\ q_1 &= \xi [4\xi^2 m_1^2 + \Lambda^2 (m_1 - m_3)^2], \quad q_0 = \epsilon_x^2 m_1^2 (m_1 - m_3). \end{aligned}$$

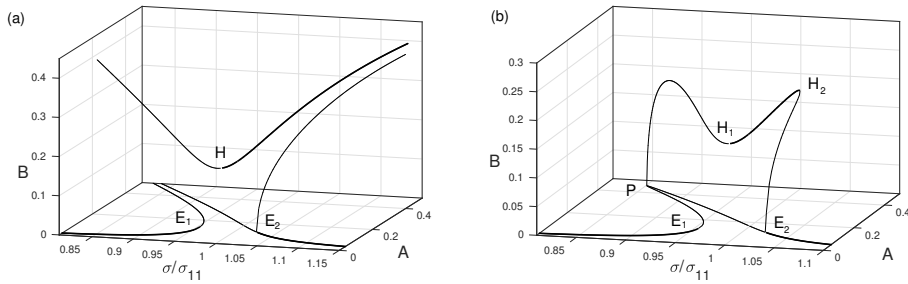


Рис. 3.1. Амплітудно-частотні характеристики у просторі $(\sigma/\sigma_{11}, A, B)$ для поздовжніх горизонтальних збурень у площині Oxz , $h = 1.5$, безрозмірна амплітуда збурень $\eta_{1a} = 0.01$ ($\eta_{2a} = 0$). Гілки для плоских ($B = 0$, (3.1)) та кругових ($B > 0$, (3.2)) хвиль позначені жирними лініями як стійкі розв'язки. (а) - випадок без демпфування ($\xi = 0$), (б) - з демпфуванням $\xi = 0.02$. У діапазоні між точками E_1 (точка перегину) та E_2 (точка біфуркації Пуанкаре) передбачаються хаотичні хвилі.

Експерименти підтвердили, що демпфування суттєво впливає на стійкість хвиль. Для невеликих резервуарів стійкі хвилі існують лише в обмежених діапазонах частот. За межами цих діапазонів спостерігається перехід до хаотичних.

Амплітудно-частотні характеристики для недемпфованого (а) та демпфованого (б) випадку стійких коливань показані на рисунку 3.1. Розрахунки виконані для $h = 1.5$, амплітуди збурення $\eta_{1a} = 0.01$ ($\eta_{2a} = 0$)

і коефіцієнта демпфування $\xi = 0.02$. Це відповідає $0.05 \text{ м} \leq r_0 \leq 0.1 \text{ м}$, що відображає вплив в'язкості та інших дисипативних явищ.

Розгалуження на рисунку 3.1 розраховано за допомогою (3.1) для плоских хвиль ($B = 0$) і (3.2) для кругових ($B > 0$). Стійкі плоскі стоячі хвилі існують ліворуч від точки перегину E_1 і праворуч від точки біфуркації Пуанкаре E_2 . У нестійких зонах біля резонансу $\sigma/\sigma_{11} = 1$ спостерігаються хаотичні або кругові хвилі. Стійке кругове коливання спостерігається праворуч від H_1 , а демпфування обмежує частотний діапазон в точці H_2 .

Амплітудно-частотні характеристики без демпфування обговорено в [1] (рисунок 3.1 (а)). На рисунку 3.1 (b) показано, що ненульове ξ усуває нескінченні точки на розгалуженні, майже не впливаючи на діапазони стійкості. Позиції E_1, E_2 і H_1 (замість H) залишаються майже незмінними, що забезпечує добру узгодженість з експериментами. Нові точки H_2 і P у (b) вказують на виникнення кругових коливань. Стійка підгілка H_1H_2 близька до недемпфованого випадку, що пояснює задовільне передбачення максимальних підйомів [12].

Демпфування суттєво впливає на зсуви фаз. Недемпфовані коливання мають кусково-неперервні значення ψ і φ : $\sin \psi = 0$ (плоскі хвилі) і $\sin \psi = \cos \varphi = 0$ (кругові хвилі). Для $\xi > 0$ фазові зсуви стають неперервними. Плоскі хвилі відповідають ψ з (3.1), а кругові з $C = \tan \alpha \geq 0$, отриманим з (3.2).

4. ЕЛІПТИЧНІ ЗБУРЕННЯ РЕЗЕРВУАРА ($0 < \delta = \epsilon_y/\epsilon_x < 1$)

Рис. 4.1 ілюструє, що введення ненульового додатнього δ призводить до роздвоєння арки $RH_1H_2E_2$ на рисунку 3.1 (b), що відповідає за збурення проти годинникової стрілки вздовж Oy , чії точки відповідають двом ідентичним круговим хвилям (за- і протинаправленої кругових хвиль), на дві окремі гілки. Перша гілка містить точки E_1, H_1H_2, E_2 ; вони знаходяться досить далеко від головної резонансної зони, де співнаправлення із траєкторією збурення кругові хвилі є близькими до стоячої плоскої хвилі. А саме відповідні підгілки по ліву сторону від E_1 та праву від E_2 . Іншою зоною стійкості є частина підгілки з H_1H_2 . Друга петлеподібна гілка з R_1 та R_2 відповідає за кругову хвилю, яка протилежно направлена до напрямку збурення баку. Вона стійка на R_1R_2 . Також є діапазон частоти між E_1 та H_1 , де теорія не передбачає стійкого усталеного коливання рідини та очікуються нерегулярні (хаотичні) хвилі.

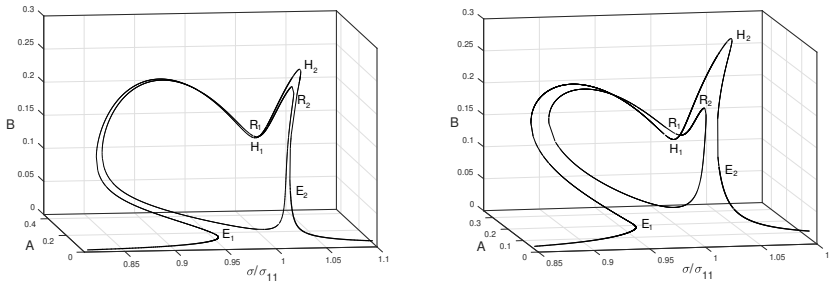


Рис. 4.1. Амплітудно-частотні характеристики для усталеного резонансного коливання через еліптичне проти годинникової стрілки періодичне збурення з $\eta_{1a} = 0.01$, $\eta_{2a} = \delta\eta_{1a}$ і $\delta = 0.05$ зліва та ($\xi = 0.02$) справа. Усі криві відповідають круговим хвилям, але деякі підгілки є досить близькими до площини $(\sigma/\sigma_{11}, A)$, що означає коливання рідини близьке до стоячої плоскої хвилі. Гілка, що містить E_1, H_1, H_2, E_2 відповідає за кругові хвилі, що співнаправлені із еліптичним збуренням баку, але замкнена гілка із R_1 та R_2 відповідає за протилежно направлені кругові хвилі. Товсті лінії відповідають за стійкі розв'язки.

Збільшення співвідношення півосей еліпса δ зменшує колоподібну гілку R , що відповідає за протилежно направлену до збурення баку кругову хвилю. Рис 4.2 ілюструє цей факт для $\delta = 0.3$ та 0.45 . Зменшення гілки R означає, що лінійне демпфування унеможливує існування протилежно направленої кругової хвилі до збурень баку при переході з поздовжніх зовнішніх збурень баку до кругових. Для контрасту, теоретичний аналіз без демпфування у [1] показує, що протилежно направлена кругова хвиля існує завжди та може бути стійкою в частоті для $0 < \delta < 1$.

Ненульове ξ призводить до зникнення гілки R разом із збільшенням δ . При коефіцієнті демпфування $\xi = 0.02$ це відбувається, коли δ є дещо нижчим за 0.5 . Як наслідок, ми не бачимо цієї гілки на рисунку 4.3, де $\delta = 0.5$ та 0.8 .

На рисунках 4.2 та 4.3, ми також бачимо екстра острівці стійких розв'язків H_3H_4 та R_3R_4 . Після зникнення гілки R , острівець із точками H_3H_4 зростає та, врешті решт, з'єднується з іншими підгілками із стійкими розв'язками (що містять точки E_1 та H_1 відповідно).

Незатухаючі коливання, спричинені еліптичним збуренням, характеризуються $\bar{a} = \bar{b} = 0$ [1], що означає $\sin \psi = \cos \varphi = 0$ і $\cos \alpha = 0$, $\sin \alpha =$

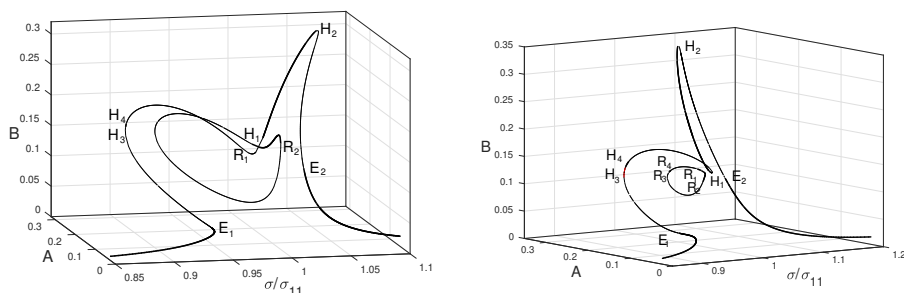


Рис. 4.2. Те саме, що на рисунку 4.1, але для $\delta = \epsilon_y/\epsilon_x = 0.3$ (зліва) та $\delta = 0.45$ (справа). Виявлено додатковий діапазон співнаправлених (до руху баку) кругових хвиль H_3H_4 із збільшенням δ , але стійкі протилежно направлені кругові хвилі (точки R_1R_2, R_3R_4) зникають із збільшенням δ .

± 1 . У цьому випадку вирази для $A = |a|$ і $B = |b|$ визначаються системою рівнянь:

$$A^2[\Lambda + m_1 A^2 + m_3 B^2] = \epsilon_x^2, \quad B^2[\Lambda + m_1 B^2 + m_3 A^2] = \delta^2 \epsilon_x^2. \quad (4.1)$$

Цю систему можна аналітично розв'язати, як описано у [1].

Для затухаючих коливань ($\xi \neq 0$) фазові зсуви φ і ψ стають складними функціями вхідних параметрів. Амплітуди A, B та фазові зсуви φ, ψ визначаються нелінійною системою рівнянь (2.5a).

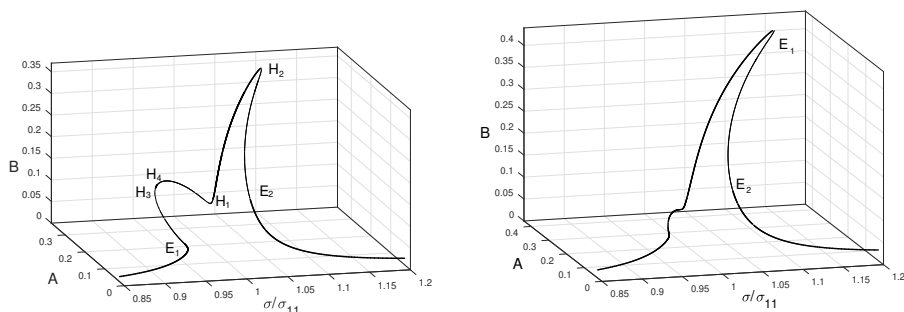


Рис. 4.3. Те саме, що на рисунку 4.1, але для $\delta = \epsilon_y/\epsilon_x = 0.5$ та $\delta = 0.8$ справа та зліва, відповідно. Як можна помітити, кругова хвиля, що протилежно направлена до траєкторії еліптичного збурення баку, взагалі відсутня.

Результати чисельного розрахунку представлені на рисунках 4.1–4.4 для різних значень $0 < \delta < 1$.

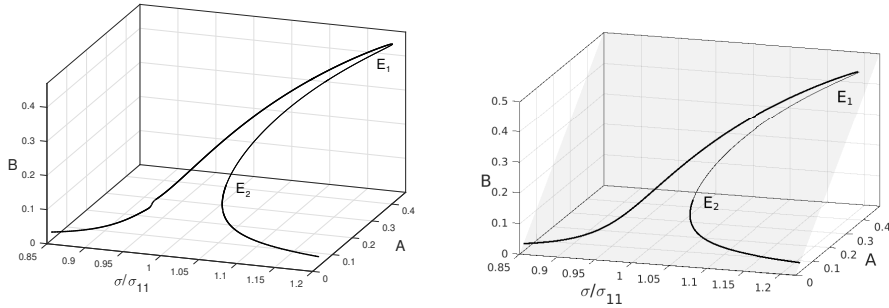


Рис. 4.4. Те саме, що на рисунку 4.3, але для майже кругових $\delta = \epsilon_y/\epsilon_x = 0.95$ (зліва) та кругових збурень баку $\delta = 1.0$ (справа).

На Рис. 4.4 справа проілюстровано амплітудно-частотні характеристики для майже кругових збурень баку $\delta = \epsilon_y/\epsilon_x = 0.95$ та для кругових збурень $\delta = 1.0$.

5. ВИСНОВКИ

Включення демпфування в модальні системи дозволяє точніше моделювати поведінку рідини в резервуарах.

Для лабораторних резервуарів демпфування відіграє критичну роль у формуванні усталених режимів.

Подальші дослідження можуть бути спрямовані на експериментальне підтвердження моделей для інших типів рідин і резервуарів.

Нелінійна мультимодальна теорія [1] модифікована шляхом додавання лінійних демпфуючих членів, які враховують лінійні коефіцієнти затухання (відповідальні за логарифмічні декременти) природних мод коливань. Ці коефіцієнти враховують сукупний ефект різних джерел дисипації, включаючи прикордонний шар на змоченій поверхні резервуара та об'ємну в'язкість. Коефіцієнти затухання можуть суттєво збільшуватися при врахуванні динамічного контакту, забруднення поверхні, руйнування хвиль тощо. Таке збільшення зазвичай спостерігається у лабораторних резервуарах (біореакторах).

Оригінальна мультимодальна теорія нехтує поверхневим натягом (для водопровідної води та радіусом резервуара $r_0 \gtrsim 0.05$ см) і припускає, що контейнер з круглою основою здійснює заданий періодичний рух, частота збурень якого близька до найнижчої власної частоти коливань;

співвідношення середньої глибини рідини до радіуса резервуара $h \gtrsim 1.2$ для уникнення явищ вторинного резонансу.

Асимптотичний стійкий розв'язок модальних рівнянь отримано. Його стійкість проаналізовано за допомогою лінійного методу Ляпунова та техніки аналізу повільного та швидкого часу. Асимптотична процедура вводить дві домінуючі амплітуди хвиль і відповідні фазові зсуви, які керуються чотирма (секулярними) нелінійними алгебраїчними рівняннями. Ці рівняння мають ту саму структуру, як і у випадку еліптичного горизонтального орбітального руху контейнера. Це дозволяє зосередитися на стійких режимах хвиль, які виникають через такі еліптичні збурення з різними співвідношеннями півосей δ . Поздовжні горизонтальні гармонійні збурення резервуара та кругові збурення є двома граничними випадками.

Стійкі коливання рідини, з та без демпфування, через поздовжнє горизонтальне гармонійне збурення призводять до утворення плоских або кругових хвиль. Введення лінійного демпфування призводить до появи додаткових точок біфуркації на кривих амплітудно-частотних характеристик, де кругові хвилі виникають із плоских хвиль. Кожна точка на круговій гілці відповідає двом фізично ідентичним, але протилежно спрямованим прогресивним хвилям. При ненульовому δ відбувається розподілення на дві незв'язані криві: одна з них відповідає співнапрямленим, із рухом баку, круговим хвилям, інша — протилежно напрямленим. Збільшення співвідношення півосей еліпса збурень баку призводить до зменшення другої кривої (протинаямплених хвиль) аж до її зникнення при певному δ . Це протилежно випадку без демпфування [1], коли протинаямплени хвилі існували при будь-якому $0 < \delta \leq 1$.

Для еліптичних збурень, із відносно малим співвідношенням півосей еліпса траєкторії руху баку, теорія виявляє частотний діапазон, де не існує стійких усталених розв'язків.

Для кругового орбітального збурення криві амплітудно-частотних характеристик демонструють поведінку жорсткого типу пружини, що якісно узгоджується зі спостереженнями та вимірами із [10] і [11].

ЛІТЕРАТУРА

- [1] O. M. Faltinsen, I. A. Lukovsky, A. N. Timokha. Resonant sloshing in an upright tank. *Journal of Fluid Mechanics*, 804:608–645, 2016.
- [2] O. M. Faltinsen, A. N. Timokha. *Sloshing*. Cambridge University Press, Cambridge, 2009.
- [3] D. M. Heenderson, J. W. Miles. A note on interior vs boundary-layer damping if surface waves in a circular tank. *Journal of Fluid Mechanics*, 364:319–323, 1998.
- [4] D. M. Henderson, J. W. Miles. Surface-wave damping in a circular cylinder with a fixed contact angle. *Journal of Fluid Mechanics*, 275:285–299, 1994.

- [5] T. Ikeda, R. A. Ibrahim, Y. Harata, T. Kuriyama. Nonlinear liquid sloshing in a square tank subjected to obliquely horizontal excitation. *Journal of Fluid Mechanics*, 700:304–328, 2012.
- [6] H. M. Kim, J. Kizito. Stirring free surface flows due to horizontal circulatory oscillation of a partially filled container. *Chem. Eng. Comm.*, 196:1300–1321, 2009.
- [7] I. A. Lukovsky. *Nonlinear dynamics: mathematical models for rigid bodies with a liquid*. De Gruyter, 2015.
- [8] I. A. Lukovsky, A. N. Timokha. Multimodal method in sloshing. *Journal of Mathematical Sciences*, 220:239–253, 2017.
- [9] I. A. Raynovskyy, A. N. Timokha. *Sloshing in Upright Circular Containers: Theory, Analytical Solutions, and Applications*. CRC Press/Taylor and Francis Group, 2020.
- [10] M. Reclari. *Hydrodynamics of orbital shaken bioreactors*. PhD thesis, Ecole Polytechnique Federale de Lausanne, 2013.
- [11] M. Reclari, M. Dreyer, S. Tissot, D. Obreschkow, F.M. Wurm, M. Farhat. Surface wave dynamics in orbital shaken cylindrical containers. *Physics of Fluids*, 26:052104–1–11, 2014.
- [12] A. Royon-Lebeaud, E. Hopfinger, A. Cartellier. Liquid sloshing and wave breaking in circular and square-base cylindrical containers. *Journal of Fluid Mechanics*, 577:467–494, 2007.

І. А. Райновський

ІНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ НАН УКРАЇНИ, М. КИЇВ

Email: ihor.raynovskyy@gmail.com

ORCID: 0000-0003-0767-3227

Фрактальний аналіз функцій зі складною локальною структурою

С. П. Ратушняк

Abstract. We consider class of fractal functions whose argument and value are written in the same (or different) number representation systems with zero redundancy (Q_2 -representation, Q_2^* -representation, A -continued fraction representation of numbers). For the given examples of function constructions, their topological, metric, fractal and differential properties are described.

Анотація. У статті розглядається клас фрактальних функцій, аргумент і значення яких записані в одній і тій же (або різних) системах зображення чисел з нульовою надлишковістю (Q_2 -зображення, Q_2^* -зображення, ланцюгове A -зображення чисел). Для наведених прикладів конструkcій функцій описано їх тополого-метричні, фрактальні та диференціальні властивості.

1. Початки

Фрактальний аналіз бере свій початок з робіт Ф. Гаусдорфа [19] і А. С. Безиковича [16] (відносно повний перелік яких можна знайти в роботі [3]). Введенні в роботах даних авторів поняття мір дробових порядків (далі α -вимірної міри Гаусдорфа) і метричної (фрактальної = дробової) розмірності Гаусдорфа-Безиковича в майбутньому ляже в основу "критерію"фрактальності множин в широкому (в сенсі Б. Мандельброта) чи вузькому розумінні. Таким чином фрактальний аналіз зводився до аналізу розмірності множин.

Напевно (на думку автора), діалектика кристалізації h -міри Гаусдорфа пролягала через поняття α -міри Каратеодорі (1914 р.) і стала основою центрального поняття теорії – розмірності Гаусдорфа-Безиковича, яке формувалось на "багаточисельних"на той момент яскравих прикладах множин, графіків функцій, що не вписувались в загальну картину науки того часу. Адже на момент виходу статті Гаусдорфа вже як понад 35 років була відома множина Кантора, що є найпростішим прикладом

2020 *Mathematics Subject Classification:* 26A21, 26A30

Ключові слова: system of encoding, fractal function, digit projectors, fractal sets, invensor

DOI: <https://doi.org/10.3842/trim.v21n1.548>

самоподібної множини, вже більше як 15 років був відомий приклад фігури, яка пізніше називатиметься фракталом, – Сніжинкою Коха. До цього переліку можна додати трикутний килим Серпінського (1915 р.), неперервну ніде недиференційовну функцію Вейєрштрасса (1872 р.), сингулярну функцію Мінковського (1904 р.) тощо.

Наступним поштовхом до стрімкого злету теорії фракталів була робота Б. Мандельброта [21], яка акцентувала увагу на автомоделних (самоподібних, самоафінних) фігурах дробової розмірності, що виникали як геометричні об'єкти, об'єкти метричної теорії чисел, теорії ймовірностей та теорії динамічних систем.

1.1. Що таке фрактальний аналіз? Фрактальний аналіз, основним об'єктом дослідження якого на початковому етапі була фігура метричного простору з локально складною тополого-метричною структурою, сьогодні активно вивчає функції, перетворення простору, динамічні системи, сингулярні ймовірнісні міри тощо. На даний момент доцільно розмежовувати структурну і метричну фрактальність. Зауважимо, що більшість моделей, які розглядаються в суміжних науках, є саме структурно фрактальними, а не метрично фрактальними (мова йде про фізику, хімію, біологію, економіку тощо). До метричного фрактального аналізу відносять задачі на обчислення фрактальних розмірностей, зокрема розмірності Гаусдорфа-Безиковича, клітинкової, ентропійної розмірності тощо. До структурного фрактального аналізу відносяться задачі на встановлення самоподібної, самоафінної або автомоделної структури фрактальної множини.

1.2. Фрактальний аналіз в іменах. Ключовими постаттями у розвитку фрактального аналізу безсумнівно можна вважати Ф. Гаусдорфа, А. С. Безиковича та Б. Мандельброта. Тоді, коли Гаусдорф і Безиковича були фундаторами поняття теорії фракталів – міри Гаусдорфа і розмірності Гаусдорфа-Безиковича, Б. Мандельброт був геніальним популяризатором ідей фрактального аналізу, зокрема тих, що ґрунтувалися на принципах самоподібності. Значний внесок у теорію фракталів зробили П. Біллінгслі, Дж. Хатчинсон [20], М. Барнслі [14, 15] та ін.

Не переслідуючи мету здійснити повний історичний зріст розвитку фрактального аналізу, хотілось би зазначити, що на сьогоднішній день теорія фракталів успішно розвивається в Україні. Першопрохідцем серед українських математиків у цій галузі є професор М. В. Працьовитий, який разом з учнями розвиває кілька напрямів фрактального аналізу:

- 1) перетворення, що зберігають фрактальну розмірність [11];
- 2) фрактальний аналіз ніде не монотонних функцій [29];

- 3) фрактальний аналіз сингулярних ймовірнісних мір [7, 12];
- 4) нормальні властивості чисел і фрактальні властивості множин ненормальних чисел [13];
- 5) системи кодування дійсних чисел і фрактали [2, 8];
- 6) фрактальні функції [30];
- 7) фрактальний аналіз множин неповних сум абсолютно збіжних рядів та їх узагальнень [1, 22];
- 8) фрактальний аналіз нескінченних згорток Бернуллі [18];
- 9) узагальнення класичних лінійних фракталів [3];
- 10) узагальнення та поглиблення ряду фундаментальних класичних результатів метричної та ймовірнісної теорії чисел у різних системах зображення чисел [7];
- 11) алгебраїчні структури у теорії фракталів [27] та ін.

2. ФРАКТАЛЬНІ ФУНКЦІЇ

Ми кажемо, що функція має фрактальні властивості, якщо виконується принаймні одна з умов: функція має

- (1) хоча би одну фрактальну множину рівня,
- (2) самоподібний, самоафінний, автомодельний або фрактальний графік (як множину в R^2),
- (3) фрактальну множину точок несталості (росту, спадання),
- (4) фрактальну множину особливостей (диференціального або іншого характеру),
- (5) розподіл значень при рівномірному розподілі аргумента, зосереджений на фракті;
- (6) трансформує фрактальну розмірність принаймні однієї борелівської підмножини $[0; 1]$.

Ми цікавимося класом функцій, визначених рівністю

$$f(x = \Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n \dots}^g) = \Delta_{\beta_1 \beta_2 \dots \beta_n \dots}^q, \quad (2.1)$$

де $\Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n \dots}^g$ і $\Delta_{\beta_1 \beta_2 \dots \beta_n \dots}^q$ – зображення дійсних чисел (узгоджені за алфавітом або за геометрією зображення).

Приклад 2.1. Нехай $\Delta_{\alpha_1 \dots \alpha_n \dots}^2 = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\alpha_i}{2^i}$ – класичне двійкове зображення чисел, $\alpha_i \in \{0, 1\}$. Тоді функція

$$f(x = \Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n \dots}^2) = \Delta_{[1-\alpha_1][1-\alpha_2] \dots [1-\alpha_n] \dots}^2 = 1 - x.$$

2.1. Система зображення дійсних чисел. Нехай задано A – алфавіт (набір елементів), $L \equiv A \times A \times \dots$ – простір послідовностей елементів алфавіту, $D = \langle a; b \rangle$ – деякий проміжок.

Означення 2.1. Кодуванням чисел множини D засобами алфавіту A називається сюр'єктивне відображення $g(L) = D$.

При цьому множина

$$\Delta_{c_1 c_2 \dots c_m}^L = \{(a_1, a_2, \dots, a_n, \dots) : a_i = c_i, i = m\}$$

називається *циліндром рангу m з основою $c_1 c_2 \dots c_m$* у просторі L послідовностей алфавіту.

Образ циліндра $\Delta_{c_1 c_2 \dots c_m}^L$ при відображенні g

$$\Delta_{c_1 c_2 \dots c_m}^g = \varphi(\Delta_{c_1 c_2 \dots c_m}^L)$$

називається *циліндром рангу m з основою $c_1 c_2 \dots c_m$* в D .

Сама послідовність $(\alpha_n) = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, \dots) \in L$, яка відповідає числу x , називається його g -зображенням (або g -кодом), а α_n – n -ою цифрою (або символом) цього зображення.

Якщо кожен циліндр є проміжком, то кодування називається *неперервним*.

Кажуть, що зображення має *нульову надлишковість*, якщо кожне число має не більше, ніж два зображення, причому множина чисел, що мають два зображення є не більш ніж зліченна, та *екстранульову надлишковість*, якщо кожне число має єдине зображення.

У випадку нульової надлишковості системи зображення, числа, що мають два формально різні зображення називаються g -бінарними. Решта чисел – g -унарними.

Наведемо деякі системи зображення чисел, що використовуються в дослідженнях.

Теорема 2.1 ([4]). Нехай $A = \{0, 1, \dots, s-1\}$, $\|q_{in}\|$ – стохастична матриця, така що $0 < q_{in} < 1$, $\sum_{i=0}^{s-1} q_{in} = 1$, $n \in N$ $i \prod_{n=1}^{\infty} \max_{i \in A} \{q_{in}\} = 0$. Тоді для довільного числа $x \in [0; 1]$ існує послідовність $(\alpha_n) \in L$, така що

$$x = \beta_{\alpha_1 1} + \sum_{n=2}^{\infty} (\beta_{\alpha_n n} \prod_{j=1}^{n-1} q_{\alpha_j j}) \equiv \Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n \dots}^{Q_s^*}, \beta_{\alpha_n n} \equiv \sum_{i=0}^{\alpha_n-1} q_{in}. \quad (2.2)$$

Розклад числа x в ряд (2.2) називається Q_s^* -представленням, а скорочений запис $\Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n \dots}^{Q_s^*}$ – його Q_s^* -зображенням.

Дане зображення є узагальненням серії поліосновних так званих Q -зображень, які беруть свій початок з робіт [4, 6] Працьовитого М.В., зокрема, якщо $q_{in} = q_i = \frac{1}{s} \forall i \in A, n \in N$, то Q_s^* -зображення збігається з класичним s -ковим зображенням.

Геометрію цього зображення розкривають властивості циліндрів:

- 1) $\Delta_{c_1 c_2 \dots c_m}^{Q_s^*} = [a; b]$, де $a = \sum_{k=1}^m (\beta_{c_k k} \prod_{j=1}^{k-1} q_{c_j j})$, $a + \prod_{j=1}^m q_{c_j j}$;
- 2) $|\Delta_{c_1 c_2 \dots c_m}^{Q_s^*}| = \prod_{i=1}^m q_{c_i i} = q_{c_m m} |\Delta_{c_1 c_2 \dots c_{m-1}}^{Q_s^*}|$;
- 3) $\max \Delta_{c_1 c_2 \dots c_m i}^{Q_s^*} = \min \Delta_{c_1 c_2 \dots c_m [i+1]}^{Q_s^*}$.

Зауваження 2.1. Зліченна множина Q_s^* -бінарних чисел вичерпується числами виду $\Delta_{\alpha_1 \dots \alpha_{n-1} \alpha_n}^{Q_s^*}(0) = \Delta_{\alpha_1 \dots \alpha_{n-1} [\alpha_n - 1] (s-1)}^{Q_s^*}$.

Теорема 2.2. Нехай $A_s = \{e_0, e_1, \dots, e_{s-1}\}$, $(0 < e_0 < e_1 < \dots < e_{s-1})$. Якщо $e_i = e_{i-1} + d$, $i = \overline{1, s-1}$, де $d = d_1 - d_0$, то $\forall x \in [d_0; d_1] \exists (a_n) \in L$, така що

$$x = 1/a_1 + 1/a_2 + \dots + 1/a_n + \dots \equiv \Delta_{a_1 a_2 \dots a_n \dots}^{A_s}, \quad (2.3)$$

$$\text{де } d_0 = \min_{a_n \in A} \{\Delta_{a_1 a_2 \dots a_n \dots}^{A_s}\}, \quad d_1 = \max_{a_n \in A_s} \{\Delta_{a_1 a_2 \dots a_n \dots}^{A_s}\}.$$

Запис $\Delta_{a_1 a_2 \dots a_n \dots}^{A_s}$ називається ланцюговим A_s -зображенням числа x .

Зауваження 2.2. Зліченна множина A_s -бінарних чисел вичерпується числами виду $\Delta_{a_1 \dots a_{n-1} e_0 (e_0 e_{s-1})}^{A_s} = \Delta_{a_1 \dots a_{n-1} e_{s-1} (e_{s-1} e_0)}^{A_s}$.

Циліндр $\Delta_{c_1 \dots c_n}^{A_s}$ є відрізком з кінцями $\Delta_{c_1 \dots c_n (e_0 e_{s-1})}^{A_s}$ і $\Delta_{c_1 c_2 \dots c_n (e_{s-1} e_0)}^{A_s}$ (де лівий, а де правий кінець, залежить від парності і непарності n).

Зазначимо, що якщо $s = 2$, а $d = \frac{1}{2}$, то A_s -зображення співпадає з ланцюговим A_2 -зображенням, для якого $e_0 \cdot e_1 = \frac{1}{2}$. Останнє зображення розглядалося в багатьох роботах [5, 8, 17, 23, 26, 28], а отримані результати тополого-метричного аналізу знайшли свої застосування в різних галузях математики, зокрема у теорії сингулярно неперервних випадкових величин типу Джессена-Вінтнера.

A_s -зображення легко перекодується засобами алфавіту A , а саме:

$$x = [0; a_1, a_2, \dots, a_k, \dots] \equiv \Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_k \dots}^A,$$

де $a_k \equiv \alpha_{\alpha_k}$, $k \in \mathbb{N}$. Останнє називається A -зображенням числа x .

3. ОТРИМАНІ РЕЗУЛЬТАТИ

Приклад 3.1. Нехай $A = \{0, 1\}$. Розглядається функція, означена рівністю

$$f_{\varphi}(x = \Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n \dots}^{Q_2^*}) = \Delta_{\varphi_1(\alpha_1, \alpha_2) \varphi_2(\alpha_2, \alpha_3) \dots \varphi_n(\alpha_n, \alpha_{n+1}) \dots}^{G_2^*}, \quad (3.1)$$

де $\Delta_{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_n\dots}^{Q_2^*}$ і $\Delta_{\varphi_1(\alpha_1,\alpha_2)\varphi_2(\alpha_2,\alpha_3)\dots\varphi_n(\alpha_n,\alpha_{n+1})\dots}^{G_2^*}$ – Q_2^* - і G_2^* -зображення відповідно, породженні стохастичними матрицями $\|q_{in}\|$ і $\|g_{in}\|$, що задовольняють умови теореми 2.1; $\bar{\varphi} = (\varphi_n)$ – послідовність фінітних відображень $\varphi_n(A^2) = A \ \forall n \in N$.

Лема 3.1. Якщо в послідовності (φ_n) функція φ_m є константою і, то множина значень функції $f_{\bar{\varphi}}$ є підмножиною об'єднання циліндрів m -го рангу, а саме:

$$E_{f_{\bar{\varphi}}} \subset \bigcup_{c_1 \in A} \bigcup_{c_2 \in A} \dots \bigcup_{c_{m-1} \in A} \Delta_{c_1 c_2 \dots c_{m-1} i}^{G_2^*}. \quad (3.2)$$

Наслідок 3.1. Якщо серед функцій послідовності (φ_n) існує нескінченна підпослідовність констант, то множина значень функції $f_{\bar{\varphi}}$ є підмножиною множини канторівського типу $C[G_2^*, V_k]$, де

$$V_k = \begin{cases} A, & \text{якщо } \varphi_k \text{ — не константа;} \\ \{j_k\}, & \text{якщо } \varphi(a, b) = j_k. \end{cases}$$

Теорема 3.1. Кожна функція $f_{\bar{\varphi}}$ класу S є неперервною на множині Q_2^* -унарних чисел. Для того щоб функція $y = f_{\bar{\varphi}}(x)$ була неперервною, необхідно і достатньо, щоб її значення від двох різних зображень Q_2^* -бінарних чисел збігалися, тобто $f_{\bar{\varphi}}(\Delta_{c_1\dots c_m 0(1)}^{Q_2^*}) = f_{\bar{\varphi}}(\Delta_{c_1\dots c_m 1(0)}^{Q_2^*})$ для будь-якого набору $(c_1, \dots, c_m)$ нулів та одиниць.

Теорема 3.2. Якщо функція $f_{\bar{\varphi}}$ неперервна в кожній точці відрізка $[0; 1]$, то вона є або сингулярною функцією салемівського типу, якщо $q_i \neq g_i$, або сингулярною строго спадною функцією (інверсором цифр), якщо $q_{in} \neq \frac{1}{2} \wedge g_{in} \neq \frac{1}{2}$, або тотожним перетворенням або $y = 1 - x$, якщо $q_{in} = g_{in} = \frac{1}{2}$, або константою, причому констант континуальна кількість.

Теорема 3.3. Множина рівня функцій $f_{\bar{\varphi}}$, де $\varphi_n = \varphi$ для $n \in N$ є або скінченною, або континуальною, причому:

- 1) якщо $E_{f_{\bar{\varphi}}} = \{i\}$, $i \in A$, то $f_{\bar{\varphi}}^{-1}(y_0)$ є континуальною множиною;
- 2) якщо $E_{f_{\bar{\varphi}}} = [0; 1]$, то $f_{\bar{\varphi}}^{-1}(y_0)$ є або одноеlementною множиною, або складається з двох точок x_0 і $I(x_0)$, де $I(\Delta_{\alpha_1\dots\alpha_n\dots}^{Q_2^*}) = \Delta_{[1-\alpha_1]\dots[1-\alpha_n]\dots}^{G_2^*}$;
- 3) якщо $E_{f_{\bar{\varphi}}} = [G_2^*, V]$, то $f_{\bar{\varphi}}^{-1}(y_0)$ є або скінченною, або континуальною множиною.

Теорема 3.4. Якщо $\varphi(\alpha_n, \alpha_{n+1}) = 1 - \alpha_n \ \forall n \in N$ і $q_{in} = g_{in}$, а послідовність $\frac{q_{1-\alpha_n(x)n}}{q_{\alpha_n(x)n}}$ є або розбіжною, або має границю, відмінну від 1, то $f_{\bar{\varphi}}$ є неперервною строго спадною сингулярною функцією.

Якщо ж матриця $\|q_{ik}\|$ має асимптотичну властивість, причому $q_0 = \lim_{n \rightarrow \infty} q_{0n} \neq \frac{1}{2}$, то функція $f_{\bar{\varphi}}$ в кожній Q_2 -бінарній точці не має похідної (ні скінченної, ні нескінченної).

Приклад 3.2. Нехай $A = \{0, 1\}$. Розглядається функція, означена рівністю

$$r(x = \Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n \dots}^{Q_2}) = \Delta_{r_1 r_2 \dots r_k \dots}^{Q_2}, \quad (3.3)$$

де

$$r_1 = \begin{cases} 0, & \text{якщо } (\alpha_1, \alpha_2) = (0, 0), \\ 1, & \text{якщо } (\alpha_1, \alpha_2) \neq (0, 0), \end{cases}$$

$$r_{k+1} = \begin{cases} r_k, & \text{якщо } (\alpha_{2k+1}, \alpha_{2k+2}) = (\alpha_{2k-1}, \alpha_{2k}), \\ 1 - r_k, & \text{якщо } (\alpha_{2k+1}, \alpha_{2k+2}) \neq (\alpha_{2k-1}, \alpha_{2k}). \end{cases}$$

Теорема 3.5. Функція r є неперервною і ніде не монотонною функцією необмеженої варіації. Її множиною значень є відрізок $[0; 1]$.

Теорема 3.6. Множина Q_2 -бінарного рівня є скінченною, а кожна множина Q_2 -унарного рівня функції r є континуальною, ніде не щільною множиною нульової міри Лебега.

Теорема 3.7. Функція r не має скінченної похідної в жодній Q_2 -бінарній точці, причому якщо Q_2 -бінарна точка є точкою екстремуму функції, то в ній функція немає ні скінченної, ні нескінченної похідної.

Теорема 3.8. Якщо $q_0 \geq q_1^2$ і $q_1 \geq q_0^2$, то функція r є ніде не диференційовною (не має скінченної похідної у жодній точці).

Приклад 3.3. Розглядається функція, означена рівністю

$$f(x = \Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n \dots}^g) = a^{\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i u_i} = \prod_{n=1}^{\infty} \lambda_n^{\alpha_n(x)}, \alpha_n \in A \quad (3.4)$$

де $u_1 + u_2 + \dots$ – абсолютно збіжний ряд і сумою r_0 , $1 \neq a$ – додатний параметр, $1 < s$ – фіксоване натуральне число, (λ_n) – послідовність додатних чисел, така що нескінченний добуток $P \equiv \prod_{n=1}^{\infty} \lambda_n$ абсолютно збіжний.

Якщо g -зображення є Q_s^* -зображенням, то функція, означена рівністю (3.4), може бути записана у вигляді

$$f\left(x = \Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_n \dots}^{Q_s^*}\right) = a^{\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i u_i}, \quad (3.5)$$

Теорема 3.9 ([25]). *Функція f є неперервною в кожній Q_s^* -унарній точці, а в Q_s^* -бінарній точці вона неперервна якщо $u_n = (s-1)s^{-n}r_0$. Якщо $g_{ik} = q_i \ \forall k \in N$, то графік функції є автомодельною множиною. В класі неперервних функцій f , якщо $g_{ik} = q_i$ при $k > m$ і $u_{m+n} = \frac{\lambda}{s^n}$, то*

$$\int_0^1 f(x) = \prod_{i=1}^{\infty} \sum_{j=0}^{s-1} a^{ju_i} q_{ji}.$$

Теорема 3.10 ([25]). *Нехай матриця $\|q_{ik}\|$ має асимптотичну властивість і при цьому виконується умова $\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{i=0}^{s-1} \left(1 - \frac{q_{ik}}{q_i}\right)^2 < \infty$. Якщо існує $q_i \neq \frac{1}{s}$, $i \in A$, то функція f є сингулярною. Якщо $q_i = \frac{1}{s}$ для всіх i , то f є абсолютно неперервною функцією.*

Зауваження 3.1. Клас функцій, які задовольняють умови (крайні), містить класичну сингулярну функцію Салема.

Нехай $A_2 = \{\frac{1}{2}, 1\}$, а g -зображення є A -зображенням чисел. Розглядається клас функцій (3.4), тобто функції означені рівністю

$$f(x = \Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_k \dots}^A) = a^{\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i u_i} = a^{\varphi(x)}, \quad (3.6)$$

$$\varphi(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i u_i.$$

За для коректності означення функції f домовимося використовувати лише одне зображень те, що має період (10).

Теорема 3.11 ([24]). *Функція $f(x)$ неперервна в кожній A -унарній точці, а в A -бінарній точці $x^* = \Delta_{c_1 \dots c_m 0(01)}^A = \Delta_{c_1 \dots c_m 1(10)}^A$ неперервна тоді і тільки тоді, коли виконується рівність*

$$u_m + \sum_{k=1}^{\infty} u_{m+2k-1} = \sum_{k=1}^{\infty} u_{m+2k}.$$

Теорема 3.12 ([24]). *Кожна неперервна функція f , означена рівністю (3.6), є строго спадною при $u_1 > 0$, строго зростаючою при $u_1 < 0$ і константою при $u_1 = 0$.*

Лема 3.2 ([24]). Якщо існує скінченна похідна функції φ у точці $x_0 = \Delta_{\alpha_1 \dots \alpha_n}^A$, то вона може бути обчислена за кожною з формул

$$\varphi'(x_0) = - \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{2^{2k} |\Delta_{\alpha_1 \dots \alpha_{2k}}^A|} = -2 \lim_{k \rightarrow \infty} \prod_{n=1}^{2k} \frac{|\Delta_{\alpha_1 \dots \alpha_{n-1}}^A|}{2 |\Delta_{\alpha_1 \dots \alpha_{n-1} \alpha_n}^A|}. \quad (3.7)$$

Теорема 3.13 ([24]). Якщо f неперервна функція, означена рівністю (3.6), то для майже всіх (у розумінні міри Лебега) чисел $x \in [\frac{1}{2}; 1]$ має місце $f'(x) = 0$.

Приклад 3.4. Розглядається функція, означена рівністю

$$f(x = \Delta_{a_1 a_2 \dots a_n}^{A_2}) = \Delta_{\frac{1}{2a_1} \frac{1}{2a_2} \dots \frac{1}{2a_n}}^{A_2}. \quad (3.8)$$

Оскільки необхідна і достатня умова нульової надлишковості A_2 -зображення $e_0 e_1 = \frac{1}{2}$ має місце, то $\frac{1}{2e_i} = e_{1-i} \in (0; \frac{1}{\sqrt{2}})$, $i \in \{0, 1\}$. А тому рівність (3.8) задає континуальну сім'ю функцій f .

Функція f , означена рівністю (3.8) є коректно означеною на множині A_2 -бінарних чисел, оскільки

$$\begin{aligned} f\left(\Delta_{a_1 \dots a_n e_0(e_0 e_1)}^{A_2}\right) &= \Delta_{\frac{1}{2a_1} \dots \frac{1}{2a_n} e_1(e_1 e_0)}^{A_2} = \\ &= \Delta_{\frac{1}{2a_1} \dots \frac{1}{2a_n} e_0(e_0 e_1)}^{A_2} = f\left(\Delta_{a_1 \dots a_n e_1(e_1 e_0)}^{A_2}\right). \end{aligned}$$

Теорема 3.14 ([10]). Функція f є сингулярною строго спадною на всій області визначення функції. Графік Γ_f функції f є автотомельною множиною R^2 зі структурою $\Gamma_f = \Gamma_0 \cup \Gamma_1$, де Γ_i образ Γ при перетворенні

$$\gamma_i : \begin{cases} x' = \delta_{e_i}(x) = \frac{1}{e_i + x}, \\ y' = \delta_{\frac{1}{2e_i}}(y) = \frac{2}{\frac{1}{e_i} + 2y}, \end{cases} \quad i \in \{0, 1\},$$

де $\delta_{e_i}(x = \Delta_{a_1 a_2 \dots a_n}^{A_2}) = \Delta_{e_i a_1 a_2 \dots a_n}^{A_2}$ – оператор правостороннього зсуву цифр зображення з параметром e_i , $e_i \in A_2$.

Приклад 3.5. Нехай $A_2 = \{\tau_0, \tau_1\}$ ($\tau_0 \tau_1 = \frac{1}{2}$), $A_3 = \{e_0, e_1, e_2\}$ ($e_0 e_2 = \frac{4}{3}$); $A'_2 = \{0, 1\}$, $A'_3 = \{0, 1, 2\}$, $L_i = A'_i \times A'_i \times \dots$, $i = 2, 3$.

Розглядається функція f , означена рівностями

$$f\left(x = \Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n}^{A'_3}\right) = \Delta_{\beta_1 \beta_2 \dots \beta_n}^{A'_2}, \quad \text{де} \quad (3.9)$$

$$\beta_1 = \begin{cases} 1 & \text{при } \alpha_1 = 2, \\ 0 & \text{при } \alpha_1 \neq 2, \end{cases} \quad \beta_{n+1} = \begin{cases} \beta_n & \text{при } \alpha_n + \alpha_{n+1} \neq 2, \\ 1 - \beta_n & \text{при } \alpha_n + \alpha_{n+1} = 2, \end{cases} \quad n \in N.$$

Теорема 3.15 ([9]). Функція f є неперервною ніде не монотонною функцією необмеженої варіації.

Лема 3.3 ([9]). Образом A'_3 -циліндра рангу k при відображенні $f \in A'_2$ -циліндр того ж рангу, причому кількість прообразів циліндра $\Delta_{\beta_1 \dots \beta_k}^{A'_2}$ дорівнює

$$N_k \equiv N \left(\Delta_{\beta_1 \dots \beta_k}^{A'_2} \right) = 2^{k - \beta_1 - \sum_{i=1}^{k-1} |\beta_{i+1} - \beta_i|}.$$

ЛІТЕРАТУРА

- [1] Я. Виннишин, В. Маркітан, М. Працьовитий, І. Савченко. Додатні ряди, множини підсум яких є канторвалами. *Proceedings of the International Geometry Center*, 12(2):26–42, 2019.
- [2] О. Барановський, М. Працьовитий, Г. Торбін. Ряди Остроградського-Серпінського-Пірса та їх застосування. *Київ: Наукова думка*, page 288, 2013.
- [3] А. Турбин, Н. Працевитый. Фрактальные множества, функции, распределения. *Київ: Наук.думка*, page 208, 1992.
- [4] Г. Торбин, Н. Працевитый. Случайные величины с независимыми Q^* -знаками. *Случайные эволюции: теоретические и прикладные задачи*, pages 95–104, 1992.
- [5] М. Працьовитий, Д. Кюрчев. Сингулярність розподілу випадкової величини, зображеної ланцюговим A_2 -дробом з незалежними елементами. *Теорія ймовірностей та математична статистика*, 81:139–154, 2009.
- [6] Н. В. Працевитый. Случайные величины с независимыми Q_2 -символами. *Асимптотические методы в исследовании стохастических моделей*, pages 92–102, 1987.
- [7] М. Працьовитий. Фрактальний підхід у дослідженнях сингулярних розподілів. *Київ: НПУ імені М.П.Драгоманова*, page 296, 1998.
- [8] М. Працьовитий. Двосимвольні системи кодування дійсних чисел та їх застосування. *Наукова думка*, Київ, 2019.
- [9] С. Ратушняк. Неперервна ніде не монотонна функція, означена в термінах ланцюгового A -зображення чисел. *Буковинський математичний журнал*, 11(2):236–245, 2023.
- [10] С. Ратушняк. Неперервна ніде не монотонна функція, означена в термінах ланцюгового A_2 -зображення чисел. *Буковинський математичний журнал*, 11(1):126–133, 2023.
- [11] S. Alberverio, M. Pratsiovytyi, G. Torbin. Fractal probability distributions and transformations preserving the hausdorff-besicovitch dimension. *Compositio Math.*, 24:1–16, 2004.
- [12] S. Alberverio, N. Pratsiovytyi, G. Torbin. Singular probability distributions and fractal properties of sets of real numbers defined by the asymptotic frequencies of their s -adic digits. *Ukrainian Mathematical Journal*, 57(9):1163–1170, 2005.
- [13] S. Alberverio, N. Pratsiovytyi, G. Torbin. Topological and fractal properties of real numbers which are not normal. *Bull. Sci. Math.*, 129:615–630, 2005.
- [14] M. Barnsley. Fractal sunctions and interpolation. *Constr. Approx.*, 2(4):303–329, 1986.
- [15] M. Barnsley. Superfractals. *Cambridge University Press 2006*, page 453, 2008.

- [16] A. Besicovitch. On fundamental geometric properties of lineary measurable plane sets of points. 1. *Math. Ann*, 98 (4):422–464, 1927.
- [17] S. Dmytrenko, D. Kyurchev, M. Pratsiovytyi. A_2 -continued fraction representation of real numbers and its geometry. *Ukrainian Mathematical Journal*, 4:541–555, 2009. doi:10.1007/s11253-009-0236-7.
- [18] Ya. Goncharenko, M. Pratsiovytyi, G. Torbin. Fractal properties of some bernoulli convolutions. *Theor. Probability and Math Statist.*, 79:39–55, 2009.
- [19] F. Hausdorff. Dimension und äußeres maß. *Math. Ann*, 36 (5):137–264, 1919.
- [20] J. Hutchinson. Fractals and self-similarity. *Indiana Univ. Math. J.*, 30(5):713–747, 1981.
- [21] B. Mandelbrot. Fractals: Form, Chance, and Dimension. *Translated from the French. Revised edition. San Francisco, W.H. Freeman and Co.*, page 365, 1977.
- [22] V. Markitan, M. Pratsiovytyi, I. Savchenko. Superfractality of the set of incomplete sums of one positive series. *Ukr. Mat. Zh.*, 70(10):1403–1416, 2018.
- [23] M. Pratsiovytyi, A. Chuikov. Continuous distributions whose functions preserve tails of an A_2 -continued fraction representation of numbers. *Random Oper. Stochastic Equations*, 27 (3):199–206, 2019.
- [24] M. Pratsiovytyi, Y. Goncharenko, I. Lysenko, S. Ratushnyak. Continued A_2 -fractions and singular functions. *Matematychni Studii*, 58(1):3–12, 2022.
- [25] M. Pratsiovytyi, Ya. Goncharenko, I. Lysenko, S. Ratushnyak. Fractal functions of exponential type that is generated by the Q_2^* -representation of argument. *Matematychni Studii*, 57(2):133–143, 2021.
- [26] M. Pratsiovytyi, D. Kyurchev. Properties of the distribution of the random variable defined by A_2 -continued fraction with independent elements. *Random Oper. Stochastic Equations*, 17 (1):91–101, 2009.
- [27] M. Pratsiovytyi, I. Lysenko, Yu. Maslova. Group of continuous transformations of real interval preserving tails of G_2 -representation of numbers. *Algebra and Discrete Mathematics*, 29(1):99–108, 2020.
- [28] M. Pratsiovytyi, O. Makarchuk, A. Chuikov. Approximation and estimates in the periodic representation of real numbers of the closed interval $[0; 1]$ by A_2 -continued fractions. *Journal of Numerical & Applied Mathematics*, 130 (1):71–83, 2019.
- [29] M. Pratsiovytyi, O. Svynchuk. Spread of values of a cantor-type fractal continuous nonmonotone function. *Journal of Mathematical Sciences*, 240(3):342–357, 2019.
- [30] M. Pratsiovytyi, Y. Vovk, I. Lysenko, S. Ratushnyak. Superpositions of functions with fractal properties. *Journal of Mathematical Sciences (United States)*, 273(2):248–270, 2023.

С. П. Ратушняк

ІНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ НАН УКРАЇНИ, м. Київ

Email: ratush404@gmail.com

ORCID: 0009-0005-2849-6233

Нелінійні властивості траєкторій в моделях динамічних систем конфлікту

О. Р. Сатур

Abstract. This article focuses on the study of trajectory properties of conflict dynamical systems. Both attractive and repulsive interactions between system components are considered. The results reveal a wide range of behavioral scenarios, including stable, cyclic, quasi-periodic, and chaotic regimes. Special attention is given to the role of interaction parameters and initial conditions in determining the long-term dynamics of the system. The findings provide a foundation for modeling conflict systems in various applied domains, such as economics, ecology, and social sciences.

Анотація. Ця стаття присвячена дослідженню властивостей траєкторій динамічних систем конфлікту. Розглядаються як притягальні, так і відштовхувальні взаємодії між компонентами системи. Результати демонструють широкий спектр поведінкових сценаріїв, включаючи стабільні, циклічні, квазіперіодичні та хаотичні режими. Особлива увага приділяється ролі параметрів взаємодії та початкових умов у визначенні довгострокової динаміки системи. Отримані результати є основою для моделювання конфліктних систем у різних прикладних сферах, таких як економіка, екологія та соціальні науки.

1. ВСТУП

Витоки теорії динамічних систем сягають XVIII століття, коли Ісаак Ньютон та Готфрід Лейбніц розробили основи математичного аналізу, зокрема диференціальні рівняння, які згодом стали основою для опису фізичних явищ. У XIX столітті Анрі Пуанкаре заклав основи сучасної теорії динамічних систем. Він розробив концепції траєкторій і фазового простору, що дозволило описувати складні системи через їхні загальні властивості, а не через точні рішення. У XX столітті теорія динамічних систем продовжила активно розвиватися завдяки роботам таких учених, як Стефан Смейл та Едвард Лоренц. Вони досліджували складні системи, зокрема хаотичну поведінку, яка спостерігається в багатьох природних процесах.

2020 Mathematics Subject Classification: 01A72, 16G50, 18G80

Ключові слова: dynamical conflict system, fixed point

DOI: <https://doi.org/10.3842/trim.v21n1.549>

Динамічні системи — це один із найстаріших і водночас найсучасніших розділів математики, який займається вивченням еволюції систем у часі. Сьогодні динамічні системи є невід’ємною частиною сучасної математики і мають численні застосування в різних наукових дисциплінах, зокрема у вивченні хаосу та нелінійних явищ. Розвиток теорії динамічних систем є критично важливим через кілька причин: універсальність, нелінійні явища, інтердисциплінарність. Динамічні системи охоплюють широкий спектр процесів — від природних до техногенних. З їх допомогою можна описувати й аналізувати будь-які системи, які еволюціонують у часі. У багатьох системах присутні нелінійні елементи, що викликають складну й непередбачувану поведінку. Теорія динамічних систем допомагає аналізувати ці явища, включаючи біфуркації та хаос, що мають велике значення в прикладних науках. Динамічні системи застосовуються у фізиці, біології, інформатиці, економіці та соціальних науках, забезпечуючи єдиний математичний підхід до вирішення різноманітних проблем.

Динамічні системи з дискретним часом є важливою частиною теорії динамічних систем у математиці. Вони моделюють процеси, які змінюються в дискретні моменти часу, тобто між подіями існує фіксований крок у часі. Основним інструментом для їхнього опису є відображення, що описують як стан системи змінюється з одного моменту часу до іншого.

Динамічна система з дискретним часом задається як пара (X, f) , де X — це фазовий простір, $f : X \rightarrow X$ — відображення, яке описує еволюцію системи з кроком часу. Елементи простору X називаються станами системи, а відображення f задає правило переходу від одного стану до іншого. Для даної початкової умови $x_0 \in X$, траєкторія системи визначається послідовністю станів $x_{n+1} = f(x_n)$, $n = 1, 2, 3, \dots$. Основною задачею при дослідженні таких систем є вивчення довгострокової поведінки траєкторій.

Один із найпростіших прикладів — лінійна динамічна система з дискретним часом, що задана рівнянням:

$$x_{n+1} = Ax_n,$$

де $x_n \in \mathbb{R}^k$ — вектор стану системи на n -тому кроці, а A — фіксована матриця розмірності $k \times k$. Розв’язок цієї системи для початкового стану x_0 може бути записаний у вигляді:

$$x_n = A^n x_0.$$

Аналізуючи власні значення матриці A , можна передбачити поведінку системи в довгостроковій перспективі: якщо всі власні значення за

модулем менші за 1, то система сходиться до рівноважного стану (стійкість); якщо хоча б одне власне значення за модулем більше за 1, траєкторії системи можуть демонструвати експоненційне зростання (нестійкість).

Більшість реальних систем, що моделюються динамічними системами з дискретним часом, є нелінійними. Одна з класичних нелінійних систем — це логістичне відображення, яке описує ріст популяції:

$$x^{t+1} = rx^t(1 - x^t), \quad (1.1)$$

де r — параметр, що характеризує швидкість росту, а x_t — розмір популяції на t -тому кроці, нормований так, щоб $x_t \in [0; 1]$. Логістичне відображення демонструє різноманітну поведінку залежно від значення параметра r .

Модифікуємо відображення (1.1) у для випадку двох популяцій, коли між ними існує певна взаємодія, наприклад конкуренте протистояння чи навпаки взаємопідтримка еволюціонування. Кожну з взаємодій можна характеризувати відповідним терміном притягальної чи відштовхувальної взаємодії. Припустимо, що $\mathbf{p}^t, \mathbf{r}^t \in \mathbb{R}_+^n$ — стохастичні вектори розмірності n , що характеризують щільність розподілу кожної з популяцій на t -тому кроці часу еволюції популяцій на спільному просторі існування Ω . Динаміка зміни популяцій $\{\mathbf{p}^t, \mathbf{r}^t\} \xrightarrow{*,t} \{\mathbf{p}^{t+1}, \mathbf{r}^{t+1}\}$, $t = 0, 1, 2, \dots$, задається відображенням $*$, що визначається системою різницьових рівнянь:

$$\mathbf{p}^{t+1} = \frac{\alpha}{z^t} \mathbf{p}^t (1 - \gamma \mathbf{r}^t), \quad \mathbf{r}^{t+1} = \frac{\beta}{z^t} \mathbf{r}^t (1 - \gamma \mathbf{p}^t) \quad (1.2)$$

де α, β, γ — параметри, $z^t = 1 - \gamma(\mathbf{p}^t, \mathbf{r}^t)$ — нормувальний знаменник, що забезпечує стохастичність векторів $\mathbf{p}^{t+1}, \mathbf{r}^{t+1}$.

У 2003 році В. Д. Кошманенко запропонував найпростішу модель динамічної системи конфлікту, яка була представлена різницьовими рівняннями типу (1.2) при $\alpha, \beta, \gamma = 1$ (див. [6]). Ця модель описувала процес конфліктного перерозподілу абстрактного ресурсного простору між двома сторонами, що вступають в альтернативну взаємодію. Вона отримала назву — динамічна система конфлікту з взаємодією відштовхування. З часом під керівництвом В. Д. Кошманенка була розроблена значуща теорія динамічних систем конфлікту. Вона охоплює широкий спектр сучасних проблем, включаючи моделі конфліктних суспільств, виборчих процесів, формування думок, екологічних систем, міграційних процесів та перерозподілу ресурсів. Головним завданням цієї теорії є розробка математичних перетворень, які точно відображають конфліктну взаємодію, та виведення відповідних еволюційних рівнянь. Для

цього використовуються методи з теорії динамічних систем, функціонального аналізу, теорії міри, ймовірностей та фрактальної геометрії.

Динамічні системи конфлікту відіграють важливу роль у багатьох прикладних задачах, включаючи моделювання економічних, соціальних і екологічних процесів. Наприклад, в екології ці моделі застосовуються для прогнозування стабільності екосистем, зокрема взаємодії між видами, яка може бути періодичною через сезонність. У соціальних науках – для аналізу поведінки людей у групах, що взаємодіють у конфліктних умовах (наприклад, конкуренція за ресурси). В економіці – для прогнозування змін на ринках із конкуренцією та ресурсними обмеженнями. Це підкреслює важливість вивчення поведінки таких систем для розуміння їх стабільності та довгострокових властивостей.

Розглянемо фізичну систему, яка складається з двох (можна і декількох) протидіючих сторін, які позначимо через A та B і назвемо *опонентами*. Вважаємо, що опоненти існують на спільному ресурсному просторі Ω і незнищенні. Стани такої системи природно задавати випадковими розподілами у термінах ймовірнісних мір μ, ν визначених на деякій σ -алгебрі підмножин з простору Ω . Фіксований клас цих мір позначимо $\mathcal{M}(\Omega)$. Конфліктну взаємодію (композицію конфлікту) між опонентами A та B , як відображення (перетворення) в просторі пар мір з $\mathcal{M}(\Omega)$, позначаємо символом $*$. Це відображення задає еволюцію фізичної системи у вигляді траєкторій:

$$\left\{ \begin{array}{c} \mu^{t=0} \\ \nu^{t=0} \end{array} \right\} \xrightarrow{*,t} \left\{ \begin{array}{c} \mu^t \\ \nu^t \end{array} \right\}, \quad t \geq 0,$$

де $*, t$ позначає конфліктне перетворення на момент часу t . Динамічна система такого типу позначається як $\{\Omega, \mathcal{M}(\Omega), *\}$ і називається *динамічною системою конфлікту*. Звичайно, простір Ω , клас мір $\mathcal{M}(\Omega)$ та відображення $*$ треба визначати додатково у кожному конкретному випадку.

У ряді важливих випадків, які близькі до застосувань, припускається, що ресурсний простір Ω , на якому співіснують опоненти A та B , природним чином розкладено на скінчену кількість регіонів:

$$\Omega = \bigcup_{i=1}^n \Omega_i, \quad 2 \leq n < \infty.$$

Кожен окремий регіон Ω_i називається *позицією конфлікту*. Розподіл опонентів A, B на Ω зводиться до задання дискретних мір: $\mu(\Omega_i) = p_i$ та $\nu(\Omega_i) = r_i$. Числа p_i, r_i є координатами стохастичних векторів $\mathbf{p} = (p_1, p_2, \dots, p_n), \mathbf{r} = (r_1, r_2, \dots, r_n) \in \mathbb{R}_+^n$ ($\|\mathbf{p}\|_1 = \|\mathbf{r}\|_1 = 1$). Ці числа є ймовірностями присутності опонентів A, B в різних позиціях конфлікту.

Конфлікту взаємодію між опонентами A, B можна записати в термінах еволюції векторів $\mathbf{p}, \mathbf{r}$ під дією перетворення $\ast$ в прямому добутку просторів $\mathbb{R}_+^n$. Відзначимо, що у роботах [2, 7, 8] цей підхід узагальнено для трійки опонентів, а у роботі [9] для довільної скінченної кількості опонентів на Ω .

В роботах [1, 3] досліджувалися різні задачі, пов'язані з динамічними системами конфлікту у дискретному часі в термінах стохастичних векторів заданих траєкторіями:

$$\{\mathbf{p}^t, \mathbf{r}^t\} \xrightarrow{\ast, t} \{\mathbf{p}^{t+1}, \mathbf{r}^{t+1}\}, \quad t = 0, 1, 2, \dots,$$

де координати векторів $\mathbf{p}^{t+1}, \mathbf{r}^{t+1}$ визначалися системою різницевих рівнянь. Найпростіший варіант таких рівнянь має вигляд

$$p_i^{t+1} = \frac{1}{z^t} p_i^t (1 - \alpha r_i^t), \quad r_i^{t+1} = \frac{1}{z^t} r_i^t (1 - \alpha q_i^t), \quad -1 \leq \alpha \leq 1,$$

де $z = 1 - \alpha(\mathbf{p}, \mathbf{r})$ – нормувальний знаменник, $(\cdot, \cdot)$ – скалярний добуток в $\mathbb{R}^n$.

У подальших працях В.Д. Кошманенка і його учнів було одержано серію результатів, як теоретичного значення так і в побудові та дослідженні конкретних моделей з різним способом задання відображення $\ast$. Основна задача – це вивчення поведінки траєкторій системи при $t \rightarrow \infty$, встановлення існування і знаходження граничних асимптотичних станів, пошук атракторів та їхніх басейнів, доведення існування нерухомих точок (рівноважних станів) та існування циклічних орбіт.

2. ПОБУДОВА ДИНАМІЧНОЇ СИСТЕМИ КОНФЛІКТУ

Нехай $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n\}$, $n > 1$, є деякою скінченна множиною з дискретною топологією. Позначимо $\mathcal{M}_1^+(\Omega)$ як множину дискретних ймовірнісних мір на Ω . Нехай $\mu_i \in \mathcal{M}_1^+(\Omega)$, $i = 1, \dots, m$, $m \geq 2$ – довільна фіксована підмножина мір. Кожну міру μ_i можна зіставити зі стохастичним вектором $\mathbf{p}_i = (p_{ij})_{j=1}^n$, якщо визначити

$$p_{ij} = \mu_i(\omega_j), \quad i = 1, \dots, m, \quad j = 1, \dots, n.$$

Для побудови динамічної системи задамо відображення $\ast$ у просторі стохастичних векторів (перетворення конфлікту). Кожному вектору $\mathbf{p}_i = (p_{ij})_{j=1}^n$ поставимо у відповідність вектор $\mathbf{p}_i^1 = (p_{ij}^1)_{j=1}^n$ за правилом, визначеним у термінах координат

$$p_{ij}^1 = \frac{1}{z} (p_{ij}(\theta + 1) + \alpha \tau_j),$$

де $\theta = \theta(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \dots, \mathbf{p}_m)$ – довільна обмежена додатна функція, $\mathcal{T} = (\tau_j)_{j=1}^n$ – фіксований вектор з невід'ємними координатами, які залежать

від $\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_m$, а z – нормувальний знаменник, що забезпечує стохастичність вектора $\mathbf{p}_i^1$.

Ітерація цього відображення генерує багатокomпонентну динамічну систему з траєкторіями

$$\{\mathbf{p}_1^t, \mathbf{p}_2^t, \dots, \mathbf{p}_m^t\} \xrightarrow{*t} \{\mathbf{p}_1^{t+1}, \mathbf{p}_2^{t+1}, \dots, \mathbf{p}_m^{t+1}\}, \quad t = 0, 1, \dots, \quad (2.1)$$

де $\mathbf{p}_i^{t=0} = \mathbf{p}_i$, а координати кожного вектора $\mathbf{p}_i^t = (p_{ij}^t)_{j=1}^n$ змінюються відповідно до рівнянь

$$p_{ij}^{t+1} = \frac{1}{z^t} (p_{ij}^t (\theta^t + 1) + \alpha \tau_j^t), \quad t = 0, 1, \dots, \quad (2.2)$$

$$z^t = 1 + \theta^t + W^t, \quad W^t = \sum_{j=1}^n \tau_j^t > 0, \quad (2.3)$$

де $\theta^t = \theta(\mathbf{p}_1^t, \mathbf{p}_2^t, \dots, \mathbf{p}_m^t)$ – деяка обмежена додатна функція, яка визначає вільну еволюцію системи. Нормувальний знаменник z^t забезпечує стохастичність векторів $\mathbf{p}_i^{t+1}$. Набір додатних функцій τ_j^t (певним чином залежних від координат векторів $\mathbf{p}_i^t$) відповідає закону взаємодії. Значення цих функцій при кожному фіксованому t утворюють деякий нестохастичний вектор з невід’ємними координатами, який позначено символом $\mathcal{T}^t = (\tau_j^t)_{j=1}^n$ і називаємо вектором взаємодії. Вектор $\mathbf{w}^t = (w_j^t)_{j=1}^n$, де $w_j^t := \frac{\tau_j^t}{W^t}$, є стохастичним аналогом вектора $\mathcal{T}^t$. Далі буде досліджено ряд моделей динамічних систем конфлікту, траєкторії яких залежать від вигляду вектора $\mathcal{T}^t$, а також вивчено залежність поведінки системи від поведінки $\mathcal{T}^t$ при $t \rightarrow \infty$.

В рівняннях (2.2) стала α може набувати довільного значення, але при досить великих α швидкість збіжності (чи розбіжності) системи буде досить великою при малих значення часу t . Така динаміка не відповідає динаміці реальних процесів, тому при побудові моделі було вибрано значення сталої α з проміжку $[-1; 1]$. Згідно з наведеними рівняннями, у випадку $\alpha \in (0; 1]$ відстань між векторами $\mathbf{p}_i^t$ в l_1 -нормі збігається до нуля,

$$\|\mathbf{p}_i^t - \mathbf{p}_k^t\|_1 = \sum_{j=1}^n |p_{ij}^t - p_{kj}^t| \rightarrow 0, \quad i \neq k, \quad i, k = 1, \dots, m,$$

тому відображення $*$, задане цими рівняннями, описує взаємодію притягання. При $\alpha \in [-1; 0)$ будемо говорити про динамічну систему з взаємодією відштовхування. Зауважимо, що при $\alpha = 0$ початковий стан $\{\mathbf{p}_i^{t=0}\}_{i=1}^m$ є нерухомим.

3. ДОСЛІДЖЕННЯ ВЛАСТИВОСТЕЙ ТРАЄКТОРІЙ ДИНАМІЧНИХ СИСТЕМ КОНФЛІКТУ

Динамічні системи конфлікту можуть мати різні поведінкові сценарії залежно від вектора взаємодії, що визначає їхню динаміку та довготривалі стани. Комп'ютерне моделювання підтверджує, що зміна параметрів впливає на тип граничного стану – стабільний, циклічний або хаотичний, що розкриває можливості для розуміння розвитку конфліктних систем.

При певних умовах траєкторії системи конфлікту збігаються до нерухомих точок – граничних станів, у яких динаміка стабілізується. Для притягувальної взаємодії траєкторії системи зближаються до спільних позицій, тоді як відштовхувальна взаємодія може приводити до розподілу ресурсів між опонентами. Така поведінка продемонстрована на рис. 3.1 для відштовхування (рис. 3.1.2) та притягання (рис. 3.1.3)

Теорема 3.1 ([9,10]). *Якщо всі координати стохастичного вектора $\mathbf{w}^t$ є монотонними (зростають або спадають незалежно одна від одної) при $\alpha = (0; 1]$ або спадають при $\alpha = [-1; 0)$, то існує граничний вектор $\mathbf{w}^\infty$ і кожна траєкторія динамічної системи (2.1) з початковим станом $\{\mathbf{p}_i^{t=0}\}_{i=1}^m$ збігається до нерухомого граничного стану $\{\mathbf{p}_i^\infty\}_{i=1}^m$*

$$\mathbf{p}_i^\infty = \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{p}_i^t, \quad \forall i = 1, \dots, m.$$

При цьому, у випадку $\alpha = (0; 1]$ всі граничні вектори $\mathbf{p}_i^\infty$ мають однакові координати $p_{ij}^\infty = w_j^\infty$ для всіх $i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, n$, які співпадають з координатами вектора $\mathbf{w}^\infty$. У випадку $\alpha = [-1; 0)$, якщо $w_j^\infty < 0$ для всіх $j = 1, \dots, n$, то $p_{ij}^\infty = w_j^\infty$ для всіх $i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, n$.

Деякі системи досягають циклічних орбіт, коли координати вектора взаємодії є періодичними значеннями. У такому випадку траєкторії повторюються з постійною періодичністю, що формує циклічну динаміку. Цей факт демонструє наступна теорема.

Теорема 3.2 ([9,10]). *Нехай координати $\tau_j^t = \tau_j(t)$, $j = 1, \dots, n$, де $\tau_j(t)$ – довільні додатні періодичні функції з сумірними періодами. Припустимо, що головний період функцій $w_j(t)$ є додатнім цілим числом $T > 1$, а координати вектора $\mathbf{w}^t$ не є константами. Тоді кожна траєкторія динамічної системи (2.1), заданої системою різницевих рівнянь (2.2), збігається до ω -граничної множини $\mathbf{\Gamma}^\infty$, яка є циклічною*

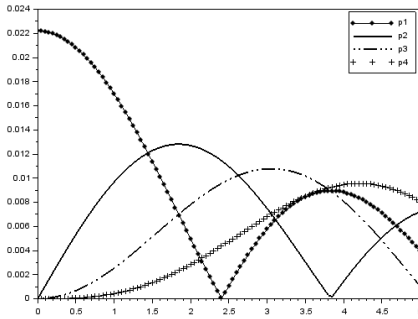
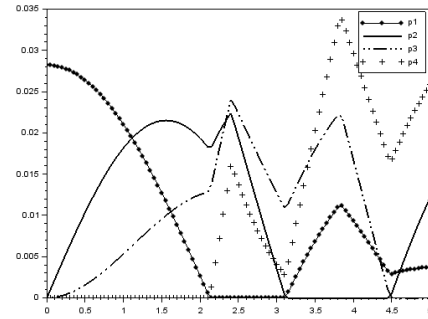
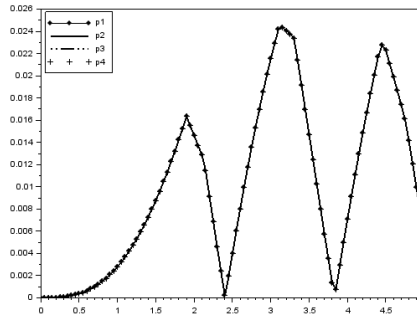
1) $\{\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3, \mathbf{p}_4\}, t = 0$ 2) $\{\mathbf{p}_1^\infty, \mathbf{p}_2^\infty, \mathbf{p}_3^\infty, \mathbf{p}_4^\infty\}, \alpha = -1$ 3) $\{\mathbf{p}_1^\infty, \mathbf{p}_2^\infty, \mathbf{p}_3^\infty, \mathbf{p}_4^\infty\}, \alpha = 1$

Рис. 3.1. $m = 4, n = 100$, 1) початковий стан $\{\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3, \mathbf{p}_4\}$ заданий модулем функції Бесселя першого роду, тобто $f_i(x) = |J_\beta(x)|$, де $J_\beta(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m! \Gamma(m+\beta+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2m+\beta}$ для $\beta = 0, 1, 2, 3, x \in [0; 6]$, а координати векторів $\mathbf{p}_i^{t=0}$ задано за допомогою значень функцій $f_i(x)$ на відрізку $[0, 6]$ згідно формули $p_{ik} = \frac{f_i(x_k)}{D}$, де $D = \sum_{k=1}^n f_i(x_k)$, а x_k належить розбиттю відрізка $[0, 6]$; 2)–3) граничні стани $\{\mathbf{p}_1^\infty, \mathbf{p}_2^\infty, \mathbf{p}_3^\infty, \mathbf{p}_4^\infty\}$ з τ_j^t визначеним як мінімальне значення j -тих координат векторів $\mathbf{p}_i^t$, тобто $\tau_j^t = \min_i \{p_{ij}^t\}$.

орбітою. Тобто, множина Γ^∞ є інваріантною відносно перетворення $*$ та складається з T впорядкованих векторів Γ_l , $l = 1, \dots, T$

$$\Gamma_1 \xrightarrow{*} \Gamma_2 \xrightarrow{*} \Gamma_3 \xrightarrow{*} \dots \xrightarrow{*} \Gamma_T \xrightarrow{*} \Gamma_1.$$

Гранична множина Γ^∞ залежить від початкового вектора $\mathbf{w}^{t=0}$.

Теорема 3.3. Нехай координати $\tau_j^t = \tau_j(t)$, $j = 1, \dots, n$, де $\tau_j(t)$ – довільні додатні періодичні функції з несумірними періодами. Припустимо, що координати вектора $\mathbf{w}^t$ не є константами. Тоді кожна траєкторія динамічної системи (2.1), заданої системою різницьових рівнянь (2.2) є квазіперіодичною при $t \rightarrow \infty$. Типові (або, як правило) траєкторії на границі заповнюють деяку компактну множину.

Розглянемо систему (2.1), задану рівняннями: $\mathbf{p}^{t+1} = f(\mathbf{p}^t, \tau^t)$, де $\tau^t = (\tau_1^t, \tau_2^t, \dots, \tau_n^t)$ – набір параметрів, які залежать від часу t , і кожна $\tau_j(t)$ є періодичною функцією з несумірними періодами. Функція f є неперервною і обмеженою, тому траєкторії $\mathbf{p}^t$ залишаються в обмеженій області фазового простору, тобто траєкторії належать деякій компактній множині.

Несумірність періодів функцій $\tau_j(t)$ означає, що для будь-якого набору цілих чисел $k_1, k_2, \dots, k_n$ рівність $k_1 T_1 + k_2 T_2 + \dots + k_n T_n = 0$ виконується лише для тривіального випадку $k_1 = k_2 = \dots = k_n = 0$. Таким чином, функції $\tau_j(t)$ ніколи не синхронізуються, і значення τ^t не повторюються періодично. Це виключає можливість періодичної поведінки траєкторій. Несумірність періодів $\tau_j(t)$ призводить до того, що траєкторії рівномірно заповнюють деяку компактну множину в фазовому просторі. Це відбувається завдяки властивості квазіперіодичних функцій, які рівномірно покривають тороподібну поверхню. Таким чином, траєкторії системи демонструють квазіперіодичну поведінку.

Траєкторії системи залежать від початкового стану $\mathbf{w}^{t=0}$, який визначає фазу функцій $\tau_j(t)$ та початкові координати $\mathbf{p}^0$. Тому для різних початкових умов траєкторії можуть покривати різні частини компактної множини, проте всі вони залишаються квазіперіодичними.

Таким чином, типові траєкторії системи є квазіперіодичними і заповнюють деяку компактну множину в фазовому просторі.

Розглянемо конкретний приклад для випадку $n = 3$, $m = 3$. Нехай початковий стан задано наступними векторами: $\mathbf{p}_1^{t=0} = (0.08; 0.02; 0.9)$, $\mathbf{p}_2^{t=0} = (0.1; 0.55; 0.35)$, $\mathbf{p}_3^{t=0} = (0.8; 0.15; 0.05)$. На Рис. 3.2, 3.3 за умови сумірності періодів функцій $\tau_j(t)$, система демонструє цикл із фіксованим періодом T . Цей період залежить від основного періоду функцій τ_j^t і описується набором впорядкованих векторів $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_T$. Траєкторії системи підтверджують циклічність і стабільність у фазовому просторі

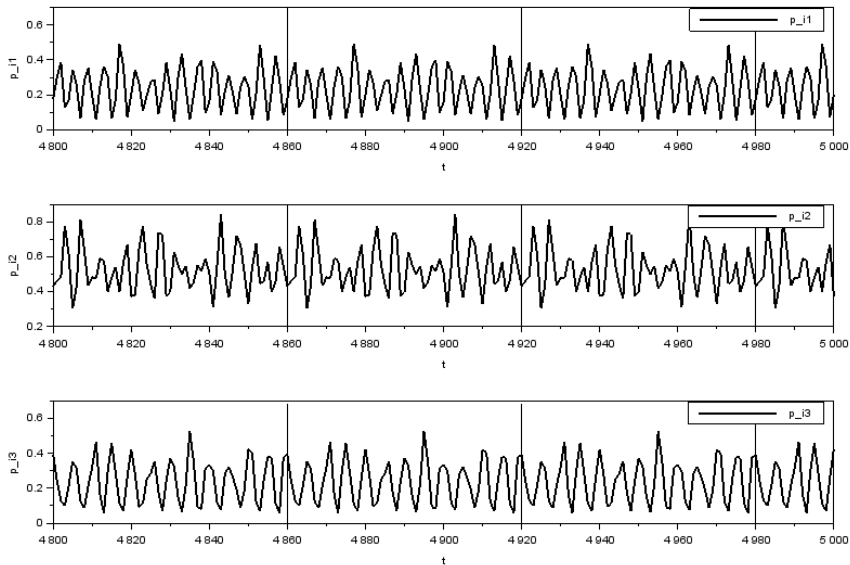


Рис. 3.2. Зміна координат векторів $\mathbf{p}_i^t$ при $\tau_1(t) = \sin(\frac{\pi t}{2}) + 1$, $\tau_2(t) = \sin(\frac{2\pi t}{3}) + 2$, $\tau_3(t) = \cos(\frac{2\pi t}{5}) + 1$, де $T = 60$ – головний період координат вектора $\mathbf{w}^t$.

відповідно до теореми 3.3. На Рис. 3.4, 3.5 зображена динаміка з використанням функцій τ_j^t із несумірними періодами. Несумірність періодів функцій τ_j^t призводить до квазіперіодичної поведінки. Система не збігається до циклічної орбіти, але її траєкторії заповнюють компакту множину в фазовому просторі. Квазіперіодичність траєкторій підтверджується тим, що система заповнює тороподібну компакту множину, зберігаючи квазіперіодичну динаміку.

Цікавою для розгляду є динамічна система конфлікту, де лише одна з координат вектора взаємодії $\tau_j^t = \tau_j(t)$ є періодичною функцією з періодом $T > 1$. Такий вибір параметра τ_j^t може суттєво впливати на поведінку системи. Виходячи з цього, можливі наступні сценарії динаміки:

1. *Періодична стабільність.* Якщо інші параметри системи не змінюються хаотично і є стабільними або поступово адаптуються до циклічного впливу τ_j^t , система може збігатися до періодичної орбіти з тим самим періодом T . Для такої стабільності необхідно, щоб амплітуди коливань τ_j^t та інші параметри не приводили до суттєвих збурень. Це часто можливо у випадках, коли система має сильні стабілізуючі механізми (наприклад, притягувальну взаємодію або згладжування коливань). У

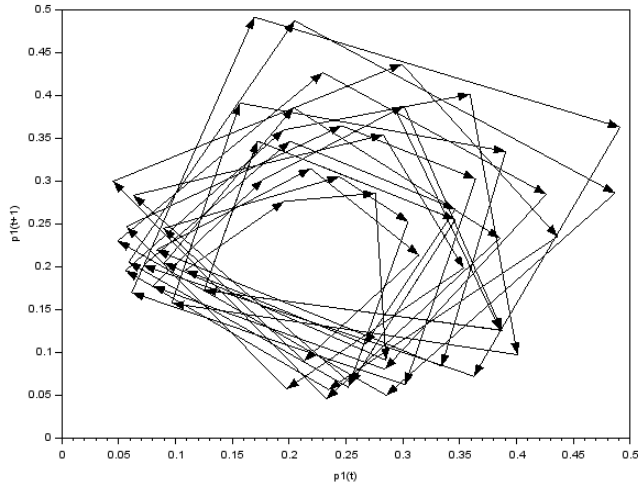


Рис. 3.3. Фазовий портрет системи у просторі відображень (p_1^t, p_1^{t+1}) , побудований при $\tau_1(t) = \sin(\frac{\pi t}{2}) + 1$, $\tau_2(t) = \sin(\frac{2\pi t}{3}) + 2$, $\tau_3(t) = \cos(\frac{2\pi t}{5}) + 1$, $T = 60$.

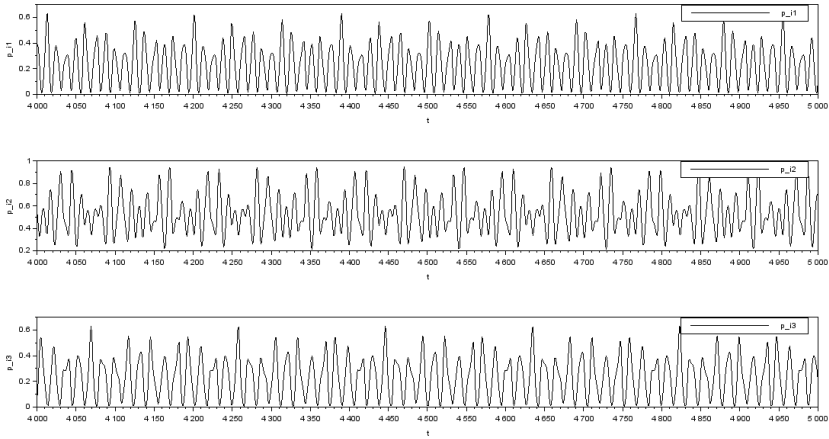


Рис. 3.4. Зміна координат векторів $\mathbf{p}_i^t$ при $\tau_1(t) = \sin(\frac{\pi t}{2}) + 1$, $\tau_2(t) = \sin(\frac{2\pi t}{3}) + 2$, $\tau_3(t) = \cos(\frac{2\pi t}{5}) + 1$, де $T = 60\pi$ – головний період координат вектора $\mathbf{w}^t$.

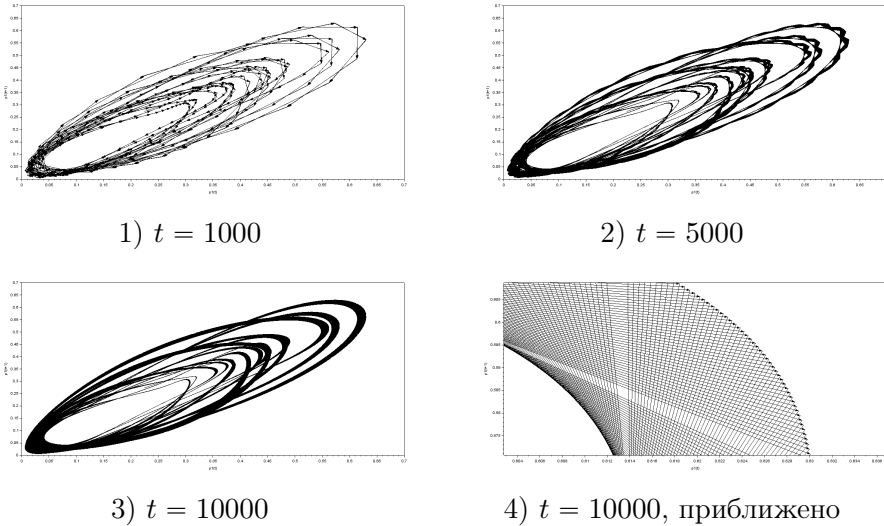


Рис. 3.5. Фазовий портрет системи у просторі відображень (p_1^t, p_1^{t+1}) , побудований при $\tau_1(t) = \sin(\frac{t}{2}) + 1$, $\tau_2(t) = \sin(\frac{2t}{3}) + 2$, $\tau_3(t) = \cos(\frac{2t}{5}) + 1$, $T = 60\pi$. Як видно на рисунках, для несумірних траєкторії заповнюють тороподібну структуру.

результаті система демонструє передбачувану динаміку, що повторюється через кожні T кроків.

2. *Квазірегулярна динаміка.* У разі, якщо інші компоненти вектора взаємодії або параметри системи мають свої внутрішні періоди, але не синхронізуються з τ_j^t , може виникнути квазірегулярна поведінка. Це явище спостерігається за наявності декількох взаємодіючих періодичних процесів із близькими, але несумірними періодами. Система може демонструвати складні ритми, з появою повторюваних візерунків або переходів між різними фазами, але без чіткої циклічності.

3. *Хаотична динаміка.* Якщо τ_j^t вступає у взаємодію з іншими компонентами системи, що демонструють нестабільність або високу чутливість до збурень, система може перейти до хаотичної поведінки. Хаотична динаміка можлива за наявності нелінійної взаємодії, коли навіть невеликі зміни у τ_j^t здатні спричинити значні зміни в траєкторіях системи. Система може виявляти хаотичну поведінку, коли одна з координат вектора взаємодії підпорядкована хаотичності, наприклад логістичному закону. Це призводить до чутливості траєкторій до початкових умов і може зумовлювати непередбачувані коливання. Важливою умовою є

також відсутність механізмів, які стабілізують поведінку. Система стає чутливою до початкових умов, і навіть малі зміни на вході можуть призводити до суттєво різних траєкторій. Така поведінка ускладнює прогнозування і може мати значні наслідки у реальних прикладних сценаріях.

4. *Комбінована динаміка* У деяких випадках система може демонструвати перехід від періодичної стабільності до хаотичної динаміки або поєднання періодичної та хаотичної поведінки у різних фазах. Це можливо при наявності різних впливів або змінах параметрів τ_j^t у процесі еволюції системи. Така динаміка є нестабільною або складною для моделювання та контролю.

4. Висновки

Вивчення динамічних систем конфлікту показало, що їх траєкторії можуть демонструвати широкий спектр поведінкових сценаріїв, від стабільності до хаотичності, залежно від параметрів взаємодії та початкових умов. Зокрема, результати досліджень підтвердили можливість існування нерухомих точок, циклічних орбіт та квазіперіодичної поведінки, що є важливими для аналізу реальних соціально-економічних та екологічних процесів.

Для систем із притягальною взаємодією характерна конвергенція траєкторій до спільних граничних станів, тоді як відштовхувальна взаємодія призводить до розподілу ресурсів між опонентами. Динаміка систем з періодичними параметрами може досягати стабільних циклічних орбіт. Це підтверджено моделями, що враховують періодичність вектора взаємодії. У разі несумірних періодів параметрів система може демонструвати квазіперіодичну поведінку або переходити до хаотичної динаміки, що особливо актуально для аналізу складних соціальних і екологічних систем. Таким чином, запропоновані моделі дозволяють описувати складну поведінку конфліктних систем та є основою для подальших досліджень, спрямованих на розробку ефективних стратегій управління конфліктами.

Порівняння з дослідженнями [4, 5] показало схожість у використанні нелінійних моделей, мультифакторного аналізу та принципів стабільності й нестабільності систем. В роботі [4] підкреслено важливість мультиплексних взаємодій, таких як політичні й культурні, що відповідає концепції розподілу ресурсів у даній роботі. В [5] досліджено роль затримок і просторової нелокальності, які також можуть бути адаптовані до розглянутих вище моделей динамічних систем конфлікту. Розглянуті властивості моделей динамічних систем підтверджують їх універсальність для аналізу складних соціальних, екологічних і економічних

процесів. Це дозволяє зробити висновок, що розглянуті в цій роботі моделі є ефективним інструментом для дослідження реальних конфліктних систем і можуть бути розширені з урахуванням більш складних факторів і структур.

ЛІТЕРАТУРА

- [1] М. В. Боднарчук, В. Д. Кошманенко, Н. В. Харченко. Властивості граничних станів динамічної системи конфлікту. *Нелінійні коливання*, 7(4):446–461, 2004.
- [2] О. Р. Сатур. Динамічна система конфлікту з притяганням для трійки взаємодіючих сторін. *Наукові записки НаУКМА. Фізико-математичні науки*, 201:34–37, 2017.
- [3] S. Albeverio, M. Bodnarchyk, V. Koshmanenko. Dynamics of discrete conflict interactions between non-annihilating opponents. *Methods of Functional Analysis and Topology*, 11(4):309–319, 2005.
- [4] Gerardo Aquino, Weisi Guo, Alan Wilson. Nonlinear dynamic models of conflict via multiplexed interaction networks. 09 2019. doi:10.48550/arXiv.1909.12457.
- [5] A. Bayliss, A. Nepomnyashchy, V. Volpert. Mathematical modeling of cyclic population dynamics. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 394, 02 2019. doi:10.1016/j.physd.2019.01.010.
- [6] V. D. Koshmanenko. *Spectral Theory for Conflict Dynamical Systems*. Naukova Dumka, Kyiv, 2016.
- [7] V. D. Koshmanenko, I. V. Samoilenko. A dynamical system model for a conflict triad. *Nonlinear Oscillations*, 14(1):55–75, 2011. doi:10.1007/s11072-011-0141-5.
- [8] K. M. M. Salam, K. I. Takahashi. Mathematical model of conflict and cooperation with non-annihilating multi-opponent. pages 299–306, 2010. doi:10.1007/978-3-540-85081-6_38.
- [9] O. R. Satur. Limit states of multicomponent discrete dynamical systems. *Journal of Mathematical Sciences*, 256:648–662, 2021. doi:10.1007/s10958-021-05451-x.
- [10] O. R. Satur. Dependence of the behaviors of trajectories of dynamic conflict systems on the interaction vector. *Journal of Mathematical Sciences*, 274:76–93, 2023. doi:10.1007/s10958-023-06572-1.

О. Р. Сатур

ІНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ НАН УКРАЇНИ, м. Київ

Email: orlassat@gmail.com

ORCID: 0000-0001-6318-2145

Алгебраїчна структура фундаментальної групи орбіт гладких функцій на 2-торі

Б. Г. Фещенко

Abstract. This review paper is devoted to the description of the algebraic structure of the fundamental group of orbits of functions with isolated singularities on 2-torus with respect to the action of the group of diffeomorphisms of the 2-torus.

Анотація. Дана оглядова стаття присвячена опису алгебраїчної структури фундаментальної групи орбіт функцій з ізольованими особливостями на 2-торі відносно дії групи дифеоморфізмів 2-тора.

Вступ

Групи автоморфізмів математичних об'єктів досліджуються давно. Наприклад, А. Келі встановив, що довільна скінченна група порядку n є підгрупою групи перестановок з n елементів [3] (цей результат був узагальнений на топологічні групи [22]), а К. Жордан описав структуру групи автоморфізмів скінченних дерев [10].

Дослідження груп “автоморфізмів” і, більш загально, просторів відображень між многовидами є основною задачею геометричної топології. Лише у деяких частинних випадках вдається описати структуру таких просторів. Наприклад, для випадку компактних поверхонь відомий гомотопічний тип групи гомеоморфізмі (дифеоморфізмів) ізотопних тождному відображенню, див §3.1. Ці результати дали можливість вивчати групи класів відображень поверхонь (MCG) – певний аналог групи “автоморфізмів” поверхні, а також знайшли численні застосування у топології многовидів малої розмірності та теорії динамічних систем, див. детальний огляд у [1, Розділ 4].

Систематичне вивчення гомотопічних властивостей стабілізаторів та орбіт гладких функцій з ізольованими особливостями на компактних поверхнях відносно дії груп дифеоморфізмів було започатковано у роботі С. І. Максименка [11]. Ним було встановлено, що зв'язна компонента

2020 Mathematics Subject Classification: 55Q05, 57K20, 57M05

Ключові слова: Фундаментальна група, гомотопічний тип, орбіта, стабілізатор

DOI: <https://doi.org/10.3842/trim.v21n1.550>

тотожного відображення стабілізатору є або стягуваною або гомотопічно еквівалентною колу. Також він описав гомотопічний тип і алгебраїчну структуру фундаментальної групи орбіт таких функцій для майже всіх компактних поверхонь, див [11]. У нашому спільному циклі робіт ми описали алгебраїчну структуру фундаментальної групи орбіт таких функцій на 2-торі [16–18], а у подальших статтях ці результати були узагальнені на випадок відображень тора у коло [2, 6–8]. Огляду результатів цього циклу “про 2-тор” присвячена дана стаття. Зацікавленому читачу ми радимо ознайомитись з роботою [15], а також з загальним оглядом отриманих результатів С. Максименка та його учнів [14].

Структура роботи. Текст складається з 5 розділів. У розділі 1 ми приводимо загальні відомості про функції Морса та граfi гладких функцій. Розділ 2 містить означення класу функцій який буде досліджуватись. Розділ 3 присвячений орбітам і стабілізаторам гладких функцій на поверхнях, їх гомотопічним властивостям, а також автоморфізмам графів гладких функцій, що індуковані дифеоморфізмами поверхонь, які зберігають задану функцію. У розділі 4 ми наводимо означення вінцеvих добутоків груп з циклічними групами, а у останньому, розділі 5, ми формулюємо результати про алгебраїчну структуру фундаментальної групи орбіт гладких функцій на 2-торі.

1. ЗАГАЛЬНІ ВІДОМОСТІ

1.1. Функції Морса. У цьому параграфі ми наведено стандартні відомості про функції Морса, див. наприклад [21]. Нехай M – гладкий многовид розмірності n і $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ – гладка функція на M . Точка $p \in M$ називається *критичною точкою* f , якщо диференціал $d_p f : T_p M \rightarrow \mathbb{R}$ зануляється в p . В іншому випадку p називають *регулярною*. Значення $f(p)$ називається *критичним*, якщо p – критична точка, інакше – *регулярним*.

Нехай $(U, x_1, \dots, x_n)$ – карта навколо p . Якщо p – критична точка, тоді $\frac{\partial f}{\partial x_i} \Big|_p = 0$ для всіх $i = 1, \dots, n$. Матриця Гессе $H_p(f)$ функції f в критичній точці p – це квадратна матриця складена з других частинних похідних функції f в p у карті U :

$$H_p(f) = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \Big|_p \right)_{i,j=1}^n.$$

Критична точка $p \in M$ функції f називається *невиродженою*, якщо матриця $H_p(f)$ є невивродженою.

Теорема 1.1 (Лема Морса). *Нехай p – невироджена критична точка функції $f : M \rightarrow \mathbb{R}$. Тоді існує карта $(U, x_1, \dots, x_n)$ навколо p , що*

$$f(x_1, \dots, x_n) = f(p) - x_1^2 - \dots - x_\lambda^2 + x_{\lambda+1}^2 + \dots + x_n^2. \quad (1.1)$$

Число λ від'ємних членів у (1.1) називається *індексом критичної точки* p .

Гладка функція усі критичні точки якої є невиродженими називається *функцією Морса*. Простір усіх функцій Морса на M позначимо через $\mathcal{M}(M, \mathbb{R})$. Відомо, що $\mathcal{M}(M, \mathbb{R})$ є відкритим і щільним підпростором у $C^\infty(M, \mathbb{R})$.

Також відомо, що функція Морса f на гладкому компактному многовиді M задає його клітинне розбиття (структуру CW комплексу) – по одній n -клітині, що відповідає критичній точці індексу n . Це дає змогу довести нерівності Морса, які дають оцінку на числа Бетті многовиду M . Якщо M є компактною поверхнею, то ці нерівності приймають такий вигляд

Теорема 1.2 (Рівності Морса). *Нехай M – компактна поверхня і f – функція Морса на M . Тоді мають місце рівності Морса:*

$$\chi(M) = c_0(f) - c_1(f) + c_2(f),$$

де $c_0(f)$, $c_1(f)$ та $c_2(f)$ – числа мінімумів, сідел та максимумів функції f .

Зауважимо, що Е. Witten [25] у 1982 розробив аналітичний підхід до нерівностей Морса досліджуючи комплекс де Рама деякого диференціального оператора.

1.2. Граф Γ_f функції. Нехай X – топологічний простір, $P \in$ або $\mathbb{R}$ або S^1 , і $f : X \rightarrow P$ – неперервна функція. Визначимо на X відношення еквівалентності $\sim$ за такі правилом: точки x і y з X є еквівалентними ($x \sim y$) тоді і лише тоді, коли вони належать до однієї зв'язної компоненти прообразу $f^{-1}(c)$ для деякого $c \in P$. Нехай $\Gamma_f = X/\sim$ – факторпростір X по цьому відношенню еквівалентності $\sim$ наділений фактортопологією. Простір Γ_f називають *простором Кронрода-Ріба функції f* . Зауважимо, що f розкладається у таку композицію:

$$f = \hat{f} \circ p_f : X \xrightarrow{p_f} \Gamma_f \xrightarrow{\hat{f}} P, \quad (1.2)$$

де $p_f : X \rightarrow \Gamma_f$ – канонічна проекція, а $\hat{f} : \Gamma_f \rightarrow P$ – функція індукована f .

Якщо X – компактний гладкий многовид і $f : X \rightarrow P$ – гладка функція з ізольованими особливостями, то Γ_f має структуру 1-вимірного

клітинного (CW) комплексу (топологічного графу), див. [23]. Для простоти ми будемо називати Γ_f *графом функції* f .

Зазвичай граф функції не є повним топологічним інваріантом, але він є корисним інструментом для вивчення властивостей функцій.

2. Клас $\mathcal{F}$

У цьому розділі ми наведемо означення класу функцій з яким ми будемо мати справу, див §2.2. Перед цим ми нагадаємо деякі властивості однорідних многочленів.

2.1. Однорідні многочлени на площині. Нехай $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ – дійсний однорідний многочлен. Відомо, що f розкладається над $\mathbb{R}$ у добуток скінченного числа лінійних $L_i = a_i x + b_i y$ і незвідних над $\mathbb{R}$ квадратичних множників $Q_i(x, y) = c_j x^2 + 2d_j xy + e_j y^2$, тобто

$$f(x, y) = \prod_{i=1}^p L_i(x, y) \cdot \prod_{j=1}^q Q_j(x, y). \quad (2.1)$$

Точка $0 \in \mathbb{R}^2$ є єдиною критичною точкою (2.1) тоді і тільки тоді, коли $\deg f \geq 2$ і f не має кратних множників. Для такого многочлену $0 \in \mathbb{R}^2$ буде називатись

- *екстремумом* якщо $f = Q_1$ (невироджений), або $f = Q_1 Q_2 \dots Q_q$ (вироджений),
- *сідлом* якщо $f = L_1 Q_1 Q_2 \dots Q_q$ (квазі-сідло), або $f = L_1 L_2$ (невироджене або 2-сідло), або якщо $\deg f = p + 2q \geq 3$ для $p \geq 2$ то узагальнений сідлом (p -сідлом).

2.2. Клас $\mathcal{F}$. Нехай M – гладка і компактна поверхня. Позначимо через P дійсну пряму $\mathbb{R}$ або коло S^1 . Функція $f : M \rightarrow P$ належить до класу $\mathcal{F}(M, P)$ якщо виконані такі умови:

- (1) f є локально-постійною на ∂M ,
- (2) множина критичних точок Σ_f функції f належить до $\text{Int}(M)$,
- (3) для критичної точки $z \in \Sigma_f$ функції f існують така карта $(U, \phi : U \rightarrow \mathbb{R}^2)$ навколо z з $\phi(z) = 0$ і карта $(V, \psi : V \rightarrow \mathbb{R})$ навколо $f(z)$, що $f(U) \subset V$ і локальне зображення $f_z = \psi \circ f \circ \phi^{-1} : \phi(U) \rightarrow \psi(V)$ функції f є однорідним поліномом без кратних множників.

Легко побачити, що клас функцій Морса $\mathcal{M}_\partial(M, P)$, які задовольняють (1) міститься у $\mathcal{F}(M, P)$.

Відомо, якщо функція f має лише ізольовані особливості, тоді локальна топологічна структура множин рівня навколо будь-якої її критичної точки може бути реалізована множинами рівня однорідного поліному без кратних множників, див. [14, Розділ 3.4]. Це показує, що клас $\mathcal{F}(M, P)$ містить гладкі функції з “типовими” особливостями.

Зауважимо, що для функцій з класу $\mathcal{F}(M, P)$ мають місце рівності Морса, див. теорему 1.2.

3. ОРБИТИ І СТАБІЛІЗАТОРИ ГЛАДКИХ ФУНКЦІЙ

Нехай M – гладка і компактна поверхня (можливо з межею ∂M) і X – підмножина M (можливо порожня). Група дифеоморфізмів $\mathcal{D}(M, X)$ нерухомих на X діє справа на на просторі гладких P -значних функцій $C^\infty(M, P)$ за таким правилом:

$$\gamma : C^\infty(M, P) \times \mathcal{D}(M, X) \rightarrow C^\infty(M, P), \quad \gamma(f, h) = f \circ h. \quad (3.1)$$

Для гладкої функції $f \in C^\infty(M, P)$ визначимо

$$\begin{aligned} \mathcal{S}(f, X) &= \{h \in \mathcal{D}(M, X) \mid f \circ h = f\}, \\ \mathcal{O}(f, X) &= \{f \circ h \in C^\infty(M, P) \mid h \in \mathcal{D}(M, X)\} \end{aligned}$$

стабілізатор і орбіту f . Наділимо простори $\mathcal{D}(M, X)$ та $C^\infty(M, P)$ сильними C^∞ -топологіями Уїтні. Ці топології індукують деякі топології на $\mathcal{S}(f, X)$ and $\mathcal{O}(f, X)$.

Нехай $\mathcal{S}_{\text{id}}(f, X)$ і $\mathcal{D}_{\text{id}}(M, X)$ – зв’язні компоненти тотожного відображення у $\mathcal{S}(f, X)$ та $\mathcal{D}(M, X)$ відповідно, а також позначимо через $\mathcal{O}_f(f, X)$ зв’язну компоненту орбіти $\mathcal{O}(f, X)$, що містить f і покладемо

$$\mathcal{S}'(f, X) = \mathcal{S}(f, X) \cap \mathcal{D}_{\text{id}}(f, X).$$

Якщо $X = \emptyset$, ми не будемо вживати символ “ $\emptyset$ ” у наших позначеннях, наприклад, ми будемо писати $\mathcal{D}(M)$ замість $\mathcal{D}(M, \emptyset)$ і $\mathcal{S}(f)$ замість $\mathcal{S}(f, \emptyset)$, і так далі.

3.1. Гомотопічний тип $\mathcal{D}_{\text{id}}(M, X)$. Нехай M – компактна поверхня і $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\} \subset \text{Int}(M)$ – підмножина M , що складається з різних точок. Ми позначимо через $\mathcal{D}_{\text{id}}(M, n)$ групу $\mathcal{D}_{\text{id}}(M, X)$. Якщо $X = \emptyset$ ми будемо писати $\mathcal{D}_{\text{id}}(M)$ замість $\mathcal{D}_{\text{id}}(M, 0)$.

Гомотопічний тип групи $\mathcal{D}_{\text{id}}(M, n)$ вивчали С. J. Earle and J. Eells [4], С. J. Earle, A. Schatz [5], а також А. Gramain [9]. Наступна теорема описує отримані ними результати.

Теорема 3.1. *Нехай M – зв’язна і компактна поверхня.*

- (1) Нехай M_b – поверхня, отримана з M стягуванням b зв’язних компонент межі ∂M . Тоді $\mathcal{D}_{\text{id}}(M_b, n + b)$ гомотопічно еквівалентна до $\mathcal{D}_{\text{id}}(M, n)$. Тобто кожен “прокол” можна замінити на “дірку”.
- (2) Група $\mathcal{D}_{\text{id}}(M)$ є гомотопічно еквівалентною до
- $\text{SO}(3)$, якщо $M = S^2$ або $\mathbb{R}P^2$,
 - S^1 , якщо $M = D^2$, $S^1 \times [0, 1]$, або стрічка Мебіуса, або пляшка Клейна,
 - T^2 , якщо $M = T^2$,
 - точці, в інших випадках.

Результат (1) дає можливість проводити обчислення гомотопічного типу $\mathcal{D}_{\text{id}}(M, n)$, зводячи задачу до випадків описаних у (2). Наприклад,

$$\mathcal{D}_{\text{id}}(T^2, 1) \sim \mathcal{D}_{\text{id}}(\overline{T^2 \setminus D^2}, 0) \sim \text{pt},$$

$$\mathcal{D}_{\text{id}}(S^2, 2) \sim \mathcal{D}_{\text{id}}(D^2, 1) \sim \mathcal{D}_{\text{id}}(S^1 \times [0, 1], 0) = \mathcal{D}_{\text{id}}(S^1 \times [0, 1]) \sim S^1.$$

Узагальнюючи, маємо таке твердження: якщо $\chi(M) \leq |X|$, де $|X|$ – потужність X , то $\mathcal{D}_{\text{id}}(M, X)$ є стягуваною.

3.2. Гомотопічний тип $\mathcal{S}_{\text{id}}(f)$. Наступна теорема описує гомотопічний тип $\mathcal{S}_{\text{id}}(f)$ для функцій з класу $\mathcal{F}(M, P)$.

Теорема 3.2 ([11, Theorem 1.3], [12, Theorem 3.5]). Нехай f – функція з класу $\mathcal{F}(M, P)$. Тоді $\mathcal{S}_{\text{id}}(f)$ є стягуваним якщо або M є неорієнтованою, або f має вироджений екстремум, або f має щонайменше одне сідло. В інших випадках $\mathcal{S}_{\text{id}}(f)$ є гомотопічно еквівалентною до S^1 .

3.3. Розшарування Серра і гомотопічні властивості орбіт. Для того, щоб встановити гомотопічні “зв’язки” між властивостями орбіт та стабілізаторів гладких функцій ми нагадаємо означення розшарування Серра, див. [19, Chapter 7].

Нехай $p : E \rightarrow B$ – відображення між топологічними просторами E та B . Кажуть, що відображення p задовольняє умову *підняття гомотопії* (homotopy lifting property або HLP) для простору X якщо виконані такі умови: для довільної гомотопії $h : X \times I \rightarrow B$ з $h|_{X \times \{0\}} = h_0$ і такого довільного відображення $\tilde{h}_0 : X \rightarrow E$, що “піднімає” h_0 , тобто $h_0 = p \circ \tilde{h}_0$ існує гомотопія $\tilde{h} : X \times I \rightarrow E$, яка є підняттям гомотопії h , тобто, $h_t = p \circ \tilde{h}_t$ з $\tilde{h}_0 = \tilde{h}|_{X \times \{0\}}$:

$$\begin{array}{ccc} X \times \{0\} & \xrightarrow{\tilde{h}_0} & E \\ \downarrow \iota & \nearrow \tilde{h} & \downarrow p \\ X \times I & \xrightarrow{h} & B \end{array}$$

де $\iota : X \times \{0\} \rightarrow X \times I$ – вкладення $\iota(x, 0) = (x, 0)$.

Відображення $p : E \rightarrow B$ називається *розширенням Серра*, якщо воно задовольняє HLP для усіх клітинних (CW) комплексів. Для розширення Серра p існує довга точна послідовність гомотопічних груп, див. [19, Chapter 9], тобто, для $b \in B$ і $x \in F = p^{-1}(b)$ наступна послідовність груп є точною:

$$\begin{aligned} \dots \longrightarrow \pi_n(F, x) \xrightarrow{i_n^*} \pi_n(E, x) \xrightarrow{p_n^*} \pi_n(B, b) \xrightarrow{\partial_n} \pi_{n-1}(F, x) \longrightarrow \dots \\ \dots \xrightarrow{p_1^*} \pi_0(B, b) \longrightarrow 0. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Відмітимо, що для довільних просторів E , B та F множини $\pi_0(E, x)$, $\pi_0(B, b)$ та $\pi_0(F, x)$ не є групами, але точність такої послідовності у кожному такому члені її “хвоста” розуміється у стандартному сенсі – рівність ядра і образу послідовних відображень. Відомо, якщо E , B та F є топологічними групами, то $\pi_0 E$, $\pi_0 B$ і $\pi_0 F$ є групами.

Повертаючись до питання про стабілізатори і орбіти ми приведемо основний факт, який пов’язує їх гомотопічні властивості.

Теорема 3.3 ([11–13, 24]). *Нехай f – функція з класу $\mathcal{F}(M, P)$ на гладкій компактній поверхні M і X – замкнена (можливо пуста) підмножина M , що складається з скінченного числа зв’язних компонент деяких множин рівня і деякого числа критичних точок f . Тоді відображення*

$$p : \mathcal{D}(M, X) \rightarrow \mathcal{O}(f, X)$$

визначене формулою $p(h) = f \circ h$ є розширенням Серра з шаром $\mathcal{S}(f, X)$.

Тоді $p(\mathcal{D}_{\text{id}}(M)) = \mathcal{O}_f(f)$, і обмеження $p|_{\mathcal{D}_{\text{id}}(M)} : \mathcal{D}_{\text{id}}(M) \rightarrow \mathcal{O}_f(f, X)$ є також розширенням Серра з шаром $\mathcal{S}'(f, X) = \mathcal{S}(f) \cap \mathcal{D}_{\text{id}}(M, X)$.

Теорема 3.4 ([11–13]). *Нехай $f : M \rightarrow P$ – функція з класу $\mathcal{F}(M, P)$ і X – підмножина така як в теоремі 3.3. Тоді*

(1) $\mathcal{O}_f(f, X) = \mathcal{O}_f(f, X \cup \partial M)$ і, як наслідок,

$$\pi_k(\mathcal{O}_f(f, X)) = \pi_k(\mathcal{O}_f(f, X \cup \partial M))$$

для усіх $k \geq 1$.

(2) *Припустимо, що f має або сідлову точку, або вироджене сідло, або M є неорієнтованою поверхнею. Тоді оскільки $\mathcal{S}_{\text{id}}(f)$ є стягуваним, то $\pi_k \mathcal{O}_f(f) = \pi_k M$, $k \geq 3$, $\pi_2 \mathcal{O}_f(f) = 0$, а для $\pi_1 \mathcal{O}_f(f)$ маємо*

коротку точну послідовність:

$$\pi_1 \mathcal{D}_{\text{id}}(M) \xrightarrow{p_1} \pi_1 \mathcal{O}_f(f) \xrightarrow{\partial_1} \pi_0 \mathcal{S}'(f). \quad (3.3)$$

Зокрема група $p_1(\pi_1 \mathcal{D}_{\text{id}}(M))$ міститься у центрі $\pi_1 \mathcal{O}_f(f)$.

- (3) Якщо $\chi(M) < |X|$, тоді $\mathcal{D}_{\text{id}}(M, X)$ є стягнутою, $\pi_k \mathcal{O}_f(f, X) = 0$ для $k \geq 2$, а граничний гомоморфізм

$$\partial_1 : \pi_1 \mathcal{O}_f(f, X) \longrightarrow \pi_0 \mathcal{S}'(f, X)$$

є ізоморфізмом.

Зауважимо, що коротка точна послідовність (3.3) є ненульовою частиною довгої точної послідовності гомотопічних груп розшарування Серра p , див. теорему 3.3. Ясно, що гомоморфізм p_1 індукований p є мономорфізмом.

У випадку коли $\mathcal{D}_{\text{id}}(M)$ є стягнутою групою, то з послідовності (3.3) маємо ізоморфізм $\pi_1 \mathcal{O}_f(f) \cong \pi_0 \mathcal{S}'(f)$. Якщо $M = T^2$, тоді група $\pi_1 \mathcal{D}_{\text{id}}(M)$ є ізоморфною до $\mathbb{Z}^2$, а значить описання алгебраїчної структури $\pi_1 \mathcal{O}_f(f)$ вимагає додаткових досліджень.

Для повноти викладу наведемо означення граничного гомоморфізму ∂_1 . Нехай $\omega : [0, 1] \rightarrow \mathcal{O}_f(f)$, $\omega_0 = \omega_1$ – петля в $\mathcal{O}_f(f)$ у точці f . Оскільки p – розшарування Серра, то існує така ізотопія $h : M \times [0, 1] \rightarrow M$, що $\omega_t = f \circ h_t$, $h_0 = \text{id}$ і $h_1 \in \mathcal{S}'(f)$, тобто, h_1 задовольняє $f \circ h_1 = f$. Тоді ∂_1 визначається так: $\partial([\omega]) = [h_1] \in \pi_0 \mathcal{S}'(f)$.

3.4. Автоморфізми графів функцій з $\mathcal{F}$. Нехай $f : M \rightarrow P$ – функція з $\mathcal{F}$. Позначимо через Γ_f її граф, через $p_f : M \rightarrow \Gamma_f$ – канонічну проекцію, а також через $\text{Aut}(\Gamma_f)$ групу гомеоморфізмів Γ_f . Кожен дифеоморфізм h з $\mathcal{S}(f, X)$ зберігає функцію f , тобто зберігає множини рівня f :

$$h(f^{-1}(c)) \subset f^{-1}(c)$$

для всіх $c \in \text{Im}(f)$. Але h може переставляти їхні зв'язні компоненти. Тоді h індукує гомеоморфізм $\rho(h)$ графу Γ_f , що така діаграма комутує

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{p_f} & \Gamma_f \\ h \downarrow & & \downarrow \rho(h) \\ M & \xrightarrow{p_f} & \Gamma_f \end{array}$$

а відповідність $\rho : \mathcal{S}(f, X) \rightarrow \text{Aut}(\Gamma_f)$ задана $h \mapsto \rho(h)$ є гомоморфізмом. Відомо, що образ $G'(f, X) = \rho(\mathcal{S}'(f, X))$ є скінченною підгрупою $\text{Aut}(\Gamma_f)$.

4. ВІНЦЕВІ ДОБУТКИ

Для формулювання результатів нам необхідно означити поняття вінцевого добутку з циклічними групами. Нехай G – група і $n, m \geq 1$ – цілі числа. Ми розглядаємо такі вінцеві добутки груп:

- $G \wr_n \mathbb{Z} := G^n \rtimes_{\alpha} \mathbb{Z}$,
- $G \wr_{n,m} \mathbb{Z}^2 := G^{nm} \rtimes_{\gamma} \mathbb{Z}^2$,

де $\alpha : G^n \times \mathbb{Z} \rightarrow G^n$ відповідає неефективній $\mathbb{Z}$ -дії на G^n циклічними зсувами координат за формулою

$$((g_i)_{i=0}^{n-1}, a) \xrightarrow{\alpha} (g_{i+a})_{i=0}^{n-1},$$

де всі індекси беруться за модулем n , $g_i \in G$, $a \in \mathbb{Z}$, і аналогічно $\gamma : G^{nm} \times \mathbb{Z}^2 \rightarrow G^{nm}$ відповідає неефективній $\mathbb{Z}^2$ -дії на G^{nm} циклічними зсувами, що задаються формулою:

$$((g_{ij})_{i,j=0}^{n-1,m-1}, (a, b)) \xrightarrow{\gamma} (g_{i+a,j+b})_{i,j=0}^{n-1,m-1},$$

де індекси i та j беруться за модулем n та m відповідно, $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$.

Тоді $G \wr_n \mathbb{Z}$ – прямий добуток множин $G^n \times \mathbb{Z}$ з множенням, яке задане формулою

$$(g, a) \cdot (g', a') = (\alpha(g, a')g', a + a'),$$

де $g, g' \in G^n$, $a, a' \in \mathbb{Z}$. Аналогічно $G \wr_{n,m} \mathbb{Z}^2$ є прямим добутком множин $G^{nm} \times \mathbb{Z}^2$ з такою операцією

$$(g, (a, b)) \cdot (g', (a', b')) = (\gamma(g, a', b')g', (a + a', b + b')),$$

де $g, g' \in G^{nm}$, $a, a', b, b' \in \mathbb{Z}$.

Загальне означення вінцевого добутку груп а також їхні властивості читач може знайти у [20].

5. АЛГЕБРАЇЧНА СТРУКТУРА $\pi_1 \mathcal{O}_f(f)$ ДЛЯ ФУНКЦІЙ НА 2-ТОРІ

5.1. Функції на 2-торі. Відомо, що функції з $\mathcal{F}(T^2, P)$ можуть як бути так і не бути нуль-гомотопними. Нехай $f : T^2 \rightarrow P$ – функція з класу $\mathcal{F}$ на 2-торі і Γ_f – її граф. Всі функції з класу $\mathcal{F}$ на T^2 можна “грубо” класифікувати їхніми графами. А саме, має місце така лема.

Лема 5.1 ([7, Lemma 3.1]). *Нехай $f : T^2 \rightarrow P$ – функція з $\mathcal{F}(T^2, P)$.*

- (1) *Відображення $(p_f)_* : \pi_1 T^2 \rightarrow \pi_1 \Gamma_f$ індуковане проекцією $p_f : T^2 \rightarrow \Gamma_f$, див (1.2), є епіморфізмом з ненульовим ядром. Тоді $b_1(\Gamma_f) \leq 1$. Іншими словами Γ_f є або деревом, або має єдиний цикл.*
- (2) *Якщо f – не нуль-гомотопна, тоді Γ_f не є деревом.*

Природно, ми розглянемо ці два випадки окремо.

5.2. Випадок 1. Γ_f – дерево. Має місце наступний результат

Лема 5.2 ([16, Proposition 1]). *Нехай f – така функція з $\mathcal{F}(T^2, P)$, що її граф Γ_f є деревом. Тоді існує єдина вершина v графу Γ_f , що кожна зв'язна компонента доповнення до $T^2 \setminus p_f^{-1}(v)$ є відкритим диском.*

Таку вершину v ми називаємо *спеціальною*. Позначимо через $\text{st}(v)$ зірку вершини v , а через G_v – стабілізатор v , тобто $G_v = \{g \in G \mid g(v) = v\}$. Групу

$$G_v^{\text{loc}} = \{g|_{\text{st}(v)} \mid g \in G_v\}$$

називають *локальним стабілізатором вершини v* .

Наступна теорема описує алгебраїчну структуру групи $\pi_1 \mathcal{O}_f(f)$ для функцій з $\mathcal{F}(T^2, \mathbb{R})$, графи яких є деревами.

Теорема 5.1 (Теорема 1 [16], Theorem 2.5 [2]). *Нехай $f \in \mathcal{F}(T^2, P)$ – така функція, що її граф Γ_f – дерево, і v – спеціальна вершина Γ_f . Тоді*

- (1) $G_v^{\text{loc}} \cong \mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_{nm}$ для деяких $n, m \in \mathbb{N}$,
- (2) існують такі замкнені диски $D_1, D_2, \dots, D_r \subset T^2$, що $f|_{D_i} \in \mathcal{F}(D_i)$, $i = 1, 2, \dots, r$ і має місце ізоморфізм

$$\pi_1 \mathcal{O}_f(f) \cong \prod_{i=1}^r \pi_1 \mathcal{S}'(f|_{D_i}, \partial D_i) \wr_{n, nm} \mathbb{Z}^2.$$

Зокрема, якщо $G_v^{\text{loc}} = 1$, тоді $\pi_1 \mathcal{O}_f(f) \cong \pi_1 \mathcal{S}'(f) \times \mathbb{Z}^2$.

5.3. Випадок 2: Γ_f має цикл. Нехай f – така функція з $\mathcal{F}(T^2, P)$, що її граф Γ_f має єдиний цикл Λ . Нехай також C – зв'язна компонента $f^{-1}(c)$ і $z = p_f(C)$ – відповідна точка на графі Γ_f . Легко побачити, що z належить до циклу Λ тоді і лише тоді, коли C не розбиває T^2 . Зауважимо, що прообраз $f^{-1}(c)$ складається зі скінченного числа зв'язних компонент і він є інваріантний відносно дії $h \in \mathcal{S}'(f)$.

Нехай $\mathcal{C} = \{h(C) \mid h \in \mathcal{S}'(f)\}$ – множина образів C під дією групи $\mathcal{S}'(f)$. Тоді $\mathcal{C}$ складається зі скінченної кількості зв'язних компонент $\mathcal{C} = \{C_0 = C, C_1, \dots, C_{n-1}\}$, $n \geq 1$ прообразу $f^{-1}(c)$. Число $n = |\mathcal{C}|$ таких кривих називається *циклічним індексом f* . Має місце такий результат:

Теорема 5.2 ([18, Theorem 2.6], [17, Theorem 1.6], [8, Theorem 4.1]). *Нехай $f \in \mathcal{F}(T^2, P)$ – така функція, що її граф Γ_f містить цикл, C – зв'язна компонента деякого прообразу $f^{-1}(c)$, що не розбиває тор T^2 , $\mathcal{C} = \{h(C) \mid h \in \mathcal{S}'(f)\} = \{C_0, C_1, \dots, C_{n-1}\}$ і $n = |\mathcal{C}|$ – циклічний індекс f . Позначимо через Q_0 циліндр, обмежений кривими C_0 і C_1 . Тоді існує*

ізоморфізм

$$\pi_1 \mathcal{O}_f(f) \cong \pi_1 \mathcal{O}_{f|_{Q_0}}(f|_{Q_0}, \partial Q_0) \wr_n \mathbb{Z} \cong \pi_0 \mathcal{S}'(f|_{Q_0}, \partial Q_0) \wr_n \mathbb{Z}.$$

Якщо $n = 1$, тоді

$$\pi_1 \mathcal{O}_f(f) \cong \pi_1 \mathcal{O}_f(f, C) \times \mathbb{Z} \cong \pi_0 \mathcal{S}'(f, C) \times \mathbb{Z}.$$

Наостанок відомо, що алгебраїчна структура $\pi_0 \mathcal{S}'(f|_{Q_0}, \partial Q_0)$ описується через стабілізатори обмежень f на 2-диски, що лежать у Q у певний “ітеративний спосіб”, див. Section 5 [15].

ЛІТЕРАТУРА

- [1] І. Ю. Власенко, С. І. Максименко, Е. А. Полулях. *Топологические методы в изучении групп преобразований многообразий*. Праці Інституту математики НАН України. Ін-т математики НАН України, Київ, 2006.
- [2] Богдан Феценко. Деформації гладких функцій на 2-торі, граф Кронрода-Ріба яких є деревом. *Праці Інституту математики НАН України*, 12(6):22–40, 2015.
- [3] Walther Dyck. Gruppentheoretische Studien. *Math. Ann.*, 20(1):1–44, 1882. doi:10.1007/BF01443322.
- [4] C. J. Earle, J. Eells. The diffeomorphism group of a compact Riemann surface. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 73:557–559, 1967.
- [5] C. J. Earle, A. Schatz. Teichmüller theory for surfaces with boundary. *J. Differential Geometry*, 4:169–185, 1970.
- [6] B. Feshchenko. Actions of finite groups and smooth functions on surfaces. *Methods of Functional Analysis and Topology*, 22(3):210–219, 2016.
- [7] B. Feshchenko. Deformations of functions on 2-torus. *Proceedings of the International Geometry Center*, 12(3):30–50, 2020.
- [8] B. Feshchenko. Deformations of circle-valued functions on 2-torus. *Proc. Int. Geom. Cent.*, 14(2):117–136, 2021. doi:10.15673/tmgc.v14i2.2008.
- [9] André Gramain. Le type d’homotopie du groupe des difféomorphismes d’une surface compacte. *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)*, 6:53–66, 1973.
- [10] Camille Jordan. Sur les assemblages de lignes. *J. Reine Angew. Math.*, 70:185–190, 1869. doi:10.1515/crll.1869.70.185.
- [11] S. Maksymenko. Homotopy types of stabilizers and orbits of Morse functions on surfaces. *Ann. Global Anal. Geom.*, 29(3):241–285, 2006. doi:10.1007/s10455-005-9012-6.
- [12] S. Maksymenko. Local inverses of shift maps along orbits of flows. *Osaka Journal of Mathematics*, 48(2):415–455, 2011. URL: <https://projecteuclid.org/euclid.ojm/1315318347>.
- [13] S. Maksymenko. Homotopy types of right stabilizers and orbits of smooth functions on surfaces. *Ukrainian Math. Journal*, 64(9):1186–1203, 2012. doi:10.1007/s11253-013-0721-x.
- [14] S. Maksymenko. Deformations of functions on surfaces. *Proceedings of Institute of Mathematics of NAS of Ukraine*, 17(2):150–199, 2020.
- [15] S. Maksymenko. Deformations of functions on surfaces by isotopic to the identity diffeomorphisms. *Topology and its Applications*, 282(2):107312, 2020. doi:10.1016/j.topol.2020.107312.

- [16] S. Maksymenko, B. Feshchenko. Homotopy properties of spaces of smooth functions on 2-torus. *Ukrainian Mathematical Journal*, 66(9):1205–1212, 2014.
- [17] S. Maksymenko, B. Feshchenko. Functions on 2-torus whose Kronrod-Reeb graph contains a cycle. *Methods of Functional Analysis and Topology*, 21(1):22–40, 2015.
- [18] S. Maksymenko, B. Feshchenko. Orbits of smooth functions on 2-torus and their homotopy types. *Matematychni Studii*, 44(1):67–83, 2015.
- [19] J. P. May. *A concise course in algebraic topology*. Chicago Lectures in Mathematics. University of Chicago Press, Chicago, IL, 1999.
- [20] J. D. P. Meldrum. *Wreath products of groups and semigroups*, volume 74 of *Pitman Monographs and Surveys in Pure and Applied Mathematics*. Longman, Harlow, 1995.
- [21] J. Milnor. *Morse Theory. (AM-51), Volume 51*. Princeton University Press, 1969. URL: <http://www.jstor.org/stable/j.ctv3f8rb6>.
- [22] Eric C. Nummela. Cayley’s theorem for topological groups. *Amer. Math. Monthly*, 87(3):202–203, 1980. doi:10.2307/2321608.
- [23] Georges Reeb. *Sur certaines propriétés topologiques des variétés feuilletées*. Actualités Sci. Ind., no. 1183. Hermann & Cie., Paris, 1952. Publ. Inst. Math. Univ. Strasbourg 11, pp. 5–89, 155–156.
- [24] Francis Sergeraert. Un théorème de fonctions implicites sur certains espaces de Fréchet et quelques applications. *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)*, 5:599–660, 1972.
- [25] Edward Witten. Supersymmetry and Morse theory. *J. Differential Geometry*, 17(4):661–692, 1982. URL: <http://projecteuclid.org/euclid.jdg/1214437492>.

Б. Г. Фещенко

ІНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ НАН УКРАЇНИ, м. Київ

Email: fb@imath.kiev.ua

ORCID: 0000-0002-4113-5046

Наукове видання

Актуальні проблеми сучасної математики:
методи, моделі та застосування

Збірник праць Інституту математики НАН України

2024, т. 21, № 1

Actual problems of modern mathematics:
methods, models and applications

Transactions of Institute of Mathematics, the NAS of Ukraine

2024, v. 21, No. 1

Комп'ютерна верстка

А. І. Плакош, О. Р. Сатур.

Дизайн обгортки: Б. Г. Фещенко

Збірник містить статті молодих вчених
Інституту математики НАН України з актуальних
напрямів сучасної математики та її застосувань

Для наукових співробітників, викладачів
закладів вищої освіти, докторантів і аспірантів