Національна академія наук України
Інститут математики НАН України

Збірник праць
Інституту математики НАН України

Комплексний аналіз та його застосування

Київ 2022

НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ НАУК УКРАЇНИ

ІНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

Комплексний аналіз та його застосування

Київ - 2022

НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ НАУК УКРАЇНИ

ІНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

Збірник праць Інституту математики НАН України

Том 19, № 1

УДК 517.5, 517.9

Комплексний аналіз та його застосування

Відп. ред. *С. А. Плакса*, *І. В. Денега*.
Зб. праць Ін-ту математики НАН України. Т. 19, № 1.
Київ: Ін-т математики НАН України, 2022. – 258 с.

ISSN 1815–2910

Збірник містить роботи, що стосуються сучасних питань комплексного аналізу та його застосувань. Значна увага приділена застосуванню аналітичних методів дослідження до розв'язання ряду задач геометричної теорії функцій, теорії квазіконформних відображень та їх узагальнень, гіперкомплексного аналізу, математичної фізики. Збірник присвячений пам'яті професора Олександра Бахтіна (1948–2021).

Призначений для наукових співробітників, викладачів, аспірантів та студентів старших курсів вузів.

Відповідальні редактори:

С. А. Плакса, доктор фіз.-мат. наук, професор

І. В. Денега, доктор фіз.-мат. наук

Рецензенти:

І. О. Шевчук, член-кореспондент НАН України, доктор фіз.-мат. наук, професор

В. Л. Островський, доктор фіз.-мат. наук, професор

Затверджено до друку Вченою радою Ін-ту математики НАН України, протокол № 14 від 27.12.2022 р.

Свідоцтво про державну реєстрацію – серія КВ №8459 від 19. 02. 2004 р.

Рік заснування - 1938 р.

Збірник праць Ін-ту математики НАН України (2022) Т. 19, № 1, 1–11

Бахтін Олександр Костянтинович

(1948 – 2021)

Відомий спеціаліст з геометричної теорії функцій комплексної змінної Олександр Костянтинович Бахтін народився 10 листопада 1948 року у м. Владивосток. У 1971 році він закінчив Далекосхідний державний університет і вступив до аспірантури Інституту математики АН УРСР, яку закінчив у 1974 році. Працював в Інституті математики НАН України з 1974 року. У 1975 році під керівництвом професора П.М. Тамразова захистив кандидатську дисертацію на тему "Конформні відображення і полюси квадратичних диференціалів". У 2007 році захистив докторську дисертацію на тему "Екстремальні задачі і квадратичні диференціали в геометричній теорії функцій комплексної змінної". У 2013 році йому присвоєно звання професора.

Наукові дослідження О.К. Бахтіна спрямовані на вивчення широкого класу екстремальних задач геометричної теорії функцій комплексної змінної. Такі задачі пов'язані з дослідженням структури траєкторій квадратичних диференціалів, оскільки межі екстремальних областей складаються з дуг таких траєкторій.

О.К. Бахтін розробив нові підходи і методи для вивчення задач про екстремальне розбиття комплексної площини, завдяки яким отримано ефективні оцінки зверху добутків внутрішніх радіусів областей, що взаємно не перетинаються, як і з фіксованими, так і з вільними полюсами відповідних квадратичних диференціалів. При цьому вирішальну роль відіграють введені ним нові поняття, а саме: променевої системи точок, "керуючого" функціонала, визначеного на скінченних наборах точок, операції заповнення неістотних граничних компонент системи неперетинних областей, умови ненакладання відкритої множини відносно променевої системи точок.

Завдяки розробленим методам О.К. Бахтін встановив нові непокращувані нерівності для оцінки зверху добутку внутрішніх радіусів взаємно неперетинних областей відносно точок, що утворюють так звану (n, m)-променеву систему, і дав повний опис випадків досягнення знаку рівності в зазначених нерівностях. Він отримав істотне уточнення та узагальнення (на випадок областей довільної зв'язності) відомої нерівності Г.В. Кузьміної про внутрішні радіуси (відносно точок на одиничному колі) парного числа неперетинних однозв'язних областей і дав повний опис екстремальних конфігурацій. Ним дано істотне уточнення (з повним описом екстремальних конфігурацій та значним послабленням вимог на геометрію розташування точок) відомих нерівностей В.М. Дубініна і Є.Г. Ємельянова для добутку внутрішніх радіусів неперетинних областей відносно точок, розташованих відповідно на одному і двох колах. Для довільного дійсного додатного числа γ та достатньо великих натуральних n ним також знайдено розв'язок відомої задачі В.М. Дубініна про опис екстремальних конфігурацій, що максимізують добуток внутрішніх радіусів n взаємно неперетинних областей відносно точок одиничного кола на степінь γ внутрішнього радіуса відносно точки 0 неперетинної з ними області B_0, $0 \in B_0$, а для $n = 2$ дану проблему розв'язано повністю.

Перед доведенням Луї де Бранжем знаменитої гіпотези Бібербаха О.К. Бахтін довів, що ця гіпотеза справджується для кожної однолистої та голоморфної в одиничному крузі функції класу S, яка максимізує дійсні частини двох різних коефіцієнтів розкладу цієї функції в ряд Тейлора в околі нуля. Цей результат був включений у монографію П. Дюрена, який, узагальнюючи твердження Бахтіна, сформулював так звану гіпотезу про два функціонали, яка привернула увагу спеціалістів з геометричної теорії функцій. Варто відзначити, що значна частина математиків, що намагалися досягти прогресу в доведенні гіпотези Дюрена, діяли методом Бахтіна, намагаючись довести його до досконалості.

У багатовимірних комплексних просторах О.К. Бахтін увів поняття векторного модуля і векторного аргументу елемента простору та довів аналоги ряду відомих теорем з теорії однолистних функцій комплексної змінної для певних узагальнень голоморфних функцій і відображень.

Про наукову значимість відзначених результатів О.К. Бахтіна яскраво свідчить той факт, що більшість з них є непокращуваними, а екстремальні конфігурації, як правило, мають критеріальний характер. Доведення відповідних тверджень потребувало розробки тонкої техніки.

Науковий доробок О.К. Бахтіна складають понад 150 публікацій, серед них 1 монографія. Під його керівництвом захистили кандидатські дисертації А.Л. Таргонський (2006), В.Є. В'юн (2008), І.Ю. Виговська (2012), І.В. Денега (2013), Я.В. Заболотний (2014), Л.В. Вигівська (2019), І.Я. Дворак (2019), а Ірина Денега у 2021 році стала доктором фізико-математичних наук.

Олександра Костянтиновича вирізняли надзвичайна інтелігентність, культура та доброзичливість у поєднанні з непідробною щирістю. Здається, ніхто інший не вмів так щиро захоплюватися результатами колег, а відповідальність за долю і успіхи своїх учнів він завжди сприймав як свій першочерговий обов'язок. Таким Олександр Костянтинович назавжди залишиться в нашій пам'яті.

В. І. Герасименко, О. Ф. Герус, І. В. Денега, Я. В. Заболотний, С. А. Плакса, Р. Р. Салімов, В. С. Шпаківський

Список наукових праць

Монографія

1. Бахтин А.К., Бахтина Г.П., Зелинский Ю.Б. Тополого-алгебраические структуры и геометрические методы в комплексном анализе // Праці Інституту математикики НАН України – 2008. – 308 с.

Наукові статті

1. Бахтин А.К. О некоторых экстремальных задачах конформного отображения // Укр. мат. журн. – 1974. – **26**, № 4. – С. 517 – 522.
2. Бахтин А.К. Об экстримизации некоторых функционалов, связанных с конформным отображением двусвязных областей. – Киев, 1974. – 32 с. – (Препр. / АН УССР. Ин-т математики; 74.17).
3. Бахтин А.К. Экстремальные конформные отображения и полюсы квадратичных дифференциалов. – Киев, 1974. – 28 с. – (Препр. / АН УССР. Ин-т математики; 74.18).
4. Бахтин А.К. Конформные отображения и полюсы квадратичных дифференциалов // Автореф. дис. . . . кан-та физ.-мат. наук: 01.01.01/ АН УССР. Ин-т математики. – К., 1975 – 12 с.
5. Бахтин А.К. Экстремальные свойства n-ых диаметров. – Киев, 1976. – 11 с. – (Препр. / АН УССР. Ин-т математики; 76.14).
6. Бахтин А.К. Об экстремальных свойствах -ых диаметров // Вопросы математики: Сб. науч. трудов. – Ташкент, 1976. – № 510. С. 7 – 8.
7. Бахтин А.К. О коэффициентах однолистных функций. – Киев, 1978. – 8 с. – (Препр. / АН УССР. Ин-т математики; 78.32).
8. Бахтин А.К. О некоторых свойствах коэффициентов однолистных функций // Теория функций и ее приложения: Сб. науч. трудов. – Київ: Наукова думка, 1979. – С. 3 – 8.
9. Бахтин А.К. О коэффициентах однолистных функций // Вопросы теории аппроксимации функций: Сб. науч. трудов. – Київ: Наукова думка, 1980. – С. 3 – 14.
10. Бахтин А.К. О коэффициентах функций класса S // Докл. АН СССР. Серия мат. – 1980. – **254**, № 5. – С. 1033 – 1035.
11. Бахтин А.К., Бахтина Г.П. Некоторые экстремальные задачи о неналегающих областях // О некоторых задачах и теории однолистных функций. – Киев, 1980. – С. 11 – 15. – (Препр. / АН УССР. Ин-т математики; 80.31).
12. Бахтин А.К. Некоторые свойства функций класса S // Укр. мат. журн. – 1981. – **33**, № 2. – С. 154 – 159.
13. Бахтин А.К. Функции класса Гельфера и их коэффициенты // Геометрическая теория функций и топология : Сб. науч. трудов. – Київ: Наукова думка, 1981. – С. 3 – 8.

14. Бахтин А.К. О коэффициентах однолистных функций класса Гельфера // Укр. мат. журн. – 1985. – **37**, № 6. – С. 683 – 689.
15. Бахтин А.К., Бахтина Г.П. Конформные отображения на взаимнoненалегающие области // Конференция "Комплексный анализ и приложения БНР. – Варна, 1985. – С. 3 – 4.
16. Бахтин А.К. Экстремумы линейных функционалов. – Киев, 1986. – 8 с. – (Препр. / АН УССР. Ин-т математики; 86.25).
17. Бахтин А.К. Некоторые экстремальные задачи для многосвязных областей // Вопросы анализа и приближения : Сб. науч. трудов. – Київ: Наукова думка, 1989. – С. 19 – 23.
18. Бахтин А.К. Экстремальные задачи конформного отображения многосвязных областей // Современные вопросы теории приближения и комплексного анализа : Сб. науч. трудов. – Київ: Наукова думка, 1990. – С. 12 – 17.
19. Бахтин А.К. Об одной экстремальной задаче // Комплексный анализ и теория потенциала : Сб. науч. трудов. – Київ: Наукова думка, 1992. – С. 12 – 18.
20. Бахтин А.К., Бахтина Г.П. Разделяющие преобразования и неналегающие области // Комплексный анализ и теория потенциала. – Киев: Ин-т математики АН Украины, 1992. – С. 19 – 22.
21. Бахтин А.К. Об n-ых диаметрах континуумов // Укр. мат. журн. – 1994. – **46**, № 11. – С. 1561 – 1563.
22. Бахтин А.К., Бахтина Г.П. О произведении степеней конформных радиусов симметричных неналегающих областей. – Киев, 1995. – С. 1 – 6. – (Препр. / НАН Украины. Ин-т математики; 95.13).
23. Бахтин А.К., Бахтина Г.П. Некоторые экстремальные задачи для неналегающих областей. – Киев, 1995. – С. 9 – 13. – (Препр. / НАН Украины. Ин-т математики; 95.14).
24. Бахтин А.К. О произведении внутренних радиусов симметричных неналегающих областей // Укр. мат. журн. – 1997. – **49**, № 11. – С. 1454 – 1464.
25. Бахтин А.К., Бахтина Г.П. Об экстремальных задачах для симметричных неналегающих областей // Укр. мат. журн. – 1997. – **49**, № 2. – С. 179 – 185.
26. Бахтин А.К. Некоторые задачи в теории неналегающих областей // Укр. мат. журн. – 1999. – **51**, № 6. – С. 723 – 731.
27. Бахтин А.К., Бахтина Г.П. Некоторые задачи для "частично" неналегающих областей // International Conference dedicated to M.A. Lavrentyev on the occasion of his birthday centenary : Abstracts. – Kiev: Institute of Mathematics of the NAS of Ukraine, 2000. – С. 71.

28. Бахтин А.К. О некоторых задачах в теории неналегающих областей // Int. Conf. Complex Analysis and Potential Theory : Abstrs. – Kiev: Inst. Math. NAS Ukraine. – 2001. – P. 64.
29. Бахтин А.К., Таргонский А.Л. Некоторые экстремальные задачи теории конформных отображений // Экстремальные задачи теории однолистных функций. – Киев, 2002. – С. 10 – 14. – (Препр. / НАН Украины. Ин-т математики; 2002.6).
30. Бахтин А.К., Таргонский А.Л. Некоторые экстремальные задачи теории неналегающих областей со свободными полюсами на лучах // Некоторые экстремальные задачи о неналегающих областях со свободными полюсами. – Киев, 2003. – С. 46 – 67. – (Препр. / НАН Украины. Ин-т математики; 2003.6).
31. Бахтин А.К., Таргонский А.Л. Некоторые экстремальные задачи на классе неналегающих областей // Зб. праць Ін-ту математики НАН України. – 2004. – **1**, № 3. – С. 244 – 253.
32. Бахтин А.К., Таргонский А.Л. Экстремальные задачи о неналегающих областях со свободными полюсами на лучах // Доп. НАН України. – 2004. – № 7. – С. 7 – 13.
33. Бахтин А.К. Экстремальные задачи о неналегающих областях со свободными полюсами на окружности // Доп. НАН України. – 2004. – № 8. – С. 7 – 15.
34. Бахтин А.К. Кусочно-разделяющее преобразование и экстремальные задачи со свободными полюсами на лучах // Доп. НАН України. – 2004. – № 12. – С. 7 – 13.
35. Бахтин А.К. Экстремальные задачи о неналегающих областях со свободными полюсами на лучевых системах // Зб. праць Ін-ту математики НАН України. – 2004. – **1**, № 3. – С. 235 – 243.
36. Бахтин А.К. Экстремальные задачи со свободными полюсами на окружности // Доп. НАН України. – 2005. – № 5. – С. 7 – 10.
37. Бахтин А.К. Оценки функционалов для открытых множеств // Нелінійні коливання. – 2005. – **8**, № 2. – С. 147 – 153.
38. Бахтин А.К. Экстремальные задачи и квадратичные дифференциалы // Нелінійні коливання. – 2005. – **8**, № 3. – С. 298 – 303.
39. Бахтин А.К. Экстремальные задачи о неналегающих областях со свободными полюсами на двух окружностях // Доп. НАН України. – 2005. – № 7. – С. 12 – 16.
40. Бахтин А.К. Кусочно-разделяющее преобразование и экстремальные задачи со свободными полюсами // Докл. РАН. – 2005. – **405**, № 2. – С. 151 – 153.

41. Бахтин А.К. Разделяющее преобразование и неравенства в задачах о неналегающих областях // Зб. праць Ін-ту математики НАН України. – 2005. – **2**, № 3. – С. 9 – 17.
42. Бахтин А.К., Бахтина Г.П. Экстремальные задачи о неналегающих областях и квадратичные дифференциалы // Доп. НАН України. – 2005. – № 8. – С. 13 – 15.
43. Бахтин А.К., Бахтина Г.П. Экстремальные задачи о неналегающих областях // Материалы Международной конференции "Комплексный анализ и его приложения". – Краснодар; Москва: Краснодар. гос. ун-т, Мат. ин-т РАН, 2005. – С. 16 – 17.
44. Бахтин А.К., Бахтина Г.П. Экстремальные задачи о неналегающих областях и квадратичные дифференциалы // International workshop on free boundary flows and related problems of analysis : Abstracts. 25 – 30 September. – Kiev, 2005. – C. 47 – 48.
45. Бахтин А.К., Таргонский А.Л. Экстремальные задачи и квадратичные дифференциалы // Нелінійні коливання. – 2005. – **8**, № 3. – С. 298 – 303.
46. Бахтин А.К., Таргонский А.Л. Некоторые экстремальные задачи теории неналегающих областей со свободными полюсами на лучах // Укр. мат. журн. – 2006. – **58**, № 12. – С. 1715 – 1719.
47. Бахтин А.К., Бахтина Г.П. Разделяющие преобразования и задачи о неналегающих областях // Зб. праць Ін-ту математики НАН України. – 2006. – С. 273 – 284.
48. Бахтин А.К. Приведенные модули открытых множеств и экстремальные задачи со свободными полюсами // Доп. НАН України. – 2006. – № 5. – С. 7 – 13.
49. Бахтин А.К. Экстремальные задачи о неналегающих областях со свободными полюсами на окружности // Укр. мат. журн. – 2006. – **58**, № 7. – С. 867 – 886.
50. Бахтин А.К. О некоторых экстремальных задачах геометрической теории функций комплексного переменного // Доп. НАН України. – 2006. – № 9. – С. 7 – 11.
51. Бахтин А.К. Неравенства для внутренних радиусов неналегающих областей и открытых множеств // Доп. НАН України. – 2006. – № 10. – С. 7– 13.
52. Бахтин А.К.Экстремальные задачи и квадратичные дифференциалы в геометрической теории функций комплексного переменного: Дис. . . . д-ра физ.-мат. наук. – Киев, 2007. – 294 с.
53. Бахтин А.К., Вьюн В.Е. Разделяющее преобразование и неравенства для открытых множеств // Доп. НАН України. – 2007. – № 4. – С. 7 – 11.

54. Бахтин А.К., Вьюн В.Е., Трохимчук Ю.Ю. Неравенства для внутренних радиусов неналегающих областей // Доп. НАН України. – 2007. – № 8. – С. 7 – 10.
55. Бахтин А.К., Вьюн В.Е. Применение разделяющего преобразования к оценкам внутренних радиусов открытых множеств // Укр. мат. журн. – 2007. – **59**, № 10. – С. 1314 – 1322.
56. Бахтин А.К. Точные оценки для внутренних радиусов систем неналегающих областей и открытых множеств // Укр. мат. журн. – 2007. – **59**, № 12. – С. 1601 – 1618.
57. Бахтин А.К. Неравенства для внутренних радиусов взаимно непересекающихся областей и открытых множеств // Труды мат. Ин-та им. В. А. Стеклова. – 2008. – **261**. – С. 37 – 46.
58. Бахтин А.К. Нерівності для внутрішніх радіусів неперетинних областей та відкритих множин // Укр. мат. журн. – 2009. – **61**, № 5. – С. 596 – 610.
59. Бахтин А.К., Бахтина Г.П., Подвисоцкий Р.В. Неравенства для внутренних радиусов неналегающих областей // Доп. НАН України. – 2009. – № 9. – С. 13 – 17.
60. Бахтин А.К., Бахтина Г.П., Денега И.В. Задача о произведении степеней обобщенных конформных радиусов для неналегающих областей в $\mathbb{C}^n$ // Збірник праць Ін-ту математики НАН України. – 2010. – **7**, № 2. – С. 180 – 186.
61. Бахтин А.К., Денега И.В. Некоторые оценки функционалов для N-лучевых систем точек // Зб. праць Ін-ту математики НАН України. – 2011. – **8**, №1. – С. 12 – 21.
62. Бахтин А.К. Обобщение некоторых результатов теории однолистных функций на многомерные комплексные пространства // Доп. НАН України. – 2011. – № 3. – С. 7 – 11.
63. Бахтин А.К., Таргонский А.Л. Обобщенные (n, d)-лучевые системы точек и неравенства для неналегающих областей и открытых множеств // Укр. мат. журн. – 2011. – **63**, № 7. – С. 867 – 879.
64. Самойленко А.М., Шарко В.В., Трохимчук Ю.Ю., Герасименко В.І., Зелінський Ю.Б., Плакса С.А., Бахтін О.К., Яценко В.О. Юрій Іванович Самойленко (до 80-річчя від дня народження) // Укр. мат. журн. – 2012. – **64**, № 4. – С. 574 – 576.
65. Julian Lawrynowicz, Sergiy Plaksa, Yuri Zelinskii, Alexander Bakhtin. Late professor Promarz Tamrazov (1933-2012) and 20 years of scientific cooperation Lodz-Kyiv // Bulletin de la société des sciences et des lettres de Łódź, Recherches sur les déformations. – 2012. – **LXII**, No. 2. – P. 7 – 28.

66. Bakhtin A.K., Denega I.V. Addendum to a theorem on extremal decomposition of the complex plane // Bulletin de la société des sciences et des lettres de Łódź, Recherches sur les déformations. – 2012. – **LXII**, No. 2. – P. 83 – 92.
67. Бахтин А.К., Денега И.В. Метод разделяющего преобразования в задачах о максимуме произведения степеней внутренних радиусов неналегающих областей // Зб. праць Ін-ту математики НАН України. – 2012. – **9**, № 2. – С. 32 – 44.
68. Бахтин А.К., Денега И.В. Об одной проблемме В.Н. Дубинина // Зб. праць Ін-ту математики України – 2013. – **10**, №4-5. – С. 396 – 406.
69. Бахтін О.К., Заболотний Я.В. Оцінки добутку внутрішніх радіусів трьох неперетинних областей // Доп. НАН України. – 2013. – № 10. – С. 7 – 10.
70. Бахтин А.К., Таргонский А.Л. Экстремальный задачи для частично неналегающих областей со свободными полюсами // Доп. НАН України. – 2013. – № 11. – С. 13 – 18.
71. Бахтин А.К., Бахтина Г.П., Денега И.В. Разделяющее преобразование в задачах об экстремальном разбиении комплексной плоскости // Зб. праць Ін-ту математики НАН України. – 2015. – **12**, № 3. – С. 17 – 23.
72. Бахтин А.К., Вьюн В.Е., Таргонский А.Л. Неравенства для внутренних радиусов взаимно непересекающихся областей // Зб. праць Ін-ту математики НАН України. – 2015. – **12**, №3. – С. 38 – 46.
73. Бахтин А.К., Заболотный Я.В. Оценки произведения внутренних радиусов неналегающих областей // Укр. мат. вісник. – 2016. – **13**, № 2. – С. 148 – 156.
74. Бахтин А.К., Выговская Л.В., Денега И.В. Неравенства для внутренних радиусов неналегающих областей. // Український математичний вісник. – 2016. – **13**, № 1. – С. 68 – 75. (переклад: Bakthin A., Vyhivska L., Denega I. Inequalities for the internal radii of non-overlapping domains. // J. Math. Sci., 2017, V. 220, No. 5, P. 584 – 590.)
75. Bakhtin A., Dvorak I., Denega I. Separating transformation and extremal decomposition of the complex plane // Bulletin de la société des sciences et des lettres de Łódź, Recherches sur les déformations. – 2016. – **LXVI**, No. 2. – P. 13–20.
76. Бахтин А.К., Бахтина Г.П., Денега И.В. Экстремальное разбиение комплексной плоскости с фиксированными полюсами // Зб. праць Ін-ту математики НАН України. – 2017. – **14**, № 1. – С. 34 – 38.
77. Бахтин А.К. Оценки внутренних радиусов для взаимно непересекающихся областей // Зб. праць Ін-ту математики НАН України. – 2017. – **14**, №1. – С. 25 – 33.

78. Бахтин О.К., Дворак І.Я., Заболотний Я.В. Оцінки добутку внутрішніх радіусів п'яти взаємно неперетинних областей // Укр. мат. журн. – 2017. – **69**, № 2. – С. 261 – 267.
79. Bakhtin A., Vyhivska L., Denega I. N-radial systems of points and problems for non-overlapping domains // Lobachevskii Journal of mathematics. – 2017. – **38**, No. 2. – P. 229 – 235.
80. Bakhtin A.K., Zabolotnyi Y.V. Estimates of a product of the inner radii of nonoverlapping domains // J. Math. Sci. – 2017. – **221**. – P. 623 – 629.
81. Бахтин А.К., Денега И.В., Выговская Л.В. Неравенства для внутренних радиусов симметричных неналегающих областей // Укр. матем. журн. – 2018. – **70**, № 9. – С. 1282 – 1288.
82. Bakhtin A.K. Separating transformation and extremal problems on nonoverlapping simply connected domains // J. Math. Sci. – 2018. – **234**, No. 1. – P. 1 – 13.
83. Bakhtin A.K. Extremal decomposition of the complex plane with restrictions for free poles // J. Math. Sci. – 2018. – **231**, No. 1. – P. 1 – 15.
84. Bakhtin A., Vyhivska L. and Denega I. Inequality for the inner radii of symmetric non-overlapping domains // Bulletin de la société des sciences et des lettres de Łódź. Recherches sur les déformations. – 2018. – **68**, No. 2. – P. 37–44.
85. Бахтин А.К., Денега И.В. Неравенства для внутренних радиусов неналегающих областей // Укр. мат. журн. – 2019. – **71**, № 7. – С. 996–1002. (переклад: Bakhtin A.K., Denega I.V. Inequalities for the inner radii of nonoverlapping domains // Ukr. Math. J., 2019, **71**, P. 1138–1145.)
86. Бахтин А.К., Денега И.В. Экстремальное разбиение комплексной плоскости со свободными полюсами // Український математичний вісник. – 2019. – Т. 16, № 3. – С. 307–328. (переклад: Bakhtin A.K., Denega I.V. Extremal decomposition of the complex plane with free poles // J. Math. Sci., 2020, **246**, No. 1, P. 1–17.)
87. Bakhtin A.K., Denega I.V. Sharp estimates of inner radii of non-overlapping domains in the complex plane // Probl. Anal. Issues Anal. – 2019. – **8(26)**, No. 1. – P. 17–31.
88. Bakhtin A.K., Denega I.V. Weakened problem on extremal decomposition of the complex plane // Matematychni Studii. – 2019. – **51**, No. 1. – P. 35–40.
89. Bakhtin A., Vyhivska L. Estimates of inner radii of symmetric non-overlapping domains // J. Math. Sci. – 2019. – **241**, No. 1. – P. 1 – 18.
90. Бахтин А.К., Денега И.В. Экстремальное разбиение комплексной плоскости со свободными полюсами. II // Український математичний вісник. – 2019. – **16**, № 4. – С. 477–495. (переклад: Bakhtin

A.K., Denega I.V. Extremal decomposition of the complex plane with free poles. II // J. Math. Sci., 2020, **246**, No. 5, P. 602–616.)

91. Бахтін О.К., Денега І.В. Оцінки максимума добутків внутрішніх радіусів областей, що взаємно не перетинаються // Укр. мат. журн. – 2020. – **72**, № 2. – С. 173–183. (переклад: Bakhtin A.K., Denega I.V. Estimation of the maximum product of inner radii of mutually disjoint domains // Ukr. Math. J., 2020, **72**, 191–202.)
92. Бахтин А.К., Денега І.В., Вигівська Л.В., Дворак І.Я. Задачі про екстремальне розбиття комплексної площини // Зб. праць Ін-ту математики НАН України. – 2020. – **17**, № 2. – С. 10 – 56.
93. Bakhtin A.K., Vyhivska L.V., Denega I.V. Problem of extreme decomposition for a complex plane with free poles on a circle // Ukr. Math. J. – 2021. – **72**, № 12. – С. 1847 – 1871.
94. Бахтін О.К., Заболотний Я.В. Оцінки добутків внутрішніх радіусів багатозв'язних областей // Укр. мат. журн. – 2021. – **73**, № 1. – С. 9 – 22.
95. Бахтін О.К., Заболотний Я.В. Оцінки добутків деяких степенів внутрішніх радіусів багатозв'язних областей // Укр. мат. журн. – 2021. – **73**, № 9. – С. 1155–1169.
96. Бахтін О.К., Денега І.В. Узагальнена нерівність М.О. Лаврентьєва // Укр. мат. вісник. – 2022. – **19**, № 1. – С. 14–34.

Збірник праць Ін-ту математики НАН України (2022) Т. 19, № 1, 12–26

До проблеми поширення початкових кореляцій у відкритих квантових системах

В. І. Герасименко

Присвячується пам'яті професора Олександра Бахтіна

Abstract. The paper considers the challenge of describing the propagation of correlations of the initial states of open quantum systems based on the hierarchy of evolution equations for correlation operators. A non-Markovian generalization of the Fokker–Planck kinetic equation for open quantum systems is established, which describes the evolution of correlations of a tracer particle in the environment of many quantum particles.

Анотація. У роботі розглянуто проблему опису поширення кореляцій початкових станів відкритих квантових систем на основі ієрархії еволюційних рівнянь для кореляційних операторів. Обґрунтовано узагальнення кінетичного рівняння Фоккера – Планка для відкритих квантових систем, яким описується еволюція кореляцій виділеної частинки в оточенні багатьох квантових частинок.

1. Вступ

Одна з актуальних проблем теорії відкритих квантових систем [5],[6],[9],[10],[33] полягає у строгому виведенні основного кінетичного рівняння, тобто кінетичного рівняння типу квантового рівняння Фоккера – Планка [14],[32], з динаміки багатьох частинок таких систем [11],[12],[28] в тому числі класичних [2],[3],[29] та квантово-класичних [28],[34] відкритих систем. Розв'язання цієї проблеми, зокрема, пов'язано з питанням стосовно механізму виникнення стохастичної поведінки в динамічних системах багатьох частинок [3],[8].

Зауважимо, що зазначене еволюційне рівняння має широке застосування до опису кінетичних процесів в складних системах різноманітної

2010 Mathematics Subject Classification: 35Q20; 47J35

УДК 517.9:531.19

Ключові слова: ієрархія рівнянь фон Неймана; рівняння Фоккера – Планка; кореляційні оператори; квантова відкрита система

природи [4],[9],[13],[31], зокрема, процесів квантової когерентності та релаксації в конденсованих середовищах, в новітній технології квантових обчислень.

У сучасних працях [11],[13] основний підхід до дослідження колективної поведінки відкритих квантових систем полягає в побудові скейлінгових апроксимацій, наприклад, дифузійної границі [1],[12], розв'язку еволюційних рівнянь, якими описується еволюція стану системи багатьох частинок, яка складається із виділеної частинки та її оточення, тобто системи нескінченного числа частинок, зокрема, пертурбативного розв'язку ієрархії квантових рівнянь ББҐКІ (Боголюбов – Борн – Ґрін – Кірквуд – Івон) [7]. Огляд строгих результатів з обґрунтування таких квантових кінетичних рівнянь наведено в лекціях [12] та для відкритих класичних систем частинок із зіткненнями в роботах [22],[23].

В останній час, зокрема при вивченні прикладних питань пов'язаних з поширенням кореляцій між системою та середовищем, почали досліджуватись проблеми динаміки початково корельованих відкритих квантових систем [30],[31].

У цій роботі на основі непертурбативного розв'язку ієрархії рівнянь фон Неймана для кореляційних операторів квантової відкритої системи розвинуто новий підхід до строгого виведення кінетичного рівняння Фоккера – Планка системи багатьох квантових частинок, яка складається з виділеної частинки та її оточення за наявності кореляцій початкових станів. Зокрема, такий підхід дає можливість описати процес поширення початкових кореляцій у відкритих квантових системах. Розвинутий підхід також може бути застосовано до проблеми виведення з динаміки відкритих квантових систем кінетичних рівнянь немарковського типу, якими описуються ефекти пам'яті дифузійних процесів макроскопічних частинок у плинах частинок або в плазмових системах.

2. Кореляційні оператори відкритих квантових систем

Нехай $\mathcal{H}_n = \mathcal{H}^{\otimes n}$ – n-частинковий простір та $\mathcal{H}_0 = \mathbb{C}$. Для відкритої квантової системи, яка складається із виділеної частинки та оточення – системи не фіксованого числа безспінових частинок, які задовольняють статистику Максвелла – Больцмана, позначимо $\mathcal{F}_{\mathcal{H}} = \oplus_{n=0}^{\infty}\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_n$ простір Фока. Нехай $\mathfrak{L}^1_\alpha(\mathcal{F}_{\mathcal{H}})$ простір послідовностей $f = (f_0, f_{1+0}, f_{1+1}, \ldots,\ f_{1+n}, \ldots)$ ядерних операторів $f_{1+n} \equiv f_{1+n}(\mathfrak{t}, 1, \ldots, n) \in \mathfrak{L}^1(\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_n)$ та $f_0 \in \mathbb{C}$, які для довільних $(i_1, \ldots, i_n) \in (1, \ldots, n)$ задовольняють умову симетрії $f_{1+n}(\mathfrak{t}, 1, \ldots, n) = f_{1+n}(\mathfrak{t}, i_1, \ldots, i_n)$, з такою нормою

$$\big\|f\big\|_{\mathfrak{L}^1_\alpha(\mathcal{F}_{\mathcal{H}})} = \sup_{n\geq 0} \alpha^{-n}\,\mathrm{Tr}_{\mathfrak{t},1,\ldots,n}\big|f_{1+n}(\mathfrak{t}, 1, \ldots, n)\big|,$$

де символ $\mathrm{Tr}_{\mathfrak{t},1,\ldots,n}$ – частинний слід та параметр $\alpha > 0$ – дійсне число. Позначимо $\mathfrak{L}^1_0 \in \mathfrak{L}^1_\alpha(\mathcal{F}_\mathcal{H})$ підпростір фінітних послідовностей вироджених операторів з нескінченно диференційованими ядрами з компактними носіями. Надалі використовується система одиниць, де стала Планка $h = 2\pi\hbar = 1$.

У просторі ядерних операторів $\mathfrak{L}^1(\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_n)$ визначена однопараметрична група операторів

$$\mathcal{G}^*_{1+n}(t) f_{1+n} \doteq e^{-itH_{1+n}} f_{1+n} e^{itH_{1+n}}, \tag{2.1}$$

де оператор H_{1+n} – гамільтоніан системи виділеної частинки та n частинок оточення

$$H_{1+n} = H_{1+0}(\mathfrak{t}) \otimes \mathbb{I} + \mathbb{I} \otimes H_{0+n}(1,\ldots,n) + H_{1+1}(\mathfrak{t},1,\ldots,n),$$

а саме, $H_{1+0}(\mathfrak{t}) = K(\mathfrak{t})$ – оператор кінетичної енергії виділеної частинки, $H_{1+1}(\mathfrak{t},1,\ldots,n) = \sum_{j=1}^n \Phi(\mathfrak{t},j)$ – оператор парного потенціалу взаємодії виділеної частинки з оточенням та $H_{0+n}(1,\ldots,n) = \sum_{j=1}^n K(j) + \sum_{j_1<j_2=1}^n \Phi(j_1,j_2)$ – оператор Гамільтона n частинок оточення.

На підпросторі $\mathfrak{L}^1_0(\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_n)$ інфінітезимальний генератор $\mathcal{N}^*_{1+n}$ групи операторів (2.1) визначається в сенсі сильної збіжності простору $\mathfrak{L}^1(\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_n))$ оператором

$$\begin{aligned}\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\big(\mathcal{G}^*_{1+n}(t) f_{1+n} - f_{1+n}\big) = \\ -i\left(H_{1+n} f_{1+n} - f_{1+n} H_{1+n}\right) \doteq \mathcal{N}^*_{1+n} f_{1+n},\end{aligned} \tag{2.2}$$

який має таку структуру: $\mathcal{N}^*_{1+n} = \sum_{j=1}^{1+n} \mathcal{N}^*(j) + \sum_{j_1<j_2=1}^{1+n} \mathcal{N}^*_{\mathrm{int}}(j_1,j_2)$, де оператор $\mathcal{N}^*(j)$ генератор вільної еволюції рівняння фон Неймана [17], оператор $\mathcal{N}^*_{\mathrm{int}}$ визначається через оператор потенціалу парної взаємодії Φ формулою: $\mathcal{N}^*_{\mathrm{int}}(j_1,j_2) f_{1+n} \doteq -i\left(\Phi(j_1,j_2) f_{1+n} - f_{1+n}\Phi(j_1,j_2)\right)$.

Еволюція всіх можливих станів квантової відкритої системи нефіксованого, тобто довільного, але скінченого числа ідентичних частинок оточення, які задовольняють статистиці Максвелла – Больцмана, можна описати за допомогою послідовності кореляційних операторів $g(t) = (g_0, g_{1+0}(t,\mathfrak{t}), g_{1+1}(t,\mathfrak{t},1), \ldots, g_{1+s}(t,\mathfrak{t},1,\ldots,s), \ldots) \in \mathfrak{L}^1(\mathcal{F}_\mathcal{H})$, які визначаються задачею Коші для ієрархії рівнянь фон Неймана [26]:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t} g_{1+s}(t,\mathfrak{t},1,\ldots,s) = \mathcal{N}^*_{1+s}(\mathfrak{t},1,\ldots,s) g_{1+s}(t,\mathfrak{t},1,\ldots,s) + \\ \sum_{\mathrm{P}:\,(\mathfrak{t},1,\ldots,s)=X_1\bigcup X_2}\ \sum_{i_1\in X_1}\sum_{i_2\in X_2} \mathcal{N}^*_{\mathrm{int}}(i_1,i_2) g_{|X_1|}(t,X_1) g_{|X_2|}(t,X_2),\end{aligned} \tag{2.3}$$

$$g_{1+s}(t)\big|_{t=0} = g^0_{1+s}, \quad s \geq 1, \tag{2.4}$$

де символом $\sum_{\mathrm{P}:\,(1,\ldots,s)=X_1\bigcup X_2}$ позначено суму за всіма можливими розбиттями P множини $(\mathfrak{t},1,\ldots,s)$ на дві непорожні підмножини X_1 та X_2, які взаємно не перетинаються, та оператор $\mathcal{N}^*_{1+s}$ визначений на підпросторі $\mathfrak{L}^1_0(\mathcal{H}_1\otimes\mathcal{H}_s)$ формулою (2.2).

Наведено приклади еволюційних рівнянь ієрархії (2.3):

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial t}g_{1+0}(t,\mathfrak{t})=\mathcal{N}^*_{1+0}(\mathfrak{t})g_{1+0}(t,\mathfrak{t}),\\
&\frac{\partial}{\partial t}g_{1+1}(t,\mathfrak{t},1)=\mathcal{N}^*_{1+1}(\mathfrak{t},1)g_{1+1}(t,\mathfrak{t},1)+\mathcal{N}^*_{\mathrm{int}}(\mathfrak{t},1)g_{1+0}(t,\mathfrak{t})g_{0+1}(t,1).
\end{aligned}$$

Зауважимо, що кореляційні оператори можна визначити за допомогою кластерних розкладів [17] операторів густини (ядро оператора густини відоме як матриця густини), які визначаються послідовністю рівнянь фон Неймана, і, отже, вони описують еволюцію станів в еквівалентний спосіб у порівнянні з операторами густини. Для квантових систем із фіксованою кількістю частинок стан описується скінченою послідовністю кореляційних операторів, які визначаються відповідною системою нелінійних рівнянь фон Неймана. Підкреслимо, що динаміка кореляцій, тобто ієрархія фундаментальних рівнянь (2.3), якою описується еволюція кореляцій станів квантових відкритих систем, може бути використана як основа опису еволюції станів у випадках як підсистеми скінченого, так і нескінченного числа частинок оточення.

Зазначимо, що для класичних систем багатьох частинок ієрархія еволюційних рівнянь аналогічна ієрархії рівнянь (2.3) була введена в роботі [27] як наближення нульового порядку нелінійної ієрархії BBGKY для редукованих кореляційних функцій або у квантовому випадку в роботах [16],[24].

Внаслідок кумулянтного походження кореляційних операторів (кумулянти операторів густини, тобто розв'язки кластерних розкладів операторів густини) індукується кумулянтна структура, якою визначаються розклади для розв'язку задачі Коші (2.3),(2.4). Дійсно, якщо початковий стан описується послідовністю кореляційних операторів $g(0)=(I,g^0_{1+0},\ldots,g^0_{1+n})\in\oplus_{n=0}^{\infty}\mathfrak{L}^1(\mathcal{H}_1\otimes\mathcal{H}_n)$, тоді еволюція всіх можливих станів квантової відкритої системи описується послідовністю $g(t)=(I,g_{1+0}(t,\mathfrak{t}),\ldots,g_{1+s}(t,\mathfrak{t},1,\ldots,s),\ldots)$ кореляційних операторів, які зображуються такими розкладами [26]:

$$\begin{aligned}
&g_{1+s}(t,\mathfrak{t},1,\ldots,s)=\\
&\qquad\sum_{\mathrm{P}:\,(\mathfrak{t},1,\ldots,s)=\bigcup_j X_j}\mathfrak{A}_{|\mathrm{P}|}(t,\{X_1\},\ldots,\{X_{|\mathrm{P}|}\})\prod_{X_j\subset\mathrm{P}}g^0_{|X_j|}(X_j),\quad s\geq 0,
\end{aligned}\tag{2.5}$$

де $\sum_{\mathrm{P}\colon(\mathfrak{t},1,\ldots,s)=\bigcup_j X_j}$ – сума за всіма можливими розбиттями P множини індексів $(\mathfrak{t},1,\ldots,s)$ на $|\mathrm{P}|$ непорожніх підмножини X_j, що взаємно не перетинаються, множина $(\{X_1\},\ldots,\{X_{|\mathrm{P}|}\})$ складається з елементів, які є підмножинами $X_j\subset(1,\ldots,s)$, тобто $|(\{X_1\},\ldots,\{X_{|\mathrm{P}|}\})|=|\mathrm{P}|$. Твірний оператор $\mathfrak{A}_{|\mathrm{P}|}(t)$ розкладу (2.5) є кумулянтом $|\mathrm{P}|$-го порядку груп операторів (2.1), який визначається таким розкладом [25]:

$$\mathfrak{A}_{|\mathrm{P}|}(t,\{X_1\},\ldots,\{X_{|\mathrm{P}|}\})\doteq \sum_{\mathrm{P}'\colon(\{X_1\},\ldots,\{X_{|\mathrm{P}|}\})=\bigcup_k Z_k}(-1)^{|\mathrm{P}'|-1}(|\mathrm{P}'|-1)!\prod_{Z_k\subset\mathrm{P}'}\mathcal{G}^*_{|\theta(Z_k)|}(t,\theta(Z_k)),\tag{2.6}$$

де використано символ θ для позначення відображення декластерізації: $\theta(\{X_1\},\ldots,\{X_{|\mathrm{P}|}\})\doteq(1,\ldots,s)$. Нижче наведено приклади розкладів для розв'язку (2.5):

$$\begin{aligned}
&g_{1+0}(t,\mathfrak{t})=\mathfrak{A}_1(t,\mathfrak{t})g^0_{1+0}(\mathfrak{t}),\\
&g_{1+1}(t,\mathfrak{t},1)=\mathfrak{A}_1(t,\{\mathfrak{t},1\})g^0_{1+1}(\mathfrak{t},1)+\mathfrak{A}_2(t,\mathfrak{t},1)g^0_{1+0}(\mathfrak{t})g^0_{0+1}(1),\\
&g_{1+2}(t,\mathfrak{t},1,2)=\mathfrak{A}_1(t,\{\mathfrak{t},1,2\})g^0_{1+2}(\mathfrak{t},1,2)+\\
&\quad\mathfrak{A}_2(t,\mathfrak{t},\{1,2\})g^0_{1+0}(\mathfrak{t})g^0_{0+2}(1,2)+\mathfrak{A}_2(t,\{\mathfrak{t},2\},1)g^0_{0+1}(1)g^0_{1+1}(\mathfrak{t},2)+\\
&\quad\mathfrak{A}_2(t,\{\mathfrak{t},1\},2)g^0_{0+1}(2)g^0_{1+1}(\mathfrak{t},1)+\mathfrak{A}_3(t,\mathfrak{t},1,2)g^0_{1+0}(\mathfrak{t})g^0_{0+1}(1)g^0_{0+1}(2).
\end{aligned}$$

Зауважимо також, що непертурбативний розв'язок (2.5) задачі Коші для ієрархії рівнянь фон Неймана (2.3),(2.4) може бути перетворений у ряд теорії збурень (ітерацій) у результаті застосування аналогів рівняння Дюамеля до кумулянтів (2.6) груп операторів (2.1).

Нехай $f_{1+s}\in\mathfrak{L}^1(\mathcal{H}_1\otimes\mathcal{H}_s)$, $s\geq1$, тоді для відображення (2.6) справедлива нерівність

$$\big\|\mathfrak{A}_{|\mathrm{P}|}(t,\{X_1\},\ldots,\{X_{|\mathrm{P}|}\})f_{1+s}\big\|_{\mathfrak{L}^1(\mathcal{H}_1\otimes\mathcal{H}_s)}\leq|\mathrm{P}|!\,e^{|\mathrm{P}|}\big\|f_{1+s}\big\|_{\mathfrak{L}^1(\mathcal{H}_1\otimes\mathcal{H}_s)},$$

і відповідно маємо

$$\big\|g(t,\mathfrak{t},1,\ldots,s)\big\|_{\mathfrak{L}^1(\mathcal{H}_1\otimes\mathcal{H}_s)}\leq(s+1)!e^{2s}c^{s+1},\tag{2.7}$$

де $c\equiv e^3\max(1,\max_{\mathrm{P}\colon(\mathfrak{t},1,\ldots,s)=\bigcup_i X_i}\|g^0_{|X_i|}\|_{\mathfrak{L}^1(\mathcal{H}_{|X_i|})})$.

Справедливе таке твердження.

Теорема 2.1. *У випадку обмеженого оператора потенціалу взаємодії частинок для $t\in\mathbb{R}$ розв'язок задачі Коші для ієрархії рівнянь фон Неймана (2.3),(2.4) визначається послідовністю кореляційних операторів, які зображуються розкладами (2.5). Якщо $g^0_{1+n}\in\mathfrak{L}^1_0(\mathcal{H}_1\otimes\mathcal{H}_n)$, розклади (2.5) – сильний розв'язок, а для довільних початкових станів $g^0_{1+n}\in\mathfrak{L}^1(\mathcal{H}_1\otimes\mathcal{H}_n)$ – слабкий розв'язок.*

Доведення теореми аналогічно доведенню відповідного твердження про існування розв'язку задачі Коші для ієрархії еволюційних рівнянь для послідовності кореляційних операторів системи багатьох квантових частинок [17].

У разі відсутності в початковий момент часу кореляцій між частинкою та оточенням (початковий стан задовольняє умові хаосу [17]), тобто послідовності початкових кореляційних операторів $g^{(c)}(0) = (0, g^0_{1+0}(\mathfrak{t}), 0, \ldots)$ (така умова в термінах операторів густини визначається послідовністю $D^{(c)}(0) = (I, D^0_{1+0}(\mathfrak{t}), \ldots, D^0_{1+0}(\mathfrak{t}) \prod_{i=1}^n D^0_{0+1}(i), \ldots))$, розклади (2.5) набувають такого вигляду:

$$g_{1+n}(t, \mathfrak{t}, 1, \ldots, n) = \mathfrak{A}_{1+n}(t, \mathfrak{t}, 1, \ldots, n) g^0_1(\mathfrak{t}) \prod_{j=1}^n g^0_1(j), \quad n \geq 0, \tag{2.8}$$

де кумулянт $(1+n)$-го порядку груп операторів (2.1) визначається розкладом

$$\begin{aligned} &\mathfrak{A}_{1+n}(t, \mathfrak{t}, 1, \ldots, n) = \\ &\sum_{\mathrm{P}:\, (\mathfrak{t},1,\ldots,n) = \bigcup_i X_i} (-1)^{|\mathrm{P}|-1}(|\mathrm{P}|-1)! \prod_{X_i \subset \mathrm{P}} \mathcal{G}^*_{|X_i|}(t, X_i), \end{aligned} \tag{2.9}$$

і де використано позначення прийняті в формулі (2.5). У випадку $n = 0$, тобто кореляційного оператора виділеної частинки, маємо

$$g_{1+0}(t, \mathfrak{t}) = \mathfrak{A}_{1+0}(t, \mathfrak{t}) g^0_{1+0}(\mathfrak{t}) = \mathcal{G}^*_{1+0}(t, \mathfrak{t}) g^0_{1+0}(\mathfrak{t}).$$

Зобразимо кореляційні оператори $g_{1+s}(t)$, $s \geq 1$, в термінах кореляційного оператора виділеної частинки $g_{1+0}(t)$ за допомогою розв'язку (2.8). Тоді для $s \geq 1$ кореляційні оператори (2.8) зображуються такими функціоналами (кореляційні функціонали відкритої квантової системи)

$$\begin{aligned} &g_{1+s}(t, \mathfrak{t}, 1, \ldots, s \mid g_1(t, \mathfrak{t})) = \\ &\qquad \widehat{\mathfrak{A}}_{1+s}(t, \mathfrak{t}, 1, \ldots, s) g_{1+0}(t, \mathfrak{t}) \prod_{i=1}^s g^0_{0+1}(i), \quad s \geq 1, \end{aligned}$$

де оператор $\widehat{\mathfrak{A}}_{1+s}(t, \mathfrak{t}, 1, \ldots, s)$ – кумулянт операторів розсіяння $(1+s)$-го порядку

$$\widehat{\mathcal{G}}(t, \mathfrak{t}, 1, \ldots, s) \doteq \mathcal{G}^*_{1+s}(t, \mathfrak{t}, 1, \ldots, s)(\mathcal{G}^*_{1+0}(t))^{-1}(\mathfrak{t}), \quad s \geq 1.$$

Генератор оператора розсіяння $\widehat{\mathcal{G}}(t, \mathfrak{t}, 1, \ldots, s)$ визначається таким оператором

$$\frac{d}{dt}\widehat{\mathcal{G}}(t, \mathfrak{t}, 1, \ldots, s)|_{t=0} = \sum_{i_1=1}^s \mathcal{N}^*_{\mathrm{int}}(i_1, \mathfrak{t}),$$

де оператор $\mathcal{N}^*_{\mathrm{int}}$ визначений на підпросторі $\mathfrak{L}^1_0(\mathcal{H}_1\otimes\mathcal{H}_s)$ діє згідно формули (2.2).

3. Редуковані кореляційні оператори відкритих квантових систем

В основу опису еволюції стану відкритих квантових систем за допомогою редукованих кореляційних операторів або редукованих операторів густини [18], якими описуються підсистеми нескінченного числа частинок оточення, може бути покладено підхід, який ґрунтується на динаміці кореляцій, тобто на ієрархії еволюційних рівнянь фон Неймана (2.3) для кореляційних операторів.

При такому підході редуковані кореляційні оператори в термінах розв'язку задачі Коші для ієрархії рівнянь фон Неймана (2.3),(2.4) зображуються такими розкладами в ряд [17]:

$$G_{1+s}(t,\mathfrak{t},1,\ldots,s)\doteq\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\,\mathrm{Tr}_{s+1,\ldots,s+n}\;g_{1+s+n}(t,\mathfrak{t},1,\ldots,s+n),\quad (3.1)$$
$$s\geq 0,$$

де кореляційні оператори $g_{1+s+n}(t)$, $s,n\geq 0$, зображується розкладами (2.5). Згідно нерівності (2.7), ряд (3.1) існує і справедлива така оцінка:

$$\big\|G_{1+s}(t)\big\|_{\mathfrak{L}^1(\mathcal{H}_1\otimes\mathcal{H}_s)}\leq(s+1)!(2e^2)^{s+1}c^{s+1}\sum_{n=0}^{\infty}(2e^2)^n c^n,$$

де $c\equiv e^3\max(1,\max_{\mathrm{P}\colon(\mathfrak{t},1,\ldots,s)=\bigcup_i X_i}\|g_{|X_i|}(0)\|_{\mathfrak{L}^1(\mathcal{H}_{|X_i|})})$.

Редуковані кореляційні оператори (3.1) визначають макроскопічні характеристики флуктуацій спостережуваних відкритих систем, наприклад, функціонал дисперсії спостережуваних адитивного типу, тобто $A^{(1)}=(0,a_1(\mathfrak{t}),\ldots,a_1(\mathfrak{t})+\sum_{i=1}^n a_1(i),\ldots)$, зображується такою формулою

$$\langle(A^{(1)}-\langle A^{(1)}\rangle)^2\rangle(t)=$$
$$\mathrm{Tr}_{\mathfrak{t}}\,(a_1^2(\mathfrak{t})-\langle A^{(1)}\rangle^2(t))G_{1+0}(t,\mathfrak{t})+\mathrm{Tr}_{\mathfrak{t},1}\,a_1(\mathfrak{t})a_1(1)G_{1+1}(t,\mathfrak{t},1),$$

де $\langle A^{(1)}\rangle(t)=\mathrm{Tr}_{\mathfrak{t}}\,a_1(\mathfrak{t})G_1(t,\mathfrak{t})$ – функціонал середніх значень (математичного сподівання) виділеної частинки.

Еквівалентний підхід до опису еволюції станів відкритих квантових систем полягає в описі їх стану в термінах редукованих операторів густини, які визначаються кластерним розкладом по редукованих кореляційних операторах (3.1), а саме,

$$F_{1+n}(t,\mathfrak{t},1,\ldots,n)=\sum_{\mathrm{P}\colon(\mathfrak{t},1,\ldots,n)=\bigcup_i X_i}\;\prod_{X_i\subset\mathrm{P}}G_{|X_i|}(t,X_i),\quad n\geq 1,\quad (3.2)$$

тобто редуковані кореляційні оператори є кумулянтами редукованих операторів густини:

$$G_{1+n}(t,\mathfrak{t},1,\ldots,n)=\sum_{\mathrm{P}:\,(\mathfrak{t},1,\ldots,n)=\bigcup_i X_i}(-1)^{|\mathrm{P}|-1}(|\mathrm{P}|-1)!\prod_{X_i\subset\mathrm{P}}F_{|X_i|}(t,X_i),\quad n\geq 1.$$

Внаслідок означень (3.1) та (3.2) редуковані оператори густини визначаються такими рядами [17]:

$$F_{1+s}(t,\mathfrak{t},1,\ldots,s)\doteq\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\,\mathrm{Tr}_{s+1,\ldots,s+n}\;g_{1+n}(t,\{\mathfrak{t},1,\ldots,s\},\\ s+1,\ldots,s+n),\quad s\geq 1,\tag{3.3}$$

де кореляційні оператори $g_{1+n}(t)$, $n\geq 0$, кластера частинок $\{\mathfrak{t},1,\ldots,s\}$ і частинок $(s+1,\ldots,s+n)$ зображується в термінах кореляційних операторів частинок (2.5) такими розкладами:

$$g_{1+n}(t,\{\mathfrak{t},1,\ldots,s\},s+1,\ldots,s+n)=\sum_{\substack{\mathrm{P}\,:\,(\{\mathfrak{t},1,\ldots,s\},\\ s+1,\ldots,s+n)=\bigcup_i X_i}}(-1)^{|\mathrm{P}|-1}(|\mathrm{P}|-1)!\times\\ \prod_{X_i\subset\mathrm{P}}\;\sum_{\mathrm{P}'\colon\theta(X_i)=\bigcup_{j_i}Y_{j_i}}\;\prod_{Y_{j_i}\subset\mathrm{P}'}g_{|Y_{j_i}|}(t,Y_{j_i}),\quad n\geq 0,\tag{3.4}$$

де відображення декластерізації визначається формулою: $\theta(\{\mathfrak{t},1,\ldots,s\},s+1,\ldots,s+n)=(\mathfrak{t},1,\ldots,s,s+1,\ldots,s+n)$.

Розглянемо еволюцію усіх можливих станів відкритої квантової системи, яка описується послідовністю $F(t)=(F_{1+0}(t,\mathfrak{t}),F_{1+1}(t,\mathfrak{t},1),\ldots,F_{1+s}(t,\mathfrak{t},1,\ldots,s),\ldots)\in\mathcal{F}_{\mathcal{H}}$ редукованих операторів густини. Така послідовність операторів є непертурбативним розв'язком задачі Коші для ієрархії рівнянь ББҐКІ [19],[20]:

$$F_{1+s}(t,\mathfrak{t},1,\ldots,s)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\mathrm{Tr}_{s+1,\ldots,s+n}\;\mathfrak{A}_{1+n}(t,\{\mathfrak{t},1,\ldots,s\},\\ s+1,\ldots,s+n)F^{0}_{1+s+n}(\mathfrak{t},1,\ldots,s+n),\quad s\geq 0,\tag{3.5}$$

де твірний оператор n-го члену розкладу в ряд (3.5) є кумулянтом $(n+1)$-го порядку (2.6) груп операторів (2.1)

$$\mathfrak{A}_{1+n}(t,\{\mathfrak{t},1,\ldots,s\},s+1,\ldots,s+n)=\\ \sum_{\mathrm{P}\colon(\{\mathfrak{t},1,\ldots,s\},\,s+1,\ldots,s+n)=\bigcup_i X_i}(-1)^{|\mathrm{P}|-1}(|\mathrm{P}|-1)!\prod_{X_i\subset\mathrm{P}}\mathcal{G}^{*}_{|\theta(X_i)|}(t,\theta(X_i)),\tag{3.6}$$

де де використано позначення прийняті в формулі (2.5).

Надалі будемо розглядати початкові стани відкритої квантової системи, які описуються послідовністю таких редукованих операторів густини

$$F_{1+n}(t)_{|t=0} = F^0_{1+0}(\mathfrak{t})F^0_{0+n}(1,\ldots,n)g_{1+n}(\mathfrak{t},1,\ldots,n), \quad n \geq 0, \tag{3.7}$$

де оператор g_{1+s} описує кореляції станів виділеної квантової частинки та її оточення в початковий момент часу. Якщо $F^0_{1+0} \in \mathfrak{L}^1(\mathcal{H}_1)$, стан оточення $\sup_{n\geq 0} \alpha^{-n}\|F^0_{0+n}\|_{\mathfrak{L}^1(\mathcal{H}_n)} < +\infty$ та кореляційні оператори обмежені $g_{1+n} \in \mathfrak{L}(\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_n)$, тоді за умови $\alpha < e^{-1}$, ряд (3.5) є збіжним за нормою простору $\mathfrak{L}^1(\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_s)$ для довільних $t \in \mathbb{R}^1$.

Справедливе таке твердження [17].

Теорема 3.1. *Якщо $F^0_{1+0} \in \mathfrak{L}^1_0(\mathcal{H}_1)$, $F^0_{0+s+n} \in \mathfrak{L}^1_0(\mathcal{H}_{s+n})$, $g_{1+n} \in \mathfrak{L}(\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_n)$, тоді сильний розв'язок задачі Коші для ієрархії квантових рівнянь ББҐКІ відкритої квантової системи зображується послідовністю операторів (3.5) і для довільних початкових станів – слабкий розв'язок.*

4. Поширення початкових кореляцій у відкритих квантових системах

Оскільки початковий стан відкритої квантової системи визначається початковим станом виділеної частинки (3.7), стан системи в довільний момент часу (3.5) може бути описано в еквівалентний спосіб за допомогою послідовністю редукованих функціоналів стану $F(t \mid F_1(t)) = (F_{1+0}(t,\mathfrak{t}), F_{1+1}(t,\mathfrak{t},1 \mid F_{1+0}(t)),\ldots, F_{1+s}(t,\mathfrak{t},1,\ldots,s \mid F_{1+0}(t)),\ldots)$, які визначаються розв'язком $F_{1+0}(t,\mathfrak{t})$ кінетичного рівняння для стану виділеної квантової частинки (узагальнене кінетичне рівняння Фоккера – Планка відкритої квантової системи) [21].

Редуковані функціонали стану $F_{1+s}(t,\mathfrak{t},1,\ldots,s \mid F_{1+0}(t))$, $s \geq 1$, зображуються такими розкладами в ряд:

$$F_{1+s}\big(t,\mathfrak{t},1,\ldots,s \mid F_{1+0}(t)\big) \doteq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\mathrm{Tr}_{s+1,\ldots,s+n}\, \mathfrak{V}_{1+n}(t, \tag{4.1}$$
$$\{\mathfrak{t},1,\ldots,s\}, s+1,\ldots,s+n)F_{1+0}(t,\mathfrak{t}), \quad s \geq 1,$$

де твірні еволюційні оператори $\mathfrak{V}_{1+n}(t)$, $n \geq 0$, визначаються такими розкладами:

$$\mathfrak{V}_{1+n}(t,\{\mathfrak{t},1,\ldots,s\},s+1,\ldots,s+n) \doteq \tag{4.2}$$

$$n!\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\sum_{m_1=1}^{n}\ldots\sum_{m_k=1}^{n-m_1-\ldots-m_{k-1}}\frac{1}{(n-m_1-\ldots-m_k)!}\times$$
$$\mathfrak{A}_{1+n-m_1-\ldots-m_k}(t,\{\mathfrak{t},1,\ldots,s\},s+1,\ldots,s+n-m_1-\ldots-$$
$$m_k)F^0_{0+s+n-m_1-\ldots-m_k}(1,\ldots,s+n-m_1-\ldots-m_k)\times$$
$$g_{1+s+n-m_1-\ldots-m_k}(\mathfrak{t},1,\ldots,s+n-m_1-\ldots-m_k)\mathfrak{A}_1(-t,\mathfrak{t})\times$$
$$\prod_{j=1}^{k}\Big(\frac{1}{m_j!}\mathfrak{A}_{1+m_j}(t,\mathfrak{t},s+1+n-m_j-\ldots-m_k,\ldots,$$
$$s+n-m_{j+1}-\ldots-m_k)F^0_{0+m_j}(s+1+n-m_j-\ldots-m_k,\ldots,$$
$$s+n-m_{j+1}-\ldots-m_k)g_{1+m_j}(\mathfrak{t},s+1+n-m_j-\ldots-m_k,\ldots,$$
$$s+n-m_{j+1}-\ldots-m_k)\mathfrak{A}_1(-t,\mathfrak{t})\Big).$$

Наведемо приклади твірних еволюційних операторів (4.2):

$$\mathfrak{V}_1(t,\{\mathfrak{t},1,\ldots,s\})=$$
$$\mathfrak{A}_1(t,\{\mathfrak{t},1,\ldots,s\})F^0_{0+s}(1,\ldots,s)g_{1+s}(\mathfrak{t},1,\ldots,s)\mathfrak{A}_1(-t,\mathfrak{t}),$$
$$\mathfrak{V}_2(t,\{\mathfrak{t},1,\ldots,s\},s+1)=$$
$$\mathfrak{A}_2(t,\{\mathfrak{t},1,\ldots,s\},s+1)F^0_{0+s+1}(1,\ldots,s+1)g_{1+s+1}(\mathfrak{t},1,\ldots,$$
$$s+1)\mathfrak{A}_1(-t,\mathfrak{t})-\mathfrak{A}_1(t,\{\mathfrak{t},1,\ldots,s\})F^0_{0+s}(1,\ldots,s)g_{1+s}(\mathfrak{t},1,\ldots,$$
$$s)\mathfrak{A}_1(-t,\mathfrak{t})\mathfrak{A}_2(t,\mathfrak{t},s+1)F^0_{0+1}(s+1)g_{1+1}(\mathfrak{t},s+1)\mathfrak{A}_1(-t,\mathfrak{t}),$$

де оператор $\mathfrak{A}_1(-t,\mathfrak{t})$ є оберненим оператором до кумулянта (3.6) першого порядку $\mathfrak{A}_1(t,\mathfrak{t})$ груп операторів (2.1).

За умови на густину частинок оточення $\alpha<e^{-4}$, ряд (4.1) збігається за нормою простору $\mathfrak{L}^1(\mathcal{H}_1\otimes\mathcal{H}_s)$ для довільних $t\in\mathbb{R}^1$.

Редуковані функціонали стану (4.1) описують процес поширення початкових кореляцій та народження кореляцій у квантових відкритих системах в термінах оператора густини виділеної частинки.

Редукований оператор густини виділеної частинки з послідовності $F(t\mid F_1(t))$ зображується таким розкладом в ряд

$$F_{1+0}(t,\mathfrak{t})=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\,\mathrm{Tr}_{1,\ldots,n}\,\mathfrak{A}_{1+n}(t)g_{1+n}(\mathfrak{t},1,\ldots,n)F^0_{0+n}(1,\ldots,n)F^0_{1+0}(\mathfrak{t}),\tag{4.3}$$

де твірні оператори $\mathfrak{A}_{1+n}(t)$, $n\geq 0$, визначаються розкладами (3.6), є розв'язком задачі Коші для еволюційного рівняння для стану виділеної частинки, а саме немарковського квантового кінетичного рівняння типу рівняння Фоккера – Планка:

$$\frac{\partial}{\partial t}F_{1+0}(t,\mathfrak{t}) = \mathcal{N}(\mathfrak{t})F_{1+0}(t,\mathfrak{t}) + \mathrm{Tr}_1\,\mathcal{N}_{\mathrm{int}}(\mathfrak{t},1)F_{1+1}(t,\mathfrak{t},1 \mid F_{1+0}(t)), \quad (4.4)$$

$$F_{1+0}(t,\mathfrak{t})|_{t=0} = F^0_{1+0}(\mathfrak{t}). \quad (4.5)$$

У рівнянні (4.4) редукований функціонал стану $F_{1+1}(t,\mathfrak{t},1 \mid F_{1+0}(t))$ зображується розкладом в ряд (4.1) редукованих функціоналів стану виділеної частинки у випадку $s=1$, та оператори $\mathcal{N}(\mathfrak{t})$ і $\mathcal{N}_{\mathrm{int}}(\mathfrak{t},1)$ генератора рівняння фон Неймана визначені на підпросторі $\mathfrak{L}^1_0(\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_1)$ відповідно такими формулами:

$$\mathcal{N}(\mathfrak{t})f_{1+s} \doteq -i\big(K(\mathfrak{t})\,f_{1+s} - f_{1+s}\,K(\mathfrak{t})\big),$$
$$\mathcal{N}_{\mathrm{int}}(\mathfrak{t},1)f_{1+s} \doteq -i\big(\Phi(\mathfrak{t},1)\,f_{1+s} - f_{1+s}\,\Phi(\mathfrak{t},1)\big),$$

де використано оператори введені в означенні (2.1).

Підкреслимо, що коефіцієнти немарковського кінетичного рівняння (4.4) визначаються початковими кореляціями станів виділеної квантової частинки та її оточення.

Доведення наведеного основного результату ґрунтується на застосуванні кінетичних кластерних розкладів [17] до твірних операторів (3.6) непертурбативного розв'язку (3.5) задачі Коші для ієрархії рівнянь ББҐКІ.

Справедливе така теорема існування розв'язку задачі Коші (4.4),(4.5).

Теорема 4.1. *Якщо початковий стан (4.5) виділеної частинки* $F^0_{1+0} \in \mathfrak{L}^1(\mathcal{H})$ *та* $g_{1+n} \in \mathfrak{L}(\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_n)$*, тоді за умови:* $\sup_{n\geq 0}\alpha^{-n}\|F^0_{0+n}\|_{\mathfrak{L}^1(\mathcal{H}_n)} < +\infty$*, де* $\alpha < e^{-4}$*, для* $t \in \mathbb{R}$ *розв'язок задачі Коші (4.4),(4.5) зображується розкладом в ряд (4.3). Для початкових станів* $F^0_{1+0} \in \mathfrak{L}^1_0(\mathcal{H})$ *– це сильний розв'язок, а для довільних станів з простору* $\mathfrak{L}^1(\mathcal{H})$ *– слабкий розв'язок.*

Схема доведення цього твердження аналогічна доведенню теореми про існування розв'язку узагальненого кінетичного рівняння Фоккера – Планка для газу Енскоґа [23].

Процес народження та поширення початкових кореляцій у квантових відкритих системах в термінах оператора густини виділеної частинки також може бути описано за допомогою кумулянтних розкладів редукованих функціоналів стану (4.1)

$$G_{1+n}\big(t,\mathfrak{t},1,\ldots,n \mid F_{1+0}(t)\big) =$$

$$\sum_{\mathrm{P}:\,(\mathfrak{t},1,\ldots,n)=\bigcup_i X_i} (-1)^{|\mathrm{P}|-1}(|\mathrm{P}|-1)! \prod_{X_i\subset \mathrm{P}} F_{|X_i|}\big(t, X_i \mid F_{1+0}(t)\big), \quad n \geq 1.$$

У цьому випадку редуковані кореляційні функціонали зображуються розкладами в такі ряди:

$$G_{1+s}\big(t,\mathfrak{t},1,\ldots,s \mid F_{1+0}(t)\big) \doteq \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\mathrm{Tr}_{s+1,\ldots,s+n}\, \mathfrak{V}_{1+s+n}(t,$$
$$\mathfrak{t},1,\ldots,s,s+1,\ldots,s+n)F_{1+0}(t,\mathfrak{t}), \quad s\geq 1,$$

де твірні оператори $\mathfrak{V}_{1+s+n}(t)$, $n \geq 0$, визначаються розкладами (4.2) відповідного порядку, тобто $(1+s+n)$-го порядку на відміну від твірних операторів $(1+n)$-го порядку у випадку редукованих функціоналів стану (4.1), та редукований оператор густини (редукований кореляційний оператор) $F_{1+0}(t,\mathfrak{t})$ є розв'язком (4.3) задачі Коші для рівняння типу кінетичного рівняння Фоккера – Планка (4.4) для виділеної частинки.

5. Висновки

Таким чином, в роботі на основі непертурбативного розв'язку (2.5) ієрархії еволюційних рівнянь фон Неймана (2.3) для кореляційних операторів квантової відкритої системи розвинуто новий підхід до строгого виведення кінетичного рівняння Фоккера – Планка (4.4) системи багатьох квантових частинок, яка складається з виділеної частинки та її оточення, за наявності кореляцій початкових станів. Зокрема, якщо початковий стан визначається послідовністю редукованих операторів густини (3.7), тоді еволюція всіх можливих станів відкритої квантової системи може бути описана без будь-яких апроксимацій за допомогою редукованого оператора густини (редукованого кореляційного оператора) виділеної частинки, який є розв'язком задачі Коші для узагальненого квантового рівняння Фоккера – Планка (4.4),(4.5), та послідовності функціоналів (4.1) від такого оператора. Іншими словами, встановлене узагальнене кінетичне рівняння Фоккера – Планка (4.4) є еквівалентним методом опису еволюції станів виділеної частинки в оточенні довільного числа квантових частинок нарівні з ієрархією квантових рівнянь ББҐКІ для послідовності редукованих операторів густини (3.5).

Аналогічно до робіт [17],[24] наведені вище результати можуть бути поширені на відкриті системи багатьох ферміонів та бозонів, а також на квантово-класичні відкриті системи [28],[34]. Твердження сформульованих теорем справедливі також для відкритих квантових систем у випадку кулонівського потенціалу взаємодії між зарядженими частинками.

Зазначимо, що стани частинок оточення з простору ядерних операторів описують системи скінченого середнього числа частинок. Для опису еволюції станів виділеної частинки в оточенні системи нескінченного числа частинок, зокрема оточення в рівноважному стані (квантова частинка в термостаті), розв'язок (4.3) узагальненого кінетичного рівняння Фоккера – Планка (4.4) має бути обґрунтовано для початкових станів оточення, які належать до простору послідовностей обмежених операторів [17]. У цьому випадку кожний член розкладів у ряд для розв'язку (4.3) і послідовності маргінальних функціоналів стану (4.1) містить розбіжні вирази, які можуть бути регуляризовані за допомогою встановленої структури твірних операторів (2.6) та (4.2) зазначених розкладів в ряд.

Зауважимо, що квантові кінетичні рівняння типу рівняння Фоккера – Планка сформульовані за допомогою евристичних міркувань [6],[33], описують скейлінгові наближення розв'язку задачі Коші кінетичного рівняння (4.4), наприклад, в границі слабкого зв'язку виділеної частинки й оточення [33], або дифузійного скелінгового наближення, а саме, масивної (макроскопічної) виділеної частинки та легких (мікроскопічних) частинок оточення (середовища) [29].

Розвинутий підхід також може бути застосований до проблеми виведення квантових кінетичних рівнянь немарковського типу [35] з динаміки відкритих квантових систем багатьох частинок, якими описуються ефекти пам'яті дифузійних процесів макроскопічних частинок у плинах частинок [12] або в плазмових системах [4]. Відмітимо також існування іншого підходу до опису еволюції квантових відкритих систем за наявності кореляцій початкових станів, який ґрунтується на описі відкритої системи в термінах спостережуваних [15].

Література

[1] T. Bodineau, I. Gallagher, L. Saint-Raymond. The Brownian motion as the limit of a deterministic system of hard-spheres. *Invent. Math.*, 203(2):493–553, 2016. doi: 10.1007/s00222-015-0593-9.

[2] M. M. Bogolyubov. Stochastic processes in dynamical systems. *Sov. J. Particles Nucl.*, 9:501–579, 1978.

[3] M. M. Bogolyubov, M. M. Krylov. Fokker–Planck equations generated in perturbation theory by a method based on the spectral properties of a perturbed Hamiltonian. *Zapiski Kafedry Math. Phys. Acad. Sci. USSR*, 4:5–80, 1939 (in Ukrainian).

[4] M. Bonitz, C. Henning, D. Block. Complex plasmas: a laboratory for strong correlations. *Rep. Prog. Phys.*, 73:066501 (29p), 2010. doi:10.1088/0034-4885/73/6/066501.

[5] H.-P. Breuer, E.-M. Laine, J. Piilo, B. Vacchini. Colloquium: Non-Markovian dynamics in open quantum systems. *Rev. Mod. Phys.*, 88:021002, 2016. URL: https:

//link.aps.org/doi/10.1103/RevModPhys.88.021002, doi:10.1103/RevModPhys.88.021002.

[6] H.–P. Breuer, F. Petruccione. *The Theory of Open Quantum System*. Oxford University Press, 2002.

[7] C. Cercignani, V. I. Gerasimenko, D. Ya. Petrina. *Many-particle Dynamics and Kinetic Equations*. Springer, (Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1st ed. 1997), 2012. doi:10.1007/978-94-011-5558-8.

[8] S. Chandrasekhar. Stochastic problems in physics and astronomy. *Rev. Mod. Phys.*, 15:1–89, 1943. doi:10.1103/RevModPhys.15.1.

[9] F. Ciccarello, S. Lorenzo, V. Giovannetti, G. M. Palma. Quantum collision models: Open system dynamics from repeated interactions. *Phys. Reports*, 954:1–70, 2022. doi:10.1016/j.physrep.2022.01.001.

[10] I. de Vega, D. Alonso. Dynamics of non-Markovian open quantum systems. *Rev. Mod. Phys.*, 89:015001, 2017. URL: https://link.aps.org/doi/10.1103/RevModPhys.89.015001, doi:10.1103/RevModPhys.89.015001.

[11] D.-A. Deckert, J. Frölich, P. Pickl, A. Pizzo. Effective dynamics of a tracer particle interacting with an ideal Bose gas. *Commun. Math. Phys.*, 328:597–624, 2014. doi:10.1007/s00220-014-1987-z.

[12] L. Erdös. Lecture notes on quantum Brownian motion. In *Quantum Theory from Small to Large Scales. Lecture notes of Les Houches summer school, v. 95*. Oxford University Press, 2012.

[13] R. Figari, A. Teta. *Quantum Dynamics of a Particle in a Tracking Chamber*. SpringerBriefs in Physics. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 2014.

[14] A. D. Fokker. Die mittlere energie rotierender elektrischer dipole im strahlungsfeld. *Ann. Phys.*, 43:810–820, 1914. doi:10.1002/andp.19143480507.

[15] V. Gerasimenko. New approach to derivation of quantum kinetic equations with initial correlations. *Carpathian Math. Publ.*, 7:38–48, 2015. doi:10.15330/cmp.7.1.38-48.

[16] V. Gerasimenko, V. Shtyk. Evolution of correlations of quantum many-particle systems. *J. Stat. Mech.*, 2008:P03007, 2008.

[17] V. I. Gerasimenko. Hierarchies of quantum evolution equations and dynamics of many-particle correlations. In *Statistical Mechanics and Random Walks: Principles, Processes and Applications*, pages 233–288. N.Y.: Nova Science Publ., Inc., 2013.

[18] V. I. Gerasimenko. The generalized Fokker–Planck kinetic equation of open quantum systems. *Reports of NAS of Ukraine*, 1:3–9, 2018. doi:10.15407/dopovidi2018.01.003.

[19] V. I. Gerasimenko. Description of evolution of states in terms of operators originating by density matrix. In *Understanding Density Matrices*, pages 229–250. N.Y.: Nova Science Publ., Inc., 2019.

[20] V. I. Gerasimenko. Processes of creation and propagation of correlations in large quantum particle system. In *Panorama of Contemporary Quantum Mechanics - Concepts and Applications*. IntechOpen, 2019. doi:10.5772/intechopen.82836.

[21] V. I. Gerasimenko. Nonlinear kinetic equations of quantum systems. *Proceedings Inst. Math. NASU*, 17:82–112, 2020.

[22] V. I. Gerasimenko, I. V. Gapyak. The non-Markovian Fokker–Planck kinetic equation for a system of hard spheres. *Reports of NAS of Ukraine*, (12):29–35, 2014. doi:10.15407/dopovidi2014.12.029.

[23] V. I. Gerasimenko, I. V. Gapyak. The Fokker–Planck equation with initial correlations in collisional kinetic theory. *Bukovina Math. J.*, 3:52–58, 2015.

[24] V. I. Gerasimenko, D. O. Polishchuk. Dynamics of correlations of Bose and Fermi particles. *Math. Meth. Appl. Sci.*, 34(1):76–93, 2011. doi:10.1002/mma.1336.

[25] V. I. Gerasimenko, T. V. Ryabukha, M. O. Stashenko. On the structure of expansions for the BBGKY hierarchy solutions. *J Phys. A: Math. and General*, 37(42):9861–9872, 2004. doi:10.1088/0305-4470/37/42/002.

[26] V. I. Gerasimenko, V. O. Shtyk. Evolution of correlations of quantum many-particle systems. *J. Stat. Mech.: Theory and Exp.*, P03007:25p., 2008. doi:10.1088/1742-5468/2008/03/P03007.

[27] M. S. Green. Boltzmann equation from the statistical mechanical point of view. *J. Chem. Phys*, 25:836–855, 1956. doi:10.1063/1.1743132.

[28] R. Kapral. Quantum dynamics in open quantum-classical systems. *J. Phys.: Condens. Matter*, 27:073201, 2015. doi:10.1088/0953-8984/27/7/073201.

[29] J. L. Lebowitz, Ya. G. Sinai, N. I. Chernov. Dynamics of a massive piston in an ideal gas. *Russ. Math. Surv.*, 57:1045–1125, 2002.

[30] M. Merkli. Correlation decay and Markovianity in open systems. *Ann. Henri Poincaré*, 2022. doi:10.1007/s00023-022-01226-5.

[31] G. A. Paz–Silva, M. J. W. Hall, H. M. Wiseman. Dynamics of initially correlated open quantum systems: Theory and applications. *Phys. Rev. A*, 100:042120, 2019. doi:10.1103/PhysRevA.100.042120.

[32] M. Planck. *Über einen Satz der statistischen Dynamik und seine Erweiterung in der Quantentheorie*. Reimer, 1917.

[33] A. Rivas, S. F. Huelga. *Open Quantum Systems: An Introduction*. SpringerBriefs in Physics. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 2012.

[34] A. Sergi, D. Lamberto, A. Migliore, Messina. Quantum–classical hybrid systems and Ehrenfest's theorem. *Entropy*, 25(4):602, 2023. doi:10.3390/e25040602.

[35] B. Vacchini, A. Smirne, E.-M. Laine, J. Piilo, H.-P. Breuer. Markovianity and non-Markovianity in quantum and classical systems. *New Journal of Physics*, 13(9):093004, 2011. URL: https://dx.doi.org/10.1088/1367-2630/13/9/093004, doi:10.1088/1367-2630/13/9/093004.

В. І. Герасименко

Інститут математики НАН України, м. Київ

Email: gerasym@imath.kiev.ua

ORCID: orcid.org/0000-0003-2577-2237

Збірник праць Ін-ту математики НАН України (2022) Т. 19, № 1, 27–41

Інтеграл типу Коші в задачах про гладкість функцій у областях і на кривих комплексної площини

О. Ф. Герус

Присвячується пам'яті професора Олександра Бахтіна

Abstract. In this paper we give examples of using the Cauchy-type integral to construct functions with given smoothness properties.

Анотація. В даній роботі ми наводимо приклади застосування інтеграла типу Коші для побудови функцій з наперед заданими гладкісними властивостями

1. Вступ

В роботах багатьох авторів розглядалась задача про залежність гладкісних властивостей як самого інтеграла типу Коші, так і його межових значень від гладкісних властивостей підінтегральної функції для областей, обмежених кривими різних класів (від гладких до спрямлюваних та квазіконформних). Головним результатом в таких задачах є верхня оцінка модуля гладкості інтеграла мажорантою, що залежить від модуля гладкості підінтегральної функції. Наступним кроком є доведення порядкової точності отриманої оцінки. Для цього будується приклад такої функції, що для модуля гладкості її інтеграла типу Коші вірна нижня оцінка з такою ж мажорантою (з точністю до сталого множника), як і верхня. Виявилось, що інтеграл типу Коші від спеціально побудованої функції по спеціально підібраній кривій є ефективним інструментом для конструювання таких прикладів.

В цій роботі ми викладаємо результати, опубліковані нами раніше в роботах [5], [6], [7], [1], [2].

2010 Mathematics Subject Classification: 30E20
УДК 517.5
Ключові слова: інтеграл типу Коші, модуль неперервності, модуль гладкості

2. Аналітичні в області функції з наперед заданим порядком модуля гладкості

Нехай G — область у комплексній площині $\mathbb{C}$. Розглянемо задачу побудови функції $f : \overline{G} \to \mathbb{C}$, аналітичної в G і неперервної в її замиканні $\overline{G}$, з наперед заданими гладкісними властивостями в $\overline{G}$.

Для опису гладкісних властивостей функції f ми користуємось N-рівномірними модулями гладкості, запровадженими П. М. Тамразовим [11] для довільної множини $E \subset \mathbb{C}$ та для довільної скінченної функції $f : E \to \mathbb{C}$ наступним чином.

Нехай $N \geqslant 1$, k — натуральне, $t \in E$, $\delta > 0$,

$$E_{t,\delta} := \{\zeta \in E : |\zeta - t| \leqslant \delta\},$$

$l(k, E, t, \delta)$ — множина точкових наборів $\{z_0; \ldots ; z_k\} \subset E_{t,\delta}$, які задовольняють умову

$$\frac{|z_i - z_j|}{|z_p - z_q|} \leqslant N \quad \forall i, j, p, q = 0, \ldots , k; p \neq q. \tag{2.1}$$

Локальні і *глобальні модулі гладкості* функції f визначаються відповідно формулами

$$\omega_{k,N,E}(f, t, \delta) := \sup_{\{z_0;\ldots;z_k\} \in l(k,E,t,\delta)} |[z_0, \ldots , z_k; f, z_0]| ,$$

$$\omega_{k,N,E}(f, \delta) := \sup_{t \in E} \omega_{k,N,E}(f, t, \delta),$$

де

$$[z_0, \ldots , z_k; f, z_0] := [z_0, \ldots , z_k]_f \prod_{j=1}^{k} (z_0 - z_j)$$

— *скінченна різниця*, а

$$[z_0, \ldots , z_k]_f := \sum_{q=0}^{k} f(z_q) \prod_{\substack{r=0 \\ r \neq q}}^{k} (z_q - z_r)^{-1}$$

— *розділена різниця* функції f.

Модулі гладкості $\omega_{k,N,E}(f, t, \delta)$ і $\omega_{k,N,E}(f, \delta)$ рівномірно неперервної функції f є нескінченно малими при $\delta \to 0$. Порядок цих нескінченно малих характеризує гладкісні властивості функції f.

Означення 2.1 ([11]). *Нехай $\mathbb{R}_+ := (0, +\infty)$, $\sigma \geqslant 1$, $\gamma \geqslant 0$. Неспадна функція $\omega : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, яка задовольняє нерівність*

$$\omega(t\delta) \leqslant \sigma t^{\gamma} \omega(\delta) \qquad \forall t > 1, \forall \delta > 0,$$

називається нормальною мажорантою класу (σ, γ).

Позначатимемо надалі через $c\,(\cdot), \ldots, c\,(\cdot, \ldots, \cdot)$ додатні величини (можливо різні), які залежать тільки від аргументів у дужках. Символом c, якщо не вказано інше, позначатимемо абсолютну сталу.

Нехай $\lambda \geqslant 1$ і E — континуум, довільна пара точок якого може бути сполучена кривою класу S_λ (тобто довільна дуга кривої не більше, ніж у λ разів довша за відповідну хорду), яка міститься в E. Тоді (див. [11], [3]) модуль гладкості $\omega_{k,N,E}(f, \cdot)$ функції $f : E \to \mathbb{C}$ є нормальною мажорантою класу $(c(\lambda, k), k)$.

Означення 2.2. *Область G називається S-досяжною в точці $t \in \partial G$ якщо існують числа $a > 0$, $\alpha \in (0, \pi/3)$, $\varphi_0 \in [0, 2\pi)$ і сектор*

$$S := \{z \in \mathbb{C} : z = t + re^{i\varphi}, r \in [0, 2a], |\varphi - \varphi_0| \leqslant \alpha\},$$

які задовольняють такі дві умови:

$$S \cap G = \emptyset, \tag{2.2}$$

$$\{z \in \mathbb{C} : z = t - re^{i\varphi_0}, r \in [0, a]\} \subset \overline{G}. \tag{2.3}$$

Теорема 2.3. *Нехай область G — S-досяжна в точці $t \in \partial G$, k — натуральне, $N \in [k, +\infty)$, ω — нормальна мажоранта класу (σ, k), така, що $\omega(+0) = 0$. Тоді існує функція $f : \overline{G} \to \mathbb{C}$, аналітична в G і неперервна в $\overline{G}$, яка задовольняє наступні нерівності:*

$$c\,(k, \sigma)\,\omega(\delta) \leqslant \omega_{k,N,\overline{G}}(f, t, \delta) \leqslant \\ \leqslant \omega_{k,N,\overline{G}}(f, \delta) \leqslant c\,(k, N, \sigma, \alpha)\,\omega(\delta) \quad \forall \delta \in (0, a]. \tag{2.4}$$

Доведення. Для зручності припустимо, що $t = 0$ і $\varphi_0 = 0$. З умови (2.2) випливає існування числа $K(\alpha) \leqslant 1/2$, такого, що

$$|z - x| \geqslant K(\alpha)(|z| + x) \quad \forall z \in \overline{G},\ \forall x \in [0, a]. \tag{2.5}$$

Функція

$$f(z) = \int\limits_0^a \frac{(k-1)zx - (k+1)z^2}{(x-z)^3}\omega(x)\,dx, \quad z \in \overline{G},$$

— аналітична в G і неперервна в $\overline{G} \setminus \{0\}$. Доведемо її неперервність у початку координат. Покладаючи $|z| < a$ та використовуючи нерівність (2.5), маємо

$$|f(z) - f(0)| \leqslant \frac{2k}{K^3(\alpha)} \left(\omega(|z|) + |z| \int\limits_{|z|}^a \frac{\omega(x)}{x^2}\,dx \right) \to 0 \quad \text{при} \quad |z| \to 0.$$

Центральна нерівність в (2.4) вірна за означенням глобального модуля гладкості. Щоб довести верхню оцінку модуля гладкості $\omega_{k,N,\overline{G}}(f,\delta)$ для довільних $z \in \overline{G}$ і $\delta > 0$, розглянемо набір точок $\{z_0;\ldots;z_k\} \subset \overline{G}_{z,\delta}$, який задовольняє умову (2.1). Можливі два випадки:

1) $|z_j| \leqslant \left(2 + \dfrac{2}{K(\alpha)}\right)\delta$ для $j = 0,\ldots,k$;

2) $|z_j| \geqslant \dfrac{2}{K(\alpha)}\delta$ для $j = 0,\ldots,k$.

Розглянемо обидва.

1) За означенням розділеної різниці отримаємо

$$[z_0,\ldots,z_k]_f = \int\limits_0^a \sum_{q=0}^{k} \frac{(k-1)z_q x - (k+1)z_q^2}{(x-z_q)^3 \prod\limits_{\substack{r=0\\ r\neq q}}^{k} (z_q - z_r)}\,\omega(x)\,dx =$$

$$= \int\limits_0^a \left(-\frac{2x^2}{\prod\limits_{r=0}^{k}(x-z_r)} \sum_{r=0}^{k}\sum_{j=r}^{k} \frac{1}{(x-z_r)(x-z_j)} + \right.$$

$$\left. + \frac{(k+3)x}{\prod\limits_{r=0}^{k}(x-z_r)} \sum_{r=0}^{k} \frac{1}{(x-z_r)} - \frac{k+1}{\prod\limits_{r=0}^{k}(x-z_r)} \right) \omega(x)\,dx =$$

$$= \int\limits_0^a \frac{\sum\limits_{j=0}^{2k+1} c_j(k) x^j \prod\limits_{q=0}^{k} z_q^{n(q,j)}}{\prod\limits_{r=0}^{k}(x-z_r)^3}\,\omega(x)\,dx, \quad (2.6)$$

де $\sum\limits_{q=0}^{k} n(q,j) = 2k+2-j$. З (2.5), (2.6) випливає

$$|[z_0,\ldots,z_k]_f| \leqslant \frac{1}{K^{3k+3}(\alpha)} \sum_{j=0}^{2k+1} |c_j(k)| \int\limits_0^a \frac{x^j \prod\limits_{q=0}^{k} |z_q|^{n(q,j)}}{\prod\limits_{r=0}^{k}(x+|z_r|)^3}\,\omega(x)\,dx. \quad (2.7)$$

Позначимо

$$\Delta := \min_{0\leqslant q\leqslant k} |z_q| = |z_l|, \quad d := \max_{\substack{0\leqslant q\leqslant k\\ 0\leqslant r\leqslant k}} |z_q - z_r|.$$

Покладемо $\Delta < \dfrac{d}{2N}$ (у протилежному випадку доведення аналогічне). Тоді

$$\frac{d}{2N} < |z_q| < \frac{2N+1}{2N}d \quad \text{для} \quad q \neq l.$$

Оцінимо доданок з (2.7), який відповідає $j = 0$. З (2.6) випливає, що $n(q, 0) = 2$ для $q = 0, \dots, k$. Тоді, покладаючи для визначеності $d < a$, отримуємо

$$\int\limits_0^a \frac{\prod\limits_{q=0}^k |z_q|^2}{\prod\limits_{r=0}^k (x + |z_r|)^3}\, \omega(x)\, dx \leqslant$$

$$\leqslant c(k,N) \left(\frac{1}{d^k\Delta} \int\limits_0^\Delta \omega(x)\, dx + \frac{1}{d^{k+1}} \int\limits_\Delta^d \omega(x)\, dx + d^{2k+2} \int\limits_d^a \frac{\omega(x)}{x^{3k+3}}\, dx \right) \leqslant$$

$$\leqslant c(k,N,\sigma) \frac{\omega(d)}{d^k}.$$

Інші доданки в нерівності (2.7) оцінюються подібним чином.

Таким чином, беручи до уваги, що $d \leqslant 2\delta$, отримуємо з (2.7), що

$$|[z_0, \dots, z_k; f, z_0]| \leqslant c(k,N,\sigma,\alpha)\, \omega(d) \leqslant c(k,N,\sigma,\alpha)\, \omega(\delta). \tag{2.8}$$

2) Позначимо через U замкнену опуклу оболонку множини точок $\{z_0; \dots; z_k\}$. Завдяки (2.5) U не перетинається з $[0, a]$ і нерівність

$$|z - x| \geqslant \frac{K(\alpha)}{K(\alpha)+2}(|z| + x) \tag{2.9}$$

виконується для всіх $z \in U,\ x \in [0, a]$.

Позначимо $|z^*| := \max\limits_{z\in U} |z|$, $|z_*| := \min\limits_{z\in U} |z|$. Оскільки $K(\alpha) \leqslant \dfrac{1}{2}$, маємо $|z_*| \geqslant 3\delta$. Тому

$$|z^*| \leqslant |z_*| + |z^* - z_*| \leqslant |z_*| + 2\delta \leqslant \frac{5}{3}|z_*|. \tag{2.10}$$

Для довільного фіксованого $x \in [0, a]$ функція

$$F(x, z) := \frac{(k-1)zx - (k+1)z^2}{(x-z)^3}$$

— аналітична по змінній z у замкненій області U. Використовуючи відому нерівність (див. [4], с. 40) і оцінки (2.9), (2.10), отримуємо

$$\left|[z_0,\dots,z_k]_{F(x,\cdot)}\right| \leqslant \frac{1}{k!}\max_{z\in U}\left|\frac{\partial^k F(x,z)}{\partial z^k}\right| = (k+1)\max_{z\in U}\left|\frac{(k+1)zx+z^2}{(x-z)^{k+3}}\right| \leqslant$$
$$\leqslant c(k,\alpha)\frac{(k+1)|z^*|\,x+|z^*|^2}{(x+|z^*|)^{k+3}}.$$

Нехай, для визначеності, $|z^*|<a$. Тоді

$$|[z_0,\dots,z_k;f,z_0]| \leqslant c(k,\alpha)\,d^k\int\limits_0^a \frac{(k+1)|z^*|\,x+|z^*|^2}{(x+|z^*|)^{k+3}}\,\omega(x)\,dx \leqslant$$
$$\leqslant c(k,\alpha)\,d^k\left(\frac{\omega(|z^*|)}{|z^*|^k}+\sigma\frac{\omega(d)}{d^k}\int\limits_{|z^*|}^a\frac{|z^*|}{x^2}\,dx\right) \leqslant$$
$$\leqslant c(k,\alpha,\sigma)\,\omega(d) \leqslant c(k,\alpha,\sigma)\,\omega(\delta). \quad (2.11)$$

Завдяки довільності точкового набору, з нерівностей (2.8), (2.11) випливає

$$\omega_{k,N,\overline{G}}(f,\delta) \leqslant c(k,N,\sigma,\alpha)\,\omega(\delta).$$

Щоб оцінити знизу $\omega_{k,N,\overline{G}}(f,t,\delta)$, для довільного $\delta\in(0,a]$ розглянемо k-рівномірний точковий набір $\{z_j=-\dfrac{j\delta}{k} : j=0,\dots,k\}$, який міститься в $\overline{G}$ завдяки умові (2.3). Застосуємо співвідношення (2.6) і умову $z_0=0$. Тоді завдяки тому, що підінтегральна функція додатна, застосовуючи нерівність

$$\sum_{j=r}^{k}\frac{2x}{x+\frac{j\delta}{k}} \leqslant k \quad \text{для всіх} \quad r=1,\dots,k,$$

отримаємо

$$|[z_0,\dots,z_k;f,z_0]| = \prod_{j=1}^{k} j\frac{\delta}{k}\int\limits_0^a \frac{\sum\limits_{r=1}^{k}\frac{1}{x+\frac{r\delta}{k}}\left(k+1-\sum\limits_{j=r}^{k}\frac{2x}{x+\frac{j\delta}{k}}\right)}{\prod\limits_{r=1}^{k}\left(x+\frac{r\delta}{k}\right)}\,\omega(x)\,dx \geqslant$$
$$\geqslant c(k)\,\delta^k\int\limits_0^{\delta/k}\frac{\omega(x)}{\delta^{k+1}}\,dx \geqslant c(k,\sigma)\,\omega(\delta).$$

Теорема доведена. □

Тепер застосуємо отриманий результат до доведення точності за порядком отриманої в роботі [5] верхньої оцінки модуля гладкості інтеграла типу Коші при додатковій умові на модуль гладкості підінтегральної функції на K-регулярних кривих.

Крива Γ називається K-регулярною, якщо існує додатна стала K, така, що для всіх $z \in \Gamma$ і $\delta > 0$ дугова міра множини $\Gamma_{z,\delta}$ не більша за $K\delta$. Такі криві були розглянуті В. В. Салаєвим в роботі [9], де доведені верхня та нижня оцінки для певного сингулярного інтеграла з ядром Коші в термінах регуляризованого модуля неперервності

$$\omega_\Gamma^*(f,\delta) := \delta \sup_{t \geqslant \delta} \left\{ \frac{1}{t} \sup_{\substack{z_1, z_2 \in \Gamma \\ |z_1 - z_2| \leqslant t}} |f(z_1) - f(z_2)| \right\}.$$

Нехай Γ — замкнена жорданова спрямлювана крива діаметра d, яка є межею внутрішньої D^+ та зовнішньої D^- відносно неї областей, $f : \Gamma \to \mathbb{C}$ — неперервна функція,

$$\Phi[f](z) := \frac{1}{2\pi i} \int\limits_\Gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta, \qquad z \in \mathbb{C} \setminus \Gamma,$$

— *інтеграл типу Коші*, $\Phi^+[f] : \overline{D^+} \to \mathbb{C}$, $\Phi^-[f] : \overline{D^-} \to \mathbb{C}$ — неперервні продовження функції $\Phi[f]$ відповідно на замикання $\overline{D^+}$, $\overline{D^-}$ і відповідно $\Phi_\Gamma^+[f]$, $\Phi_\Gamma^-[f]$ — їх звуження на криву Γ.

Теорема 2.4 ([5]). *Нехай Γ — K-регулярна крива, k — натуральне, $N \in [k, +\infty)$. Припустимо, що $f : \Gamma \to \mathbb{C}$ — функція, яка задовольняє умову*

$$\int\limits_0^{2d} \frac{\omega_{k,N,\Gamma}(f,x)\,\delta^k}{x\,(x^k + \delta^k)}\,dx \leqslant c\,\omega_{k,N,\Gamma}(f,\delta) \qquad \forall \delta > 0.$$

Тоді неперервні продовження $\Phi^+[f]$, $\Phi^-[f]$ існують і нерівність

$$\omega_{k,N,\overline{D^\pm}}(\Phi^\pm[f],\delta) \leqslant c_1\,\omega_{k,N,\Gamma}(f,\delta) \qquad \forall \delta > 0 \tag{2.12}$$

виконується з сталою c_1, не залежною від δ при $k \geqslant 2$ і залежною тільки від K та сталої c при $k = 1$.

Точність за порядком при $\delta \to 0$ оцінки (2.12) для довільної жорданової спрямлювані кривої Γ доводиться наступною теоремою.

Теорема 2.5. *Нехай Γ — замкнена жорданова спрямлювана крива, k — натуральне, $N \in [k, +\infty)$, ω — нормальна мажоранта класу (σ, k),* *така, що* $\omega(+0) = 0$. *Тоді для майже кожної точки* $t \in \Gamma$ *існує функція* $f : \Gamma \to \mathbb{C}$, *така, що*

$$\omega_{k,N,\Gamma}(f,\delta) \leqslant c(k,N,\sigma)\,\omega(\delta) \qquad \forall \delta \in (0,a], \tag{2.13}$$

$$\omega_{k,N,\overline{D^{\pm}}}(\Phi^{\pm}[f],t,\delta) \geqslant c(k,\sigma)\,\omega(\delta) \qquad \forall \delta \in (0,a], \tag{2.14}$$

де a *залежить тільки від* t *і* Γ.

Доведення. Завдяки спрямлюваності кривої Γ області D^{+}, D^{+} — S-досяжні майже в кожній точці $t \in \Gamma$. Тому теорема 2.3 застосовна до областей D^{+}, D^{+}. Оцінки (2.13), (2.14) випливають з співвідношення (2.4) завдяки рівності $\Phi^{\pm}[f](z) = f(z)$ для всіх $z \in \overline{D^{\pm}}$. Теорема доведена. □

Зауваження 2.6. Для $k = 1$ аналогічне твердження для певної множини мажорант ω в термінах регуляризованого модуля неперервності ω^{*}_{Γ} випливає з результату Т. С. Салімова [10]. А саме:

Теорема 2.7 ([10]). *Нехай* $\omega : \mathbb{R}_{+} \to \mathbb{R}_{+}$ — *зростаюча неперервна функція, для якої* $\dfrac{\omega(\delta)}{\delta}$ *спадає,* $\omega(+0) = 0$ *і*

$$\int\limits_{0}^{d} \frac{\omega(x)}{x}\,dx < +\infty.$$

Тоді існує неперервна функція $f : \Gamma \to \mathbb{C}$, *така, що*

$$c_1\,\omega(\delta) \leqslant \omega^{*}_{\Gamma}(f,\delta) \leqslant c_2\,\omega(\delta) \qquad \forall \delta \in (0,a],$$

$$\omega^{*}_{\Gamma}(\widetilde{f},\delta) \geqslant c\,\omega(\delta) \qquad \forall \delta \in (0,a],$$

де

$$\widetilde{f}(z) := \frac{1}{\pi i} \lim_{\varepsilon \to 0} \int\limits_{\Gamma \setminus \Gamma_{z,\varepsilon}} \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z}\,d\zeta + f(z), \qquad z \in \Gamma.$$

3. Нижня оцінка для модулів гладкості межових значень інтеграла типу Коші

В нашій роботі [5] опубліковане таке твердження.

Теорема 3.1. *Нехай* k — *натуральне,* $N \in [k, +\infty)$, Γ — K*-регулярна крива, функція* $f : \Gamma \to \mathbb{C}$ *задовольняє умову*

$$\int\limits_{0}^{d} \frac{\omega_{k,N,\Gamma}(f,x)}{x}\,dx < +\infty.$$

Тоді існують неперервні продовження $\Phi^+[f]$, $\Phi^-[f]$ і вірна оцінка

$$\omega_{k,N,\Gamma}(\Phi^{\pm}_{\Gamma}[f],\delta) \leqslant c\,(k,N,K) \int\limits_0^{2d} \frac{\omega_{k,N,\Gamma}(f,x)}{x\left(1+\left(\frac{x}{\delta}\right)^k\right)}\,dx, \qquad \delta>0. \tag{3.1}$$

Наступним твердженням доводиться точність за порядком оцінки (3.1)

Теорема 3.2. *Нехай k — натуральне, $N\in[k,+\infty)$, Γ — замкнена жорданова спрямлювана крива, $\Gamma\ni z_0$ — точка, в якій крива Γ має дотичну і z_0 не є точкою звороту кривої Γ, μ — нормальна мажоранта класу (σ,k). Тоді існує функція $f:\Gamma\to\mathbb{C}$, така, що*

$$\omega_{k,N,\Gamma}(f,\delta) \leqslant c\,(\sigma,k,N)\mu(\delta), \quad \delta>0, \tag{3.2}$$

і

a) якщо умова

$$\int\limits_0^{d} \frac{\mu(x)}{x}\,dx < +\infty \tag{3.3}$$

виконуєтьса, то вірна наступна оцінка:

$$\omega_{k,N,\Gamma}(\Phi^{+}_{\Gamma}[f],z_0,\delta) \geqslant c\,(k,\sigma,\Gamma,z_0) \int\limits_0^{2d} \frac{\mu(x)}{x\left(1+\left(\frac{x}{\delta}\right)^k\right)}\,dx, \qquad 0<\delta<d_0, \tag{3.4}$$

де d_0 залежить тільки від Γ, z_0, k;

b) якщо умова (3.3) не виконується, то інтеграл типу Kошіl $\Phi[f](z)$, $z\in D^+$, необмежений у околі точки z_0.

Зауваження 3.3. Аналогічне твердження вірне також для $\Phi^-_{\Gamma}[f]$.

Ця теорема та ідея її доведення вперше опубліковані в статті [6]. Є. Г. Гусейнов [8] довів аналогічне твердження в термінах інших модулів гладкості для гладких кривих Γ з обмеженнями на їх гладкість. В окремому випадку $k=1$ Т. С. Салімов [10] довів твердження теореми 3.2 для певної вужчої множини мажорант μ в термінах модулів неперервності ω^*_{Γ}.

Доведення теореми 3.2. Для зручності припустимо, що $z_0=0$ і напрям зовнішньої нормалі до кривої Γ в точці z_0 співпадає з додатним напрямом дійсної осі. Очевидно, існує таке $a>0$, що для довільного x

із сегмента дійсної осі $[-a, a]$ і для довільного $z \in \Gamma$ вірна нерівність

$$|x - z| \geqslant \frac{1}{2}(|x| + |z|). \tag{3.5}$$

Розглянемо функцію

$$f(z) := \frac{2^k}{\pi i} \int\limits_0^a \frac{\mu(x) z^{k+1}}{(x-z)(x+z)^{k+1}}\, dx, \qquad z \in \Gamma,$$

де мажоранта μ задовольняє умову (3.3).

Доведемо, що функція f задовольняє оцінку (3.2). Для довільних $\delta > 0$ і $t \in \Gamma$ розглянемо N-рівномірний точковий набір $\{z_0; \ldots; z_k\} \subset \Gamma_{t,\delta}$. Можливі лише два випадки:

1) $|z_j| \leqslant 6\delta$ для $j = 0, \ldots, k$,

2) $|z_j| \geqslant 4\delta$ для $j = 0, \ldots, k$.

Розглянемо обидва.

1) Застосовуючи означення скінченної різниці і нерівність (3.5), отримуємо

$$|[z_0, \ldots, z_k; f, z_0]| =$$

$$= \frac{2^k}{\pi} \prod_{j=1}^{k} |z_0 - z_j| \left| \sum_{q=0}^{k} \int\limits_0^a \frac{\mu(x) z_q^{k+1}\, dx}{(x - z_q)(x + z_q)^{k+1} \prod\limits_{\substack{r=0 \\ r \neq q}}^{k} (z_q - z_r)} \right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{2^k}{\pi} N^{k-1} \sum_{q=0}^{k} \int\limits_0^a \frac{\mu(x) z_q^{k+1}}{|x - z_q||x + z_q|^{k+1}}\, dx \leqslant$$

$$\leqslant c\,(k, N) \sum_{q=0}^{k} \int\limits_0^a \frac{\mu(x)|z_q^{k+1}|}{(x + |z_q|)^{k+2}}\, dx. \tag{3.6}$$

Припустимо для визначеності, що $|z_q| < a$ (у випадку, коли $|z_q| \geqslant a$ використовуємо аналогічні міркування). Завдяки монотонності та нормальності функції μ маємо

$$\int\limits_0^a \frac{\mu(x)|z_q|^{k+1}}{(x + |z_q|)^{k+2}}\, dx \leqslant \int\limits_0^{|z_q|} \frac{\mu(x)|z_q|^{k+1}}{(x + |z_q|)^{k+2}}\, dx + |z_q|^{k+1} \int\limits_{|z_q|}^a \frac{\mu(x)}{(x + |z_q|)^{k+2}}\, dx \leqslant$$

$$\leqslant c\,(\sigma)\mu(|z_q|)(2-\frac{|z_q|}{a})\leqslant c\,(\sigma)\mu(6\delta)\leqslant c\,(\sigma,k)\mu(\delta). \quad (3.7)$$

2) Позначимо через U замкнену опуклу оболонку точок $\{z_0;\dots;z_k\}$. Завдяки нерівності(3.5) множина U не перетинається з відрізком $[-a,a]$ і вірна нерівність

$$|x-z|\geqslant\frac{1}{5}(|x|+|z|),\qquad x\in[-a,a],z\in U.$$

Для довільного фіксованого $x\in[-a,a]$ функція

$$\varphi(x,z):=\frac{z^{k+1}}{(x-z)(x+z)^{k+1}}$$

— аналітична по змінній z в замкненій області U. Тому (див. [11], с. 32)

$$\left|[z_0,\dots,z_k]_{\varphi(x,\cdot)}\right|\leqslant\frac{1}{k!}\max_{z\in U}\left|\frac{\partial\varphi(x,z)}{\partial z^k}\right|. \quad (3.8)$$

Наступну формулу легко довести методом математичної індукції:

$$\frac{\partial\varphi(x,z)}{\partial z^k}=\frac{zP_{2k}(x,z)}{(x-z)^{k+1}(x+z)^{2k+1}},$$

де $P_{2k}(x,z)$ — поліном степеня $2k$ від змінних x та z. Звідси випливає, що

$$\left|\frac{\partial\varphi(x,z)}{\partial z^k}\right|\leqslant c\,(k)\frac{|z|(|z|^{2k}+|x|^{2k})}{|x-z|^{k+1}|x+z|^{2k+1}}. \quad (3.9)$$

Позначимо $|z_*|:=\min\limits_{z\in U}|z|$, $|z^*|:=\max\limits_{z\in U}|z|$. Очевидно, $|z_*|\geqslant3\delta$. Тому

$$|z^*|\leqslant|z_*|+|z^*-z_*|\leqslant|z_*|+2\delta\leqslant\frac{5}{3}|z_*|. \quad (3.10)$$

Нехай z_x — точка межі ∂U, у якій функція $\left|\frac{\partial\varphi(x,z)}{\partial z^k}\right|$ має максимум. Тоді, використовуючи нерівності (3.9), (3.5) і (3.10), отримуємо

$$\max_{z\in U}\left|\frac{\partial\varphi(x,z)}{\partial z^k}\right|=\left|\frac{\partial\varphi(x,z_x)}{\partial z^k}\right|\leqslant c\,(k)\frac{|z_x|(|z_x|^{2k}+|x|^{2k})}{|x|+|z_x|^{3k+2}}\leqslant$$

$$\leqslant c\,(k)\frac{|z^*|(|z^*|^{2k}+|x|^{2k})}{|x|+|z^*|^{3k+2}}. \quad (3.11)$$

Нехай для визначеності $|z^*| < a$. Беручи до уваги нерівності (3.8) і (3.11), маємо

$$
\begin{aligned}
|[z_0,\ldots,z_k;f,z_0]| &\leqslant \frac{2^k}{\pi}\prod_{j=1}^{k}|z_0-z_j|\int\limits_0^a \mu(x)|[z_0,\ldots,z_k]_{\varphi(x,\cdot)}|\,dx \leqslant \\
&\leqslant c\,(k)\delta^k\int\limits_0^a \mu(x)\frac{|z^*|(|z^*|^{2k}+|x|^{2k})}{|x|+|z^*|^{3k+2}}\,dx \leqslant \\
&\leqslant c\,(k)\delta^k\left(\int\limits_0^{|z^*|}\frac{\mu(x)}{|z^*|^{k+1}}\,dx+\int\limits_{|z^*|}^{a}\frac{\mu(x)|z^*|}{x^{k+2}}\,dx\right) \leqslant \\
&\leqslant c\,(k)\delta^k\left(\frac{\mu(|z^*|)}{|z^*|^k}+\sigma\frac{\mu(\delta)}{\delta^k}\int\limits_{|z^*|}^{a}\frac{|z^*|}{x^2}\,dx\right) \leqslant c(\sigma,k)\mu(\delta).
\end{aligned}
\tag{3.12}
$$

Нерівність (3.2) випливає з оцінок (2.6), (2.7) і (2.14). Щоб довести твердження а) теореми, застосуємо рівність $f(z) = f_1(z) - f_2(z)$, де

$$
f_1(z) := \frac{1}{2\pi i}\int\limits_0^a \frac{\mu(x)}{x-z}\,dx, \qquad z \in \overline{D^+},
$$

$$
f_2(z) := \begin{cases} \dfrac{1}{2\pi i}\sum\limits_{p=0}^{k}\sum\limits_{j=0}^{p}\binom{k+1}{j}z^p\int\limits_0^a\dfrac{\mu(x)x^{k-p}}{(x+z)^{k+1}}\,dx, & z \in \overline{D^-}\setminus\{0\}, \\ \\ f_1(0), & z = 0. \end{cases}
$$

З умови (3.3) випливає, що функції f_1 і f_2 — неперервні в початку координат. Очевидно, вони аналітичні в інших точках. Отже для довільного $z \in D^+$ отримуємо

$$
\Phi[f](z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_\Gamma \frac{f_1(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta = f_1(z).
$$

Тому $\Phi_\Gamma^+[f](z) = f_1(z)$, $z \in \Gamma$.

Розглянемо вертикальні кути величини $\varepsilon > 0$ з вершиною у початку координат і уявною віссю в ролі бісектриси. Нехай γ_1 і γ_2 — дуги кривої Γ, розміщені у вертикальних кутах і з їх спільним кінцем у початку координат. Нехай для визначеності γ_1 і γ_2 містяться відповідно у нижній і верхній півплощинах. Позначимо менший з діаметрів кривих γ_1 і γ_2 через d_0.

Розглянемо лише більш складний випадок непарного k. Для довільного $\delta \geqslant d_0$ створимо точковий набір $\{z_0; \ldots; z_k\}$, такий, що $z_0 = 0$, $z_k \in \gamma_1$, $|z_k| = \delta$ і $z_{2j-1} \in \gamma_1$, $z_{2j} \in \gamma_2$, $|z_{2j-1}| = |z_{2j}| = \dfrac{2j\delta}{k+1}$ для $j = 1, \ldots, \dfrac{k-1}{2}$. Очевидно, що цей точковий набір є k-рівномірний, а отже і N-рівномірний також.

Позначимо $\alpha(x) := \sum\limits_{p=1}^{k} \alpha_p(x)$, де $\alpha_p(x) := \arg(x - z_p)$. Завдяки нерівностям $|\alpha_{2j-1}(x) + \alpha_{2j}(x)| \leqslant \varepsilon$ і $0 < \alpha_k(x) \leqslant \dfrac{\pi + \varepsilon}{2}$ маємо $-\dfrac{k-1}{2}\varepsilon < \alpha(x) \leqslant \dfrac{\pi}{2} + \dfrac{k}{2}\varepsilon$.

Сегмент $[0, a]$ є об'єднанням наступних неперетинних вимірних множин:

$$E_0 := \{x \in [0, a] : -\frac{k-1}{2}\varepsilon < \alpha(x) \leqslant 0\},$$

$$E_1 := \{x \in [0, a] : 0 < \alpha(x) \leqslant \frac{\pi}{2}\},$$

$$E_2 := \{x \in [0, a] : \frac{\pi}{2} < \alpha(x) \leqslant \frac{\pi}{2} + \frac{k}{2}\varepsilon\}.$$

Покладемо $\varepsilon < \dfrac{\pi}{3k}$. Тоді

$$\cos\alpha(x) > \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad |\sin\alpha(x)| < \frac{1}{2} \quad \text{для} \quad x \in E_0;$$

$$\cos\alpha(x) \geqslant 0, \quad \sin\alpha(x) > 0 \quad \text{для} \quad x \in E_1;$$

$$|\cos\alpha(x)| < \frac{1}{2}, \quad \sin\alpha(x) > \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{для} \quad x \in E_2.$$

Таким чином, маємо

$$|[z_0, \ldots, z_k; \Phi_\Gamma^+[f], z_0]| =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \prod_{j=1}^{k} |z_0 - z_j| \left| \int_0^a \mu(x) \sum_{q=0}^{k} \frac{dx}{(x - z_q) \prod\limits_{\substack{r=0 \\ r \neq q}}^{k} (z_q - z_r)} \right| =$$

$$= c\,(k)\delta^k \left| \int_0^a \frac{\mu(x)}{\prod\limits_{r=0}^{k} (x - z_r)} \right| = c\,(k)\delta^k \left| \int_0^a \frac{\mu(x) e^{-i\alpha(x)}}{\prod\limits_{r=0}^{k} |x - z_r|} \right| \geqslant$$

$$\geqslant c\,(k)\delta^k \left(\int\limits_{E_0} \mu(x) \frac{\cos\alpha(x) - |\sin\alpha(x)|}{\prod\limits_{r=0}^{k} |x - z_r|}\, dx + \right.$$

$$\left. + \int\limits_{E_1} \mu(x) \frac{\cos\alpha(x) + \sin\alpha(x)}{\prod\limits_{r=0}^{k} |x - z_r|}\, dx + \int\limits_{E_2} \mu(x) \frac{\sin\alpha(x) - |\cos\alpha(x)|}{\prod\limits_{r=0}^{k} |x - z_r|}\, dx \right) \geqslant$$

$$\geqslant c\,(k)\delta^k \int\limits_0^a \frac{\mu(x)}{\prod\limits_{r=0}^{k} |x - z_r|}\, dx \geqslant c\,(k)\delta^k \int\limits_0^a \frac{\mu(x)}{x(x+\delta)^k}\, dx \geqslant$$

$$\geqslant c\,(k) \int\limits_0^a \frac{\mu(x)}{x\left(1 + \left(\frac{x}{\delta}\right)^k\right)}\, dx \geqslant c\,(k, \sigma, \Gamma, z_0) \int\limits_0^{2d} \frac{\mu(x)}{x\left(1 + \left(\frac{x}{\delta}\right)^k\right)}\, dx.$$

Звідси випливає оцінка (3.4) за означенням локального модуля гладкості.

Щоб довести твердження b) теореми, відмітимо, що якщо $\delta < a$, то

$$|\Phi(-\delta)| = |f_1(-\delta)| = \int\limits_0^a \frac{\mu(x)}{x+\delta}\, dx \geqslant \frac{1}{2} \int\limits_\delta^a \frac{\mu(x)}{x+\delta}\, dx \to \infty, \qquad \delta \to 0.$$

Теорема доведена. $\square$

Література

[1] O. F. Gerus. Analytic functions with preassigned smoothness properties. *Bul. Soc. Lett. Lodz. Ser. Rech. Deform.*, XXV:41–49, 1998.

[2] O. F. Gerus. Moduli of smoothness of the Cauchy-type integral on regular curves. *Journal of Natural Geometry*, 16(1):49–70, 1999.

[3] P. M. Tamrazov. Finite-difference smoothnesses and approximation. In *Colloquia Mathematica Societatis Janos Bolyai, 19. Fourier Analysis and Approximation Theory*, pages 827–843. Budapest, 1976.

[4] А. О. Гельфонд. *Исчисление конечных разностей.* Наука, Москва, 1967.

[5] О. Ф. Герус. Конечноразностные гладкости интегралов типа Коши. *Укр. Мат. Журн.*, 29(5):642–646, 1977.

[6] О. Ф. Герус. Обратная оценка модулей гладкости граничных значений интеграла типа Коши. In *Моногенные функции и отображения*, pages 70–74. Ин-т математики АН УССР, Киев, 1982.

[7] О. Ф. Герус. Аналитические функции с данным порядком модуля гладкости. In *Некоторые вопросы анализа и дифференциальной топологии*, pages 15–21. Ин-т математики АН УССР, Киев, 1988.

[8] Е. Г. Гусейнов. Необходимые условия инвариантности одномерного сингулярного оператора. *Уч. зап. МВ и ССО Азерб. ССР. Сер. физ.-мат. наук*, (2):75–81, 1977.

[9] В. В. Салаев. Прямые и обратные оценки для особого интеграла Коши по замкнутой кривой. *Мат. заметки*, 19:365–380, 1976.

[10] Т. С. Салимов. Оценка типа обратной оценки Н. К. Бари-С. Б. Стечкина для сингулярного интеграла Коши по замкнутой кривой. Рукопись деп. в ВИНИТИ 20.03.1981, № 1278-81, 1981.

[11] П. М. Тамразов. *Гладкости и полиномиальные приближеия.* Наукова думка, Киев, 1975.

О. Ф. Герус

м. Житомир

Email: oleggerus755@gmail.com

Збірник праць Ін-ту математики НАН України (2022) Т. 19, № 1, 42–87

Про точкову хронологізацію орієнтованих множин

Я. І. Грушка

Присвячується пам'яті професора Олександра Бахтіна

Abstract. The notion of oriented set is the basic elementary concept of the theory of changeable sets. The sixth Hilbert problem was the main motivation for the introduction of changeable sets. In the present paper the necessary and sufficient condition of the existence of one-point time on an oriented set is established. From the intuitive point of view, one-point time is the time associated with the evolution of a system consisting of only one object (for example, from one material point). Namely, it is proven that the one-point time exists on the oriented set if and only if this oriented set is a quasi-chain. Also, using the obtained result, the problem of describing all possible images of linearly ordered sets is solved. This problem naturally arises in the theory of ordered sets.

Анотація. Поняття орієнтованої множини базовим найелементарнішим поняттям теорії мінливих множин. Основною мотивацією для введення мінливих множин послужила шоста проблема Гільберта. В даній роботі встановлюється необхідна і достатня ознака існування точкового часу на орієнтованій множині. З інтуїтивної точки зору точковий час — це час, пов'язаний з еволюцією системи, що складається лише з одного фіксованого об'єкта (наприклад з однієї матеріальної точки). А саме, в роботі доведено, що точковий час на орієнтованій множині існує тоді і тільки тоді, коли ця орієнтована множина є квазіланцюговою. Також, використовуючи отриманий результат, розв'язано проблему опису всеможливих образів лінійно упорядкованих множин. Ця проблема природно виникає в теорії упорядкованих множин.

2010 Mathematics Subject Classification: 03E75, 03E25, 03E04

УДК 510.22, 512.562

Ключові слова: Орієнтовані множини, мінливі множини, час, упорядковані множини

1. Вступні зауваження

Тематика даної статті тісно пов'язана із теорією мінливих множин. Основною мотивацією для введення мінливих множин послужила шоста проблема Гільберта, тобто проблема математично строгого формулювання основ теоретичної фізики. Ця проблема, поставлена Д. Гільбертом ще в 1900 р., але, на сьогодні залишається дуже актуальною [3]. З інтуїтивної точки зору мінливі множини це — сукупності об'єктів, які, на відміну від елементів звичайних (статичних) множин, можуть перебувати в процесі постійних трансформацій, тобто — змінювати свої властивості, з'являтись чи зникати, розпадатись на декілька частин чи, навпаки, декілька об'єктів можуть зливатись в один. Крім того картина еволюції мінливої множини може залежати від способу спостереження, тобто від системи відліку. Проблема побудови математичної теорії мінливих множин, тобто "множин" із переліченими вище властивостями, в різних формах ставилась, зокрема в роботах [1, 2, 6, 15, 16]. На математично строгому теорія мінливих множин рівні була побудована в роботах [10–13] та ін. Найбільш повний і систематичний виклад цієї теорії можна знайти в препринті [4].

Орієнтовані множини є базовим найелементарнішим поняттям теорії мінливих множин, і їх можна трактувати як найпримітивніші абстрактні моделі сукупностей мінливих об'єктів, що еволюціонують в рамках однієї (фіксованої) системи відліку. Орієнтовані множини вводяться в роботах [11, 12] (див. також [4, розділ 1]). Крім того, в зазначених роботах було введено поняття часу на орієнтованих множинах, а в роботі [12, теорема 4.1] встановлено достатню ознаку існування точкового часу на таких множинах (див. також [4, Theorem 1.3.1]), де з інтуїтивної точки зору точковий час — це час, пов'язаний з еволюцією системи, що складається лише з одного фіксованого об'єкта (наприклад з однієї матеріальної точки). Зауважимо, що теорема 4.1 з роботи [12] носить лише достатній характер. У зв'язку з цим в роботі [4, Problem 1.3.1] поставлено проблему встановлення необхідної і достатньої умови існування точкового часу на орієнтованій множині. В даній роботі буде розв'язано поставлену проблему, а саме буде вказано ті властивості, якими має володіти орієнтована множина для того, щоб на ній можна було визначити точковий час. Використовуючи отриманий результат буде дано розв'язок одінеї проблеми, яка природно виникає в теорії упорядкованих множин, а саме проблеми опису всеможливих образів лінійно упорядкованих множин.

2. Про орієнтовані множини та точковий час

Означення 2.1. *Нехай, M — довільна непорожня множина ($M \neq \emptyset$).*

Довільне рефлексивне бінарне відношення $\Leftarrow$ на M (тобто таке, що $\forall x \in M$ $x \Leftarrow x$) будемо називати ***орієнтацією****, а пару $\mathcal{M} = (M, \Leftarrow)$ будемо називати* ***орієнтованою множиною****. При цьому множину M будемо називати базовою, або множиною всіх* ***елементарних станів*** *орієнтованої множини $\mathcal{M}$ і будемо позначати її через $\mathfrak{Bs}(\mathcal{M})$, а відношення $\Leftarrow$ будемо називати* ***напрямним відношенням змін (трансформацій)*** *$\mathcal{M}$ і будемо позначати його через $\underset{\mathcal{M}}{\leftarrow}$.*

У випадку, коли відомо, про яку орієнтовану множину $\mathcal{M}$ йде мова, в позначенні $\underset{\mathcal{M}}{\leftarrow}$ символ $\mathcal{M}$ будемо опускати, вживаючи позначення "$\leftarrow$". Для елементів $x, y \in \mathfrak{Bs}(\mathcal{M})$ запис $y \leftarrow x$ слід розуміти, як "елементарний стан y є результатом трансформацій, або "трансформаційним нащадком" елементарного стану x".

Нехай, $\mathcal{M}$ — орієнтована множина.

Означення 2.2. *Непорожня підмножина $N \subseteq \mathfrak{Bs}(\mathcal{M})$ називається* ***транзитивною*** *в $\mathcal{M}$ якщо для довільних $x, y, z \in N$ з умов $z \leftarrow y$ і $y \leftarrow x$ випливає умова $z \leftarrow x$.*

Транзитивна підмножина $L \subseteq \mathfrak{Bs}(\mathcal{M})$ називається ***ланцюгом*** *в $\mathcal{M}$, якщо для довільних $x, y \in L$ має місце хоч одне із співвідношень $y \leftarrow x$ або $x \leftarrow y$.*

Орієнтовану множину $\mathcal{M}$ будемо називати ***ланцюговою****, якщо вся множина $\mathfrak{Bs}(\mathcal{M})$ є ланцюгом $\mathcal{M}$ тобто якщо відношення $\leftarrow$ є транзитивним на $\mathfrak{Bs}(\mathcal{M})$ і для довільних $x, y \in \mathfrak{Bs}(\mathcal{M})$ виконується хоча б одна з умов $x \leftarrow y$ або $y \leftarrow x$ (отже орієнтована множина $\mathcal{M}$ є ланцюговою тоді і тільки тоді, коли вона лінійно-квазіупорядкованою множиною).*

Нагадаємо, що лінійно упорядкованою множиною називається пара вилу $\mathbb{T} = (\mathbf{T}, \leq)$, де $\leq$ — рефлексивне, асиметричне і транзитивне бінарне відношення на $\mathbf{T}$ таке, що для довільних $t, \tau \in \mathbf{T}$ має місце хоча б одна з умов $t \leq \tau$ або $\tau \leq t$.

Для довільних $t, \tau \in \mathbf{T}$ будемо позначати $t < \tau$ тоді і тільки тоді, коли $t \leq \tau$ і $t \neq \tau$. Відношення $<$ називається строгим лінійним порядком, породженим (нестрогим) порядком $\leq$.

Означення 2.3. *Нехай, $\mathcal{M}$ — орієнтована множина і $\mathbb{T} = (\mathbf{T}, \leq)$ — лінійно упорядкована множина. Відображення $\psi : \mathbf{T} \to 2^{\mathfrak{Bs}(\mathcal{M})}$ називається* ***часом*** *на $\mathcal{M}$, якщо виконуються такі умови:*

(1) Для довільного елементарного стану $x \in \mathfrak{Bs}(\mathcal{M})$ існує елемент $t \in \mathbf{T}$ такий, що $x \in \psi(t)$.

(2) Якщо $x_1, x_2 \in \mathfrak{Bs}(\mathcal{M})$, $x_2 \leftarrow x_1$ і $x_1 \neq x_2$, то існують елементи $t_1, t_2 \in \mathbf{T}$ такі, що $x_1 \in \psi(t_1)$, $x_2 \in \psi(t_2)$ і $t_1 < t_2$ (тобто має місце часова роздільність послідовних неоднакових елементарних станів).

При цьому:

- *Елементи $t \in \mathbf{T}$ будемо називати **моментами часу**.*
- *Пару $\mathcal{H} = (\mathbb{T}, \psi) = ((\mathbf{T}, \leq), \psi)$ будемо називати **хронологізацією** $\mathcal{M}$.*

Будемо говорити, що орієнтовану множину $\mathcal{M}$ ***можна хронологізувати***, якщо існує хоч одна хронологізація $\mathcal{M}$. Виявляється, що будь-яку орієнтовану множину $\mathcal{M}$ завжди можна хронологізувати. Найпростіший спосіб це зробити — взяти лінійно-упорядковану множину $\mathbb{T} = (\mathbf{T}, \leq)$, що містить не менше двох елементів (тобто $\mathbf{card}(\mathbf{T}) \geq 2$) і покласти:

$$\psi(t) := \mathfrak{Bs}(\mathcal{M}) \quad (t \in \mathbf{T}).$$

Легко перевірити, що для функції $\psi(\cdot)$ виконуються умови означення 2.3. Більш нетривіальні способи хронологізації орієнтованих множин розглянуті, зокрема, в роботі [12].

Означення 2.4. *Нехай $\mathcal{M}$ — орієнтована множина і $\mathbb{T} = (\mathbf{T}, \leq)$ — лінійно упорядкована множина.*

*(1) Час $\psi : \mathbf{T} \to 2^{\mathfrak{Bs}(\mathcal{M})}$ будемо називати **квазіточковим**, якщо для довільного $t \in \mathbf{T}$ множина $\psi(t)$ є одноелементною.*

*(2) Час ψ будемо називати **точковим**, якщо виконуються наступні умови:*

(а) час ψ є квазіточковим;

(б) для довільних $x_1, x_2 \in \mathfrak{Bs}(\mathcal{M})$ з умов $x_1 \in \psi(t_1)$, $x_2 \in \psi(t_2)$ і $t_1 \leq t_2$, випливає $x_2 \leftarrow x_1$.

Будемо говорити, що орієнтовану множину $\mathcal{M}$ можна хронологізувати квазіточково / точково, якщо існує хоча б одна хронологізація $\mathcal{H} = ((\mathbf{T}, \leq), \psi)$ орієнтованої множини $\mathcal{M}$ з квазіточковим / точковим часом ψ відповідно при цьому хронологізацію $\mathcal{H}$ будемо називати квазіточковою / точковою відповідно.

Приклад 2.5. Розглянемо довільне відображення $f : \mathcal{I} \to \mathbb{R}^d$ $(d \in \mathbb{N})$, де $\mathcal{I} \subseteq \mathbb{R}$ — деяка зв'язна підмножина числової прямої. Таке відображення можна трактувати як рівняння руху деякої матеріальної точки в просторі $\mathbb{R}^d$. Відображення f породжує орієнтовану множину $\mathcal{M}_f = \left(\mathfrak{Bs}(\mathcal{M}_f), \underset{\mathcal{M}_f}{\leftarrow}\right)$, де $\mathfrak{Bs}(\mathcal{M}_f) = \mathfrak{R}(f) = \{f(t) \,|\, t \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{R}^d$ і для $x, y \in \mathfrak{Bs}(\mathcal{M}_f)$, співвідношення $y \underset{\mathcal{M}_f}{\leftarrow} x$ виконується тоді і тільки тоді, коли існують $t_1, t_2 \in \mathcal{I}$ такі, що $x = f(t_1)$, $y = f(t_2)$ і $t_1 \leq t_2$. Легко перевірити, що наступне відображення є точковим часом на $\mathcal{M}_f$:

$$\psi(t) = \{f(t)\} \subseteq \mathfrak{Bs}(\mathcal{M}), \quad t \in \mathcal{I}.$$

Приклад 2.5 пояснює зміст терміну “точковий час”. Очевидно, що довільний точковий час є квазіточковим. Контрприклади, наведені в [12] показують, що обернене твердження, взагалі кажучи, місця не має (див. ткож [4, Example 1.3.2]).

Теорема 2.6 (ZF+LO, [12])**.** *Будь-яку орієнтовану множину можна хронологізувати квазіточково.*

Зауважимо, що доведення теореми 2.6 можна знайти також в [4, Theorem 1.3.2].

Зауваження 2.7. При доведенні тереми 2.6 разом із системою аксіом теорії множин Цермело–Френкеля (ZF) використовується принцип лінійної упорядкованості (LO), який, стверджує, що будь-яку множину можна лінійно упорядкувати. Очевидно, що зазначений принцип (LO) випливає з теореми Цермело, а отже з аксіоми вибору (AC). Але, відомо, що цей принцип також випливає і з теореми Тарського про ультрафільтри, будучи логічно слабшим за неї, а отже і за аксіому вибору [5, стор. 17,18] (про співвідношення між LO і AC див, також, [7]).

Теорема 2.8 (ZF+LO, [12])**.** *Будь-яку ланцюгову орієнтовану множину можна точково хронологізувати.*

Доведення теореми 2.8 також можна знайти в препринті [4]. Наступний приклад покаже, що твердження, обернене до теореми 2.8, взагалі кажучи, місця не має, тобто не кожна орієнтована множина, яку можна точково хронологізувати, є ланцюговою.

Приклад 2.9. Розглянемо функцію $\boldsymbol{f}_0 : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$, що задається формулою:

$$\boldsymbol{f}_0(t) = (\cos t, \sin t) \qquad (t \in [0, 2\pi]).$$

Тоді орієнтовану множину $\mathcal{M}_{\boldsymbol{f}_0}$, побудовану у прикладі 2.5 на основі визначеної вище функції $\boldsymbol{f}_0$, можна точково хронологізувати часом $\psi_{\boldsymbol{f}_0}(t) = \{\boldsymbol{f}_0(t)\}$ $(t \in [0, 2\pi])$, але, в той же час, орієнтована множина $\mathcal{M}_{\boldsymbol{f}_0}$ не є ланцюговою, оскільки легко перевірити, що відношення $\underset{\mathcal{M}_{\boldsymbol{f}_0}}{\longleftarrow}$ не є транзитивним на $\mathfrak{Bs}(\mathcal{M}_{\boldsymbol{f}_0})$. Справді, розглянемо точки: $\mathrm{x}_1 := (0, -1) = \boldsymbol{f}_0\left(\frac{3}{2}\pi\right)$, $\mathrm{x}_2 := (1, 0) = \boldsymbol{f}_0(0) = \boldsymbol{f}_0(2\pi)$, $\mathrm{x}_3 := (0, 1) = \boldsymbol{f}_0\left(\frac{\pi}{2}\right)$.

Для цих точок маємо: $\mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2, \mathrm{x}_3 \in \mathfrak{R}(\boldsymbol{f}_0) = \mathfrak{Bs}(\mathcal{M}_{\boldsymbol{f}_0})$ і $\mathrm{x}_2 \xleftarrow[\mathcal{M}_{\boldsymbol{f}_0}]{} \mathrm{x}_1$, $\mathrm{x}_3 \xleftarrow[\mathcal{M}_{\boldsymbol{f}_0}]{} \mathrm{x}_2$, але $\mathrm{x}_3 \not\xleftarrow[\mathcal{M}_{\boldsymbol{f}_0}]{} \mathrm{x}_1$.

У зв'язку з наведеними фактами виникає наступна проблема:

Проблема 2.10. Знайти необхідну і достатню умову існування точкової хронологізації орієнтованої множини.

Зауважимо, що проблема 2.10 була також поставлена у [4, Problem 1.3.1]. Розв'язання проблеми 2.10 буде представлено в наступних розділах статті.

3. Квазіланцюгові орієнтовані множини та формулювання основної тереми

Позначення 3.1. *На довільній орієнтованій множині $\mathcal{M}$ введемо додатково наступне бінарне відношення:*

►: *Для довільних $x, y \in \mathfrak{Bs}(\mathcal{M})$ будемо позначати $y \overset{+}{\underset{\mathcal{M}}{\leftarrow}} x$ тоді і тільки тоді, коли:*

$$y \underset{\mathcal{M}}{\leftarrow} x \qquad i \qquad x \underset{\mathcal{M}}{\not\leftarrow} y.$$

►: *У випадках, коли не виникає непорозумінь замість позначення $y \overset{+}{\underset{\mathcal{M}}{\leftarrow}} x$ будемо використовувати позначення $y \overset{+}{\leftarrow} x$.*

Позначення 3.2. *Нехай $\mathbf{M}$ — довільна множина і $\mathsf{R}_1, \mathsf{R}_2, \ldots, \mathsf{R}_n \subseteq \mathbf{M}^2$ $(n \in \mathbb{N})$ — довільні бінарні відношення на $\mathbf{M}$. Для довільних $x_0, \ldots, x_n \in \mathbf{M}$ будемо використовувати скорочене позначення:*

$$x_0 \mathsf{R}_1 x_1 \mathsf{R}_2 x_2 \ldots x_{n-1} \mathsf{R}_n x_n$$

для індикації того факту, що:

$$(x_0 \mathsf{R}_1 x_1) \,\&\, (x_1 \mathsf{R}_2 x_2) \,\&\, \ldots \,\&\, (x_{n-1} \mathsf{R}_n x_n)\,.$$

Твердження 3.3. *Нехай $\mathcal{M}$ — орієнтована множина, $\mathbb{T} = (\mathbf{T}, \leq)$ — лінійно упорядкована множина і $\psi : \mathbf{T} \to 2^{\mathfrak{Bs}(\mathcal{M})}$ — точковий час на $\mathcal{M}$. Тоді для довільних $x_1, x_2 \in \mathfrak{Bs}(\mathcal{M})$ з умов:*

$$x_1 \in \psi(t_1)\,,\ x_2 \in \psi(t_2) \ \ i \ \ x_2 \overset{+}{\leftarrow} x_1$$

випливає нерівність:

$$t_1 < t_2.$$

Доведення. Справді, нехай $\mathcal{M}$ — орієнтована множина, $\mathbb{T} = (\mathbf{T}, \leq)$ — лінійно упорядкована множина і $\psi : \mathbf{T} \to 2^{\mathfrak{Bs}(\mathcal{M})}$ — точковий час на

$\mathcal{M}$. Нехай елементи $x_1, x_2 \in \mathfrak{Bs}(\mathcal{M})$ такі, що $x_1 \in \psi(t_1)$, $x_2 \in \psi(t_2)$ і $x_2 \overset{+}{\leftarrow} x_1$. Припустимо супротивне: $t_2 \leq t_1$. Тоді, за означенням 2.4 (пункт 2), з умов $x_1 \in \psi(t_1)$, $x_2 \in \psi(t_2)$ і $t_2 \leq t_1$ випливає співвідношення $x_1 \leftarrow x_2$. Але останнє співвідношення суперечить співвідношенню $x_2 \overset{+}{\leftarrow} x_1$ (заданому за умовою). Отже, припущення про те, що $t_2 \leq t_1$ — помилкове. Тому $t_1 < t_2$. □

Означення 3.4. *Орієнтовану множину $\mathcal{M}$ будемо називати* ***квазіланцюговою****, якщо виконуються такі умови:*

(QL1): *Для довільних $x_1, x_2 \in \mathfrak{Bs}(\mathcal{M})$ має місце хоча б одне із співвідношень $x_2 \leftarrow x_1$ або $x_1 \leftarrow x_2$.*

(QL2): *Для довільних $x_0, x_1, x_2, x_3 \in \mathfrak{Bs}(\mathcal{M})$ з умови $x_3 \overset{+}{\leftarrow} x_2 \leftarrow x_1 \overset{+}{\leftarrow} x_0$ випливає співвідношення $x_3 \overset{+}{\leftarrow} x_0$ (квазітранзитивність).*

Зауваження 3.5. Неважко довести, що із транзитивності бінарного відношення $\leftarrow$ на орієнтованій множині $\mathcal{M}$ випливає його квазітранзитивність. Тому, кожна ланцюгова орієнтована множина є квазіланцюговою. Неважко довести, що орієнтована множина $\mathcal{M}_{\boldsymbol{f}_0}$ в прикладі 2.9 є квазіланцюговою, проте не є ланцюговою. Тобто не кожна квазвланцюгова орієнтована множина є ланцюговою.

Основним результатом цієї роботи є наступна теорема.

Теорема 3.6 (ZF+AC)**.** *Для того, щоб орієнтовану множину $\mathcal{M}$ можна було точково хронологізувати необхідно і достатньо, щоб вона була квазіланцюговою.*

Зауваження 3.7. Доведення необхідності для теореми 3.6 досить нескладне і не потребує аксіоми вибору. Аксіому вибору потребує саме доведення достатності умови вказаної в теоремі 3.6.

Доведення теореми 3.6 розбито на дві леми. В лемі 4.1 з наступного розділу доводиться необхідність для теореми 3.6, а в лемі 7.1 (див. далі) — достатність.

4. Доведення необхідності для теореми 3.6

Наступна лема обґрунтовує необхідність умови, вказаної в теоремі 3.6 для існування точкового часу.

Лема 4.1. *Якщо орієнтовану множину $\mathcal{M}$ можна точково хронологізувати, то вона є квазіланцюговою.*

Доведення. Нехай, $\mathbb{T} = (\mathbf{T}, \leq)$ — лінійно упорядкована множина і $\psi : \mathbf{T} \to 2^{\mathfrak{Bs}(\mathcal{M})}$ — точковий час на орієнтованій множині $\mathcal{M}$.

$\Rrightarrow$ **1**. Спочатку перевіримо виконання умови **(QL1)**. Розглянемо довільні $x_1, x_2 \in \mathfrak{Bs}(\mathcal{M})$. За означенням часу 2.3, існують моменти часу $t_1, t_2 \in \mathbf{T}$ такі, що $x_1 \in \psi(t_1)$, $x_2 \in \psi(t_2)$. Оскільки $\mathbb{T} = (\mathbf{T}, \leq)$ — лінійно упорядкована множина і $t_1, t_2 \in \mathbf{T}$, то мусить виконуватись хоча б одна із нерівностей $t_1 \leq t_2$ або $t_2 \leq t_1$. У випадку $t_1 \leq t_2$, за означенням 2.4, отримуємо $x_2 \leftarrow x_1$, а у випадку $t_2 \leq t_1$ отримуємо $x_1 \leftarrow x_2$.

$\Rrightarrow$ **2**. Перевіримо виконання умови **(QL2)**. Нехай $x_0, x_1, x_2, x_3 \in \mathfrak{Bs}(\mathcal{M})$, причому $x_3 \overset{+}{\leftarrow} x_2 \leftarrow x_1 \overset{+}{\leftarrow} x_0$. Розглянемо довільні моменти часу $t_0, t_3 \in \mathbf{T}$ такі, що $x_0 \in \psi(t_0)$, $x_3 \in \psi(t_3)$ (за означенням 2.3), такі моменти часу існують). Оскільки $x_2 \leftarrow x_1$, то, за означенням 2.3, існують елементи $t_1, t_2 \in \mathbf{T}$ такі, що $x_1 \in \psi(t_1)$, $x_2 \in \psi(t_2)$ і $t_1 \leq t_2$. Оскільки $x_0 \in \psi(t_0)$, $x_1 \in \psi(t_1)$ і $x_1 \overset{+}{\leftarrow} x_0$, то, згідно з твердженням 3.3, маємо, $t_0 < t_1$. Оскільки $x_2 \in \psi(t_2)$, $x_3 \in \psi(t_3)$ і $x_3 \overset{+}{\leftarrow} x_2$, то, згідно з твердженням 3.3, маємо, $t_2 < t_3$. Таким чином справедливі нерівності, $t_0 < t_1 \leq t_2 < t_3$, тобто, $t_0 < t_3$. Отже:

$$\forall\, t_0, t_3 \in \mathbf{T} \; ((x_0 \in \psi(t_0)) \,\&\, (x_3 \in \psi(t_3)) \Rightarrow (t_0 < t_3)). \tag{4.1}$$

Згідно з доведеним в пункті 1, хоч одна з умов $x_0 \leftarrow x_3$ або $x_3 \leftarrow x_0$ повинна виконуватись. Припустимо, що $x_0 \leftarrow x_3$. Тоді, за означенням 2.3 існують елементи $\widetilde{t}_0, \widetilde{t}_3 \in \mathbf{T}$ такі, що $x_0 \in \psi\left(\widetilde{t}_0\right)$, $x_3 \in \psi\left(\widetilde{t}_3\right)$ і $\widetilde{t}_3 \leq \widetilde{t}_0$. Проте остання нерівність суперечить умові (4.1). Тому припущення про те, що $x_0 \leftarrow x_3$ — помилкове. Тому єдиноможливими є співвідношення $x_3 \leftarrow x_0$ і $x_0 \not\leftarrow x_3$. Отже, маємо $x_3 \overset{+}{\leftarrow} x_0$, що й необхідно було довести. $\square$

Для доведення достатності для теореми 3.6 необхідно напрацювати деякі допоміжні технічні результати. Це буде зроблено в наступному розділі.

5. Деякі допоміжні технічні результати

5.1. Властивості квазіланцюгових орієнтованих множин.

Твердження 5.2. *Нехай, $\mathcal{M}$ — квазіланцюгова орієнтована множина і $x_0, x_1, x_2, x_3 \in \mathfrak{Bs}(\mathcal{M})$ — довільні елементарні стани $\mathcal{M}$. Тоді справедливі наступні властивості:*

(QL3): *Якщо $x_3 \leftarrow x_2 \overset{+}{\leftarrow} x_1 \leftarrow x_0$ то $x_3 \leftarrow x_0$.*

(QL4): *Якщо $x_3 \overset{+}{\leftarrow} x_2 \leftarrow x_1$ то $x_3 \leftarrow x_1$.*

(QL5): *Якщо* $x_3 \leftarrow x_2 \overset{+}{\leftarrow} x_1$ *то* $x_3 \leftarrow x_1$.

(QL6): *Якщо* $x_3 \overset{+}{\leftarrow} x_2 \overset{+}{\leftarrow} x_1$ *то* $x_3 \overset{+}{\leftarrow} x_1$.

Доведення.

$\Rrightarrow$ **(QL3)**. Нехай, $x_0, x_1, x_2, x_3 \in \mathfrak{Bs}(\mathcal{M})$ і $x_3 \leftarrow x_2 \overset{+}{\leftarrow} x_1 \leftarrow x_0$. Припустимо, що $x_3 \not\leftarrow x_0$. Тоді, оскільки $\mathcal{M}$ — квазіланцюгова орієнтована множина, маємо $x_0 \overset{+}{\leftarrow} x_3$. Таким чином, отримуємо $x_0 \overset{+}{\leftarrow} x_3 \leftarrow x_2 \overset{+}{\leftarrow} x_1$. Звідси, за означенням 3.4 (умова (QL2)), маємо $x_0 \overset{+}{\leftarrow} x_1$, що суперечить умові $x_1 \leftarrow x_0$. Отже, зроблене припущення помилкове. Тому $x_3 \leftarrow x_0$.

$\Rrightarrow$ **(QL4)**. Нехай, $x_3 \overset{+}{\leftarrow} x_2 \leftarrow x_1$. Тоді, за означенням 2.1, маємо $x_3 \leftarrow x_3 \overset{+}{\leftarrow} x_2 \leftarrow x_1$. Звідси, використовуючи доведену вище властивість (QL3), отримуємо $x_3 \leftarrow x_1$.

$\Rrightarrow$ **(QL5)**. Якщо $x_3 \leftarrow x_2 \overset{+}{\leftarrow} x_1$, то маємо $x_3 \leftarrow x_2 \overset{+}{\leftarrow} x_1 \leftarrow x_1$. Звідси, використовуючи доведену вище властивість (QL3), отримуємо $x_3 \leftarrow x_1$.

$\Rrightarrow$ **(QL6)**. Якщо $x_3 \overset{+}{\leftarrow} x_2 \overset{+}{\leftarrow} x_1$, то маємо $x_3 \overset{+}{\leftarrow} x_2 \leftarrow x_2 \overset{+}{\leftarrow} x_1$. Звідси, за означенням 3.4 (умова (QL2)), маємо $x_3 \overset{+}{\leftarrow} x_1$. □

Позначення 5.3. *На довільній орієнтнваній множині $\mathcal{M}$ введемо додатково наступні бінарні відношення.*

$\Rrightarrow$**:** *Для $x, y \in \mathfrak{Bs}(\mathcal{M})$ будемо позначати $y \overset{+-}{\underset{\mathcal{M}}{\leftarrow}} x$ тоді і тільки тоді, коли існує елемент $\widetilde{x} \in \mathfrak{Bs}(\mathcal{M})$ такий, що $y \overset{+}{\leftarrow} \widetilde{x} \leftarrow x$.*

$\Rrightarrow$**:** *Для $x, y \in \mathfrak{Bs}(\mathcal{M})$ будемо позначати $y \overset{-+}{\underset{\mathcal{M}}{\leftarrow}} x$ тоді і тільки тоді, коли існує елемент $\widetilde{x} \in \mathfrak{Bs}(\mathcal{M})$ такий, що $y \leftarrow \widetilde{x} \overset{+}{\leftarrow} x$.*

Надалі, коли наперед відомо, про яку орієнтовану множину $\mathcal{M}$ йде мова, замість позначень $y \overset{+-}{\underset{\mathcal{M}}{\leftarrow}} x$ та $y \overset{-+}{\underset{\mathcal{M}}{\leftarrow}} x$ будемо використовувати позначення $y \overset{+-}{\leftarrow} x$ та $y \overset{-+}{\leftarrow} x$ відповідно.

Твердження 5.4. *Нехай, $\mathcal{M}$ — квазіланцюгова орієнтована множина і $x_1, x_2, x_3 \in \mathfrak{Bs}(\mathcal{M})$ — довільні елементарні стани $\mathcal{M}$. Тоді мають місце такі властивості:*

(QL7): *Якщо* $x_3 \leftarrow x_2 \overset{+-}{\leftarrow} x_1$ *то* $x_3 \leftarrow x_1$.

(QL8): *Якщо* $x_3 \overset{-+}{\leftarrow} x_2 \leftarrow x_1$ *то* $x_3 \leftarrow x_1$.

(QL9): *Якщо* $x_3 \overset{+}{\leftarrow} x_2 \overset{-+}{\leftarrow} x_1$ *то* $x_3 \overset{+}{\leftarrow} x_1$.

(QL10): *Якщо* $x_3 \overset{+-}{\leftarrow} x_2 \overset{+}{\leftarrow} x_1$ *то* $x_3 \overset{+}{\leftarrow} x_1$.

(QL11): *Якщо* $x_2 \overset{+-}{\leftarrow} x_1$ *або* $x_2 \overset{-+}{\leftarrow} x_1$ *то* $x_2 \leftarrow x_1$.

(QL12): *Якщо* $x_2 \overset{+}{\leftarrow} x_1$ *то* $x_2 \overset{+-}{\leftarrow} x_1$ *і* $x_2 \overset{-+}{\leftarrow} x_1$.

(QL13): *Якщо* $x_3 \overset{-+}{\leftarrow} x_2 \overset{+-}{\leftarrow} x_1$ *то* $x_3 \leftarrow x_1$.

(QL14): *Якщо* $x_3 \overset{+-}{\leftarrow} x_2 \overset{+-}{\leftarrow} x_1$ *то* $x_3 \overset{+-}{\leftarrow} x_1$.

(QL15): *Якщо* $x_3 \overset{-+}{\leftarrow} x_2 \overset{-+}{\leftarrow} x_1$ *то* $x_3 \overset{-+}{\leftarrow} x_1$.

(QL16): *Якщо* $x_3 \overset{+}{\leftarrow} x_2 \overset{+-}{\leftarrow} x_1$ *то* $x_3 \overset{+-}{\leftarrow} x_1$.

(QL17): *Якщо* $x_3 \overset{-+}{\leftarrow} x_2 \overset{+}{\leftarrow} x_1$ *то* $x_3 \overset{-+}{\leftarrow} x_1$.

Доведення. Властивості **(QL7)–(QL10)** випливають з твердження 5.2 та означення 3.4. Зокрема (QL7) та (QL8) випливають з (QL3), а (QL9) та (QL10) випливають з (QL2).

Властивість **(QL11)** випливає з властивостей **(QL4)** та **(QL5)** (твердження 5.2).

Доведемо властивість **(QL12)**. Якщо $x_2 \overset{+}{\leftarrow} x_1$ то, за означенням 2.1, маємо, $x_2 \overset{+}{\leftarrow} x_1 \leftarrow x_1$ і $x_2 \leftarrow x_2 \overset{+}{\leftarrow} x_1$. Отже, за позначенням 5.3, маємо $x_2 \overset{+-}{\leftarrow} x_1$ і $x_2 \overset{-+}{\leftarrow} x_1$.

Властивість **(QL13)** випливає з (QL6) і (QL3).

Властивості **(QL14)–(QL15)** випливають з (QL2) або (QL3).

Властивості **(QL16)–(QL17)** випливають з (QL6). □

5.5. **Скінченно-повторний час на орієнтованих множинах.**

Означення 5.6. *Нехай,* $\mathbb{T} = (\mathbf{T}, \leq)$ *— лінійно упорядкована множина і* $\mathcal{M}$ *— орієнтована множина.*

$\Rrightarrow$ *Час* $\psi : \mathbf{T} \to 2^{\mathfrak{Bs}(\mathcal{M})}$ *будемо називати* ***скінченно-повторним****, якщо для довільного елемента* $x \in \mathfrak{Bs}(\mathcal{M})$ *виконується співвідношення:*

$$\mathbf{card}\left(\left\{t \in \mathbf{T} \,\middle|\, x \in \psi(t)\right\}\right) < \aleph_0$$

(де $\mathbf{card}(\mathbf{M})$ *— потужність множини* $\mathbf{M}$*). При цьому число:*

$$\mathsf{Rp}_x(\psi) = \mathbf{card}\left(\left\{t \in \mathbf{T} \,\middle|\, x \in \psi(t)\right\}\right)$$

будемо називати ***повторністю*** *часу* ψ *відносно елемента* $x \in \mathfrak{Bs}(\mathcal{M})$.

$\Rrightarrow$ *Час ψ будемо називати **обмежено-повторним**, якщо час ψ є скінченно-повторним і існує число $K \in \mathbb{N}$ таке, що для довільного $x \in \mathfrak{Bs}(\mathcal{M})$ справедлива нерівність, $\mathsf{Rp}_x(\psi) < K$. При цьому число:*

$$\mathsf{Rp}(\psi) = \max_{x \in \mathfrak{Bs}(\mathcal{M})} \mathsf{Rp}_x(\psi)$$

*будемо називати **максимальною повторнюваністю** часу ψ.*

$\Rrightarrow$ *Нехай $n \in \mathbb{N}$. Час ψ будемо називати n**-повторним**, якщо час ψ є скінченно-повторним і*

$$\forall x \in \mathfrak{Bs}(\mathcal{M}) \ \left(\mathsf{Rp}_x(\psi) = n\right).$$

Позначення 5.7. *Нехай $\psi : \mathbf{T} \to 2^{\mathfrak{Bs}(\mathcal{M})}$ — скінченно-повторний час на орієнтованій множині $\mathcal{M}$. Для довільнго $x \in \mathfrak{Bs}(\mathcal{M})$ покладемо:*

$$\widehat{\psi}^{+}(x) := \max\left(\left\{t \in \mathbf{T} \,\middle|\, x \in \psi(t)\right\}\right);$$
$$\widehat{\psi}^{-}(x) := \min\left(\left\{t \in \mathbf{T} \,\middle|\, x \in \psi(t)\right\}\right),$$

де максимум і мінімум слід розуміти в сенсі лінійно упорядкованої множини $\mathbb{T} = (\mathbf{T}, \leq)$.

Твердження 5.8. *Нехай, $\mathbb{T} = (\mathbf{T}, \leq)$ — лінійно упорядкована множина і $\psi : \mathbf{T} \to 2^{\mathfrak{Bs}(\mathcal{M})}$ — скінченно-повторний точковий час на орієнтованій множині $\mathcal{M}$. Тоді для довільних $x, x_1, x_2 \in \mathfrak{Bs}(\mathcal{M})$ мають місце такі властивості:*

(FR1): *$\widehat{\psi}^{-}(x) \leq \widehat{\psi}^{+}(x)$. Якщо ж, додатково, $\mathsf{Rp}_x(\psi) \geq 2$, то $\widehat{\psi}^{-}(x) < \widehat{\psi}^{+}(x)$.*

(FR2): *$x_2 \leftarrow x_1$ тоді і тільки тоді, коли $\widehat{\psi}^{-}(x_1) \leq \widehat{\psi}^{+}(x_2)$ якщо ж додатково $x_1 \neq x_2$ то $x_2 \leftarrow x_1$ тоді і тільки тоді, коли $\widehat{\psi}^{-}(x_1) < \widehat{\psi}^{+}(x_2)$.*

(FR3): *$x_2 \overset{+}{\leftarrow} x_1$ тоді і тільки тоді, коли $\widehat{\psi}^{+}(x_1) < \widehat{\psi}^{-}(x_2)$.*

(FR4): *Якщо $x_2 \overset{+-}{\leftarrow} x_1$ то $\widehat{\psi}^{-}(x_1) < \widehat{\psi}^{-}(x_2)$.*

(FR5): *Якщо $x_2 \overset{-+}{\leftarrow} x_1$ то $\widehat{\psi}^{+}(x_1) < \widehat{\psi}^{+}(x_2)$.*

(FR6): *Якщо, додатково, час ψ є n-повторним з $n \geq 2$ то $x_2 \leftarrow x_1$ тоді і тільки тоді, коли $\widehat{\psi}^{-}(x_1) < \widehat{\psi}^{+}(x_2)$.*

Доведення. $\Rrightarrow$ **(FR1)**: Нехай, $x \in \mathfrak{Bs}(\mathcal{M})$. Тоді, згідно з позначенням 5.7, маємо, $\widehat{\psi}^{-}(x) = \min\left(\left\{t \in \mathbf{T} \,\middle|\, x \in \psi(t)\right\}\right) \leq \max\left(\left\{t \in \mathbf{T} \,\middle|\, x \in \psi(t)\right\}\right) = \widehat{\psi}^{+}(x)$. Якщо ж, додатково, $\mathsf{Rp}_x(\psi) \geq 2$ то множина $\left\{t \in \mathbf{T} \,\middle|\, x \in \psi(t)\right\}$ містить не менше, ніж два елемента. Тому мінімум цієї множини строго менше за максимум.

$\Rrightarrow$ **(FR2)**: Нехай, $x_1, x_2 \in \mathfrak{Bs}(\mathcal{M})$ і $x_2 \leftarrow x_1$. Тоді у випадку $x_1 = x_2$ маємо нерівність $\widehat{\psi}^-(x_1) \le \widehat{\psi}^+(x_2)$ згідно із доведеною вище властивістю (FR1). Отже, будемо вважати, що $x_1 \ne x_2$. Оскільки $x_2 \leftarrow x_1$ і $x_1 \ne x_2$, то, за означенням 2.3, існують моменти часу $t_1, t_2 \in \mathbf{T}$ такі, що $x_1 \in \psi(t_1)$, $x_2 \in \psi(t_2)$ і $t_1 < t_2$. Тому:

$$\widehat{\psi}^-(x_1) = \min\left(\left\{t \in \mathbf{T} \,\middle|\, x_1 \in \psi(t)\right\}\right) \le t_1 < t_2 \le$$
$$\le \max\left(\left\{t \in \mathbf{T} \,\middle|\, x_2 \in \psi(t)\right\}\right) = \widehat{\psi}^+(x_2).$$

Отже для довільних $x_1, x_2 \in \mathfrak{Bs}(\mathcal{M})$ справедлива імплікація:

$$(x_2 \leftarrow x_1) \,\&\, (x_1 \ne x_2) \Rightarrow \left(\widehat{\psi}^-(x_1) < \widehat{\psi}^+(x_2)\right). \tag{5.1}$$

Таким чином в обох випадках для довільних $x_1, x_2 \in \mathfrak{Bs}(\mathcal{M})$ отримуємо імплікацію:

$$(x_2 \leftarrow x_1) \Rightarrow \left(\widehat{\psi}^-(x_1) \le \widehat{\psi}^+(x_2)\right). \tag{5.2}$$

Навпаки, нехай $\widehat{\psi}^-(x_1) \le \widehat{\psi}^+(x_2)$. Покладемо:

$$\widehat{t_1} := \widehat{\psi}^-(x_1), \qquad \widehat{t_2} := \widehat{\psi}^+(x_2).$$

Тоді, згідно з позначенням 5.7, маємо, $x_1 \in \psi\left(\widehat{t_1}\right)$, $x_2 \in \psi\left(\widehat{t_2}\right)$ і $\widehat{t_1} \le \widehat{t_2}$. Отже, за означенням 2.4, маємо $x_2 \leftarrow x_1$. Таким чином для довільних $x_1, x_2 \in \mathfrak{Bs}(\mathcal{M})$ отримуємо наступну імплікацію:

$$\left(\widehat{\psi}^-(x_1) \le \widehat{\psi}^+(x_2)\right) \Rightarrow (x_2 \leftarrow x_1) \tag{5.3}$$

З імплікацій (5.2) та (5.3) отримуємо бажану рівносильність: $(x_2 \leftarrow x_1) \Leftrightarrow \left(\widehat{\psi}^-(x_1) \le \widehat{\psi}^+(x_2)\right)$.

Тепер нехай, додатково $x_1 \ne x_2$. Тоді із співвідношень (5.1) і (5.3) отримуємо рівносильність $(x_2 \leftarrow x_1) \Leftrightarrow \left(\widehat{\psi}^-(x_1) < \widehat{\psi}^+(x_2)\right)$.

$\Rrightarrow$ **(FR3)**: Нехай, $x_2 \overset{+}{\leftarrow} x_1$. Припустимо супротивне, $\widehat{\psi}^-(x_2) \le \widehat{\psi}^+(x_1)$. Тоді, згідно з доведеною вище властивістю (FR2), отримуємо співвідношення $x_1 \leftarrow x_2$, яке суперечить співвідношенню $x_2 \overset{+}{\leftarrow} x_1$. Отже, $\widehat{\psi}^+(x_1) < \widehat{\psi}^-(x_2)$.

Навпаки, нехай $\widehat{\psi}^+(x_1) < \widehat{\psi}^-(x_2)$. Тоді, згідно із доведеною вище властивістю (FR1), маємо, $\widehat{\psi}^-(x_1) \le \widehat{\psi}^+(x_1) < \widehat{\psi}^-(x_2) \le \widehat{\psi}^+(x_2)$. Отже, згідно із доведеною вище властивістю (FR2), отримуємо $x_2 \leftarrow x_1$. Припустимо, що умова $x_1 \leftarrow x_2$ також має місце. Тоді, згідно з доведеною вище властивістю (FR2), отримуємо нерівність $\widehat{\psi}^-(x_2) \le \widehat{\psi}^+(x_1)$, яка суперечить нерівності $\widehat{\psi}^{+}(x_1) < \widehat{\psi}^{-}(x_2)$. Тому припущення про те, що $x_1 \leftarrow x_2$ — помилкове. Отже, $x_2 \overset{+}{\leftarrow} x_1$.

$\Rrightarrow$ **(FR4)**: Нехай, $x_1, x_2 \in \mathfrak{Bs}(\mathcal{M})$ і $x_2 \overset{+-}{\leftarrow} x_1$. Тоді існує елемент $\widetilde{x} \in \mathfrak{Bs}(\mathcal{M})$ такий, що $x_2 \overset{+}{\leftarrow} \widetilde{x} \leftarrow x_1$. Тому, використовуючи доведені вище властивості (FR2) і (FR3), отримуємо, $\widehat{\psi}^{-}(x_1) \leq \widehat{\psi}^{+}(\widetilde{x}) < \widehat{\psi}^{-}(x_2)$, тобто $\widehat{\psi}^{-}(x_1) < \widehat{\psi}^{-}(x_2)$.

$\Rrightarrow$ **(FR5)**: Нехай, $x_1, x_2 \in \mathfrak{Bs}(\mathcal{M})$ і $x_2 \overset{-+}{\leftarrow} x_1$. Тоді існує елемент $\widetilde{x} \in \mathfrak{Bs}(\mathcal{M})$ такий, що $x_2 \leftarrow \widetilde{x} \overset{+}{\leftarrow} x_1$. Отже, використовуючи доведені вище властивості (FR2) і (FR3), маємо, $\widehat{\psi}^{+}(x_1) < \widehat{\psi}^{-}(\widetilde{x}) \leq \widehat{\psi}^{+}(x_2)$.

$\Rrightarrow$ **(FR6)**: При $x_1 \neq x_2$ властивість (FR6) випливає з властивості (FR2). У випадку $x_1 = x_2$ зазначена властивість випливає з (FR1). $\square$

5.9. Строгі супремуми та інфінуми в лінійно упорядкованих множинах.

Означення 5.10. *Нехай $\mathbb{T} = (\mathbf{T}, \leq)$ — лінійно упорядкована множина і $\mathcal{U} \subseteq \mathbf{T}$ — непорожня підмножина $\mathbf{T}$.*

$\Rrightarrow$ **1):** *Елемент $\tau \in \mathbf{T}$ називається* ***строгою верхньою (строгою нижньою)*** *гранню множини $\mathcal{U}$ якщо для довільного елемента $t \in \mathcal{U}$ виконується нерівність $t < \tau$ ($\tau < t$) відповідно.*

$\Rrightarrow$ **2):** *Елемент $\tau \in \mathbf{T}$ називається* ***строгим супремумом (строгим інфінумом)*** *множини $\mathcal{U}$ якщо:*
- *τ є строгою верхньою (строгою нижньою) гранню множини $\mathcal{U}$.*
- *Для довільної строгої верхньої (строгої нижньої) грані $\widetilde{\tau}$ множини $\mathcal{U}$ виконується нерівність $\tau \leq \widetilde{\tau}$ ($\widetilde{\tau} \leq \tau$) відповідно.*

Безпосередньо з означення 5.10 випливає наступне твердження:

Якщо строгий супремум (строгий інфінум) множини $\mathcal{U} \subseteq \mathbf{T}$ існує то він єдиний.

Справді, якщо, наприклад, τ, τ' — два строгих супремуми множини $\mathcal{U}$, то, за означенням 5.10, мусять виконуватись нерівності $\tau \leq \tau'$ і $\tau' \leq \tau$. Тому $\tau = \tau'$.

$\Rrightarrow$ Строгий супремум множини $\mathcal{U} \subseteq \mathbf{T}$ (якщо він існує) будемо позначати через:

$$\sup{}^{*}_{\mathbb{T}} \mathcal{U}.$$

$\Rrightarrow$ Строгий інфінум множини $\mathcal{U} \subseteq \mathbf{T}$ (якщо він існує) будемо позначати через:

$$\inf{}^{*}_{\mathbb{T}} \mathcal{U}.$$

Позначення 5.11. *Нехай, $\mathbb{T}_1 = (\mathbf{T}_1, \leq_1)$, $\mathbb{T}_2 = (\mathbf{T}_2, \leq_2)$ — лінійно упорядковані множини. Будемо позначати $\mathbb{T}_1 \sqsubseteq \mathbb{T}_2$ тоді і тільки тоді, коли виконуються такі умови:*

1) $\mathbf{T}_1 \subseteq \mathbf{T}_2$*;*
2) Для довільних $t, \tau \in \mathbf{T}_1$ нерівність $t \leq_2 \tau$ виконується тоді і тільки тоді, коли $t \leq_1 \tau$.

Твердження 5.12. *Нехай $\mathbb{T}_1 = (\mathbf{T}_1, \leq_1)$ — лінійно упорядкована множина, $\mathcal{U} \subseteq \mathbf{T}_1$ — довільна непорожня підмножина $\mathbf{T}_1$, а t_0 — довільний елемент такий, що $t_0 \notin \mathbf{T}_1$. Тоді існує лінійно упорядкована множина $\mathbb{T} = (\mathbf{T}, \leq)$, що має такі властивості:*

(1) $\mathbb{T}_1 \sqsubseteq \mathbb{T}$*;*
(2) $\mathbf{T} = \mathbf{T}_1 \cup \{t_0\}$*;*
(3) $\sup{}^{*}_{\mathbb{T}} \mathcal{U} = t_0$*.*

Доведення. Покладемо:

$$\mathbf{T}_1^- := \left\{\tau \in \mathbf{T}_1 \,\middle|\, \exists\, t \in \mathcal{U} \ (\tau \leq_1 t)\right\}; \tag{5.4}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{T}_1^+ &:= \left\{\tau \in \mathbf{T}_1 \,\middle|\, \nexists\, t \in \mathcal{U} \ (\tau \leq_1 t)\right\} = \left\{\tau \in \mathbf{T}_1 \,\middle|\, \forall\, t \in \mathcal{U} \ (t <_1 \tau)\right\} = \\ &= \left\{\tau \in \mathbf{T}_1 \,\middle|\, \tau \text{ є строгою верхньою гранню множини } \mathcal{U} \text{ в } \mathbb{T}_1\right\},\end{aligned} \tag{5.5}$$

де $<_1$ — строгий порядок, породжений нестрогим порядком $\leq_1$. Легко переконатись, що множини $\mathbf{T}_1^-$ та $\mathbf{T}_1^+$ мають такі властивості:

$$\mathbf{T}_1^+ \cap \mathbf{T}_1^- = \emptyset; \tag{5.6}$$

$$\mathbf{T}_1^+ \cup \mathbf{T}_1^- = \mathbf{T}_1; \tag{5.7}$$

$$\forall\, t^+ \in \mathbf{T}_1^+ \ \forall\, t^- \in \mathbf{T}_1^- \quad \left(t^- <_1 t^+\right). \tag{5.8}$$

З властивостей (5.6)–(5.8) випливають такі властивості:

$$\text{Якщо} \quad t \in \mathbf{T}_1^+ \quad \text{і} \quad t \leq_1 \widetilde{t} \quad \text{то} \quad \widetilde{t} \in \mathbf{T}_1^+. \tag{5.9}$$

$$\text{Якщо} \quad t \in \mathbf{T}_1^- \quad \text{і} \quad \widetilde{t} \leq_1 t \quad \text{то} \quad \widetilde{t} \in \mathbf{T}_1^-. \tag{5.10}$$

Покладемо:

$$\mathbf{T} := \mathbf{T}_1 \cup \{t_0\}. \tag{5.11}$$

Введемо на $\mathbf{T}$ відношення порядку. А саме, для довільних $t, t' \in \mathbf{T}_1$ будемо вважати, що $t \leq t'$ тоді і тільки тоді, коли виконується хоча б одна з умов:

$$t, t' \in \mathbf{T}_1 \quad \text{i} \quad t \leq_1 t'; \tag{5.12}$$

$$t = t_0 \quad \text{i} \quad t' \in \mathbf{T}_1^+; \tag{5.13}$$

$$t \in \mathbf{T}_1^- \quad \text{i} \quad t' = t_0; \tag{5.14}$$

$$t \ = \ t' \ = \ t_0. \tag{5.15}$$

Нескладно перевірити, що $\mathbb{T} = (\mathbf{T}, \leq)$ є лінійно упорядкованою множиною.

З формули (5.11) випливає, що $\mathbf{T}_1 \subseteq \mathbf{T}$, а з формул (5.12)–(5.15) випливає, що для довільних $t, \tau \in \mathbf{T}_1$ умова $t \leq \tau$ виконується тоді і тільки тоді, коли $t \leq_1 \tau$. Отже, відповідно до позначення 5.11:

$$\mathbb{T}_1 \sqsubseteq \mathbb{T}. \tag{5.16}$$

Доведемо, що $\sup^*_{\mathbb{T}} \mathcal{U} = t_0$. З формули (5.4) випливає, що $\mathcal{U} \subseteq \mathbf{T}_1^-$. Тому, згідно з формулою (5.14), для довільного $\tau \in \mathcal{U}$ маємо $\tau \leq t_0$. Оскільки $\mathcal{U} \subseteq \mathbf{T}_1$ і $t_0 \notin \mathbf{T}_1$, то з умови $\tau \in \mathcal{U}$ випливає, що $\tau \neq t_0$. Отже:

$$\forall\, \tau \in \mathcal{U} \ \ (\tau < t_0) \tag{5.17}$$

Припустимо, що для деякого елемента $t_0' \in \mathbf{T}$ такого, що $t_0' \neq t_0$ виконується умова:

$$\forall\, \tau \in \mathcal{U} \ \left(\tau < t_0'\right). \tag{5.18}$$

Тоді з того, що $t_0' \neq t_0$ випливає, що $t_0' \in \mathbf{T}_1$. Тому, згідно з (5.12), маємо, $\forall\, \tau \in \mathcal{U} \ \ (\tau <_1 t_0')$. Це означає, що t_0' є стргою верхньою гранню $\mathcal{U}$ в $\mathbb{T}_1$, а отже, згідно з (5.5), $t_0' \in \mathbf{T}_0^+$. Звідси, за умовою (5.13), маємо $t_0 \leq t_0'$. Отже, виконується умова (5.17) і при цьому якщо елемент $t_0' \in \mathbf{T}$ задовольняє умову (5.18), то $t_0 \leq t_0'$. Тому, t_0 є строгим супремумом множини $\mathcal{U}$ в $\mathbb{T}$, тобто:

$$\sup\nolimits^*_{\mathbb{T}} \mathcal{U} = t_0. \tag{5.19}$$

З формул (5.16), (5.11) і (5.19) випливає, що лінійно упорядкована множина $\mathbb{T}$ задовольняє умови $1, 2, 3$ твердження 5.12. □

Враховуючи принцип двоїстості (див. [9, стор. 14]) з твердження 5.12 отримуємо таке твердження:

Твердження 5.13. *Нехай $\mathbb{T}_1 = (\mathbf{T}_1, \leq_1)$ — лінійно упорядкована множина, $\mathcal{U} \subseteq \mathbf{T}_1$ — довільна непорожня підмножина $\mathbf{T}_1$, а t_0 — довільний елемент такий, що $t_0 \notin \mathbf{T}_1$. Тоді існує лінійно упорядкована множина $\mathbb{T} = (\mathbf{T}, \leq)$, що має такі властивості:*

(1) $\mathbb{T}_1 \sqsubseteq \mathbb{T}$;

(2) $\mathbf{T} = \mathbf{T}_1 \cup \{t_0\}$;

(3) $\inf^*_{\mathbb{T}} \mathcal{U} = t_0$.

Застосовуючи твердження 5.12 і 5.13 отримуємо наступне твердження:

Твердження 5.14. *Нехай* $\mathbb{T}_1 = (\mathbf{T}_1, \leq_1)$ *— лінійно упорядкована множина,* $\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2 \subseteq \mathbf{T}_1$ *— довільні непорожні підмножини* $\mathbf{T}_1$ *такі, що:*

$$\forall\, \tau_1 \in \mathcal{U}_1 \;\forall\, \tau_2 \in \mathcal{U}_2 \quad (\, \tau_1 <_1 \tau_2 \,)\,, \tag{5.20}$$

а $t_0^{(1)}, t_0^{(2)}$ *довільні елементи такі, що* $t_0^{(1)}, t_0^{(2)} \notin \mathbf{T}_1$ *і* $t_0^{(1)} \neq t_0^{(2)}$. *Тоді існує лінійно упорядкована множина* $\mathbb{T} = (\mathbf{T}, \leq)$, *що має такі властивості:*

(1) $\mathbb{T}_1 \sqsubseteq \mathbb{T}$;

(2) $\mathbf{T} = \mathbf{T}_1 \cup \left\{ t_0^{(1)}, t_0^{(2)} \right\}$;

(3) $\sup^*_{\mathbb{T}} \mathcal{U}_1 = t_0^{(1)}, \quad \inf^*_{\mathbb{T}} \mathcal{U}_2 = t_0^{(2)}$.

Доведення. Згідно з твердженням 5.12, існує лінійно упорядковна множина $\mathbb{T}^* = (\mathbf{T}^*, \leq^*)$ така, що:

1.1) $\mathbb{T}_1 \sqsubseteq \mathbb{T}^*$;

1.2) $\mathbf{T}^* = \mathbf{T}_1 \cup \left\{ t_0^{(1)} \right\}$;

1.3) $\sup^*_{\mathbb{T}^*} \;(\mathcal{U}_1) = t_0^{(1)}$.

Оскільки $\mathbb{T}_1 \sqsubseteq \mathbb{T}^*$, то з умови (5.20) випливає, що для довільних елементів $\tau_1 \in \mathcal{U}_1$ і $\tau_2 \in \mathcal{U}_2$ виконується нерівність $\tau_1 <^* \tau_2$, де $<^*$ — строгий порядок, породжений нестрогим порядком $\leq^*$. Отже, довільний елемент $\tau_2 \in \mathcal{U}_2$ є строгою верхньою гранню множини $\mathcal{U}_1$ в лінійно упорядкованій множині $\mathbb{T}^*$. Тому, оскільки $t_0^{(1)} = \sup^*_{\mathbb{T}^*} \;(\mathcal{U}_1)$, то маємо нерівність:

$$t_0^{(1)} \leq^* \tau_2 \quad (\forall \tau_2 \in \mathcal{U}_2)\,.$$

Але, оскільки $t_0^{(1)} \notin \mathbf{T}_1$, а $\mathcal{U}_2 \subseteq \mathbf{T}_1$ то рівність $t_0^{(1)} = \tau_2$ — неможлива при жодному $\tau_2 \in \mathcal{U}_2$. Отже:

$$t_0^{(1)} <^* \tau_2 \quad (\forall \tau_2 \in \mathcal{U}_2)\,. \tag{5.21}$$

З твердження 5.13 випливає існування лінійно упорядковної множини $\mathbb{T} = (\mathbf{T}, \leq)$ такої, що:

2.1) $\mathbb{T}^* \sqsubseteq \mathbb{T}$;

2.2) $\mathbf{T} = \mathbf{T}^* \cup \left\{ t_0^{(2)} \right\} = \mathbf{T}_1 \cup \left\{ t_0^{(1)}, t_0^{(2)} \right\}$;

2.3) $\inf^*_{\mathbb{T}} \;(\mathcal{U}_2) = t_0^{(2)}$.

Для завершення доведення залишилось показати, що $\sup^*_{\mathbb{T}}(\mathcal{U}_1) = t_0^{(1)}$. За умовою твердження, $\mathbb{T}^* \sqsubseteq \mathbb{T}$. Тому у співвідношенні (5.21) знак нерівності $<^*$ можна замінити на знак $<$. Отже, що із формули (5.21) і рівності $\inf^*_{\mathbb{T}}(\mathcal{U}_2) = t_0^{(2)}$ випливає нерівність $t_0^{(1)} \leq t_0^{(2)}$. Але, оскільки, за умовою, $t_0^{(1)} \neq t_0^{(2)}$, то з останньої нерівності отримуємо нерівність:

$$t_0^{(1)} < t_0^{(2)} \tag{5.22}$$

Оскільки $\sup^*_{\mathbb{T}^*}(\mathcal{U}_1) = t_0^{(1)}$, то для довільного $\tau_1 \in \mathcal{U}_1$ маємо нерівність $\tau_1 <^* t_0^{(1)}$. Звідси, враховуючи, що $\mathbb{T}^* \sqsubseteq \mathbb{T}$, отримуємо:

$$\tau_1 < t_0^{(1)} \qquad (\forall\, \tau_1 \in \mathcal{U}_1)\,.$$

Тому, $t_0^{(1)}$ є строгою верхньою гранню множини $\mathcal{U}_1$ також і відносно лінійно упорядкованої множини $\mathbb{T}$. Нехай $\widetilde{t}_0$ — інший елемент з $\mathbf{T}$ такий, що:

$$\tau_1 < \widetilde{t}_0 \qquad (\forall\, \tau_1 \in \mathcal{U}_1)\,. \tag{5.23}$$

Якщо припустити, що $\widetilde{t}_0 \in \mathbf{T}^*$, то, беручи до уваги рівність $t_0^{(1)} = \sup^*_{\mathbb{T}^*}(\mathcal{U}_1)$, отримаємо нерівність $t_0^{(1)} \leq^* \widetilde{t}_0$, а отже (оскільки $\mathbb{T}^* \sqsubseteq \mathbb{T}$), і нерівність:

$$t_0^{(1)} \leq \widetilde{t}_0. \tag{5.24}$$

Отже, залишилось лише розглянути випадок $\widetilde{t}_0 = t_0^{(2)}$. Але в цьому випадку нерівність (5.24) випливає з (5.22). Отже, нерівність (5.24) справедлива для довільного елемента $\widetilde{t}_0 \in \mathbf{T}$, що задовольняє умову (5.23). Тому:

$$t_0^{(1)} = \sup\nolimits^*_{\mathbb{T}}(\mathcal{U}_1)\,. \qquad \square$$

5.15. **Еволюційні максимуми та мінімуми орієнтованих множин.**

Означення 5.16.

$\Rrightarrow$ *Елемент $x^* \in \mathfrak{Bs}(\mathcal{M})$ будемо називати **еволюційним максимумом** орієнтованої множини $\mathcal{M}$, якщо для довільного $x \in \mathfrak{Bs}(\mathcal{M})$ виконується умова:*

$$x = x^* \quad \textit{або} \quad x^* \overset{+}{\leftarrow} x.$$

$\Rrightarrow$ *Елемент $x_* \in \mathfrak{Bs}(\mathcal{M})$ будемо називати **еволюційним мінімумом** орієнтованої множини $\mathcal{M}$, якщо для довільного $x \in \mathfrak{Bs}(\mathcal{M})$ виконується умова:*

$$x = x_* \quad \textit{або} \quad x \overset{+}{\leftarrow} x_*.$$

Твердження 5.17. *Довільна орієнтована множина $\mathcal{M}$ може мати не більш, ніж один еволюційний максимум і не більш, ніж один еволюційний мінімум.*

Доведення. Нехай, x^* та x^{**} — два еволюційних максимуми орієнтованої множини $\mathcal{M}$. Якщо припустити, що $x^* \neq x^{**}$, то, на основі означення 5.16 отримаємо $x^{**} \overset{+}{\leftarrow} x^*$ і $x^* \overset{+}{\leftarrow} x^{**}$, що неможливо. Отже, $x^* = x^{**}$. Аналогічно доводиться єдиність еволюційного мінімуму. □

Позначення 5.18. *Якщо x^* є еволюційним максимумом (x_* є еволюційним мінімумом) орієнтованої множини $\mathcal{M}$ будемо позначати їх через:*

$$x^* = \max_*(\mathcal{M}) \qquad (x_* = \min_*(\mathcal{M}))$$

відповідно.

Означення 5.19.

$\Rrightarrow$ *Орієнтовану множину $\mathcal{M}$ називатимемо* ***еволюційно обмеженою****, якщо вона має еволюційні максимум і мінімум (тобто якщо існують* $\max_*(\mathcal{M})$ *і* $\min_*(\mathcal{M})$*).*

$\Rrightarrow$ *Орієнтовану множину $\mathcal{M}$ будемо називати* ***строго еволюційно обмеженою****, якщо вона є еволюційно обмеженою і* $\mathbf{card}\,(\mathfrak{Bs}(\mathcal{M})) \geq 2$.

Твердження 5.20. *Якщо орієнтована множина $\mathcal{M}$ — строго еволюційно обмежена, то* $\max_*(\mathcal{M}) \neq \min_*(\mathcal{M})$, *причому* $\max_*(\mathcal{M}) \overset{+}{\leftarrow} \min_*(\mathcal{M})$.

Доведення. Нехай, $\mathcal{M}$ — строго еволюційно обмежена орієнтована множина. Припустимо, що $\max_*(\mathcal{M}) = \min_*(\mathcal{M}) = x^*$. Оскільки орієнтована множина $\mathcal{M}$ — строго еволюційно обмежена, то, за означенням 5.19, $\mathbf{card}\,(\mathfrak{Bs}(\mathcal{M})) \geq 2$. Отже, існує елемент $x \in \mathfrak{Bs}(\mathcal{M})$ такий, що $x \neq x^*$. Тоді використовуючи рівність $\max_*(\mathcal{M}) = \min_*(\mathcal{M}) = x^*$ на основі означення 5.16 приходимо до висновку, що $x \overset{+}{\leftarrow} x^*$ і $x^* \overset{+}{\leftarrow} x$, що неможливо. Тому, $\max_*(\mathcal{M}) \neq \min_*(\mathcal{M})$. При цьому з означення 5.16 випливає, що $\max_*(\mathcal{M}) \overset{+}{\leftarrow} \min_*(\mathcal{M})$. □

5.21. **Часткові точкові хронологізації орієнтованих множин.** В цьому розділі буде введено ще одне допоміжне технічне поняття необхідне для формулювання основної леми, на якій буде ґрунтуватись доведення основного результату статті.

Позначення 5.22. *Нехай, $\mathcal{M}$ — довільна орієнтована множина і $\mathsf{M}_1 \subseteq \mathfrak{Bs}(\mathcal{M})$ — довільна непорожня підмножина $\mathfrak{Bs}(\mathcal{M})$. Надалі через $\mathcal{M}_{\restriction \mathsf{M}_1}$ будемо позначати орієнтовану множину, що задовольняє такі умови:*

- $\mathfrak{Bs}\left(\mathcal{M}_{\restriction \mathsf{M}_1}\right) = \mathsf{M}_1$*;*
- *Для довільних $x, y \in \mathfrak{Bs}\left(\mathcal{M}_{\restriction \mathsf{M}_1}\right) = \mathsf{M}_1$ співвідношення $y \underset{\mathcal{M}_{\restriction \mathsf{M}_1}}{\longleftarrow} x$ виконується тоді і тільки тоді, коли $y \underset{\mathcal{M}}{\leftarrow} x$.*

Надалі будемо дотримуватись наступної домовленості:

Домовленість. *У тих випадках, коли ми одночасно матимемо справу з орієнтованою множиною $\mathcal{M}$ і деякою її "орієнтованою підмножиною" $\mathcal{M}_{\restriction \mathsf{M}_1}$ під записами $y \overset{+-}{\leftarrow} x$ та $y \overset{-+}{\leftarrow} x$ завжди розумітимемо, що $y \overset{+-}{\underset{\mathcal{M}}{\leftarrow}} x$ та $y \overset{-+}{\underset{\mathcal{M}}{\leftarrow}} x$ (але не $y \overset{+-}{\underset{\mathcal{M}_{\restriction \mathsf{M}_1}}{\longleftarrow}} x$ та $y \overset{-+}{\underset{\mathcal{M}_{\restriction \mathsf{M}_1}}{\longleftarrow}} x$).*

Виявляється, що технічно простіше доводити існування саме 2-повторного точкового часу на довільній квазіланцюговій орієнтованій множині. Цей факт служить мотивацією для наступного допоміжного технічного означення.

Означення 5.23. *Нехай, $\mathcal{M}$ — довільна орієнтована множина і $\mathsf{N} \subseteq \mathfrak{Bs}(\mathcal{M})$ — довільна непорожня підмножина $\mathfrak{Bs}(\mathcal{M})$.*

*Під **часткововою точковою 2-повторною хронологізацією** орієнтованої множини $\mathcal{M}$ відносно підмножини N будемо розуміти упорядковану пару $(\mathbb{T}, \psi)$, що задовольняє такі умови:*

(1) $\mathbb{T} = (\mathbf{T}, \leq)$ є лінійно упорядкованою множиною.

(2) Відображення $\psi : \mathbf{T} \to 2^{\mathfrak{Bs}\left(\mathcal{M}_{\restriction \mathsf{N}}\right)}$ є точковим, 2-повторним часом на орієнтованій множині $\mathcal{M}_{\restriction \mathsf{N}}$.

(3) Для довільних $x, y \in \mathfrak{Bs}\left(\mathcal{M}_{\restriction \mathsf{N}}\right) = \mathsf{N}$ справедливі такі імплікації:

$$\textbf{3.1:}\ \left(y \overset{+-}{\leftarrow} x\right) \Rightarrow \left(\widehat{\psi}^{-}(x) < \widehat{\psi}^{-}(y)\right);$$

$$\textbf{3.2:}\ \left(y \overset{-+}{\leftarrow} x\right) \Rightarrow \left(\widehat{\psi}^{+}(x) < \widehat{\psi}^{+}(y)\right).$$

Зауваження 5.24. З домовленості, прийнятої в позначенні 5.22, випливає, що умови 3.1 та 3.2 означення 5.23 є суттєвими і не випливають з твердження 5.8 (пункти (FR4) та (FR5)), оскільки, згідно з прийнятими домовленостями, записи $y \overset{+-}{\leftarrow} x$ та $y \overset{-+}{\leftarrow} x$ означають $y \overset{+-}{\underset{\mathcal{M}}{\leftarrow}} x$ та $y \overset{-+}{\underset{\mathcal{M}}{\leftarrow}} x$ (а не $y \overset{+-}{\underset{\mathcal{M}_{\restriction \mathsf{N}}}{\longleftarrow}} x$ та $y \overset{-+}{\underset{\mathcal{M}_{\restriction \mathsf{N}}}{\longleftarrow}} x$).

Зауваження 5.25. Надалі для лаконічності замість терміну "часткова точкова 2-повторна хронологізація" будемо вживати термін "**часкова 2-хронологізація**".

6. Основна лема

Доведення достатності для теореми 3.6 ґрунтується на наступній лемі.

Лема 6.1. *Нехай:*

(1) Орієнтована множина $\mathcal{M}$ — строго еволюційно обмежена і квазіланцюгова.

(2) $(\mathbb{T}_1, \psi_1) = ((\mathbf{T}_1, \leq_1), \psi_1)$ — часкова 2-хронологізація $\mathcal{M}$ відносно підмножини $\mathsf{N} \subseteq \mathfrak{Bs}(\mathcal{M})$ такої, що $\min_*(\mathcal{M}), \max_*(\mathcal{M}) \in \mathsf{N}$.

(3) $x_0 \in \mathfrak{Bs}(\mathcal{M}) \setminus \mathsf{N}$.

(4) t_0, t_0' — довільні елементи такі, що $t_0, t_0' \notin \mathbf{T}_1$ і $t_0 \neq t_0'$.

Тоді існує часкова 2-хронологізація $(\mathbb{T}, \psi) = ((\mathbf{T}, \leq), \psi)$ орієнтованої множини $\mathcal{M}$ відносно підмножини $\mathsf{N} \cup \{x_0\}$ така, що:

а) $\mathbb{T}_1 \sqsubseteq \mathbb{T}$.

б) $\mathbf{T} = \mathbf{T}_1 \cup \{t_0, t_0'\}$.

в) $\forall t \in \mathbf{T}_1 \ (\psi(t) = \psi_1(t))$.

Доведення. $\boxed{1.}$ Покладемо:

$$\mathsf{N}_+ := \left\{ x \in \mathsf{N} \,\middle|\, x \overset{-+}{\leftleftarrows} x_0 \right\}, \tag{6.1}$$

$$\mathsf{N}_- := \left\{ x \in \mathsf{N} \,\middle|\, x_0 \overset{+-}{\leftleftarrows} x \right\}, \tag{6.2}$$

$$x^* := \max_*(\mathcal{M}); \quad x_* := \min_*(\mathcal{M}).$$

Оскільки орієнтована множина $\mathcal{M}$ — строго еволюційно обмежена, то, за твердженням 5.20, $x^* \neq x_*$.

За умовою леми, x^*, $x_* \in \mathsf{N}$. Тому, оскільки $x_0 \notin \mathsf{N}$, то за означенням 5.16, маємо: $x^* \overset{+}{\leftleftarrows} x_0 \overset{+}{\leftleftarrows} x_*$. Отже, згідно з твердженням 5.4 (властивість (QL12)), маємо: $x^* \overset{-+}{\leftleftarrows} x_0 \overset{+-}{\leftleftarrows} x_*$. Таким чином, маємо $x_* \in \mathsf{N}_-$, $x^* \in \mathsf{N}_+$. Отже, множини N_- та N_+ — непорожні.

Для довільного $x \in \mathsf{N}$ покладемо:

$$\widehat{\psi}^{+}_{1,x_0}(x) := \begin{cases} \widehat{\psi}^{-}_1(x), & x \overset{+}{\leftleftarrows} x_0 \\ \widehat{\psi}^{+}_1(x), & x \overset{+}{\not\leftleftarrows} x_0 \end{cases} \tag{6.3}$$

$$\widehat{\psi}^{-}_{1,x_0}(x) := \begin{cases} \widehat{\psi}^{+}_{1}(x), & x_0 \overset{+}{\leftarrow} x \\ \widehat{\psi}^{-}_{1}(x), & x_0 \overset{+}{\not\leftarrow} x, \end{cases} \tag{6.4}$$

де для $x_1, x_2 \in \mathfrak{Bs}(\mathcal{M})$ запис $x_2 \overset{+}{\not\leftarrow} x_1$ означає, що співвідношення $x_2 \overset{+}{\leftarrow} x_1$ не має місця.

Доведемо наступну властивість функцій $\widehat{\psi}^{+}_{1,x_0}$ та $\widehat{\psi}^{-}_{1,x_0}$:

($\psi x_0$1): *Якщо* $x_1 \in \mathsf{N}_-$ *і* $x_2 \in \mathsf{N}_+$ *то* $\widehat{\psi}^{-}_{1,x_0}(x_1) <_1 \widehat{\psi}^{+}_{1,x_0}(x_2)$.

Справді, нехай, $x_1 \in \mathsf{N}_-$ і $x_2 \in \mathsf{N}_+$.

$\Rrightarrow$ У випадку $x_2 \overset{+}{\not\leftarrow} x_0 \overset{+}{\not\leftarrow} x_1$, згідно з (6.1), (6.2) маємо, $x_2 \overset{-+}{\leftarrow} x_0 \overset{+-}{\leftarrow} x_1$. Отже, згідно з властивістю (QL13) (див. твердження 5.4), отримуємо, $x_2 \leftarrow x_1$. Тому, враховуючи, що час ψ_1 є 2-повторним, використовуючи формули (6.3), (6.4) і твердження 5.8 (власт. (FR6)), маємо:

$$\widehat{\psi}^{-}_{1,x_0}(x_1) = \widehat{\psi}^{-}_{1}(x_1) <_1 \widehat{\psi}^{+}_{1}(x_2) = \widehat{\psi}^{+}_{1,x_0}(x_2).$$

$\Rrightarrow$ У випадку $x_2 \overset{+}{\leftarrow} x_0 \overset{+}{\not\leftarrow} x_1$, згідно з (6.2), маємо, $x_2 \overset{+}{\leftarrow} x_0 \overset{+-}{\leftarrow} x_1$. Отже, за властивістю (QL16) (див. твердження 5.4), отримуємо, $x_2 \overset{+-}{\leftarrow} x_1$. Звідси (враховуючи, що $(\mathbb{T}_1, \psi_1)$ — часкова 2-хронологізація орієнтованої множини $\mathcal{M}$ відносно N), за означенням 5.23 (пункт 3.1), маємо $\widehat{\psi}^{-}_{1}(x_1) <_1 \widehat{\psi}^{-}_{1}(x_2)$, тобто, згідно з (6.3), (6.4), отримуємо:

$$\widehat{\psi}^{-}_{1,x_0}(x_1) = \widehat{\psi}^{-}_{1}(x_1) <_1 \widehat{\psi}^{-}_{1}(x_2) = \widehat{\psi}^{+}_{1,x_0}(x_2).$$

$\Rrightarrow$ У випадку $x_2 \overset{+}{\not\leftarrow} x_0 \overset{+}{\leftarrow} x_1$, згідно з (6.1) маємо, $x_2 \overset{-+}{\leftarrow} x_0 \overset{+}{\leftarrow} x_1$. Отже, за властивістю (QL17) (див. твердження 5.4), отримуємо, $x_2 \overset{-+}{\leftarrow} x_1$. Звідси, за означенням 5.23 (пункт 3.2), маємо $\widehat{\psi}^{+}_{1}(x_1) <_1 \widehat{\psi}^{+}_{1}(x_2)$, тобто, згідно з (6.3), (6.4):

$$\widehat{\psi}^{-}_{1,x_0}(x_1) = \widehat{\psi}^{+}_{1}(x_1) <_1 \widehat{\psi}^{+}_{1}(x_2) = \widehat{\psi}^{+}_{1,x_0}(x_2).$$

$\Rrightarrow$ У випадку $x_2 \overset{+}{\leftarrow} x_0 \overset{+}{\leftarrow} x_1$, згідно з властивістю (QL6) (див. твердження 5.2), маємо $x_2 \overset{+}{\leftarrow} x_1$. Отже, за твердженням 5.8 (власт. (FR3)), отримуємо, $\widehat{\psi}^{+}_{1}(x_1) <_1 \widehat{\psi}^{-}_{1}(x_2)$, тобто, згідно з

$(6.3), (6.4)$:

$$\widehat{\psi}_{1,x_0}^{-}(x_1) = \widehat{\psi}_1^{+}(x_1) <_1 \widehat{\psi}_1^{-}(x_2) = \widehat{\psi}_{1,x_0}^{+}(x_2).$$

Таким чином, у всіх випадках властивість доведено.

Покладемо:

$$\mathbf{T}_1^{+} := \left\{ \widehat{\psi}_{1,x_0}^{+}(x) \,\middle|\, x \in \mathsf{N}_+ \right\}; \tag{6.5}$$

$$\mathbf{T}_1^{-} := \left\{ \widehat{\psi}_{1,x_0}^{-}(x) \,\middle|\, x \in \mathsf{N}_- \right\}. \tag{6.6}$$

З властивості $(\psi x_0 1)$ випливає, що:

$$\forall\, t_1 \in \mathbf{T}_1^{-} \;\forall\, t_2 \in \mathbf{T}_1^{+} \;\; (t_1 <_1 t_2). \tag{6.7}$$

Згідно з формулою (6.7) і твердженням 5.14 існує лінійно упорядкована множина $\mathbb{T} = (\mathbf{T}, \leq)$, що має такі властивості:

(T1): $\mathbb{T}_1 \sqsubseteq \mathbb{T}$;

(T2): $\mathbf{T} = \mathbf{T}_1 \cup \{t_0, t_0'\}$;

(T3): $\sup^*_{\mathbb{T}} \left(\mathbf{T}_1^{-}\right) = t_0, \quad \inf^*_{\mathbb{T}} \left(\mathbf{T}_1^{+}\right) = t_0'$.

З формули (6.7) і умови (T1) випливає, що $\forall\, t_1 \in \mathbf{T}_1^{-} \;\forall\, t_2 \in \mathbf{T}_1^{+} \;\; (t_1 < t_2)$. Тому з умови (T3) випливає нерівність $t_0 \leq t_0'$. Але, оскільки, за умовою, $t_0 \neq t_0'$, то:

$$t_0 < t_0'. \tag{6.8}$$

Нижче будуть встановлені деякі додаткові властивості функцій $\widehat{\psi}_1^{+}$ та $\widehat{\psi}_1^{-}$, а саме властивості $(\psi x_0 2)$–$(\psi x_0 5)$ (див. далі).

$(\psi x_0 \mathbf{2})$: *Якщо* $x \in \mathsf{N}$ *і* $x \leftarrow x_0$ *то* $t_0 < \widehat{\psi}_1^{+}(x)$.

Справді, нехай, $x \in \mathsf{N}$ і $x \leftarrow x_0$. Доведемо, що для довільного елемента $x_1 \in \mathsf{N}_-$ справедлива нерівність:

$$\widehat{\psi}_{1,x_0}^{-}(x_1) < \widehat{\psi}_1^{+}(x). \tag{6.9}$$

$\Rrightarrow$ У випадку $x_0 \overset{+}{\not\leftarrow} x_1$ згідно з (6.2) будемо мати $x \leftarrow x_0 \overset{+-}{\leftarrow} x_1$, тобто, за властивістю (QL7) (див. твердження 5.4), маємо, $x \leftarrow x_1$. Тому, враховуючи, що час ψ_1 є 2-повторним, а також використовуючи формулу (6.4) і властивість (FR6) з твердження 5.8, отримуємо, $\widehat{\psi}_{1,x_0}^{-}(x_1) = \widehat{\psi}_1^{-}(x_1) <_1 \widehat{\psi}_1^{+}(x)$. Звідси, враховуючи, що, згідно з умовою (T1), $\mathbb{T}_1 \sqsubseteq \mathbb{T}$, отримуємо нерівність (6.9).

$\Rrightarrow$ У випадку $x_0 \overset{+}{\leftarrow} x_1$ будемо мати $x \leftarrow x_0 \overset{+}{\leftarrow} x_1$, тобто $x \overset{-+}{\leftarrow} x_1$. Отже, використовуючи формулу (6.4) і означення 5.23 (пункт 3.2), отримуємо, $\widehat{\psi}_{1,x_0}^{-}(x_1) = \widehat{\psi}_1^{+}(x_1) <_1 \widehat{\psi}_1^{+}(x)$. Звідси, враховуючи, що, згідно з (T1), $\mathbb{T}_1 \sqsubseteq \mathbb{T}$, отримуємо нерівність (6.9).

Отже, в обох випадках нерівність (6.9) — доведена. Оскільки нерівність (6.9) справедлива для довільного елемента $x_1 \in \mathsf{N}_-$, то, згідно з формулою (6.6), маємо:

$$t < \widehat{\psi}_1^+(x) \qquad \left(\forall t \in \mathbf{T}_1^-\right).$$

Отже елемент $\widehat{\psi}_1^+(x) \in \mathbf{T}_1 \subseteq \mathbf{T}$ є строгою верхньою гранню множини $\mathbf{T}_1^-$, де, згідно з умовою (T3), $\sup^*_{\mathbb{T}}\left(\mathbf{T}_1^-\right) = t_0$. Звідси, за означенням 5.10 (п.2), отримуємо нерівність $t_0 \leq \widehat{\psi}_1^+(x)$. Проте, оскільки, $t_0 \notin \mathbf{T}_1$ (за умовою леми), а $\widehat{\psi}_1^+(x) \in \mathbf{T}_1$, то рівність $t_0 = \widehat{\psi}_1^+(x)$ — неможлива. Отже, отримуємо бажану строгу нерівність $t_0 < \widehat{\psi}_1^+(x)$. Властивість доведено.

($\psi x_0$3): *Якщо $x \in \mathsf{N}$ і $x_0 \leftarrow x$, то $\widehat{\psi}_1^-(x) < t_0'$.*

Справді, нехай, $x \in \mathsf{N}$ і $x_0 \leftarrow x$. Доведемо, що для довільного елемента $x_1 \in \mathsf{N}_+$ справедлива нерівність:

$$\widehat{\psi}_1^-(x) < \widehat{\psi}_{1,x_0}^+(x_1) \tag{6.10}$$

$\Rrightarrow$ У випадку $x_1 \overset{+}{\not\leftarrow} x_0$ згідно з (6.1) будемо мати $x_1 \overset{-+}{\leftarrow} x_0 \leftarrow x$. Тобто, за властивістю (QL8) (див. твердження 5.4), маємо, $x_1 \leftarrow x$. Тому, враховуючи, що час ψ_1 є 2-повторним, а також використовуючи твердження 5.8 (властивість (FR6)) і формулу (6.3), отримуємо, $\widehat{\psi}_1^-(x) <_1 \widehat{\psi}_1^+(x_1) = \widehat{\psi}_{1,x_0}^+(x_1)$. Звідси, враховуючи, що, згідно з (T1), $\mathbb{T}_1 \sqsubseteq \mathbb{T}$, отримуємо нерівність (6.10).

$\Rrightarrow$ У випадку $x_1 \overset{+}{\leftarrow} x_0$ будемо мати $x_1 \overset{+}{\leftarrow} x_0 \leftarrow x$, тобто $x_1 \overset{+-}{\leftarrow} x$. Отже, за означенням 5.23 (пункт 3.1), беручи до уваги формулу (6.3), отримуємо, $\widehat{\psi}_1^-(x) <_1 \widehat{\psi}_1^-(x_1) = \widehat{\psi}_{1,x_0}^+(x_1)$. Звідси, враховуючи, що, згідно з (T1), $\mathbb{T}_1 \sqsubseteq \mathbb{T}$, отримуємо нерівність (6.10).

Отже, в обох випадках нерівність (6.10) — доведена. Оскільки нерівність (6.10) справедлива для довільного елемента $x_1 \in \mathsf{N}_+$, то, згідно з формулою (6.5), маємо:

$$\widehat{\psi}_1^-(x) < t \qquad \left(\forall t \in \mathbf{T}_1^+\right).$$

Отже елемент $\widehat{\psi}_1^-(x) \in \mathbf{T}_1 \subseteq \mathbf{T}$ є строгою нижньою гранню множини $\mathbf{T}_1^+$. Звідси, враховуючи, що, згідно з умовою (T3), $\inf^*_{\mathbb{T}}\left(\mathbf{T}_1^+\right) = t_0'$, отримуємо нерівність $\widehat{\psi}_1^-(x) \leq t_0'$. Проте, оскільки, $t_0' \notin \mathbf{T}_1$ (за умовою), а $\widehat{\psi}_1^-(x) \in \mathbf{T}_1$, то рівність $t_0' = \widehat{\psi}_1^-(x)$ — неможлива. Отже, отримуємо бажану строгу нерівність $\widehat{\psi}_1^-(x) < t_0'$. Властивість доведено.

($\psi x_0$4): *Якщо* $x \in \mathsf{N}$ *і* $x \overset{+-}{\leftarrow} x_0$, *то* $t_0 < \widehat{\psi}_1^-(x)$.

Справді, нехай, $x \in \mathsf{N}$ і $x \overset{+-}{\leftarrow} x_0$. Доведемо, що для довільного $x_1 \in \mathsf{N}_-$ справедлива нерівність:

$$\widehat{\psi}_{1,x_0}^-(x_1) < \widehat{\psi}_1^-(x)\,. \tag{6.11}$$

Нижче буде розглянуто два випадки: $x_0 \overset{+}{\not\leftarrow} x_1$ і $x_0 \overset{+}{\leftarrow} x_1$.

⇛ Випадок $x_0 \overset{+}{\not\leftarrow} x_1$. У цьому випадку, згідно з (6.2), маємо, $x \overset{+-}{\leftarrow} x_0 \overset{+-}{\leftarrow} x_1$. Звідси, за твердженням 5.4 (властивість (QL14)), отримуємо, $x \overset{+-}{\leftarrow} x_1$ (де $x_1, x \in \mathsf{N}$). Отже, за означенням 5.23 (пункт 3.1), отримуємо $\widehat{\psi}_1^-(x_1) <_1 \widehat{\psi}_1^-(x)$. Тому, враховуючи той факт, що $x_0 \overset{+}{\not\leftarrow} x_1$, згідно з формулою (6.4), маємо, $\widehat{\psi}_{1,x_0}^-(x_1) = \widehat{\psi}_1^-(x_1) <_1 \widehat{\psi}_1^-(x)$. Звідси, враховуючи, що, згідно з (T1), $\mathbb{T}_1 \sqsubseteq \mathbb{T}$, отримуємо нерівність (6.11).

⇛ Випадок $x_0 \overset{+}{\leftarrow} x_1$. У цьому випадку маємо, $x \overset{+-}{\leftarrow} x_0 \overset{+}{\leftarrow} x_1$, тобто, згідно з твердженням 5.4 (властивість (QL10)), $x \overset{+}{\leftarrow} x_1$. Тому, згідно з твердженням 5.8 (властивість (FR3)), маємо, $\widehat{\psi}_1^+(x_1) <_1 \widehat{\psi}_1^-(x)$. Отже, враховуючи, що $x_0 \overset{+}{\leftarrow} x_1$, згідно з формулою (6.4), маємо, $\widehat{\psi}_{1,x_0}^-(x_1) = \widehat{\psi}_1^+(x_1) <_1 \widehat{\psi}_1^-(x)$. Звідси, враховуючи, що, згідно з (T1), $\mathbb{T}_1 \sqsubseteq \mathbb{T}$, отримуємо нерівність (6.11).

Отже, в обох випадках нерівність (6.11) — доведена. Оскільки нерівність (6.11) справедлива для довільного $x_1 \in \mathsf{N}_-$, то, згідно з формулою (6.6), маємо:

$$t < \widehat{\psi}_1^-(x) \qquad \left(\forall t \in \mathbf{T}_1^-\right).$$

Отже елемент $\widehat{\psi}_1^-(x) \in \mathbf{T}_1 \subseteq \mathbf{T}$ є строгою верхньою гранню множини $\mathbf{T}_1^-$. Звідси, враховуючи, що, згідно з умовою (T3), $\sup^*_{\mathbb{T}}\left(\mathbf{T}_1^-\right) = t_0$, отримуємо нерівність $t_0 \leq \widehat{\psi}_1^-(x)$. Проте, оскільки, $t_0 \notin \mathbf{T}_1$ (за умовою), а $\widehat{\psi}_1^-(x) \in \mathbf{T}_1$, то рівність $t_0 = \widehat{\psi}_1^-(x)$ — неможлива. Отже, отримуємо бажану строгу нерівність $t_0 < \widehat{\psi}_1^-(x)$. Властивість доведено.

($\psi x_0$5): *Якщо* $x \in \mathsf{N}$ *і* $x_0 \overset{-+}{\leftarrow} x$, *то* $\widehat{\psi}_1^+(x) < t_0'$.

Справді, нехай, $x \in \mathsf{N}$ і $x_0 \overset{-+}{\leftarrow} x$. Доведемо, що для довільного $x_1 \in \mathsf{N}_+$ справедлива нерівність:

$$\widehat{\psi}_1^+(x) < \widehat{\psi}_{1,x_0}^+(x_1). \tag{6.12}$$

Нижче розглядаються два випадки: $x_1 \overset{+}{\not\leftarrow} x_0$ та $x_1 \overset{+}{\leftarrow} x_0$.

$\Rrightarrow$ Випадок $x_1 \overset{+}{\not\leftarrow} x_0$. У цьому випадку, згідно з (6.1), маємо, $x_1 \overset{-+}{\leftarrow} x_0 \overset{-+}{\leftarrow} x$. Звідси, за твердженням 5.4 (властивість (QL15)), отримуємо, $x_1 \overset{-+}{\leftarrow} x$ (де $x, x_1 \in \mathsf{N}$). Отже, за означенням 5.23 (пункт 3.2), отримуємо $\widehat{\psi}_1^+(x) <_1 \widehat{\psi}_1^+(x_1)$. Тому, враховуючи специфіку даного випадку ($x_1 \overset{+}{\not\leftarrow} x_0$), згідно з формулою (6.3), маємо, $\widehat{\psi}_1^+(x) <_1 \widehat{\psi}_1^+(x_1) = \widehat{\psi}_{1,x_0}^+(x_1)$. Звідси, враховуючи, що, згідно з (T1), $\mathbb{T}_1 \sqsubseteq \mathbb{T}$, отримуємо нерівність (6.12).

$\Rrightarrow$ Випадок $x_1 \overset{+}{\leftarrow} x_0$. У цьому випадку маємо, $x_1 \overset{+}{\leftarrow} x_0 \overset{-+}{\leftarrow} x$, тобто, згідно з твердженням 5.4 (властивість (QL9)), $x_1 \overset{+}{\leftarrow} x$ (де $x, x_1 \in \mathsf{N}$). Тому, згідно з твердженням 5.8 (властивість (FR3)), маємо, $\widehat{\psi}_1^+(x) <_1 \widehat{\psi}_1^-(x_1)$. Звідси, враховуючи специфіку даного випадку ($x_1 \overset{+}{\leftarrow} x_0$), за формулою (6.3), маємо: $\widehat{\psi}_1^+(x) <_1 \widehat{\psi}_1^-(x_1) = \widehat{\psi}_{1,x_0}^+(x_1)$. Звідси, враховуючи, що, згідно з (T1), $\mathbb{T}_1 \sqsubseteq \mathbb{T}$, отримуємо нерівність (6.12).

Отже, в обох випадках нерівність (6.12) — доведена. Оскільки нерівність (6.12) справедлива для довільного $x_1 \in \mathsf{N}_+$, то, згідно з формулою (6.5), маємо:

$$\widehat{\psi}_1^+(x) < t \qquad \left(\forall t \in \mathbf{T}_1^+\right).$$

Отже елемент $\widehat{\psi}_1^+(x) \in \mathbf{T}_1 \subseteq \mathbf{T}$ є строгою нижньою гранню множини $\mathbf{T}_1^+$. Звідси, враховуючи, що, згідно з умовою (T3), $\inf^*_{\mathbb{T}}\left(\mathbf{T}_1^+\right) = t_0'$, отримуємо нерівність $\widehat{\psi}_1^+(x) \leq t_0'$. Проте, оскільки, $t_0' \notin \mathbf{T}_1$ (за умовою), а $\widehat{\psi}_1^+(x) \in \mathbf{T}_1$, то рівність $t_0' = \widehat{\psi}_1^+(x)$ — неможлива. Отже, отримуємо бажану строгу нерівність $\widehat{\psi}_1^+(x) < t_0'$. Властивість доведено.

Для $t \in \mathbf{T}$ покладемо:

$$\psi(t) := \begin{cases} \psi_1(t), & t \in \mathbf{T}_1 \\ \{x_0\}, & t \in \{t_0, t_0'\}. \end{cases} \tag{6.13}$$

$\boxed{\mathbf{2.}}$ Доведемо, що відображення ψ є часом на орієнтованій множині $\mathcal{M}_{\restriction \mathsf{N}\cup\{x_0\}} = (\mathsf{N}\cup\{x_0\}, \leftarrow)$ (де під символом $\leftarrow$ насправді розуміється звуження відношення $\underset{\mathcal{M}}{\leftarrow}$ на підмножину $\mathsf{N}\cup\{x_0\} \subseteq \mathfrak{Bs}(\mathcal{M})$).

2.1) З формули (6.13) і того факту, що ψ_1 є часом на орієнтованій множині $\mathcal{M}_{\restriction \mathsf{N}} = (\mathsf{N}, \leftarrow)$ випливає, що $\forall\, x \in \mathsf{N}\cup\{x_0\}\, \exists\, t \in \mathbf{T}\ \ (x \in \psi(t))$ (де $\mathsf{N}\cup\{x_0\} = \mathfrak{Bs}\left(\mathcal{M}_{\restriction \mathsf{N}\cup\{x_0\}}\right)$). Отже перша умова означення 2.3 для відображення ψ — виконується.

2.2) Нехай, $x_1, x_2 \in \mathsf{N}\cup\{x_0\}$, $x_2 \leftarrow x_1$ і $x_1 \neq x_2$.

2.2.1. Спочатку розглянемо випадок $x_1, x_2 \in \mathsf{N}$. З того факту, що ψ_1 є часом на орієнтованій множині $\mathcal{M}_{\restriction \mathsf{N}} = (\mathsf{N}, \leftarrow)$ випливає існування моментів часу $t_1, t_2 \in \mathbf{T}_1$ таких, що $x_1 \in \psi_1(t_1)$, $x_2 \in \psi(t_2)$ і $t_1 <_1 t_2$. Звідси, враховуючи формулу (6.13) і умову (T1) ($\mathbb{T}_1 \sqsubseteq \mathbb{T}$) отримуємо, що $t_1, t_2 \in \mathbf{T}$, $x_1 \in \psi(t_1)$, $x_2 \in \psi(t_2)$, $t_1 < t_2$. Отже, залишилось розглянути лише випадки, коли $x_1 = x_0$ або $x_2 = x_0$, які ми розглянемо нижче.

2.2.2. Випадок $x_1 = x_0$. У цьому випадку маємо, $x_2 \leftarrow x_1 = x_0$ і $x_2 \neq x_1 = x_0$. Далі, з того, що $x_2 \neq x_0$ випливає, що $x_2 \in \mathsf{N}$. Звідси, в силу властивості ($\psi x_0 2$), випливає нерівність, $t_0 < \widehat{\psi}_1^{+}(x_2)$. Покладемо: $t_1 := t_0$, $t_2 := \widehat{\psi}_1^{+}(x_2)$. Тоді, в силу формули (6.13) та позначення 5.7, отримаємо:

$$\begin{aligned}
&x_1 = x_0 \in \{x_0\} = \psi(t_0) = \psi(t_1);\\
&x_2 \in \psi_1(t_2) = \psi(t_2) \quad \text{і}\\
&t_1 < t_2.
\end{aligned}$$

2.2.3. Випадок $x_2 = x_0$. У цьому випадку маємо, $x_0 = x_2 \leftarrow x_1$ і $x_1 \neq x_2 = x_0$. З нерівності $x_1 \neq x_0$ випливає, що $x_1 \in \mathsf{N}$. Звідси, в силу властивості ($\psi x_0 3$), випливає нерівність $\widehat{\psi}_1^{-}(x_1) < t_0'$. Покладемо: $t_1 := \widehat{\psi}_1^{-}(x_1)$, $t_2 := t_0'$. Тоді, в силу формули (6.13) та позначення 5.7, отримаємо:

$$\begin{aligned}
&x_1 \in \psi_1(t_1) = \psi(t_1);\\
&x_2 = x_0 \in \{x_0\} = \psi\left(t_0'\right) = \psi(t_2);\\
&\quad \text{і} \quad t_1 < t_2.
\end{aligned}$$

Отже, у всіх можливих випадках ми довели, що для довільних $x_1, x_2 \in \mathsf{N}\cup\{x_0\}$ таких, що $x_2 \leftarrow x_1$ і $x_1 \neq x_2$ існують моменти часу $t_1, t_2 \in \mathbf{T}$ такі, що $x_1 \in \psi(t_1)$, $x_2 \in \psi(t_2)$ і $t_1 < t_2$. Тому, друга умова означення 2.3 для відображення ψ — також виконується. Таким чином, відображення ψ є часом на орієнтованій множині $\mathcal{M}_{\restriction \mathsf{N}\cup\{x_0\}} = (\mathsf{N}\cup\{x_0\}, \leftarrow)$.

$\boxed{\mathbf{3.}}$ Доведемо, що час ψ є точковим.

3.1) Оскільки час ψ_1 є точковим, то з формули (6.13) випливає, що для довільного $t \in \mathbf{T}$ множина $\psi(t)$ є одноелементною. Тобто, згідно з означенням 2.4, ***час ψ є квазіточковим***.

3.2) Нехай, $t_1, t_2 \in \mathbf{T}$, $x_1, x_2 \in \mathsf{N} \cup \{x_0\}$, $t_1 \leq t_2$, $x_1 \in \psi(t_1)$, $x_2 \in \psi(t_2)$. Доведемо, що тоді $x_2 \leftarrow x_1$.

3.2.1. У випадку $t_1 = t_2$ з того факту, що (згідно з пунктом **3.1)**) $\psi(t)$ є одноелементною множиною, отримуємо $x_1 = x_2$, а отже, за означенням 2.1, отримуємо бажане співвідношення $x_2 \leftarrow x_1$. Отже, *надалі будемо вважати, що* $t_1 < t_2$.

3.2.2. У випадку $t_1, t_2 \in \mathbf{T}_1$, враховуючи формулу (6.13) та умову (T1) (тобто $\mathbb{T}_1 \sqsubseteq \mathbb{T}$), будемо мати:

$$\psi(t_1) = \psi_1(t_1), \qquad \psi(t_2) = \psi_1(t_2), \qquad t_1 <_1 t_2.$$

Отже, оскільки час ψ_1 є точковим (за умовою леми), то за означенням 2.4 отримуємо $x_2 \leftarrow x_1$. Таким чином, залишилось розглянути лише два випадки $t_1 \in \{t_0, t_0'\}$ та $t_2 \in \{t_0, t_0'\}$ при додатковій умові $t_1 < t_2$.

3.2.3. Випадок $t_1 \in \{t_0, t_0'\}$ $(t_1 < t_2)$. У цьому випадку, враховуючи нерівність (6.8), маємо:

$$t_0 \leq t_1 < t_2, \qquad x_1 \in \psi(t_1) = \psi(t_0), \qquad x_2 \in \psi(t_2). \tag{6.14}$$

З умови $x_1 \in \psi(t_0)$, згідно з формулою (6.13), випливає, що $x_1 = x_0$. Отже, потрібно довести, що $x_2 \leftarrow x_0$. Припустимо супротивне $x_2 \not\leftarrow x_0$. Тоді, оскільки орієнтована множина $\mathcal{M}$ є квазіланцюговою, за означенням 3.4, отримаємо $x_0 \overset{+}{\leftarrow} x_2$. Тому, рівність $x_0 = x_2$ — неможлива, тобто $x_2 \neq x_0$, отже $x_2 \in \mathsf{N}$. Таким чином, враховуючи твердження 5.4 (властивість (QL12)), отримуємо:

$$x_2 \in \mathsf{N}_- = \left\{ x \in \mathsf{N} \mid x_0 \overset{+-}{\leftarrow} x \right\}.$$

Оскільки $x_0 \overset{+}{\leftarrow} x_2$, то, згідно з формулами (6.4) та (6.6), маємо, $\widehat{\psi}_1^+(x_2) = \widehat{\psi}_{1,x_0}^-(x_2) \in \mathbf{T}_1^-$. Звідси:

$$\widehat{\psi}_1^+(x_2) < \sup\nolimits_{\mathbb{T}}^* \left(\mathbf{T}_1^-\right) = t_0. \tag{6.15}$$

Оскільки $x_2 \in \mathsf{N}$ (тобто $x_2 \neq x_0$) і (згідно з (6.14)), $x_2 \in \psi(t_2)$, то, враховуючи, що $\psi(t_0) = \psi(t_0') = \{x_0\}$, маємо $t_2 \notin \{t_0, t_0'\}$. Отже, $t_2 \in \mathbf{T}_1$. Тому, згідно з (6.13), $\psi(t_2) = \psi_1(t_2)$, тобто (згідно з (6.14)) $x_2 \in \psi_1(t_2)$. Отже, $t_2 \leq_1 \widehat{\psi}_1^+(x_2)$. І, враховуючи умову (T1) ($\mathbb{T}_1 \sqsubseteq \mathbb{T}$), на основі нерівності (6.15) отримуємо:

$$t_2 \leq \widehat{\psi}_1^+(x_2) < t_0,$$

що суперечить умовам (6.14). Тому, зроблене припущення — помилкове. Отже, $x_2 \leftarrow x_0 = x_1$ (тобто $x_2 \leftarrow x_1$), що й необхідно було довести.

3.2.4. Розглянемо випадок $t_2 \in \{t_0, t_0'\}$ ($t_1 < t_2$). У цьому випадку, враховуючи (6.8), отримуємо:

$$t_1 < t_2 \le t_0', \qquad x_1 \in \psi(t_1), \qquad x_2 \in \psi(t_2) = \psi\left(t_0'\right). \tag{6.16}$$

Доведемо, що $x_2 \leftarrow x_1$. З умови $x_2 \in \psi(t_0')$, згідно з формулою (6.13), випливає, що $x_2 = x_0$. Отже, потрібно довести, що $x_0 \leftarrow x_1$. Припустимо супротивне: $x_0 \not\leftarrow x_1$. Тоді, враховуючи, що орієнтована множина $\mathcal{M}$ є квазіланцюговою, маємо $x_1 \overset{+}{\leftarrow} x_0$. Тому, рівність $x_0 = x_1$ — неможлива, тобто $x_1 \neq x_0$, отже $x_1 \in \mathsf{N}$. З умови $x_1 \overset{+}{\leftarrow} x_0$ на основі твердження 5.4 (властивість (QL12)) випливає, що:

$$x_1 \in \mathsf{N}_+ = \left\{ x \in \mathsf{N} \,\middle|\, x \overset{-+}{\leftarrow} x_0 \right\}.$$

Оскільки $x_1 \overset{+}{\leftarrow} x_0$, то, згідно з формулами (6.3) та (6.5), маємо, $\widehat{\psi}_1^-(x_1) = \widehat{\psi}_{1,x_0}^+(x_1) \in \mathbf{T}_1^+$. Звідси:

$$t_0' = \inf\nolimits_{\mathbb{T}}^* \left(\mathbf{T}_1^+\right) < \widehat{\psi}_1^-(x_1). \tag{6.17}$$

Оскільки $x_1 \in \mathsf{N}$ (тобто $x_1 \neq x_0$) і (згідно з (6.16)), $x_1 \in \psi(t_1)$, то, враховуючи, що $\psi(t_0) = \psi(t_0') = \{x_0\}$, маємо $t_1 \notin \{t_0, t_0'\}$. Отже, $t_1 \in \mathbf{T}_1$. Тому, згідно з (6.13), $\psi(t_1) = \psi_1(t_1)$, тобто (згідно з (6.16)) $x_1 \in \psi_1(t_1)$. Отже, $\widehat{\psi}_1^-(x_1) \le_1 t_1$. І, враховуючи умову (T1) ($\mathbb{T}_1 \sqsubseteq \mathbb{T}$), на основі нерівності (6.17) отримуємо:

$$t_0' < \widehat{\psi}_1^-(x_1) \le t_1,$$

що суперечить умовам (6.16). Тому, зроблене припущення — помилкове. Отже, $x_2 = x_0 \leftarrow x_1$, що й необхідно було довести.

З пунктів **3.2.1**–**3.2.4** випливає, що в усіх можливих випадках з умов $t_1, t_2 \in \mathbf{T}$, $x_1, x_2 \in \mathsf{N} \cup \{x_0\}$, $t_1 \le t_2$, $x_1 \in \psi(t_1)$, $x_2 \in \psi(t_2)$ випливає, що $x_2 \leftarrow x_1$.

З пунктів **3.1)**, **3.2)**, за означенням 2.4 випливає, що час ψ є точковим на орієнтованій множині $\mathcal{M}_{\restriction \mathsf{N} \cup \{x_0\}} = (\mathsf{N} \cup \{x_0\}, \leftarrow)$.

$\boxed{\mathbf{4.}}$ Із співвідношення (6.13) і того факту, що час ψ_1 є 2-повторним випливає, що час ψ також є 2-повторним.

$\boxed{\mathbf{5.}}$ Доведемо, що для довільних $x, y \in \mathsf{N} \cup \{x_0\} = \mathfrak{Bs}\left(\mathcal{M}_{\restriction \mathsf{N} \cup \{x_0\}}\right)$ з умови $y \overset{+-}{\leftarrow} x$ випливає нерівність $\widehat{\psi}^-(x) < \widehat{\psi}^-(y)$. Нехай, $x, y \in \mathsf{N} \cup \{x_0\}$ і $y \overset{+-}{\leftarrow} x$.

5.1) У випадку, коли $x, y \in \mathsf{N}$ з формули (6.13) випливає, що $\widehat{\psi}^{-}(x) = \widehat{\psi}_1^{-}(x)$, $\widehat{\psi}^{-}(y) = \widehat{\psi}_1^{-}(y)$. Тому в цьому випадку зазначена імплікація випливає з того факту, що $(\mathbb{T}_1, \psi_1)$ є часковою 2-хронологізацією $\mathcal{M}$ відносно підмножини $\mathsf{N} \subseteq \mathfrak{Bs}(\mathcal{M})$. Отже, залишилось лише розглянути випадки, коли $x = x_0$ або $y = x_0$.

5.2) Нехай, тепер, $x = x_0$. Оскільки, за умовою, $y \overset{+-}{\leftarrow} x$, то рівність $y = x$ — неможлива (за означенням відношень $\overset{+}{\leftarrow}$ та $\overset{+-}{\leftarrow}$ (див. позначення 3.1 та 5.3)). Отже, $y \neq x$, тобто $y \neq x_0$. Тому, маємо, $y \in \mathsf{N}$ і $y \overset{+-}{\leftarrow} x_0$. Звідси, застосовуючи властивість $(\psi x_0 4)$, отримуємо $t_0 < \widehat{\psi}_1^{-}(y)$. Оскільки $y \in \mathsf{N}$ то з формули (6.13) випливає, що $\widehat{\psi}^{-}(y) = \widehat{\psi}_1^{-}(y)$. Таким чином, згідно з формулою (6.13), отримуємо:

$$\widehat{\psi}^{-}(x) = \widehat{\psi}^{-}(x_0) = t_0 < \widehat{\psi}_1^{-}(y) = \widehat{\psi}^{-}(y)\,.$$

5.3) Тепер розглянемо випадок, коли $y = x_0$. Оскільки $y \overset{+-}{\leftarrow} x$, то маємо $x_0 \overset{+-}{\leftarrow} x$. Тому, $x \neq x_0$, тобто $x \in \mathsf{N}$. Отже, $x_0 \overset{+-}{\leftarrow} x$, де $x \in \mathsf{N}$. Звідси випливає, що $x \in \mathsf{N}_-$ (згідно з (6.2)). Тому, враховуючи (6.13) та (6.4), маємо:

$$\widehat{\psi}^{-}(x) = \widehat{\psi}_1^{-}(x) \leq_1 \widehat{\psi}_{1,x_0}^{-}(x)\,.$$

Тобто, враховуючи, що $\mathbb{T}_1 \sqsubseteq \mathbb{T}$ маємо, $\widehat{\psi}^{-}(x) \leq \widehat{\psi}_{1,x_0}^{-}(x)$, де $\widehat{\psi}_{1,x_0}^{-}(x) \in \left\{ \widehat{\psi}_{1,x_0}^{-}(\widetilde{x}) \;\middle|\; \widetilde{x} \in \mathsf{N}_- \right\} = \mathbf{T}_1^{-}$. Отже, згідно з умовою (T3) та означенням 5.10, отримуємо:

$$\widehat{\psi}^{-}(x) \leq \widehat{\psi}_{1,x_0}^{-}(x) < \sup\nolimits_{\mathbb{T}}^{*}\left(\mathbf{T}_1^{-}\right) = t_0 = \widehat{\psi}^{-}(x_0) = \widehat{\psi}^{-}(y)\,.$$

З пунктів 5.1)–5.3) випливає, що (в усіх можливих випадках) для довільних $x, y \in \mathsf{N} \cup \{x_0\}$ з умови $y \overset{+-}{\leftarrow} x$ випливає нерівність $\widehat{\psi}^{-}(y) = \widehat{\psi}_1^{-}(y)$, що й необхідно було довести.

$\boxed{\mathbf{6.}}$ Доведемо, що для довільних $x, y \in \mathsf{N} \cup \{x_0\}$ з умови $y \overset{-+}{\leftarrow} x$ випливає нерівність $\widehat{\psi}^{+}(x) < \widehat{\psi}^{+}(y)$. Справді, нехай $x, y \in \mathsf{N} \cup \{x_0\}$ і $y \overset{+-}{\leftarrow} x$.

6.1) У випадку, коли $x, y \in \mathsf{N}$ згідно з (6.13) маємо, $\widehat{\psi}^{-}(x) = \widehat{\psi}_1^{-}(x)$, $\widehat{\psi}^{-}(y) = \widehat{\psi}_1^{-}(y)$. Тому в цьому випадку зазначена імплікація випливає з того факту, що $(\mathbb{T}_1, \psi_1)$ є часковою 2-хронологізацією $\mathcal{M}$ відносно підмножини $\mathsf{N} \subseteq \mathfrak{Bs}(\mathcal{M})$. Отже, залишилось лише розглянути випадки, коли $x = x_0$ або $y = x_0$.

6.2) Розглянемо випадок $x = x_0$. Оскільки, за умовою, $y \overset{+}{\rightleftarrows} x$, то рівність $y = x$ — неможлива (за означенням відношень $\overset{+}{\leftarrow}$ та $\overset{+}{\rightleftarrows}$). Отже, $y \neq x$, тобто $y \neq x_0$. Тому маємо, $y \in \mathsf{N}$ і $y \overset{+}{\rightleftarrows} x_0$. Отже, згідно з (6.1), $y \in \mathsf{N}_+$. Тому, враховуючи (6.3) та (6.13), отримуємо:

$$\widehat{\psi}^{+}_{1,x_0}(y) \leq_1 \widehat{\psi}^{+}_{1}(y) = \widehat{\psi}^{+}(y)\,,$$

тобто, враховуючи, що $\mathbb{T}_1 \sqsubseteq \mathbb{T}$, маємо, $\widehat{\psi}^{+}_{1,x_0}(y) \leq \widehat{\psi}^{+}(y)$, де $\widehat{\psi}^{+}_{1,x_0}(y) \in \left\{\widehat{\psi}^{+}_{1,x_0}(\widetilde{x}) \;\middle|\; \widetilde{x} \in \mathsf{N}_+\right\} = \mathbf{T}^{+}_{1}$. Отже, використовуючи умову (T3), одержуємо:

$$\widehat{\psi}^{+}(x_0) = t'_0 = \inf\nolimits^{*}_{\mathbb{T}}\left(\mathbf{T}^{+}_{1}\right) < \widehat{\psi}^{+}_{1,x_0}(y) \leq \widehat{\psi}^{+}(y)\,.$$

Звідси, враховуючи, що $x = x_0$, отримуємо бажану нерівність $\widehat{\psi}^{+}(x) < \widehat{\psi}^{+}(y)$.

6.3) Тепер розглянемо випадок $y = x_0$. Оскільки, за умовою, $y \overset{+}{\rightleftarrows} x$, то рівність $y = x$ — неможлива (за означенням відношень $\overset{+}{\leftarrow}$ та $\overset{+}{\rightleftarrows}$). Отже, $x \neq y$, тобто $x \neq x_0$. Таким чином, маємо $x \in \mathsf{N}$ і $x_0 = y \overset{+}{\rightleftarrows} x$. Звідси, за властивістю ($\psi x_0 5$), випливає нерівність $\widehat{\psi}^{+}_{1}(x) < t'_0$. Тому, враховуючи (6.13), отримуємо:

$$\widehat{\psi}^{+}_{1}(x) < t'_0 = \widehat{\psi}^{+}(x_0) = \widehat{\psi}^{+}(y)\,. \tag{6.18}$$

Враховуючи, що $x \in \mathsf{N}$, за формулою (6.13) маємо, $\widehat{\psi}^{+}(x) = \widehat{\psi}^{+}_{1}(x)$. Отже, з нерівності (6.18) отримуємо бажану нерівність $\widehat{\psi}^{+}(x) < \widehat{\psi}^{+}(y)$.

Отже, в усіх можливих випадках з умов $x, y \in \mathsf{N} \cup \{x_0\}$ та $y \overset{+}{\rightleftarrows} x$ випливає нерівність $\widehat{\psi}^{+}(x) < \widehat{\psi}^{+}(y)$.

$\Rrightarrow$ З умов (T1), (T2), рівності (6.13), а також з результатів, встановлених в пунктах 2-6 даного доведення випливає, що $(\mathbb{T}, \psi)$ є частковою 2-хронологізацією орієнтованої множини $\mathcal{M}$ відносно підмножини $\mathsf{N} \cup \{x_0\}$, що задовольняє умови а)-в) даної леми. $\square$

7. Доведення достатності для теореми 3.6

Наступна лема обґрунтовує достатність умови, вказаної в теоремі 3.6 для існування точкового часу.

Лема 7.1. *Якщо орієнтована множина $\mathcal{M}$ є квазіланцюговою то її можна точково хронологізувати. При цьому існує хронологізація $\mathcal{H} = ((\mathbf{T}, \leq), \psi)$ орієнтованої множини $\mathcal{M}$ з 2-повторним точковим часом ψ.*

Доведення. Нехай, $\mathcal{M}$ — квазіланцюгова орієнтована множина.

I. Спочатку доведемо лему 7.1 за умови наступного додаткового припущення:

Припущення * *Орієнтована множина* $\mathcal{M}$ — *строго еволюційно обмежена.*

Отже, нехай має місце припущення *. Тоді існують $\min_*(\mathcal{M})$ та $\max_*(\mathcal{M})$. Зафіксуємо довільну множину $\mathcal{T}$, що задовольняє наступні умови:

$$1)\ \mathbf{card}\,(\mathcal{T}) \geq \aleph_0, \qquad 2)\ \mathbf{card}\,(\mathcal{T}) > \mathbf{card}\,(\mathfrak{Bs}(\mathcal{M}))\,.$$

I.1. Позначимо через $\mathscr{H}$ множину всіх упорядкованих пар виду $\mathbf{h} = (\mathbb{T}_{\mathbf{h}}, \psi_{\mathbf{h}}) = ((\mathbf{T}_{\mathbf{h}}, \leq_{\mathbf{h}}), \psi_{\mathbf{h}})$ таких, що:

1^0.: $\mathbf{h}$ є часковою 2-хронологізацією орієнтованої множини $\mathcal{M}$ відносно деякої підмножини $\mathsf{N}_{\mathbf{h}} \subseteq \mathfrak{Bs}(\mathcal{M})$ такої, що $\min_*(\mathcal{M}), \max_*(\mathcal{M}) \in \mathsf{N}_{\mathbf{h}}$.

2^0.: $\mathbf{T}_{\mathbf{h}} \subseteq \mathcal{T}$.

Зауважимо, що з пункту 1^0 автоматично випливає, що для довільної хронологізації $\mathbf{h} = (\mathbb{T}_{\mathbf{h}}, \psi_{\mathbf{h}}) = ((\mathbf{T}_{\mathbf{h}}, \leq_{\mathbf{h}}), \psi_{\mathbf{h}}) \in \mathscr{H}$ множина $\mathsf{N}_{\mathbf{h}}$ визначається однозначно за формулою:

$$\mathsf{N}_{\mathbf{h}} = \bigcup_{t \in \mathbf{T}_{\mathbf{h}}} \psi_{\mathbf{h}}(t)\,. \tag{7.1}$$

Доведемо, що множина $\mathscr{H}$ — непорожня. Виберемо довільним чином чотири елемента $\tau_1, \tau_2, \tau_3, \tau_4 \in \mathcal{T}$ ($\tau_i \neq \tau_j$ при $i \neq j$). Покладемо:

$$\boldsymbol{x}_- := \min_*(\mathcal{M})\,, \qquad \boldsymbol{x}_+ := \max_*(\mathcal{M})$$
$$\mathsf{N}_{\mathbf{h}_0} := \{\boldsymbol{x}_-, \boldsymbol{x}_+\}\,, \qquad \mathbf{T}_{\mathbf{h}_0} := \{\tau_1, \tau_2, \tau_3, \tau_4\}\,.$$

Далі, для $\tau_i, \tau_j \in \mathbf{T}_{\mathbf{h}_0}$ $(i, j \in \overline{1,4})$ будемо вважати, що $\tau_i \leq_{\mathbf{h}_0} \tau_j$ тоді і тільки тоді, коли $i \leq j$ (де $\leq$ — стандартний порядок на множині натуральних чисел). Тоді, упорядкована пара:

$$\mathbb{T}_{\mathbf{h}_0} = (\mathbf{T}_{\mathbf{h}_0}, \leq_{\mathbf{h}_0})$$

очевидно є лінійно упорядкованою множиною. Покладемо:

$$\psi_{\mathbf{h}_0}(t) := \begin{cases} \{\boldsymbol{x}_-\}\,, & t \in \{\tau_1, \tau_2\} \\ \{\boldsymbol{x}_+\}\,, & t \in \{\tau_3, \tau_4\} \end{cases} \qquad (t \in \mathbf{T}_{\mathbf{h}_0})\,.$$

Нескладно перевірити, що $\psi_{\mathbf{h}_0}$ є точковим 2-повторним часом на орієнтованій множині $\mathcal{M}_{\restriction \mathsf{N}_{\mathbf{h}_0}}$, причому $\{\min_*(\mathcal{M}), \max_*(\mathcal{M})\} = \{\boldsymbol{x}_-, \boldsymbol{x}_+\} = \mathsf{N}_{\mathbf{h}_0}$ і $\mathbf{T}_{\mathbf{h}_0} = \{\tau_1, \tau_2, \tau_3, \tau_4\} \subseteq \mathcal{T}$. Отже, $\mathbf{h}_0 \in \mathscr{H}$. Тому $\mathscr{H} \neq \emptyset$, що й необхідно було довести.

На множині $\mathscr{H}$ введемо наступне бінарне відношення:

($\mathcal{H}o$): Для довільних хронологізацій $\mathbf{h} = (\mathbb{T}_{\mathbf{h}}, \psi_{\mathbf{h}}) = ((\mathbf{T}_{\mathbf{h}}, \leq_{\mathbf{h}}), \psi_{\mathbf{h}}) \in \mathscr{H}$ і $\mathbf{H} = (\mathbb{T}_{\mathbf{H}}, \psi_{\mathbf{H}}) = ((\mathbf{T}_{\mathbf{H}}, \leq_{\mathbf{H}}), \psi_{\mathbf{H}}) \in \mathscr{H}$ будемо вважати, що $\mathbf{h} \leq^{\mathscr{H}} \mathbf{H}$ тоді і тільки тоді, коли виконуються такі умови:

$\mathcal{H}o$**1.:** $\mathbb{T}_{\mathbf{h}} \sqsubseteq \mathbb{T}_{\mathbf{H}}$ (з останнього співвідношення, зокрема випливає, що $\mathbf{T}_{\mathbf{h}} \subseteq \mathbf{T}_{\mathbf{H}}$).

$\mathcal{H}o$**2.:** $\forall\, t \in \mathbf{T}_{\mathbf{h}}\ (\psi_{\mathbf{h}}(t) = \psi_{\mathbf{H}}(t))$ (тобто $\psi_{\mathbf{h}} \subseteq \psi_{\mathbf{H}}$).

Легко бачити, що $\leq_{\mathscr{H}}$ є відношенням часткового порядку (тобто рефлексивним, асиметричним і транзитивним відношенням на множині хронологізацій $\mathscr{H}$).

Доведемо, що в упорядкованій множині $\left(\mathscr{H}, \leq^{\mathscr{H}}\right)$ кожен ланцюг обмежений зверху.

Нехай $\mathscr{L} \subseteq \mathscr{H}$ ($\mathscr{L} \neq \emptyset$) — довільний ланцюг упорядкованої множини $\left(\mathscr{H}, \leq^{\mathscr{H}}\right)$. Нижче буде побудовано нову часкову 2-хронологізацію $\widetilde{\mathbf{H}} = \left(\mathbb{T}_{\widetilde{\mathbf{H}}}, \psi_{\widetilde{\mathbf{H}}}\right) = \left(\left(\mathbf{T}_{\widetilde{\mathbf{H}}}, \leq_{\widetilde{\mathbf{H}}}\right), \psi_{\widetilde{\mathbf{H}}}\right)$ орієнтованої множини $\mathcal{M}$.

$\Rrightarrow$ $\widetilde{\mathbf{H}}$**1.:** Покладемо:

$$\mathbf{T}_{\widetilde{\mathbf{H}}} = \bigcup_{\mathbf{h} \in \mathscr{L}} \mathbf{T}_{\mathbf{h}}. \tag{7.2}$$

$\Rrightarrow$ $\widetilde{\mathbf{H}}$**2.:** Для $t_1, t_2 \in \mathbf{T}_{\widetilde{\mathbf{H}}}$ будемо вважати, що $t_1 \leq_{\widetilde{\mathbf{H}}} t_2$ тоді і тільки тоді, коли існує така хронологізація $\mathbf{h} \in \mathscr{L}$, що $t_1, t_2 \in \mathbf{T}_{\mathbf{h}}$ і $t_1 \leq_{\mathbf{h}} t_2$.

$\Rrightarrow$ $\widetilde{\mathbf{H}}$**3.:** Нехай, $t \in \mathbf{T}_{\widetilde{\mathbf{H}}}$. Тоді, згідно з формулою (7.2), існує хронологізація $\mathbf{h} \in \mathscr{L}$ така, що $t \in \mathbf{T}_{\mathbf{h}}$. Покладемо:

$$\psi_{\widetilde{\mathbf{H}}}(t) := \psi_{\mathbf{h}}(t). \tag{7.3}$$

Доведемо, що формула (7.3) коректним чином визначає відображення $\psi_{\widetilde{\mathbf{H}}}(t) : \mathbf{T}_{\widetilde{\mathbf{H}}} \to 2^{\mathsf{N}_{\widetilde{\mathbf{H}}}}$, де

$$\mathsf{N}_{\widetilde{\mathbf{H}}} = \bigcup_{\mathbf{H} \in \mathscr{L}} \mathsf{N}_{\mathbf{H}}. \tag{7.4}$$

Нехай, $t \in \mathbf{T}_{\mathbf{h}}$ і $t \in \mathbf{T}_{\mathbf{h}_1}$, де $\mathbf{h}, \mathbf{h}_1 \in \mathscr{L}$. Для доведення коректності означення відображення $\psi_{\widetilde{\mathbf{H}}}$ за формулою (7.3), необхідно перевірити рівність $\psi_{\mathbf{h}}(t) = \psi_{\mathbf{h}_1}(t)$. Осклькки $\mathscr{L}$ — ланцюг упорядкованої множини $\left(\mathscr{H}, \leq^{\mathscr{H}}\right)$ то $\mathscr{L}$ є лінійно упорядкованою множиною відносно відношення $\leq^{\mathscr{H}}$. Тому для елементів $\mathbf{h}, \mathbf{h}_1 \in \mathscr{L}$ мусить виконуватись хоча б одне із співвідношень $\mathbf{h} \leq^{\mathscr{H}} \mathbf{h}_1$ або $\mathbf{h}_1 \leq^{\mathscr{H}} \mathbf{h}$. Але, в обох випадках, згідно з пунктом $\mathcal{H}o2$ означення ($\mathcal{H}o$) відношення порядку $\leq^{\mathscr{H}}$, отримуємо рівність $\psi_{\mathbf{h}}(t) = \psi_{\mathbf{h}_1}(t)$, що й необхідно було довести.

I.2. Тепер доведемо, що побудована вище трійка $\widetilde{\mathbf{H}} = \left(\mathbb{T}_{\widetilde{\mathbf{H}}}, \psi_{\widetilde{\mathbf{H}}}\right) = \left(\left(\mathbf{T}_{\widetilde{\mathbf{H}}}, \leq_{\widetilde{\mathbf{H}}}\right), \psi_{\widetilde{\mathbf{H}}}\right)$ є часковою 2-хронологізацією орієнтованої множини $\mathcal{M}$ відносно підмножини $\mathsf{N}_{\widetilde{\mathbf{H}}} \subseteq \mathfrak{Bs}(\mathcal{M})$, що визначається формулою (7.4).

I.2.1.: Доведемо, що $\mathbb{T}_{\widetilde{\mathbf{H}}} = \left(\mathbf{T}_{\widetilde{\mathbf{H}}}, \leq_{\widetilde{\mathbf{H}}}\right)$ є лінійно упорядкованою множиною.

I.2.1.а): Нехай, $t \in \mathbf{T}_{\widetilde{\mathbf{H}}}$. Тоді, згідно з формулою (7.2), існує хронологізація $\mathbf{h} = (\mathbb{T}_{\mathbf{h}}, \psi_{\mathbf{h}}) = ((\mathbf{T}_{\mathbf{h}}, \leq_{\mathbf{h}}), \psi_{\mathbf{h}}) \in \mathscr{L}$ така, що $t \in \mathbf{T}_{\mathbf{h}}$. Тоді, оскільки $\mathbb{T}_{\mathbf{h}} = (\mathbf{T}_{\mathbf{h}}, \leq_{\mathbf{h}})$ є лінійно упорядкованою множиною, маємо $t \leq_{\mathbf{h}} t$, а отже, за пунктом $\widetilde{\mathbf{H}}2$ (див. вище), маємо $t \leq_{\widetilde{\mathbf{H}}} t$. Тобто, рефлексивність відношення $\leq_{\widetilde{\mathbf{H}}}$ доведено.

I.2.1.б): Нехай, $t, \tau \in \mathbf{T}_{\widetilde{\mathbf{H}}}$, причому $t \leq_{\widetilde{\mathbf{H}}} \tau$ і $\tau \leq_{\widetilde{\mathbf{H}}} t$. Тоді, згідно з пунктом $\widetilde{\mathbf{H}}2$ (див. вище), існують хрононологізації $\mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2 \in \mathscr{L}$ такі, що $t, \tau \in \mathbf{T}_{\mathbf{h}_i}$ $(i \in \overline{1,2})$, $t \leq_{\mathbf{h}_1} \tau$ і $\tau \leq_{\mathbf{h}_2} t$. Осклькі $\mathscr{L}$ — ланцюг упорядкованої множини $\left(\mathscr{H}, \leq^{\mathscr{H}}\right)$ то мусить існувати елемент $\mathbf{h}_* \in \{\mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2\}$ такий, що $\mathbf{h}_1 \leq^{\mathscr{H}} \mathbf{h}_*$ і $\mathbf{h}_2 \leq^{\mathscr{H}} \mathbf{h}_*$. Справді, щоб пересвідчитись в існуванні такого елемента $\mathbf{h}_*$ досить покласти:

$$\mathbf{h}_* := \begin{cases} \mathbf{h}_2, & \mathbf{h}_1 \leq^{\mathscr{H}} \mathbf{h}_2 \\ \mathbf{h}_1, & \mathbf{h}_2 <^{\mathscr{H}} \mathbf{h}_1. \end{cases}$$

Із співвідношень $\mathbf{h}_1 \leq^{\mathscr{H}} \mathbf{h}_*$ і $\mathbf{h}_2 \leq^{\mathscr{H}} \mathbf{h}_*$, згідно з пунктом $\mathcal{H}o1$ означення $(\mathcal{H}o)$ відношення порядку $\leq^{\mathscr{H}}$, випливають співвідношення $\mathbb{T}_{\mathbf{h}_1} \sqsubseteq \mathbb{T}_{\mathbf{h}_*}$ та $\mathbb{T}_{\mathbf{h}_2} \sqsubseteq \mathbb{T}_{\mathbf{h}_*}$, а отже (згідно із позначенням 5.11) і співвідношення $\mathbf{T}_{\mathbf{h}_1} \subseteq \mathbf{T}_{\mathbf{h}_*}$ та $\mathbf{T}_{\mathbf{h}_2} \subseteq \mathbf{T}_{\mathbf{h}_*}$. Тому, враховуючи, що $t, \tau \in \mathbf{T}_{\mathbf{h}_i}$ $(i \in \overline{1,2})$, то маємо $t, \tau \in \mathbf{T}_{\mathbf{h}_*}$. Оскільки $\mathbb{T}_{\mathbf{h}_1}, \mathbb{T}_{\mathbf{h}_2} \sqsubseteq \mathbb{T}_{\mathbf{h}_*}$, то із нерівностей $t \leq_{\mathbf{h}_1} \tau$ і $\tau \leq_{\mathbf{h}_2} t$, згідно із позначенням 5.11, випливають нерівності $t \leq_{\mathbf{h}_*} \tau$ і $\tau \leq_{\mathbf{h}_*} t$. А з останніх нерівностей, в силу того, що $(\mathbf{T}_{\mathbf{h}_*}, \leq_{\mathbf{h}_*})$ є лінійно упорядкованою множиною, випливає рівність $t = \tau$. Таким чином, асиметричність відношення $\leq_{\widetilde{\mathbf{H}}}$ доведено.

I.2.1.в): Нехай, $t_1, t_2, t_3 \in \mathbf{T}_{\widetilde{\mathbf{H}}}$, причому $t_1 \leq_{\widetilde{\mathbf{H}}} t_2$ і $t_2 \leq_{\widetilde{\mathbf{H}}} t_3$. Тоді, згідно з пунктом $\widetilde{\mathbf{H}}2$ (див. вище), існують хрононологізації $\mathbf{h}_{12}, \mathbf{h}_{23} \in \mathscr{L}$ такі, що $t_1, t_2 \in \mathbf{T}_{\mathbf{h}_{12}}$, $t_2, t_3 \in \mathbf{T}_{\mathbf{h}_{23}}$, $t_1 \leq_{\mathbf{h}_{12}} t_2$ і $t_2 \leq_{\mathbf{h}_{23}} t_3$. Осклькі $\mathscr{L}$ — ланцюг упорядкованої множини $\left(\mathscr{H}, \leq^{\mathscr{H}}\right)$ то мусить існувати елемент $\mathbf{h}_{13} \in \{\mathbf{h}_{12}, \mathbf{h}_{23}\}$ такий, що $\mathbf{h}_{12} \leq^{\mathscr{H}} \mathbf{h}_{13}$ і $\mathbf{h}_{23} \leq^{\mathscr{H}} \mathbf{h}_{13}$. Із співвідношень $\mathbf{h}_{12} \leq^{\mathscr{H}} \mathbf{h}_{13}$ і $\mathbf{h}_{23} \leq^{\mathscr{H}} \mathbf{h}_{13}$, згідно з пунктом $\mathcal{H}o1$ означення $(\mathcal{H}o)$, випливають співвідношення $\mathbf{T}_{\mathbf{h}_{12}} \subseteq \mathbf{T}_{\mathbf{h}_{13}}$ та $\mathbf{T}_{\mathbf{h}_{23}} \subseteq \mathbf{T}_{\mathbf{h}_{13}}$. Тому, враховуючи, що $t_1, t_2 \in \mathbf{T}_{\mathbf{h}_{12}}$, $t_2, t_3 \in \mathbf{T}_{\mathbf{h}_{23}}$, то маємо $t_1, t_2, t_3 \in \mathbf{T}_{\mathbf{h}_{13}}$. Оскільки $\mathbb{T}_{\mathbf{h}_{12}}, \mathbb{T}_{\mathbf{h}_{23}} \sqsubseteq \mathbb{T}_{\mathbf{h}_{13}}$, то із нерівностей

$t_1 \leq_{\mathbf{h}_{12}} t_2$ і $t_2 \leq_{\mathbf{h}_{23}} t_3$, згідно із позначенням 5.11, випливають нерівності $t_1 \leq_{\mathbf{h}_{13}} t_2$ і $t_2 \leq_{\mathbf{h}_{13}} t_3$. А з останніх нерівностей, в силу того, що $(\mathbf{T}_{\mathbf{h}_{13}}, \leq_{\mathbf{h}_{13}})$ є лінійно упорядкованою множиною, випливає нерівність $t_1 \leq_{\mathbf{h}_{13}} t_3$. Таким чином, маємо $t_1, t_3 \in \mathbf{T}_{\mathbf{h}_{13}}$ і $t_1 \leq_{\mathbf{h}_{13}} t_3$. Звідси, за пунктом $\widetilde{\mathbf{H}}2$ (див. вище), маємо $t_1 \leq_{\widetilde{\mathbf{H}}} t_3$. Тобто, транзитивність відношення $\leq_{\widetilde{\mathbf{H}}}$ доведено.

I.2.1.г): Розглянемо довільні елементи $t_1, t_2 \in \mathbf{T}_{\widetilde{\mathbf{H}}}$. З формули (7.2) випливає існування хронологізацій $\mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2 \in \mathscr{L}$ таких, що $t_1 \in \mathbf{T}_{\mathbf{h}_1}$, $t_2 \in \mathbf{T}_{\mathbf{h}_2}$. Оскільки $\mathscr{L}$ — ланцюг упорядкованої множини $\left(\mathscr{H}, \leq^{\mathscr{H}}\right)$ то мусить існувати елемент $\mathbf{h}_* \in \{\mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2\}$ такий, що $\mathbf{h}_1 \leq^{\mathscr{H}} \mathbf{h}_*$ і $\mathbf{h}_2 \leq^{\mathscr{H}} \mathbf{h}_*$. Із співвідношень $\mathbf{h}_1 \leq^{\mathscr{H}} \mathbf{h}_*$ і $\mathbf{h}_2 \leq^{\mathscr{H}} \mathbf{h}_*$, згідно з пунктом $\mathcal{H}o1$ означення ($\mathcal{H}o$), випливають включення $\mathbf{T}_{\mathbf{h}_1} \subseteq \mathbf{T}_{\mathbf{h}_*}$ та $\mathbf{T}_{\mathbf{h}_2} \subseteq \mathbf{T}_{\mathbf{h}_*}$. Тому, враховуючи, що $t_i \in \mathbf{T}_{\mathbf{h}_i}$ $(i \in \overline{1,2})$, то маємо $t_1, t_2 \in \mathbf{T}_{\mathbf{h}_*}$. Звідси, оскільки $(\mathbf{T}_{\mathbf{h}_*}, \leq_{\mathbf{h}_*})$ є лінійно упорядкованою множиною, випливає, що повинна мати місце хоча б одна з нерівностей $t_1 \leq_{\mathbf{h}_*} t_2$ або $t_2 \leq_{\mathbf{h}_*} t_1$. Але, з нерівності $t_1 \leq_{\mathbf{h}_*} t_2$, згідно з пунктом $\widetilde{\mathbf{H}}2$ (див. вище), випливає співвідношення $t_1 \leq_{\widetilde{\mathbf{H}}} t_2$, а з нерівності $t_2 \leq_{\mathbf{h}_*} t_1$ — співвідношення $t_2 \leq_{\widetilde{\mathbf{H}}} t_1$. Таким чином, для довільних $t_1, t_2 \in \mathbf{T}_{\widetilde{\mathbf{H}}}$ мусить виконуватись хоча б одне із співвідношень $t_1 \leq_{\widetilde{\mathbf{H}}} t_2$ або $t_2 \leq_{\widetilde{\mathbf{H}}} t_1$. Отже, порядок $\leq_{\widetilde{\mathbf{H}}}$ є лінійним, тобто $\left(\mathbf{T}_{\widetilde{\mathbf{H}}}, \leq_{\widetilde{\mathbf{H}}}\right)$ є лінійно упорядкованою множиною, що й треба було довести.

I.2.2.: Доведемо, що відображення $\psi_{\widetilde{\mathbf{H}}}(t) : \mathbf{T}_{\widetilde{\mathbf{H}}} \to 2^{\mathsf{N}_{\widetilde{\mathbf{H}}}}$ є часом на орієнтованій множині $\mathcal{M}_{\restriction \mathsf{N}_{\widetilde{\mathbf{H}}}} = \left(\mathsf{N}_{\widetilde{\mathbf{H}}}, \leftarrow\right)$.

I.2.2.а): Нехай, $x \in \mathsf{N}_{\widetilde{\mathbf{H}}} = \mathfrak{Bs}\left(\mathcal{M}_{\restriction \mathsf{N}_{\widetilde{\mathbf{H}}}}\right)$. Тоді, згідно з формулою (7.4), існує хронологізація $\mathbf{h} \in \mathscr{L}$ така, що $x \in \mathsf{N}_{\mathbf{h}}$. Звідси, згідно з формулою (7.1) випливає існування елемента $t \in \mathbf{T}_{\mathbf{h}}$ такого, що $x \in \psi_{\mathbf{h}}(t)$. Оскільки $t \in \mathbf{T}_{\mathbf{h}}$, то, згідно з формулою (7.2), маємо, $t \in \mathbf{T}_{\widetilde{\mathbf{H}}}$, а, згідно з формулою (7.3), маємо $\psi_{\widetilde{\mathbf{H}}}(t) = \psi_{\mathbf{h}}(t)$. Отже, маємо $x \in \psi_{\widetilde{\mathbf{H}}}(t)$, де $t \in \mathbf{T}_{\widetilde{\mathbf{H}}}$. Таким чином, вище було доведено, що для довільного елемента $x \in \mathfrak{Bs}\left(\mathcal{M}_{\restriction \mathsf{N}_{\widetilde{\mathbf{H}}}}\right)$ існує елемент $t \in \mathbf{T}_{\widetilde{\mathbf{H}}}$ такий, що $x \in \psi_{\widetilde{\mathbf{H}}}(t)$.

I.2.2.б): Нехай, $x_1, x_2 \in \mathsf{N}_{\widetilde{\mathbf{H}}} = \mathfrak{Bs}\left(\mathcal{M}_{\restriction \mathsf{N}_{\widetilde{\mathbf{H}}}}\right)$, $x_2 \leftarrow x_1$ і $x_1 \neq x_2$. Тоді, згідно з формулою (7.4), існують хронологізації $\mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2 \in \mathscr{L}$ такі, що $x_1 \in \mathsf{N}_{\mathbf{h}_1}$, $x_2 \in \mathsf{N}_{\mathbf{h}_2}$. Оскільки

$\mathscr{L}$ — ланцюг упорядкованої множини $\left(\mathscr{H}, \leq^{\mathscr{H}}\right)$ то мусить існувати елемент $\mathbf{h}_* \in \{\mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2\}$ такий, що $\mathbf{h}_1 \leq^{\mathscr{H}} \mathbf{h}_*$ і $\mathbf{h}_2 \leq^{\mathscr{H}} \mathbf{h}_*$. Із співвідношень $\mathbf{h}_1 \leq^{\mathscr{H}} \mathbf{h}_*$ і $\mathbf{h}_2 \leq^{\mathscr{H}} \mathbf{h}_*$, згідно з пунктом $\mathcal{H}o1$ означення $(\mathcal{H}o)$, випливають співвідношення $\mathbf{T}_{\mathbf{h}_1}, \mathbf{T}_{\mathbf{h}_2} \subseteq \mathbf{T}_{\mathbf{h}_*}$. Тому, застосовоуючи формули (7.1) та (7.3) при $i \in \overline{1,2}$ отримуємо:

$$\mathsf{N}_{\mathbf{h}_i} = \bigcup_{t \in \mathbf{T}_{\mathbf{h}_i}} \psi_{\mathbf{h_i}}(t) = \bigcup_{t \in \mathbf{T}_{\mathbf{h}_i}} \psi_{\widetilde{\mathbf{H}}}(t) \subseteq \bigcup_{t \in \mathbf{T}_{\mathbf{h}_*}} \psi_{\widetilde{\mathbf{H}}}(t) = \mathsf{N}_{\mathbf{h}_*}.$$

Отже маємо, $x_1, x_2 \in \mathsf{N}_{\mathbf{h}_*}$, де $\mathbf{h}_* = \left(\left(\mathbf{T}_{\mathbf{h}_*}, \leq_{\mathbf{h}_*}\right), \psi_{\mathbf{h}_*}\right) \in \mathscr{L}$ — часткова 2-хронологізація орієнтованої множини $\mathcal{M}$ відносно підмножини $\mathsf{N}_{\mathbf{h}_*} \subseteq \mathfrak{Bs}(\mathcal{M})$, причому $x_2 \leftarrow x_1$ і $x_1 \neq x_2$. Тому, оскільки $\psi_{\mathbf{h}_*}$ — час на орієнтованій множині $\mathcal{M}_{\restriction \mathsf{N}_{\mathbf{h}_*}} = (\mathsf{N}_{\mathbf{h}_*}, \leftarrow)$, то (за означенням 2.3) існують етлементи $t_1, t_2 \in \mathbf{T}_{\mathbf{h}_*}$ такі, що $x_1 \in \psi_{\mathbf{h}_*}(t_1)$, $x_2 \in \psi_{\mathbf{h}_*}(t_2)$ і $t_1 <_{\mathbf{h}_*} t_2$. Оскільки $t_1, t_2 \in \mathbf{T}_{\mathbf{h}_*}$, де $\mathbf{h}_* \in \mathscr{L}$ то, за формулою (7.2), маємо, $t_1, t_2 \in \mathbf{T}_{\widetilde{\mathbf{H}}}$. Оскільки $\mathbf{h}_* \in \mathscr{L}$ і $t_1, t_2 \in \mathbf{T}_{\mathbf{h}_*}$, то, за формулою (7.3), $\psi_{\mathbf{h}_*}(t_1) = \psi_{\widetilde{\mathbf{H}}}(t_1)$, $\psi_{\mathbf{h}_*}(t_2) = \psi_{\widetilde{\mathbf{H}}}(t_2)$. Згідно з пунктом $\widetilde{\mathbf{H}}2$ (див. вище), з нерівності $t_1 <_{\mathbf{h}_*} t_2$ випливає нерівність $t_1 <_{\widetilde{\mathbf{H}}} t_2$. Отже, отримуємо: $t_1, t_2 \in \mathbf{T}_{\widetilde{\mathbf{H}}}$, $x_1 \in \psi_{\widetilde{\mathbf{H}}}(t_1)$, $x_2 \in \psi_{\widetilde{\mathbf{H}}}(t_2)$ і $t_1 <_{\widetilde{\mathbf{H}}} t_2$. Таким чином, ми довели, що для будь-яких $x_1, x_2 \in \mathfrak{Bs}\left(\mathcal{M}_{\restriction \mathsf{N}_{\widetilde{\mathbf{H}}}}\right)$, таких, що $x_2 \leftarrow x_1$ і $x_1 \neq x_2$ існують $t_1, t_2 \in \mathbf{T}_{\widetilde{\mathbf{H}}}$ такі, що $x_1 \in \psi_{\widetilde{\mathbf{H}}}(t_1)$, $x_2 \in \psi_{\widetilde{\mathbf{H}}}(t_2)$ і $t_1 <_{\widetilde{\mathbf{H}}} t_2$.

З результатів, отриманих в пунктах I.2.2.а) та I.2.2.б), за означенням 2.3, випливає, що відображення $\psi_{\widetilde{\mathbf{H}}}(t) : \mathbf{T}_{\widetilde{\mathbf{H}}} \to 2^{\mathsf{N}_{\widetilde{\mathbf{H}}}}$ є часом на орієнтованій множині $\mathcal{M}_{\restriction \mathsf{N}_{\widetilde{\mathbf{H}}}}$, що й треба було довести.

I.2.3.: Доведемо, що час $\psi_{\widetilde{\mathbf{H}}}$ є точковим на орієнтованій множині $\mathcal{M}_{\restriction \mathsf{N}_{\widetilde{\mathbf{H}}}}$.

I.2.3.а): З формули (7.3) і того факту, що $\psi_{\mathbf{h}}$ є точковим часом на орієнтованій множині $\mathcal{M}_{\restriction \mathsf{N}_{\mathbf{h}}}$ (для будь-якої $\mathbf{h} \in \mathscr{L}$) випливає, що для довільного $t \in \mathbf{T}_{\widetilde{\mathbf{H}}}$ множина $\psi_{\widetilde{\mathbf{H}}}(t)$ є одноелементною.

I.2.3.б): Нехай, $t_1, t_2 \in \mathbf{T}_{\widetilde{\mathbf{H}}}$, $x_1, x_2 \in \mathsf{N}_{\widetilde{\mathbf{H}}} = \mathfrak{Bs}\left(\mathcal{M}_{\restriction \mathsf{N}_{\widetilde{\mathbf{H}}}}\right)$, $t_1 \leq_{\widetilde{\mathbf{H}}} t_2$, $x_1 \in \psi_{\widetilde{\mathbf{H}}}(t_1)$, $x_2 \in \psi_{\widetilde{\mathbf{H}}}(t_2)$. Доведемо, що тоді $x_2 \leftarrow x_1$. Оскільки $t_1 \leq_{\widetilde{\mathbf{H}}} t_2$, то, згідно з пунктом $\widetilde{\mathbf{H}}2$ (див. вище), існує хронологізація $\mathbf{h} \in \mathscr{L}$ така, що $t_1, t_2 \in \mathbf{T}_{\mathbf{h}}$ і $t_1 \leq_{\mathbf{h}} t_2$. Оскільки $t_1, t_2 \in \mathbf{T}_{\mathbf{h}}$, то з формули (7.3) випливають рівності: $\psi_{\widetilde{\mathbf{H}}}(t_1) = \psi_{\mathbf{h}}(t_1)$, $\psi_{\widetilde{\mathbf{H}}}(t_2) = \psi_{\mathbf{h}}(t_2)$. Отже, маємо:

$$t_1, t_2 \in \mathbf{T}_{\mathbf{h}}, \quad t_1 \leq_{\mathbf{h}} t_2, \quad x_1 \in \psi_{\mathbf{h}}(t_1), \quad x_2 \in \psi_{\mathbf{h}}(t_2). \tag{7.5}$$

Так, як $\mathbf{h}$ є часковою 2-хронологізацією орієнтованої множини $\mathcal{M}$ відносно підмножини $\mathsf{N}_{\mathbf{h}} \subseteq \mathfrak{Bs}(\mathcal{M})$, то $\psi_{\mathbf{h}}$ є точковим часом на орієнтованій множині $\mathcal{M}_{\upharpoonright \mathsf{N}_{\mathbf{h}}}$. Тому, за означенням 2.4, із співвідношень (7.5) випливає бажане співвідношення $x_2 \leftarrow x_1$. Таким чином, для довільних $t_1, t_2 \in \mathbf{T}_{\widetilde{\mathbf{H}}}$, $x_1, x_2 \in \mathsf{N}_{\widetilde{\mathbf{H}}} = \mathfrak{Bs}\left(\mathcal{M}_{\upharpoonright \mathsf{N}_{\widetilde{\mathbf{H}}}}\right)$ з умов $t_1 \leq_{\widetilde{\mathbf{H}}} t_2$, $x_1 \in \psi_{\widetilde{\mathbf{H}}}(t_1)$, $x_2 \in \psi_{\widetilde{\mathbf{H}}}(t_2)$ випливає співвідношення $x_2 \leftarrow x_1$.

За означенням 2.4, з результатів, встановлених в пунктах I.2.3.а) та I.2.3.б), випливає, що $\psi_{\widetilde{\mathbf{H}}}$ є точковим часом на орієнтованій множині $\mathcal{M}_{\upharpoonright \mathsf{N}_{\widetilde{\mathbf{H}}}}$, що й необхідно було довести.

I.2.4.: Доведемо, що час $\psi_{\widetilde{\mathbf{H}}}$ є 2-повторним. Нехай, $x \in \mathsf{N}_{\widetilde{\mathbf{H}}}$. Тоді, згідно з формулою (7.4), існує хронологізація $\mathbf{h} = ((\mathbf{T}_{\mathbf{h}}, \leq_{\mathbf{h}}), \psi_{\mathbf{h}}) \in \mathscr{L}$ така, що $x \in \mathsf{N}_{\mathbf{h}}$. Згідно з пунктом 1^0 (див. визначення множини $\mathscr{H}$ вище), $\mathbf{h}$ є часковою 2-хронологізацією орієнтованої множини $\mathcal{M}$ відносно підмножини $\mathsf{N}_{\mathbf{h}} \subseteq \mathfrak{Bs}(\mathcal{M})$. Тому $\psi_{\mathbf{h}}$ є 2-повторним часом, а отже, за означенням 5.6, мусять існувати два елемента $t_1, t_2 \in \mathbf{T}_{\mathbf{h}}$ $(t_1 \neq t_2)$ такі, що $x \in \psi_{\mathbf{h}}(t_1)$ і $x \in \psi_{\mathbf{h}}(t_2)$. Оскільки $\mathbf{h} \in \mathscr{L}$ і $t_1, t_2 \in \mathbf{T}_{\mathbf{h}}$, то, згідно з формулою (7.2) маємо, $t_1, t_2 \in \mathbf{T}_{\widetilde{\mathbf{H}}}$, а, згідно з формулою (7.3), отримуємо $\psi_{\mathbf{h}}(t_1) = \psi_{\widetilde{\mathbf{H}}}(t_1)$, $\psi_{\mathbf{h}}(t_2) = \psi_{\widetilde{\mathbf{H}}}(t_2)$. Отже, ми довели, що існують елементи $t_1, t_2 \in \mathbf{T}_{\widetilde{\mathbf{H}}}$ такі, що $x \in \psi_{\widetilde{\mathbf{H}}}(t_1) \cap \psi_{\widetilde{\mathbf{H}}}(t_2)$. Тому, за означенням 5.6, маємо:

$$\mathsf{Rp}_x\left(\psi_{\widetilde{\mathbf{H}}}\right) = \mathbf{card}\left(\left\{t \in \mathbf{T}_{\widetilde{\mathbf{H}}} \,\middle|\, x \in \psi_{\widetilde{\mathbf{H}}}(t)\right\}\right) \geq 2. \tag{7.6}$$

Тепер припустимо, що існують елементи $x \in \mathsf{N}_{\widetilde{\mathbf{H}}}$ та $t_1, t_2, t_3 \in \mathbf{T}_{\widetilde{\mathbf{H}}}$ такі, що $t_i \neq t_j$ при $i \neq j$ $(i, j \in \overline{1,3})$ і $x \in \psi_{\widetilde{\mathbf{H}}}(t_1) \cap \psi_{\widetilde{\mathbf{H}}}(t_2) \cap \psi_{\widetilde{\mathbf{H}}}(t_3)$. Згідно з формулою (7.2), із співвідношення $t_1, t_2, t_3 \in \mathbf{T}_{\widetilde{\mathbf{H}}}$ випливає існування хронологізацій $\mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2, \mathbf{h}_3 \in \mathscr{L}$ таких, що $t_i \in \mathbf{T}_{\mathbf{h}_i}$ $(\forall i \in \overline{1,3})$. Осклькии $\mathscr{L}$ — ланцюг упорядкованої множини $\left(\mathscr{H}, \leq^{\mathscr{H}}\right)$ то мусить існувати елемент $\mathbf{h}_0 \in \{\mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2, \mathbf{h}_3\}$ такий, що $\mathbf{h}_i \leq^{\mathscr{H}} \mathbf{h}_0$ $(\forall i \in \overline{1,3})$. Із співвідношень $\mathbf{h}_i \leq^{\mathscr{H}} \mathbf{h}_0$ $(i \in \overline{1,3})$, згідно з пунктом $\mathcal{H}o1$ означення $(\mathcal{H}o)$ відношення порядку $\leq^{\mathscr{H}}$, випливають співвідношення $\mathbf{T}_{\mathbf{h}_i} \subseteq \mathbf{T}_{\mathbf{h}_0}$ $(i \in \overline{1,3})$. Отже, маємо, $t_1, t_2, t_3 \in \mathbf{T}_{\mathbf{h}_0}$. Звідси, за формулою (7.3), отримуємо $\psi_{\widetilde{\mathbf{H}}}(t_i) = \psi_{\mathbf{h}_0}(t_i)$, $(i \in \overline{1,3})$. Таким чином, маємо, $x \in \psi_{\mathbf{h}_0}(t_1) \cap \psi_{\mathbf{h}_0}(t_2) \cap \psi_{\mathbf{h}_0}(t_3)$, де $t_1, t_2, t_3 \in \mathbf{T}_{\mathbf{h}_0}$ і $t_i \neq t_j$ при $i \neq j$ $(i, j \in \overline{1,3})$. Отже, за означенням 5.6, маємо, $\mathsf{Rp}_x(\psi_{\mathbf{h}_0}) = \mathbf{card}\left(\left\{t \in \mathbf{T} \,\middle|\, x \in \psi_{\mathbf{h}_0}(t)\right\}\right) \geq 3$. Але останнє співвідношення суперечить тому, що $\mathbf{h}_0 = ((\mathbf{T}_{\mathbf{h}_0}, \leq_{\mathbf{h}_0}), \psi_{\mathbf{h}_0})$ є частковою 2-хронологізацією орієнтованої множини $\mathcal{M}$ (тобто тому, що час $\psi_{\mathbf{h}_0}$ є 2-повторним). Отже, зроблене припущення приводить до суперечності. Тому не існує елементів $x \in \mathsf{N}_{\widetilde{\mathbf{H}}}$ та $t_1, t_2, t_3 \in \mathbf{T}_{\widetilde{\mathbf{H}}}$ таких, що $t_i \neq t_j$ при $i \neq j$ $(i, j \in \overline{1,3})$ і $x \in \psi_{\widetilde{\mathbf{H}}}(t_1) \cap \psi_{\widetilde{\mathbf{H}}}(t_2) \cap \psi_{\widetilde{\mathbf{H}}}(t_3)$. А це, згідно з означенням 5.6, означає, що:

$$\mathsf{Rp}_x\left(\psi_{\widetilde{\mathbf{H}}}\right) = \mathbf{card}\left(\left\{t \in \mathbf{T}_{\widetilde{\mathbf{H}}} \,\middle|\, x \in \psi_{\widetilde{\mathbf{H}}}(t)\right\}\right) \leq 2. \tag{7.7}$$

З нерівностей (7.6) і (7.7) випливає, що для довільного $x \in \mathsf{N}_{\widetilde{\mathbf{H}}}$ має місце рівність $\mathsf{Rp}_x\left(\psi_{\widetilde{\mathbf{H}}}\right) = 2$. Тому час $\psi_{\widetilde{\mathbf{H}}}$ є 2-повторним, що й необхідно було довести.

I.2.5.: Доведемо, що для довільних $\mathbf{h} \in \mathscr{L}$ і $x \in \mathsf{N}_{\mathbf{h}}$ виконуються рівності:

$$\widehat{\psi}_{\mathbf{h}}^{-}(x) = \widehat{\psi}_{\widetilde{\mathbf{H}}}^{-}(x), \qquad \widehat{\psi}_{\mathbf{h}}^{+}(x) = \widehat{\psi}_{\widetilde{\mathbf{H}}}^{+}(x).$$

Справді, нехай $\mathbf{h} \in \mathscr{L}$ і $x \in \mathsf{N}_{\mathbf{h}}$. Покладемо:

$$t_- := \widehat{\psi}_{\mathbf{h}}^{-}(x), \qquad t_+ := \widehat{\psi}_{\mathbf{h}}^{+}(x).$$

Тоді, оскільки час $\psi_{\mathbf{h}} : \mathbf{T}_{\mathbf{h}} \to 2^{\mathsf{N}_{\mathbf{h}}}$ є точковим і 2-повторим, за позначенням 5.7, отримуємо:

$$t_+, t_- \in \mathbf{T}_{\mathbf{h}}, \qquad \psi_{\mathbf{h}}(t_-) = \psi_{\mathbf{h}}(t_+) = \{x\}, \qquad t_- <_{\mathbf{h}} t_+.$$

Звідси, використовуючи формули (7.2) і (7.3), а також пункт $\widetilde{\mathbf{H}}2$ (див. вище), отримуємо:

$$t_+, t_- \in \mathbf{T}_{\widetilde{\mathbf{H}}}, \qquad \psi_{\widetilde{\mathbf{H}}}(t_-) = \psi_{\widetilde{\mathbf{H}}}(t_+) = \{x\}, \qquad t_- <_{\widetilde{\mathbf{H}}} t_+.$$

Оскільки, згідно з результатом, встановленим в пункті I.2.4, час $\psi_{\widetilde{\mathbf{H}}}$ є 2-повторним, то маємо:

$$\begin{aligned}
\widehat{\psi}_{\widetilde{\mathbf{H}}}^{+}(x) &= \max\left(\left\{t \in \mathbf{T} \,\middle|\, x \in \psi_{\widetilde{\mathbf{H}}}(t)\right\}\right) = t_+;\\
\widehat{\psi}_{\widetilde{\mathbf{H}}}^{-}(x) &= \min\left(\left\{t \in \mathbf{T} \,\middle|\, x \in \psi_{\widetilde{\mathbf{H}}}(t)\right\}\right) = t_-,
\end{aligned}$$

що й треба було довести.

I.2.6.: Доведемо, що для довільних $x, y \in \mathsf{N}_{\widetilde{\mathbf{H}}} = \mathfrak{Bs}\left(\mathcal{M}_{\restriction \mathsf{N}_{\widetilde{\mathbf{H}}}}\right)$ із співвідношення $y \overset{+-}{\leftarrow} x$ випливає нерівність $\widehat{\psi}_{\widetilde{\mathbf{H}}}^{-}(x) <_{\widetilde{\mathbf{H}}} \widehat{\psi}_{\widetilde{\mathbf{H}}}^{-}(y)$. Нехай, $x, y \in \mathsf{N}_{\widetilde{\mathbf{H}}}$ і $y \overset{+-}{\leftarrow} x$. Згідно з рівністю (7.4), із співвідношення $x, y \in \mathsf{N}_{\widetilde{\mathbf{H}}}$ випливає існування хронологізацій $\mathbf{h}_x, \mathbf{h}_y \in \mathscr{L}$ таких, що $x \in \mathsf{N}_{\mathbf{h}_x}$, $y \in \mathsf{N}_{\mathbf{h}_y}$. Осклькилки $\mathscr{L}$ — ланцюг упорядкованої множини $\left(\mathscr{H}, \leq^{\mathscr{H}}\right)$ то мусить існувати елемент $\mathbf{h}_{xy} \in \{\mathbf{h}_x, \mathbf{h}_y\} \subseteq \mathscr{L}$ такий, що $\mathbf{h}_x \leq^{\mathscr{H}} \mathbf{h}_{xy}$, $\mathbf{h}_y \leq^{\mathscr{H}} \mathbf{h}_{xy}$. Тоді, з пункту $\mathcal{H}o1$ означення $(\mathcal{H}o)$ відношення порядку $\leq^{\mathscr{H}}$ випливають включення

$\mathbf{T}_{\mathbf{h}_x} \subseteq \mathbf{T}_{\mathbf{h}_{xy}}$, $\mathbf{T}_{\mathbf{h}_y} \subseteq \mathbf{T}_{\mathbf{h}_{xy}}$. Тому, використовуючи формулу (7.1) та пункт $\mathcal{H}o2$ означення ($\mathcal{H}o$) отримуємо:

$$\mathsf{N}_{\mathbf{h}_x} = \bigcup_{t \in \mathbf{T}_{\mathbf{h}_x}} \psi_{\mathbf{h}_x}(t) = \bigcup_{t \in \mathbf{T}_{\mathbf{h}_x}} \psi_{\mathbf{h}_{xy}}(t) \subseteq \bigcup_{t \in \mathbf{T}_{\mathbf{h}_{xy}}} \psi_{\mathbf{h}_{xy}}(t) = \mathsf{N}_{\mathbf{h}_{xy}},$$

$$\mathsf{N}_{\mathbf{h}_y} \subseteq \mathsf{N}_{\mathbf{h}_{xy}}.$$

Отже, хронологізація $\mathbf{h}_{xy} = \left(\left(\mathbf{T}_{\mathbf{h}_{xy}}, \leq_{\mathbf{h}_{xy}}\right), \psi_{\mathbf{h}_{xy}}\right) \in \mathscr{L}$ задовольняє умову $x, y \in \mathsf{N}_{\mathbf{h}_{xy}}$, причому час $\psi_{\mathbf{h}_{x,y}} : \mathbf{T}_{\mathbf{h}_{xy}} \to 2^{\mathsf{N}_{\mathbf{h}_{xy}}}$ є точковим, 2-повторним і задовольняє умову 3.1 означення 5.23, тобто:

$$\widehat{\psi}^{-}_{\mathbf{h}_{xy}}(x) <_{\mathbf{h}_{xy}} \widehat{\psi}^{-}_{\mathbf{h}_{xy}}(y).$$

Звідси, враховуючи результат, встановлений вище в пункті I.2.5, отримуємо нерівність $\widehat{\psi}^{-}_{\widetilde{\mathbf{H}}}(x) <_{\mathbf{h}_{xy}} \widehat{\psi}^{-}_{\widetilde{\mathbf{H}}}(y)$, з якої, враховуючи пункт $\widetilde{\mathbf{H}}2$ (див. вище), отримуємо бажану нерівність:

$$\widehat{\psi}^{-}_{\widetilde{\mathbf{H}}}(x) <_{\widetilde{\mathbf{H}}} \widehat{\psi}^{-}_{\widetilde{\mathbf{H}}}(y).$$

I.2.7.: Доведемо, що для довільних $x, y \in \mathsf{N}_{\widetilde{\mathbf{H}}} = \mathfrak{Bs}\left(\mathcal{M}_{\restriction \mathsf{N}_{\widetilde{\mathbf{H}}}}\right)$ із співвідношення $y \overset{-+}{\leftarrow} x$ випливає нерівність $\widehat{\psi}^{+}_{\widetilde{\mathbf{H}}}(x) <_{\widetilde{\mathbf{H}}} \widehat{\psi}^{+}_{\widetilde{\mathbf{H}}}(y)$. Нехай, $x, y \in \mathsf{N}_{\widetilde{\mathbf{H}}}$ і $y \overset{-+}{\leftarrow} x$. Згідно з рівністю (7.4), із співвідношення $x, y \in \mathsf{N}_{\widetilde{\mathbf{H}}}$ випливає існування хронологізацій $\mathbf{h}_x, \mathbf{h}_y \in \mathscr{L}$ таких, що $x \in \mathsf{N}_{\mathbf{h}_x}$, $y \in \mathsf{N}_{\mathbf{h}_y}$. Осклькии $\mathscr{L}$ — ланцюг упорядкованої множини $\left(\mathscr{H}, \leq^{\mathscr{H}}\right)$ то мусить існувати елемент $\mathbf{h}_{xy} \in \{\mathbf{h}_x, \mathbf{h}_y\} \subseteq \mathscr{L}$ такий, що $\mathbf{h}_x \leq^{\mathscr{H}} \mathbf{h}_{xy}$, $\mathbf{h}_y \leq^{\mathscr{H}} \mathbf{h}_{xy}$. Тоді, з пункту $\mathcal{H}o1$ означення ($\mathcal{H}o$) випливають включення $\mathbf{T}_{\mathbf{h}_x} \subseteq \mathbf{T}_{\mathbf{h}_{xy}}$, $\mathbf{T}_{\mathbf{h}_y} \subseteq \mathbf{T}_{\mathbf{h}_{xy}}$. Тому, використовуючи формулу (7.1) та пункт $\mathcal{H}o2$ означення ($\mathcal{H}o$) отримуємо:

$$\mathsf{N}_{\mathbf{h}_x} \subseteq \mathsf{N}_{\mathbf{h}_{xy}}, \qquad \mathsf{N}_{\mathbf{h}_y} \subseteq \mathsf{N}_{\mathbf{h}_{xy}}.$$

Отже, хронологізація $\mathbf{h}_{xy} = \left(\left(\mathbf{T}_{\mathbf{h}_{xy}}, \leq_{\mathbf{h}_{xy}}\right), \psi_{\mathbf{h}_{xy}}\right) \in \mathscr{L}$ задовольняє умову $x, y \in \mathsf{N}_{\mathbf{h}_{xy}}$, причому час $\psi_{\mathbf{h}_{x,y}} : \mathbf{T}_{\mathbf{h}_{xy}} \to 2^{\mathsf{N}_{\mathbf{h}_{xy}}}$ є точковим, 2-повторним і задовольняє умову 3.2 означення 5.23, тобто:

$$\widehat{\psi}^{+}_{\mathbf{h}_{xy}}(x) <_{\mathbf{h}_{xy}} \widehat{\psi}^{+}_{\mathbf{h}_{xy}}(y).$$

Звідси, враховуючи результат, встановлений вище в пункті I.2.5, отримуємо нерівність $\widehat{\psi}^{+}_{\widetilde{\mathbf{H}}}(x) <_{\mathbf{h}_{xy}} \widehat{\psi}^{+}_{\widetilde{\mathbf{H}}}(y)$, з якої, враховуючи пункт $\widetilde{\mathbf{H}}2$ (див. вище), отримуємо бажану нерівність:

$$\widehat{\psi}^{+}_{\widetilde{\mathbf{H}}}(x) <_{\widetilde{\mathbf{H}}} \widehat{\psi}^{+}_{\widetilde{\mathbf{H}}}(y).$$

З фактів, встановлених в пунктах I.2.1–I.2.7 випливає, що трійка $\widetilde{\mathbf{H}} = \left(\mathbb{T}_{\widetilde{\mathbf{H}}}, \psi_{\widetilde{\mathbf{H}}}\right) = \left(\left(\mathbf{T}_{\widetilde{\mathbf{H}}}, \leq_{\widetilde{\mathbf{H}}}\right), \psi_{\widetilde{\mathbf{H}}}\right)$ є часковою 2-хронологізацією орієнтованої множини $\mathcal{M}$ відносно підмножини $\mathsf{N}_{\widetilde{\mathbf{H}}}$.

I.3. Оскільки для довільної хронологізації $\mathbf{h} \in \mathscr{L}$ виконується умова $\min_*(\mathcal{M}), \max_*(\mathcal{M}) \in \mathsf{N}_{\mathbf{h}}$, то з формули (7.4), випливає, що:

$$\min_*(\mathcal{M}), \max_*(\mathcal{M}) \in \mathsf{N}_{\widetilde{\mathbf{H}}}.$$

I.4. З пункту 2^0 означення множини хронологізацій $\mathscr{H}$ і включення $\mathscr{L} \subseteq \mathscr{H}$ випливає, що для довільної хронологізації $\mathbf{h} \in \mathscr{L}$ має місце включення $\mathbf{T}_{\mathbf{h}} \subseteq \mathcal{T}$. Тому на основі формули (7.2), отримуємо:

$$\mathbf{T}_{\widetilde{\mathbf{H}}} = \bigcup_{\mathbf{h} \in \mathscr{L}} \mathbf{T}_{\mathbf{h}} \subseteq \mathcal{T}.$$

З фактів, встановлених вище в пунктах **I.2–I.4** випливає, що $\widetilde{\mathbf{H}} \in \mathscr{H}$.

I.5. Доведемо, що хронологізація $\widetilde{\mathbf{H}}$ є верхньою гранню ланцюга $\mathscr{L}$ відносно упорядкованої множини $\left(\mathscr{H}, \leq^{\mathscr{H}}\right)$. Нехай $\mathbf{h} \in \mathscr{L}$. Доведемо, що тоді $\mathbf{h} \leq^{\mathscr{H}} \widetilde{\mathbf{H}}$.

I.5.1.: З формули (7.2) випливає, що:

$$\mathbf{T}_{\mathbf{h}} \subseteq \bigcup_{\mathbf{H} \in \mathscr{L}} \mathbf{T}_{\mathbf{H}} = \mathbf{T}_{\widetilde{\mathbf{H}}}. \tag{7.8}$$

Розглянемо довільні $t_1, t_2 \in \mathbf{T}_{\mathbf{h}}$. Якщо $t_1 \leq_{\mathbf{h}} t_2$, то, згідно з пунктом $\widetilde{\mathbf{H}}2$ (див. вище), маємо, $t_1 \leq_{\widetilde{\mathbf{H}}} t_2$. Навпаки, припустимо, що $t_1 \leq_{\widetilde{\mathbf{H}}} t_2$. Якщо припустити, що $t_2 <_{\mathbf{h}} t_1$, то, згідно з пунктом $\widetilde{\mathbf{H}}2$ (див. вище), отримаємо нерівність, $t_2 <_{\widetilde{\mathbf{H}}} t_1$, яка суперечить початковому припущенню про те, що $t_1 \leq_{\widetilde{\mathbf{H}}} t_2$. Отже, оскільки $\mathbb{T}_{\mathbf{h}} = (\mathbf{T}_{\mathbf{h}}, \leq_{\mathbf{h}})$ є лінійно упорядкованою множиною, то маємо нерівність $t_1 \leq_{\mathbf{h}} t_2$. Таким чином:

$$\forall\, t_1, t_2 \in \mathbf{T}_{\mathbf{h}} \ \left((t_1 \leq_{\mathbf{h}} t_2) \Leftrightarrow \left(t_1 \leq_{\widetilde{\mathbf{H}}} t_2\right)\right). \tag{7.9}$$

Згідно з позначенням 5.11, із співвідношень (7.8) та (7.9) випливає співвідношення:

$$\mathbb{T}_{\mathbf{h}} \sqsubseteq \mathbb{T}_{\widetilde{\mathbf{H}}}.$$

I.5.2.: З формули (7.3) випливає, що

$$\forall\, t \in \mathbf{T}_{\mathbf{h}} \ \left(\psi_{\mathbf{h}}(t) = \psi_{\widetilde{\mathbf{H}}}(t)\right).$$

З результатів, встановлених в пунктах I.5.1 і I.5.2 випливає, що $\mathbf{h} \leq^{\mathscr{H}} \widetilde{\mathbf{H}}$, причому остання нерівність виконується для довільної хронологізації $\mathbf{h} \in \mathscr{L}$. Тому $\widetilde{\mathbf{H}}$ є верхньою гранню ланцюга $\mathscr{L}$ відносно упорядкованої множини $\left(\mathscr{H}, \leq^{\mathscr{H}}\right)$, що й необхідно було довести.

В силу довільності вибору ланцюга $\mathscr{L} \subseteq \mathscr{H}$, ми бачимо, що в упорядкованій множині $\left(\mathscr{H}, \leq^{\mathscr{H}}\right)$ кожен ланцюг обмежений зверху. Отже, згідно з лемою Цорна, ця упорядкована множина містить максимальний елемент.

I.6. Нехай хронологізація $\mathbf{h}^* = (\mathbb{T}_{\mathbf{h}^*}, \psi_{\mathbf{h}^*}) = ((\mathbf{T}_{\mathbf{h}^*}, \leq_{\mathbf{h}^*}), \psi_{\mathbf{h}^*}) \in \mathscr{H}$ є максимальним елементом упроядкованої множини $\left(\mathscr{H}, \leq^{\mathscr{H}}\right)$. Доведемо, що тоді $\mathsf{N}_{\mathbf{h}^*} = \mathfrak{Bs}(\mathcal{M})$, де $\mathsf{N}_{\mathbf{h}^*} = \bigcup\limits_{t \in \mathbf{T}_{\mathbf{h}^*}} \psi_{\mathbf{h}^*}(t)$ — множина, що визначається формулою (7.1). Очевидно, що $\mathsf{N}_{\mathbf{h}^*} \subseteq \mathfrak{Bs}(\mathcal{M})$. Припустимо, що $\mathsf{N}_{\mathbf{h}^*} \neq \mathfrak{Bs}(\mathcal{M})$. Тоді існує елемент $x_0 \in \mathfrak{Bs}(\mathcal{M})$ такий, що $x_0 \notin \mathsf{N}_{\mathbf{h}^*}$. Оцінимо потужність множини $\mathbf{T}_{\mathbf{h}^*}$. Оскільки $\psi_{\mathbf{h}^*}$ — точковий час, то, за означенням 2.4, для довільногих $x \in \mathsf{N}_{\mathbf{h}^*}$ і $t \in \mathbf{T}_{\mathbf{h}^*}$ співвідношення $x \in \psi_{\mathbf{h}^*}(t)$ рівносильне співвідношенню $\psi_{\mathbf{h}^*}(t) = \{x\}$. Тому, оскільки час $\psi_{\mathbf{h}^*}$ є 2-повторним, за означенням 5.6, для довільного $x \in \mathsf{N}_{\mathbf{h}^*}$ отримуємо:

$$\begin{aligned}\mathbf{card}\left(\psi_{\mathbf{h}^*}^{[-1]}(\{x\})\right) &= \mathbf{card}\left(\left\{t \in \mathbf{T}_{\mathbf{h}^*} \,\middle|\, \psi_{\mathbf{h}^*}(t) = \{x\}\right\}\right) = \\ &= \mathbf{card}\left(\left\{t \in \mathbf{T}_{\mathbf{h}^*} \,\middle|\, x \in \psi_{\mathbf{h}^*}(t)\right\}\right) = \mathsf{Rp}_x(\psi_{\mathbf{h}^*}) = 2.\end{aligned}$$

Звідси випливає, що для довільного $x \in \mathsf{N}_{\mathbf{h}^*}$ справедлива рівність:

$$\psi_{\mathbf{h}^*}^{[-1]}(\{x\}) = \left\{\widehat{\psi}_{\mathbf{h}^*}^{-}(x), \widehat{\psi}_{\mathbf{h}^*}^{+}(x)\right\}. \tag{7.10}$$

Оскільки час $\psi_{\mathbf{h}^*}$ є точковим, то для довільного $t \in \mathbf{T}_{\mathbf{h}^*}$ множина $\psi_{\mathbf{h}^*}(t)$ є одноелементною, тобто непорожньою. Отже, справедлива рівність, $\mathbf{T}_{\mathbf{h}^*} = \bigcup\limits_{x \in \mathsf{N}_{\mathbf{h}^*}} \psi_{\mathbf{h}^*}^{[-1]}(\{x\})$. Звідси, використовуючи рівність (7.10), отримуємо:

$$\begin{aligned}\mathbf{T}_{\mathbf{h}^*} &= \bigcup_{x \in \mathsf{N}_{\mathbf{h}^*}} \psi_{\mathbf{h}^*}^{[-1]}(\{x\}) = \bigcup_{x \in \mathsf{N}_{\mathbf{h}^*}} \left\{\widehat{\psi}_{\mathbf{h}^*}^{-}(x), \widehat{\psi}_{\mathbf{h}^*}^{+}(x)\right\} = \\ &= \left(\bigcup_{x \in \mathsf{N}_{\mathbf{h}^*}} \left\{\widehat{\psi}_{\mathbf{h}^*}^{-}(x)\right\}\right) \cup \left(\bigcup_{x \in \mathsf{N}_{\mathbf{h}^*}} \left\{\widehat{\psi}_{\mathbf{h}^*}^{+}(x)\right\}\right) = \\ &= \left\{\widehat{\psi}_{\mathbf{h}^*}^{-}(x) \,\middle|\, x \in \mathsf{N}_{\mathbf{h}^*}\right\} \cup \left\{\widehat{\psi}_{\mathbf{h}^*}^{+}(x) \,\middle|\, x \in \mathsf{N}_{\mathbf{h}^*}\right\}.\end{aligned} \tag{7.11}$$

Оскільки, за умовою, $\mathcal{T}$ — нескінчення множина, що задовольняє умову $\mathbf{card}(\mathcal{T}) > \mathbf{card}(\mathfrak{Bs}(\mathcal{M}))$, то маємо:

$$\mathbf{card}\left(\left\{\widehat{\psi}_{\mathbf{h}^*}^{-}(x) \,\middle|\, x \in \mathsf{N}_{\mathbf{h}^*}\right\}\right) \leq \mathbf{card}(\mathsf{N}_{\mathbf{h}^*}) \leq \mathbf{card}(\mathfrak{Bs}(\mathcal{M})) < \mathbf{card}(\mathcal{T});$$

$$\mathbf{card}\left(\left\{\widehat{\psi}_{\mathbf{h}^*}^{+}(x) \,\middle|\, x \in \mathsf{N}_{\mathbf{h}^*}\right\}\right) \leq \mathbf{card}(\mathsf{N}_{\mathbf{h}^*}) < \mathbf{card}(\mathcal{T}).$$

Звідси, враховуючи рівність (7.11) та [8, стор.86, теорема 24_0], отримуємо:

$$\mathbf{card}\left(\mathbf{T}_{\mathbf{h}^*}\right) \leq \mathbf{card}\left(\mathsf{N}_{\mathbf{h}^*}\right) < \mathbf{card}\left(\mathcal{T}\right).$$

Тому, оскільки множина $\mathcal{T}$ — нескінчення ($\mathbf{card}\,(\mathcal{T}) \geq \aleph_0$), то існують елементи $t_0,\, t_0' \in \mathcal{T}$ такі, що $t_0, t_0' \notin \mathbf{T}_{\mathbf{h}^*}$ і $t_0 \neq t_0'$. Згідно з умовою і додатковим припущенням "Припущення *", орієнтована множина $\mathcal{M}$ — строго еволюційно обмежена і квазіланцюгова. І, оскільки хронологізація $\mathbf{h}^*$ належить до множини хронологізацій $\mathscr{H}$, то всі умови леми 6.1 виконані, і, згідно з цією лемою, існує часкова 2-хронологізація $\mathbf{h}_1^* = \left(\mathbb{T}_{\mathbf{h}_1^*}, \psi_{\mathbf{h}_1^*}\right) = \left(\left(\mathbf{T}_{\mathbf{h}_1^*}, \leq_{\mathbf{h}_1^*}\right), \psi_{\mathbf{h}_1^*}\right)$ орієнтованої множини $\mathcal{M}$ відносно підмножини $\mathsf{N} \cup \{x_0\}$ така, що $\mathbb{T}_{\mathbf{h}^*} \sqsubseteq \mathbb{T}_{\mathbf{h}_1^*}$, $\mathbf{T}_{\mathbf{h}_1^*} = \mathbf{T}_{\mathbf{h}^*} \cup \{t_0, t_0'\}$ і $\forall t \in \mathbf{T}_{\mathbf{h}^*} \left(\psi_{\mathbf{h}_1^*}(t) = \psi_{\mathbf{h}^*}(t)\right)$. Тоді із означення множини $\mathscr{H}$ випливає, що $\mathbf{h}_1^* \in \mathscr{H}$, а з означення $(\mathcal{H}o)$ відношення порядку $\leq^{\mathscr{H}}$ випливає, що $\mathbf{h}^* \leq^{\mathscr{H}} \mathbf{h}_1^*$, далі з умови $\mathbf{T}_{\mathbf{h}_1^*} = \mathbf{T}_{\mathbf{h}^*} \cup \{t_0, t_0'\}$ випливає, що $\mathbf{h}^* \neq \mathbf{h}_1^*$. Отже, $\mathbf{h}^* <^{\mathscr{H}} \mathbf{h}_1^*$. Таким чином припущення про існування елемента $x_0 \in \mathfrak{Bs}(\mathcal{M})$ такого, що $x_0 \notin \mathsf{N}_{\mathbf{h}^*}$ приводить до існування хронологізації $\mathbf{h}_1^* \in \mathscr{H}$ такої, що $\mathbf{h}^* <^{\mathscr{H}} \mathbf{h}_1^*$, що суперечить тому, що хронологізація $\mathbf{h}^* \in \mathscr{H}$ є максимальним елементом упроядкованої множини $\left(\mathscr{H}, \leq^{\mathscr{H}}\right)$. Тому, зроблене припущення помилкове, тобто $\mathsf{N}_{\mathbf{h}^*} = \mathfrak{Bs}(\mathcal{M})$. Звідси випливає, що $\psi_{\mathbf{h}^*}$ є точковим часом 2-повторним на орієнтованій множині $\mathcal{M}$, тобто орієнтовану множину $\mathcal{M}$ можна хронологізувати 2-повторним точковим часом ψ.

Таким чином, за додаткового припущення "Припущення *" лема доведена.

II. Нехай, тепер, $\mathcal{M}$ — квазіланцюгова орієнтована множина, яка не обов'язково строго еволюціно обмежена (тобто не обов'язково задовольняє умовам додаткового припущення "Припущення *"). Нехай, x_* та y_* довільні елементи (математичні об'єкти) такі, що $x_*, y_* \notin \mathfrak{Bs}(\mathcal{M})$ і $x_* \neq y_*$. Побудуємо орієнтовану множину $\mathcal{M}_*$. Покладемо:

$$\mathfrak{Bs}\left(\mathcal{M}_*\right) := \mathfrak{Bs}(\mathcal{M}) \cup \{x_*, y_*\}$$

і для $x, y \in \mathfrak{Bs}\left(\mathcal{M}_*\right)$ будемо вважати, що $y \underset{\mathcal{M}_*}{\leftarrow} x$ тоді і тільки тоді, коли виконується хоча б одна з наступних умов:

(1) $x, y \in \mathfrak{Bs}(\mathcal{M})$ і $y \underset{\mathcal{M}}{\leftarrow} x$;

(2) $x = x_*$;

(3) $y = y_*$.

З умов $1, 2, 3$ випливає, що для довільного $\widetilde{x} \in \mathfrak{Bs}\left(\mathcal{M}_*\right)$ такого, що $\widetilde{x} \neq x_*$ виконується умова $\widetilde{x} \overset{+}{\underset{\mathcal{M}_*}{\leftarrow}} x_*$, а для довільного $\widetilde{y} \in \mathfrak{Bs}\left(\mathcal{M}_*\right)$ такого, що $\widetilde{y} \neq y_*$ виконується умова $y_* \overset{+}{\underset{\mathcal{M}_*}{\leftarrow}} \widetilde{y}$. Тому, за означенням 5.16,

$$\min\nolimits_*(\mathcal{M}_*) = x_*, \qquad \max\nolimits_*(\mathcal{M}_*) = y_*. \tag{7.12}$$

Отже, згідно з означенням 5.19, орієнтована множина $\mathcal{M}_*$ є строго еволюційно обмеженою. Доведемо, що вона є квазіланцюговою.

Нехай, $x, y \in \mathfrak{Bs}(\mathcal{M}_*)$. У випадку, коли $x, y \in \mathfrak{Bs}(\mathcal{M})$ з умови 1 і того факту, що орієнтована множина $\mathcal{M}$ є квазіланцюговою випливає, що виконується хоч одна з умов $y \underset{\mathcal{M}_*}{\leftarrow} x$ або $x \underset{\mathcal{M}_*}{\leftarrow} y$. У випадку $x \in \{x_*, y_*\}$ або $y \in \{x_*, y_*\}$ на основі умов $2, 3$ маємо, що $y \underset{\mathcal{M}_*}{\leftarrow} x$ або $x \underset{\mathcal{M}_*}{\leftarrow} y$. Отже, умова (QL1) означення 3.4 для орієнтованої множини $\mathcal{M}_*$ виконана.

Нехай $x_0, x_1, x_2, x_3 \in \mathfrak{Bs}(\mathcal{M}_*)$ і $x_3 \overset{+}{\underset{\mathcal{M}_*}{\leftarrow}} x_2 \underset{\mathcal{M}_*}{\leftarrow} x_1 \overset{+}{\underset{\mathcal{M}_*}{\leftarrow}} x_0$. Оскільки $\mathcal{M}$ — квазіланцюгова орієнтована множина, то у випадку, коли $x_0, x_1, x_2, x_3 \in \mathfrak{Bs}(\mathcal{M})$ маємо, $x_3 \overset{+}{\underset{\mathcal{M}}{\leftarrow}} x_0$, а отже, згідно з пунктом 1, і $x_3 \overset{+}{\underset{\mathcal{M}_*}{\leftarrow}} x_0$. У випадку $x_0 = x_*$ рівність $x_3 = x_*$ неможлива, бо з умов $1, 2, 3$ випливає, що співвідношення $x_3 = x_* \overset{+}{\underset{\mathcal{M}_*}{\leftarrow}} x_2$ неможливе. Отже, $x_3 \neq x_* = x_0$. Тому, згідно з (7.12), маємо, $x_3 \overset{+}{\underset{\mathcal{M}_*}{\leftarrow}} x_* = x_0$. Випадки $x_1 = x_*$, $x_3 = x_*$ неможливі, оскільки, згідно з (7.12), у цих випадках неможливі співвідношення $x_* = x_1 \overset{+}{\underset{\mathcal{M}_*}{\leftarrow}} x_0$ або $x_* = x_3 \overset{+}{\underset{\mathcal{M}_*}{\leftarrow}} x_2$ відповідно. Випадок $x_2 = x_*$ також неможливий, оскільки в цьому випадку з умов $1, 2, 3$ і співвідношення $x_2 \underset{\mathcal{M}_*}{\leftarrow} x_1$ (тобто $x_* \underset{\mathcal{M}_*}{\leftarrow} x_1$) випливає рівність $x_1 = x_*$, яка неможлива, згідно з розглянутим вище випадком. У випадку $x_3 = y_*$ рівність $x_0 = y_*$ неможлива, бо з умов $1, 2, 3$ випливає, що співвідношення $x_1 \overset{+}{\underset{\mathcal{M}_*}{\leftarrow}} x_0 = y_*$ неможливе. Отже, $x_3 = y_* \neq x_0$. Тому, згідно з (7.12), маємо, $x_3 = y_* \overset{+}{\underset{\mathcal{M}_*}{\leftarrow}} x_0$. Випадки $x_2 = y_*$, $x_0 = y_*$ неможливі, оскільки, згідно з (7.12), у цих випадках неможливі співвідношення $x_3 \overset{+}{\underset{\mathcal{M}_*}{\leftarrow}} x_2 = y_*$ або $x_1 \overset{+}{\underset{\mathcal{M}_*}{\leftarrow}} x_0 = y_*$ відповідно. Випадок $x_1 = y_*$ також неможливий, оскільки в цьому випадку з умов $1, 2, 3$ і співвідношення $x_2 \underset{\mathcal{M}_*}{\leftarrow} x_1$ (тобто $x_2 \underset{\mathcal{M}_*}{\leftarrow} y_*$) випливає рівність $x_2 = y_*$, яка неможлива, згідно з розглянутим вище випадком. Отже, в усіх можливих випадках з умови $x_3 \overset{+}{\underset{\mathcal{M}_*}{\leftarrow}} x_2 \underset{\mathcal{M}_*}{\leftarrow} x_1 \overset{+}{\underset{\mathcal{M}_*}{\leftarrow}} x_0$ випливає співвідношення $x_3 \overset{+}{\underset{\mathcal{M}_*}{\leftarrow}} x_0$. Тому, умова (QL2) означення 3.4 для орієнтованої множини $\mathcal{M}_*$ також виконана.

Таким чином, за означенням 3.4, орієнтована множина $\mathcal{M}_*$ є квазіланцюговою, що й необхідно було довести.

З рівностей (7.12) випливає, що квазіланцюгова орієнтована множина $\mathcal{M}_*$ задовольняє умови "припущення *". Тому, згідно з доведеним в пункті I, орієнтовану множину $\mathcal{M}_*$ можна точково і 2-повторно хронологізувати, тобто існує лінійно упорядкована множина $\mathbb{T}_* = (\mathbf{T}_*, \leq)$ і 2-повторний точковий час $\psi_* : \mathbf{T}_* \to 2^{\mathfrak{Bs}(\mathcal{M}_*)}$. Оскільки час ψ_* — точковий, то для довільного $t \in \mathbf{T}_*$ існує елемент $x_t \in \mathfrak{Bs}(\mathcal{M}_*)$ такий, що $\psi_*(t) = \{x_t\}$. Причому, оскільки відображення $\psi_* : \mathbf{T}_* \to 2^{\mathfrak{Bs}(\mathcal{M}_*)}$ є часом, то, за означенням 2.3, маємо:

$$\left\{x_t \,\middle|\, t \in \mathbf{T}_*\right\} = \bigcup_{t\in\mathbf{T}_*} \{x_t\} = \bigcup_{t\in\mathbf{T}_*} \psi_*(t) = \mathfrak{Bs}(\mathcal{M}_*). \tag{7.13}$$

Покладемо:

$$\mathbf{T} := \left\{t \in \mathbf{T}_* \,\middle|\, x_t \in \mathfrak{Bs}(\mathcal{M})\right\}.$$

Оскільки $\mathfrak{Bs}(\mathcal{M}) \neq \emptyset$ і $\mathfrak{Bs}(\mathcal{M}) \subseteq \mathfrak{Bs}(\mathcal{M}_*)$, то з рівності (7.13) випливає, що $\mathbf{T} \neq \emptyset$. Покладемо:

$$\psi(t) := \psi_*(t) = \{x_t\} \qquad (t \in \mathbf{T}).$$

Нескладно первірити, що відображення $\psi : \mathbf{T} \to 2^{\mathfrak{Bs}(\mathcal{M})}$ є 2-повторним точковим часом на орієнтованій множині $\mathcal{M}$. □

Тепер теорема 3.6 випливає з леми 4.1 та леми 7.1.

8. Про образи лінійно упорядкованих множин

В цьому короткому розділі буде виведено один цікавий наслідок теореми 3.6 в теорії упорядкованих множин, а саме буде отримано опис орієнтованих множин, які є образами лінійно упорядкованих множин. Спочатку сформулюємо означення образу орієнтованої множини.

Нехай, $\mathcal{M}$ — орієнтована множина і $\mathbf{U} : \mathfrak{Bs}(\mathcal{M}) \to \mathcal{X}$ відображення з $\mathfrak{Bs}(\mathcal{M})$ в $\mathcal{X}$. На множині $M_1 = \mathbf{U}[\mathfrak{Bs}(\mathcal{M})] = \mathfrak{R}(\mathbf{U})$ можна ввести бінарне відношення $\leftarrow_{(1)}$ за наступним правилом:

- ► Для $\widetilde{x}, \widetilde{y} \in M_1$ будемо вважати, що $\widetilde{y} \leftarrow_{(1)} \widetilde{x}$ тоді і тільки тоді, коли існують $x, y \in \mathfrak{Bs}(\mathcal{M})$ такі, що $\widetilde{x} = \mathbf{U}(x)$, $\widetilde{y} = \mathbf{U}(y)$ і $y \leftarrow x$.

Неважко перевірити, що упорядкована пара $\mathcal{M}_1 = \left(M_1, \leftarrow_{(1)}\right)$ є орієнтованою множиною, причому $\mathfrak{Bs}(\mathcal{M}_1) = M_1$ і $\underset{\mathcal{M}_1}{\leftarrow} = \leftarrow_{(1)}$.

Означення 8.1. *Орієнтована множина $\mathcal{M}_1$ називається **образом** орієнтованої множини $\mathcal{M}$ при відображенні $\mathbf{U} : \mathfrak{Bs}(\mathcal{M}) \to \mathcal{X}$, якщо:*

(1) $\mathfrak{Bs}(\mathcal{M}_1) = \mathbf{U}[\mathfrak{Bs}(\mathcal{M})] = \mathfrak{R}(\mathbf{U})$.

(2) Для $\widetilde{x}, \widetilde{y} \in \mathfrak{Bs}(\mathcal{M}_1)$ співвідношення $\widetilde{y} \underset{\mathcal{M}_1}{\leftarrow} \widetilde{x}$ виконуєтося тоді і тільки тоді, коли існують $x, y \in \mathfrak{Bs}(\mathcal{M})$ такі, що $\widetilde{x} = \mathbf{U}(x)$, $\widetilde{y} = \mathbf{U}(y)$ і $y \underset{\mathcal{M}}{\leftarrow} x$.

Очевидно, що для довільного відображення $\mathbf{U} : \mathfrak{Bs}(\mathcal{M}) \to \mathcal{X}$ існує, причому єдиний, образ при відображенні $\mathbf{U}$. Образ орієнтованої множини $\mathcal{M}$ при відображенні $\mathbf{U} : \mathfrak{Bs}(\mathcal{M}) \to \mathcal{X}$ будемо позначати через $\mathbf{U}\,[[\mathcal{M}]]$.

Легко бачити, що довільна лінійно упорядкована множина $\mathbb{T} = (\mathbf{T}, \leq)$ є орієнтованою множиною, причому:

$$\mathfrak{Bs}\,(\mathbb{T}) = \mathbf{T}, \qquad \underset{\mathbb{T}}{\leftarrow} = \leq .$$

Отже, можна говорити про образ лінійно упорядкованої множини $\mathbb{T} = (\mathbf{T}, \leq)$ при деякому відображенні $\mathbf{U} : \mathbf{T} \to \mathcal{X}$. Причому образ лінійно упорядкованої множини $\mathbb{T}$ є орієнтована множина $\mathbf{U}\,[[\mathbb{T}]]$. Тому природним чином виникає така проблема:

Проблема 8.2. Чи будь-яка орієнтована множина може бути образом $\mathbf{U}\,[[\mathbb{T}]]$ деякої лінійно упорядкованої множини $\mathbb{T}$? Якщо ні, то описати всі орієнтовані множини, які можна подати у вигляді образу деякої лінійно упорядкованої множини.

Ключ до розв'язання проблеми 8.2 дає наступне твердження.

Твердження 8.3. *Орієнтовану множину $\mathcal{M}$ можна подати у вигляді образу деякої лінійно упорядкованої множини тоді і тільки тоді, коли $\mathcal{M}$ можна точково хронологізувати.*

Доведення. Справді, нехай орієнтовану множину $\mathcal{M}$ можна подати у вигляді $\mathcal{M} = \mathbf{U}\,[[\mathbb{T}]]$, де $\mathbb{T} = (\mathbf{T}, \leq)$ — лінійно упорядкована множина. Тоді $\mathbf{U}$ буде відображенням виду $\mathbf{U} : \mathbf{T} \to \mathfrak{Bs}(\mathcal{M})$, причому $\mathfrak{R}\,(\mathbf{U}) = \mathfrak{Bs}(\mathcal{M})$. Нехай $\geq$ бінарне відношення, обернене до $\leq$ (тобто для $x, y \in \mathbf{T}$ співвідношення $y \geq x$ має місце тоді і тільки тоді, коли $x \leq y$). Тоді, згідно з принципом двоїстості (див. [9, стор. 14]), упорядкована пара

$$\mathbb{T}_{\geq} = (\mathbf{T}, \geq) \tag{8.1}$$

також буде лінійно упорядкованою множиною. Неважко переконатись, що відображення:

$$\mathbf{T} \ni t \mapsto \psi\,(t) = \{\mathbf{U}(t)\} \subseteq \mathfrak{Bs}(\mathcal{M})$$

є точковим часом на $\mathcal{M}$ (відносно лінійно упорядкованої множини $\mathbb{T}_{\geq}$). Навпаки, нехай $\mathbb{T} = (\mathbf{T}, \leq)$ — лінійно упорядкована множина і $\psi : \mathbf{T} \to 2^{\mathfrak{Bs}(\mathcal{M})}$ — точковий час на орієнтованій множині $\mathcal{M}$. Тоді, за означенням 2.4, для довільного моменту часу $t \in \mathbf{T}$ існує елемент $\boldsymbol{x}_{(t)} \in \mathfrak{Bs}(\mathcal{M})$ такий, що $\psi\,(t) = \left\{\boldsymbol{x}_{(t)}\right\}$. Розглянемо відображення:

$$\mathbf{T} \ni t \mapsto \mathbf{U}(t) = \boldsymbol{x}_{(t)} \in \mathfrak{Bs}(\mathcal{M}).$$

Неважко переконатись, що для відображення $\mathbf{U}$ справедлива рівність $\mathcal{M} = \mathbf{U}\left[\left[\mathbb{T}_{\geq}\right]\right]$, де лінійно упорядкована множина $\mathbb{T}_{\geq}$ визначається за формулою (8.1). $\square$

З твердження 8.3 і теоерми 3.6 випливає наступний наслідок.

Наслідок 8.4. *Орієнтовану множину $\mathcal{M}$ можна подати у вигляді образу деякої лінійно упорядкованої множини тоді і тільки тоді, коли $\mathcal{M}$ є квазіланцюговою.*

Зауважимо, що теорему 3.6 було анонсовано в [14].

Література

[1] Michael Barr, Colin Mclarty, Charles Wells. Variable Set Theory. pages 1–12. 1986. URL: http://www.math.mcgill.ca/barr/papers/vst.pdf.

[2] John L. Bell. *Abstract and Variable Sets in Category Theory*, pages 9–16. Polimetrica International Scientific Publisher, 2006. URL: http://publish.uwo.ca/~jbell/Bell2.pdf.

[3] A. N. Gorban. Hilbert's sixth problem: the endless road to rigour. *Phil. Trans. R. Soc. A*, 376(2118):20170238, 2018. URL: http://dx.doi.org/10.1098/rsta.2017.0238.

[4] Ya. I. Grushka. Draft introduction to abstract kinematics. (Version 2.0). pages 1–208. Preprint: ResearchGate, 2017. URL: https://doi.org/10.13140/RG.2.2.28964.27521.

[5] Horst Herrlich. *Axiom of Choice*. Springer-Verlag, 2006. doi:10.1007/11601562.

[6] A. P. Levich. Time as variability of natural systems: ways of quantitative description of changes and creation of changes by substantial flows. In *On the Way to Understanding the Time Phenomenon: the Constructions of Time in Natural Science (Part 1)*, chapter 5, pages 149–192. World Scientific, 1995. URL: http://www.chronos.msu.ru/old/EREPORTS/levich1.pdf, doi:10.1142/9789812832092_0010.

[7] David Pincus. The dense linear ordering principle. *Journal of Symbolic Logic*, 62(2):438–456, 1997. doi:10.2307/2275540.

[8] П. С. Александров. *Введение в теорию множеств и общую топологию.* "Наука", Москва, 1977.

[9] Г. Биркгоф. *Теория решеток.* "Наука", Москва, 1984.

[10] Я. І. Грушка. Видимість у мінливих множинах. *Збірник праць Інституту математики НАН України*, 9(2):122–145, 2012. URL: https://www.researchgate.net/publication/236217050.

[11] Я. І. Грушка. Мінливі множини та їх властивості. *Доповіді Національної академії наук України*, (5):12–18, 2012. URL: https://www.researchgate.net/publication/236120448.

[12] Я. І. Грушка. Примітивні мінливі множини та їх властивості. *Математичний вісник НТШ*, 9:52–80, 2012. URL: https://www.researchgate.net/publication/236120647.

[13] Я. І. Грушка. Базові мінливі множини та математичне моделювання еволюції систем. *Укр. мат. журн.*, 65(9):1198–1218, 2013. URL: http://umj.imath.kiev.ua/article/?lang=ua&article=8385, doi:10.1007/s11253-014-0862-6.

[14] Я. І. Грушка. Необхідна і достатня ознака існування точкового часу на орієнтованій множині. *Доповіді Національної академії наук України*, (8):9–15, 2019. URL: `https://doi.org/10.15407/dopovidi2019.08.009`.

[15] А. П. Левич. Методологические трудности на пути к пониманию феномена времени. In *Время конца времен*, pages 66–88. Московско-Петербургский Философский Клуб, Москва, 2009. URL: `http://www.chronos.msu.ru/old/RREPORTS/levich_trudnosti.pdf`.

[16] А. П. Левич. Моделирование “динамических множеств”. In *Необратимые процессы в природе и технике*, pages 43–46. МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, 2009. URL: `http://www.chronos.msu.ru/old/RREPORTS/levich_dinamich.html`.

Я. І. Грушка

Інститут математики НАН України, м. Київ

Email: `grushka@imath.kiev.ua`

Збірник праць Ін-ту математики НАН України (2022) Т. 19, № 1, 88–134

Точні оцінки добутків внутрішніх радіусів областей

І. В. Денега

Присвячується пам'яті професора Олександра Бахтіна

Abstract. The paper provides an overview of known results and approaches to solving two an open extremal problems of geometric function theory of a complex variable.

Анотація. В роботі наведено огляд відомих результатів і підходів до розв'язання двох відкритих екстремальних проблем геометричної теорії функцій комплексної змінної.

1. Основні означення і позначення.

Нехай $\mathbb{N}$, $\mathbb{R}$ – множини натуральних і дійсних чисел, відповідно, $\mathbb{C}$ – комплексна площина, $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C}\bigcup\{\infty\}$ – її одноточкова компактифікація, U – відкритий одиничний круг з центром в початку координат, $\mathbb{R}^+ = (0,\infty)$. Величини α_k, $k=\overline{1,n}$, $\alpha_{n+1} := \alpha_1$, будемо називати кутовими параметрами системи точок A_n. Очевидно, що $\sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k = 2$.

Нехай $B \subset \overline{\mathbb{C}}$ – однозв'язна область і $a \in B$. Згідно з теоремою Рімана про відображення, існує однолисте і конформне відображення області B на одиничний круг U при якому $f(a)=0$, $f'(a)>0$. Якщо розглянути обернене відображення φ, яке здійснює відображення одиничного круга U на область B так, що $\varphi(0)=a$, то поняття конформного радіуса однозв'язної області $B \subset \overline{\mathbb{C}}$ відносно точки $a \in B$ визначається таким чином

$$R(B,a) = \frac{1}{|f'(a)|} = |\varphi'(0)|.$$

2010 Mathematics Subject Classification: 30C75

УДК 517.54

Ключові слова: внутрішній радіус області, функціонал, квадратичний диференціал, конформний автоморфізм комплексної площини, трансфінітний діаметр компактної множини

Функцією Гріна $g_B(z,a)$ області B з полюсом в точці $a \in B$ називається дійсна функція, гармонічна по z в $B \backslash \{a\}$, яка прямує до нуля, коли z прямує до межі B, і для якої в деякому околі точки a правильний асимптотичний розклад

$$g_B(z,a) = -\ln|z-a| + \delta + o(1), \quad o(1) \rightrightarrows 0, \quad z \to a,$$

якщо ж $a = \infty$, тоді правильний розклад

$$g_B(z,\infty) = \ln|z| + \delta + o(1), \quad o(1) \rightrightarrows 0, \quad z \to \infty.$$

Внутрішнім радіусом $r(B,a)$ області B відносно точки a називається величина e^{δ} (див., напр., [12,15,20,23]). Для однозв'язних областей внутрішній радіус області співпадає з її конформним радіусом.

Нехай B – область розширеної комплексної площини $\overline{\mathbb{C}}_z$. Під квадратичним диференціалом в B розумітимемо символ

$$Q(z)dz^2, \tag{1.1}$$

де $Q(z)$ – функція, мероморфна в B (див. [12,13,17,20,21]).

Скінченна точка $z_0 \in B$ називається нулем або полюсом порядку n диференціала (1.1), якщо вона є нулем або полюсом функції $Q(z)$.

Круговою областю квадратичного диференціала $Q(z)dz^2$ називається однозв'язна область $G \subset \overline{\mathbb{C}}_z$, яка містить єдиний полюс другого порядку цього квадратичного диференціала в точці $w = a \in G$, така, що при конформному однолистому відображенні $w = f(z)$ $(f(a) = 0)$ області G на одиничний круг площини $\mathbb{C}_w$, дійсна тотожність

$$Q(z)dz^2 \equiv -k\frac{dw^2}{w^2}, \quad k \in \mathbb{R}^+.$$

Для компакта E його логарифмічна ємність визначається рівністю

$$cap\, E := \frac{1}{r(\overline{\mathbb{C}} \backslash E, \infty)},$$

якщо величина $r(\overline{\mathbb{C}} \backslash E, \infty)$ скінченна, в іншому випадку $cap\, E := 0$ [20].

2. Екстремальне розбиття комплексної площини з вільними полюсами на одиничному колі

Розглянемо подальшу проблему.

Проблема 2.1. При всіх значеннях параметра $\gamma \in (0, n]$ показати, що максимум функціонала

$$I_n(\gamma) = r^{\gamma}(B_0, 0) \prod_{k=1}^{n} r(B_k, a_k), \tag{2.1}$$

де $B_0,\ B_1,\ B_2,\ldots,B_n,\ n\geqslant 2,$ – області, що взаємно не перетинаються, в $\overline{\mathbb{C}}$, $a_0=0$, $|a_k|=1$, $k=\overline{1,n}$, досягається для конфігурації з областей B_k і точок a_k, які володіють n-кратною симетрією.

Ця проблема була сформульована в якості відкритої в роботі [23] (див. також [12]). На даний час вона повністю не розв'язана, її часткові випадки вивчалися в багатьох роботах. У статті [23] сформульована вище задача була розв'язана для значення параметра $\gamma=1$ і всіх значень натурального параметра $n\geqslant 2$. А саме, було показано, що при її умовах справедлива нерівність

$$r(B_0,0)\prod_{k=1}^{n}r(B_k,a_k)\leqslant r\left(D_0,0\right)\prod_{k=1}^{n}r\left(D_k,d_k\right),$$

де $d_k,\ D_k,\ k=\overline{0,n},$ – полюси та кругові області квадратичного диференціала

$$Q(w)dw^2=-\frac{(n^2-1)w^n+1}{w^2(w^n-1)^2}\,dw^2.$$

Л.В. Ковальов в 1996 році в роботі [24] отримав розв'язок цієї задачі при досить жорстких обмеженнях на геометрію розташування систем точок на одиничному колі, а саме, для таких систем точок, для яких виконуються наступні умови

$$0<\alpha_k\leqslant 2/\sqrt{\gamma},\quad k=\overline{1,n},\quad n\geqslant 5.$$

В [5] показано, що результат Л.В. Ковальова справедливий і при $n=4$. В 2003 році в [28] одержано розв'язок проблеми 2.1 для $\gamma\in(0,1]$. Далі, в монографії [20] 2008 року було показано, що аналог результата В.М. Дубініна [23] виконується для довільного $\gamma\in\mathbb{R}^+$, але починаючи з деякого невідомого номера $n_0(\gamma)$. Також в [20] був запропонований метод "керуючих" функціоналів, який дозволяє послабити вимоги на геометрію розташування систем точок.

Покажемо, що функціонал

$$\frac{r^{\alpha}(B_0,a_0)\cdot r^{\beta}(B_1,a_1)\cdot r^{\gamma}(B_2,a_2)}{|a_0-a_1|^{\alpha+\beta-\gamma}\cdot|a_0-a_2|^{\alpha-\beta+\gamma}\cdot|a_1-a_2|^{-\alpha+\beta+\gamma}},\tag{2.2}$$

де $\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}^+$, $\{B_k\}_{k=0}^2$ – довільна система взаємно неперетинних областей таких, що $a_k\in B_k\subset\overline{\mathbb{C}}$, $k\in\{0,1,2\}$, є інваріантом відносно всіх конформних автоморфізмів комплексної площини $\overline{\mathbb{C}}$.

Нехай

$$w=T(z)=\frac{az+b}{cz+d},\quad |T|=ad-bc\neq 0,$$

– дробово-лінійна функція, яка конформно відображає площину $\overline{\mathbb{C}}_z$ на $\overline{\mathbb{C}}_w$. Використавши інваріантність функції Гріна при конформному та однолистому відображенні, маємо

$$g_{B_k}(z,a_k)=g_{B_k^+}(w^+,a_k^+),\quad w^+=\frac{az+b}{cz+d}.$$

Тоді

$$g_{B_k^+}(w^+,a_k^+)=$$

$$=g_{B_k^+}\left(\frac{az+b}{cz+d},\,\frac{aa_k+b}{ca_k+d}\right)=\ln\frac{1}{\left|\dfrac{az+b}{cz+d}-\dfrac{aa_k+b}{ca_k+d}\right|}+\ln r(B_k^+,a_k^+)+o(1).$$

Використавши нескладні перетворення, отримуємо

$$g_{B_k^+}(w^+,a_k^+)=$$

$$=\ln\left|\frac{(cz+d)(ca_k+d)}{(az+b)(ca_k+d)-(aa_k+b)(cz+d)}\right|+\ln r(B_k^+,a_k^+)+o(1)=$$

$$=\ln\frac{|ca_k+d|^2|1+(ca_k+d)^{-1}(c(z-a_k))|}{|z-a_k||ad-bc|}+\ln r(B_k^+,a_k^+)+o(1)=$$

$$=\ln\frac{1}{|z-a_k|}+\ln\frac{|ca_k+d|^2}{|ad-bc|}r(B_k^+,a_k^+)+o(1).$$

Звідси

$$\ln r(B_k,a_k)=\ln\frac{|ca_k+d|^2}{|ad-bc|}r(B_k^+,a_k^+).$$

І, таким чином,

$$r\left(B_k^+,a_k^+\right)=r(B_k,a_k)\cdot\frac{|ad-bc|}{(ca_k+d)^2}.$$

Отже,

$$r^{\alpha}(B_0^+,a_0^+)r^{\beta}(B_1^+,a_1^+)r^{\gamma}(B_2^+,a_2^+)=$$

$$=r^{\alpha}(B_0,a_0)r^{\beta}(B_1,a_1)r^{\gamma}(B_2,a_2)\frac{|T|^{\alpha+\beta+\gamma}}{(ca_0+d)^{2\alpha}(ca_1+d)^{2\beta}(ca_2+d)^{2\gamma}}.$$

Аналогічно, отримуємо

$$|T(a_0)-T(a_1)|=\left|\frac{aa_0+b}{ca_0+d}-\frac{aa_1+b}{ca_1+d}\right|=\frac{|T|\cdot|a_0-a_1|}{(ca_0+d)(ca_1+d)},$$

$$|T(a_0)-T(a_2)|=\frac{|T|\cdot|a_0-a_2|}{(ca_0+d)(ca_2+d)},$$

$$|T(a_1)-T(a_2)|=\frac{|T|\cdot|a_1-a_2|}{(ca_1+d)(ca_2+d)}.$$

Звідси,

$$|T(a_0)-T(a_1)|^{\alpha+\beta-\gamma}|T(a_0)-T(a_2)|^{\alpha-\beta+\gamma}|T(a_1)-T(a_2)|^{-\alpha+\beta+\gamma}=$$

$$=\frac{|T|^{\alpha+\beta+\gamma}|a_0-a_1|^{\alpha+\beta-\gamma}|a_0-a_2|^{\alpha-\beta+\gamma}|a_1-a_2|^{-\alpha+\beta+\gamma}}{(ca_0+d)^{2\alpha}(ca_1+d)^{2\beta}(ca_2+d)^{2\gamma}}.$$

Остаточно, маємо

$$\frac{r^{\alpha}(B_0^+,a_0^+)r^{\beta}(B_1^+,a_1^+)r^{\gamma}(B_2^+,a_2^+)}{|T(a_0)-T(a_1)|^{\alpha+\beta-\gamma}|T(a_0)-T(a_2)|^{\alpha-\beta+\gamma}|T(a_1)-T(a_2)|^{-\alpha+\beta+\gamma}}=$$

$$=\frac{\dfrac{|T|^{\alpha+\beta+\gamma}r^{\alpha}(B_0,a_0)r^{\beta}(B_1,a_1)r^{\gamma}(B_2,a_2)}{(ca_0+d)^{2\alpha}(ca_1+d)^{2\beta}(ca_2+d)^{2\gamma}}}{\dfrac{|T|^{\alpha+\beta+\gamma}|a_0-a_1|^{\alpha+\beta-\gamma}|a_0-a_2|^{\alpha-\beta+\gamma}|a_1-a_2|^{-\alpha+\beta+\gamma}}{(ca_0+d)^{2\alpha}(ca_1+d)^{2\beta}(ca_2+d)^{2\gamma}}}=$$

$$=\frac{r^{\alpha}(B_0,a_0)r^{\beta}(B_1,a_1)r^{\gamma}(B_2,a_2)}{|a_0-a_1|^{\alpha+\beta-\gamma}|a_0-a_2|^{\alpha-\beta+\gamma}|a_1-a_2|^{-\alpha+\beta+\gamma}}.$$

Тобто, функціонал (2.2) є інваріантом відносно всіх конформних автоморфізмів комплексної площини $\overline{\mathbb{C}}$.

В роботі [22] було отримано важливу оцінку добутку внутрішніх радіусів трьох неперетинних областей з фіксованими полюсами в точках 0, $-i$, i. Справедливий такий результат.

Лема 2.1 ([22])**.** *Для довільних попарно неперетинних областей* B_0*,* B_1*,* B_2 *таких, що* $0\in B_0\subset\overline{\mathbb{C}}$*,* $-i\in B_1\subset\overline{\mathbb{C}}$*,* $i\in B_2\subset\overline{\mathbb{C}}$*, справедлива нерівність*

$$r^{\sigma^2}(B_0,0)r(B_1,-i)r(B_2,i)\leqslant$$

$$\leqslant 2^{\sigma^2+6}\sigma^{\sigma^2}(2-\sigma)^{-(2-\sigma)^2/2}(2+\sigma)^{-(2+\sigma)^2/2},\quad 0<\sigma\leqslant 2,$$

знак рівності досягається тоді і тільки тоді, коли області B_0*,* B_1*,* B_2*, є круговими областями квадратичного диференціала*

$$Q(w)dw^2=\frac{(4-\sigma^2)w^2-\sigma^2}{w^2(w^2+1)^2}\,dw^2.$$

Надалі нам необхідна буде частина леми 2.1 у випадку, коли полюси квадратичного диференціалу розміщені в точках 0, -1, 1. В цьому випадку лема 2.1 набуде такого вигляду.

Лема 2.2. *Для довільних попарно неперетинних областей B_0, B_1, B_2 таких, що $0 \in B_0 \subset \overline{\mathbb{C}}$, $-1 \in B_1 \subset \overline{\mathbb{C}}$, $1 \in B_2 \subset \overline{\mathbb{C}}$, справедлива нерівність*

$$r^{\sigma^2}(B_0,0)r(B_1,-1)r(B_2,1) \leqslant \tag{2.3}$$

$$\leqslant 2^{\sigma^2+6}\sigma^{\sigma^2}(2-\sigma)^{-(2-\sigma)^2/2}(2+\sigma)^{-(2+\sigma)^2/2}, \quad 0 < \sigma \leqslant 2,$$

знак рівності досягається тоді і тільки тоді, коли області B_0, B_1, B_2, є круговими областями квадратичного диференціала

$$Q(w)dw^2 = -\frac{(4-\sigma^2)w^2+\sigma^2}{w^2(w^2-1)^2}\,dw^2.$$

В роботах [12, 20, 23, 24] показано, що величина

$$I_n^0(\gamma) = r^\gamma\left(D_0,0\right)\prod_{k=1}^{n} r\left(D_k,d_k\right),$$

де d_k, D_k, $k = \overline{0,n}$, $d_0 = 0$, є, відповідно, полюси і кругові області квадратичного диференціала

$$Q(w)dw^2 = -\frac{(n^2-\gamma)w^n+\gamma}{w^2(w^n-1)^2}\,dw^2, \tag{2.4}$$

має вигляд

$$I_n^0(\gamma) = \left(\frac{4}{n}\right)^n \frac{\left(\frac{4\gamma}{n^2}\right)^{\frac{\gamma}{n}}}{\left(1-\frac{\gamma}{n^2}\right)^{n+\frac{\gamma}{n}}} \left(\frac{1-\frac{\sqrt{\gamma}}{n}}{1+\frac{\sqrt{\gamma}}{n}}\right)^{2\sqrt{\gamma}}. \tag{2.5}$$

Вперше значення для $I_n^0(\gamma)$ отримано в статті [22] при $\gamma = 1$, для довільного γ – в роботі [24]. Форма виразу $I_n^0(\gamma)$, яка використовується в даній роботі, запропонована в монографії [20].

Теорема 2.3 ([8]). *Нехай $\gamma \in (1,\, 2]$. Тоді для довільних різних точок a_1 і a_2 одиничного кола і довільних областей, що взаємно не перетинаються, B_0, B_1, B_2, $a_0 = 0 \in B_0 \subset \overline{\mathbb{C}}$, $a_1 \in B_1 \subset \overline{\mathbb{C}}$, $a_2 \in B_2 \subset \overline{\mathbb{C}}$, справедлива нерівність*

$$r^\gamma\left(B_0,0\right) r\left(B_1,a_1\right) r\left(B_2,a_2\right) \leqslant I_2^0(\gamma)\left(\frac{1}{2}\left|a_1-a_2\right|\right)^{2-\gamma}.$$

Знак рівності в цій нерівності досягається, коли точки a_0, a_1, a_2 й області B_0, B_1, B_2, є, відповідно, полюсами і круговими областями квадратичного диференціала

$$Q(w)dw^2 = -\frac{(4-\gamma)w^2+\gamma}{w^2(w^2-1)^2}dw^2. \tag{2.6}$$

Доведення. Розглянемо функціонал

$$I_2(\gamma) = r^{\gamma}(B_0, 0)r(B_1, a_1)r(B_2, a_2), \quad \gamma \in (1,\, 2],$$

де B_0, B_1, B_2 – області, що взаємно не перетинаються, $a_k \in B_k \subset \overline{\mathbb{C}}$, $k = \overline{0,2}$, $a_0 = 0$. В роботі [23] була повністю досліджена задача про максимум функціонала $I_2(\gamma)$ на трійках довільних областей, що попарно не перетинаються, B_0, B_1, B_2 розширеної комплексної площини таких, що $a_k \in B_k$, $k = \overline{0,2}$, $a_0 = 0$, $a_k = (-1)^k i$ і отримано наступну нерівність

$$I_2(\sigma^2) \leqslant S(\sigma) = 2^{\sigma^2+6} \cdot \sigma^{\sigma^2} \cdot (2-\sigma)^{-\frac{1}{2}(2-\sigma)^2} \cdot (2+\sigma)^{-\frac{1}{2}(2+\sigma)^2},$$

$\sigma \in (0,2)$. Знак рівності в якій досягається, коли точки 0, $-i$, i і області B_0, B_1, B_2 є, відповідно, полюсами і круговими областями квадратичного диференціала

$$Q(w)dw^2 = \frac{(4-\sigma^2)w^2 - \sigma^2}{w^2(w^2+1)^2}dw^2.$$

Зауважимо, що функціонал $I_2(\sigma^2)$ при $\sigma > 2$ не обмежений.

Існує єдиний конформний автоморфізм комплексної площини $\overline{\mathbb{C}}$

$$\widetilde{w} = T(w),$$

який переводить три задані точки a_0, a_1, a_2 в точки $T(a_0) = 0$, $T(a_1) = 1$, $T(a_2) = -1$. Відомо [27], що функціонал

$$\frac{r^{\alpha}(B_0, a_0) \cdot r^{\beta}(B_1, a_1) \cdot r^{\gamma}(B_2, a_2)}{|a_0 - a_1|^{\alpha+\beta-\gamma} \cdot |a_0 - a_2|^{\alpha-\beta+\gamma} \cdot |a_1 - a_2|^{-\alpha+\beta+\gamma}},$$

де α, β, $\gamma \in \mathbb{R}^+$, $\{B_k\}_{k=0}^2$ — довільна система областей, що взаємно не перетинаються, таких, що $a_k \in B_k \subset \overline{\mathbb{C}}$, $k \in \{0,1,2\}$, інваріантний відносно всіх конформних автоморфізмів комплексної площини $\overline{\mathbb{C}}$. Як показано вище, цей результат має місце і для довільних багатозв'язних областей.

Тоді в силу конформної інваріантності функціонала $I_2(\gamma)$, має місце рівність

$$\frac{r^{\gamma}(B_0, 0)r(B_1, a_1)r(B_2, a_2)}{|a_1|^{\gamma} \cdot |a_2|^{\gamma} \cdot |a_1 - a_2|^{2-\gamma}} = \frac{r^{\gamma}(\widetilde{B_0}, 0)r(\widetilde{B_1}, 1)r(\widetilde{B_2}, -1)}{2^{2-\gamma}},$$

де

$$\widetilde{I_2(\gamma)} = r^{\gamma}(\widetilde{B_0}, 0)r(\widetilde{B_1}, 1)r(\widetilde{B_2}, -1),$$

$$\widetilde{B_0} = T(B_0), \quad \widetilde{B_1} = T(B_1), \quad \widetilde{B_2} = T(B_2).$$

Звідси слідує, що

$$\frac{I_2(\gamma)}{|a_1 - a_2|^{2-\gamma}} = \frac{\widetilde{I_2(\gamma)}}{2^{2-\gamma}},$$

і, таким чином,

$$I_2(\gamma) = \widetilde{I_2(\gamma)} \left(\frac{1}{2}|a_1 - a_2|\right)^{2-\gamma}.$$

Використавши вище вказаний результат робіт [12, 23], приходимо до основної нерівності теореми 2.3

$$I_2(\gamma) \leqslant I_2^0(\gamma) \left(\frac{1}{2}|a_1 - a_2|\right)^{2-\gamma}.$$

Зокрема, якщо точки a_1 і a_2 розташовані не діаметрально, тоді остання нерівність строга. Якщо $\gamma = 2$, тоді $I_2(\gamma) \leqslant I_2^0(\gamma)$. Теорема 2.3 доведена. □

Зауваження 2.4. Із теореми 2.3 випливає повний розв'язок проблеми 2.1 для $n = 2$.

При $n = 2$ і $\gamma \in (0, 2]$ розглянемо більш загальну задачу про максимум функціонала $I_2(\gamma)$ для довільних фіксованих точок $a_1, a_2 \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$. Використавши метод доведення теореми 2.3, отримуємо такий результат.

Теорема 2.5 ([8]). *Нехай $\gamma \in (0, 2]$. Тоді для довільних різних точок $A_2 = \{a_1, a_2\} \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$, таких, що*

$$|a_1 a_2| \leqslant 1, \quad \left(\frac{1}{2}|a_1 - a_2|\right)^{2-\gamma} \leqslant 1,$$

і будь-яких областей, що взаємно не перетинаються, B_0, B_1, B_2, $a_0 = 0 \in B_0 \subset \overline{\mathbb{C}}$, $a_1 \in B_1 \subset \overline{\mathbb{C}}$, $a_2 \in B_2 \subset \overline{\mathbb{C}}$, справедлива нерівність

$$r^\gamma\left(B_0, 0\right) r\left(B_1, a_1\right) r\left(B_2, a_2\right) \leqslant \frac{4\gamma^{\frac{\gamma}{2}}}{\left(1 - \frac{\gamma}{4}\right)^{2+\frac{\gamma}{2}}} \left(\frac{1 - \frac{\sqrt{\gamma}}{2}}{1 + \frac{\sqrt{\gamma}}{2}}\right)^{2\sqrt{\gamma}}.$$

Знак рівності в цій нерівності досягається, коли точки a_0, a_1, a_2 й області B_0, B_1, B_2, є, відповідно, полюсами і круговими областями квадратичного диференціала (2.6).

Доведення. Аналогічно міркуванням доведення теореми 2.3, одержуємо співвідношення

$$\frac{r^\gamma(B_0, 0) r(B_1, a_1) r(B_2, a_2)}{|a_1|^\gamma \cdot |a_2|^\gamma \cdot |a_1 - a_2|^{2-\gamma}} = \frac{r^\gamma(\widetilde{B_0}, 0) r(\widetilde{B_1}, 1) r(\widetilde{B_2}, -1)}{2^{2-\gamma}},$$

із якого слідує, що

$$r^\gamma(B_0, 0) r(B_1, a_1) r(B_2, a_2) \leqslant I_2^0(\gamma) |a_1 a_2|^\gamma \left(\frac{1}{2}|a_1 - a_2|\right)^{2-\gamma}.$$

Далі, врахувавши умови $|a_1a_2| \leqslant 1$ і $\left(\frac{1}{2}|a_1-a_2|\right)^{2-\gamma} \leqslant 1$, маємо основну нерівність теореми 2.5. Теорема 2.5 доведена. $\square$

Теорема 2.6 ([8]). *Нехай $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 4$, $\gamma \in (1, n]$ і*

$$K(n,\gamma) = \left[I_n^0(\gamma)\cdot \mu_n(\gamma)\right]^{\frac{1}{\gamma}},$$

де $I_n^0(\gamma)$ визначається співвідношенням (2.5), а

$$\mu_n(\gamma) = \left[\frac{4^n}{(n-1)^{n-1}}\cdot\frac{1}{\sqrt{\gamma}}\left(1-\frac{1}{\sqrt{\gamma}}\right)^{n-1}\right]^{-1}.$$

Тоді для будь-якої системи різних точок $A_n = \{a_k\}_{k=1}^n$ одиничного кола і будь-якого набору областей, що взаємно не перетинаються, B_0, B_k, $a_0 = 0 \in B_0 \subset \overline{\mathbb{C}}$, $a_k \in B_k \subset \overline{\mathbb{C}}$, $k = \overline{1,n}$, таких, що

$$r(B_0, 0) \leqslant K(n,\gamma),$$

справедлива нерівність

$$r^{\gamma}(B_0,0)\prod_{k=1}^{n} r(B_k,a_k) \leqslant \left(\frac{4}{n}\right)^n \frac{\left(\frac{4\gamma}{n^2}\right)^{\frac{\gamma}{n}}}{\left(1-\frac{\gamma}{n^2}\right)^{n+\frac{\gamma}{n}}}\left(\frac{1-\frac{\sqrt{\gamma}}{n}}{1+\frac{\sqrt{\gamma}}{n}}\right)^{2\sqrt{\gamma}}. \tag{2.7}$$

Знак рівності в цій нерівності досягається тоді, коли a_k і B_k, $k = \overline{0,n}$, є, відповідно, полюсами і круговими областями квадратичного диференціала

$$Q(w)dw^2 = -\frac{(n^2-\gamma)w^n+\gamma}{w^2(w^n-1)^2}\,dw^2.$$

Доведення. Розглянемо величину

$$\Lambda_n(\gamma) := \frac{I_n(\gamma)}{I_n^0(\gamma)} = \frac{r^{\gamma}\left(B_0,0\right)\prod\limits_{k=1}^{n} r\left(B_k,a_k\right)}{r^{\gamma}\left(D_0,0\right)\prod\limits_{k=1}^{n} r\left(D_k,d_k\right)},$$

де d_k, D_k, $k = \overline{0,n}$, $d_0 = 0$, є, відповідно, полюси та кругові області квадратичного диференціала

$$Q(w)dw^2 = -\frac{(n^2-\gamma)w^n+\gamma}{w^2(w^n-1)^2}\,dw^2.$$

Із умов теореми 2.6 слідує, що

$$\Lambda_n(\gamma) \leqslant \frac{(K(n,\gamma))^{\gamma} \cdot \prod\limits_{k=1}^{n} r(B_k, a_k)}{\left(\frac{4}{n}\right)^n \left(\frac{4\gamma}{n^2}\right)^{\frac{\gamma}{n}} \left(1-\frac{\gamma}{n^2}\right)^{-n-\frac{\gamma}{n}} \left(\frac{1-\frac{\sqrt{\gamma}}{n}}{1+\frac{\sqrt{\gamma}}{n}}\right)^{2\sqrt{\gamma}}}.$$

Згідно методу роботи [20, с. 255], має місце нерівність

$$\prod_{k=1}^{n} r(B_k, a_k) \leqslant$$

$$\leqslant 2^n \prod_{k=1}^{n} \alpha_k \leqslant 2^n \alpha_0 \left(\frac{2-\alpha_0}{n-1}\right)^{n-1} \leqslant \frac{4^n}{\sqrt{\gamma}} \left(1-\frac{1}{\sqrt{\gamma}}\right)^{n-1} (n-1)^{-(n-1)},$$

де $\alpha_0 := \max\limits_{1\leqslant k\leqslant n} \alpha_k$, $\alpha_0 \geqslant \frac{2}{\sqrt{\gamma}}$. Тоді виконується співвідношення

$$\Lambda_n(\gamma) \leqslant \frac{(K(n,\gamma))^{\gamma} \cdot \frac{4^n}{(n-1)^{n-1}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\gamma}} \left(1-\frac{1}{\sqrt{\gamma}}\right)^{n-1}}{\left(\frac{4}{n}\right)^n \left(\frac{4\gamma}{n^2}\right)^{\frac{\gamma}{n}} \left(1-\frac{\gamma}{n^2}\right)^{-n-\frac{\gamma}{n}} \left(\frac{1-\frac{\sqrt{\gamma}}{n}}{1+\frac{\sqrt{\gamma}}{n}}\right)^{2\sqrt{\gamma}}}.$$

Звідси, врахувавши умови теореми 2.6, одержуємо

$$\Lambda_n(\gamma) \leqslant 1.$$

Таким чином, при умові $\alpha_0 \geqslant \frac{2}{\sqrt{\gamma}}$, справедлива нерівність

$$I_n(\gamma) \leqslant I_n^0(\gamma)$$

і в цьому випадку теорема 2.6 доведена. Для випадку $\alpha_0\sqrt{\gamma} < 2$ результат теореми 2.6 слідує із робіт [5,24]. Твердження про знак рівності перевіряється безпосередньо. Теорема 2.6 доведена. □

Якщо $\gamma = n$, то із теореми 2.6, слідує наступний результат.

Наслідок 2.7 ([8]). *Нехай $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 4$, $\gamma = n$ і*

$$r(B_0, 0) \leqslant n^{\frac{1}{2n}-1} \left(1-n^{-\frac{1}{2}}\right)^{-\frac{n-1}{n}} (n-1)^{\frac{n-1}{n}} \times$$

$$\times \left(\frac{4}{n}\right)^{\frac{1}{n}} \left(1-\frac{1}{n}\right)^{-\frac{1}{n}-1} \left(\frac{1-n^{-\frac{1}{2}}}{1+n^{-\frac{1}{2}}}\right)^{\frac{2}{\sqrt{n}}}.$$

Тоді для будь-якої системи різних точок $A_n = \{a_k\}_{k=1}^n$ одиничного кола і будь-якого набору областей, що взаємно не перетинаються, B_0, B_k, $a_k \in B_k \subset \overline{\mathbb{C}}$, $k = \overline{0,n}$, справедлива нерівність (2.7)*. Знак рівності в якій досягається за умов теореми 2.6.*

Теорема 2.6 доповнює і посилює результат роботи [11].

Наслідок 2.8 ([11]). *Нехай* $B_0, B_1, B_2, \ldots, B_n$, $(n \geqslant 2)$ *– області, що попарно не перетинаються, в* $\overline{\mathbb{C}}$, $a_0 = 0$, $|a_k| = 1$, $k = \overline{1, n}$, $a_1 = 1$, $a_k \in B_k \subset \overline{\mathbb{C}}$, $k = \overline{0, n}$, *і*

$$r(B_0, 0) \leqslant 1.$$

Тоді для довільного натурального n, $n \geqslant 76$ *і* $\gamma \in (1, n]$, *справедлива нерівність* (2.7). *Знак рівності в якій досягається за умов теореми 2.6.*

В зв'язку з тим, що розв'язати проблему 2.1 для всіх $\gamma \in (1, n]$ довгий час не вдається, метою роботи [6] є отримання деякої оцінки для функціонала (2.1) при всіх $\gamma \in (1,\, n]$, яка як можливо менше відхиляється від значення функціонала $I_n(\gamma)$, що досягається на системі кругових областей і полюсів квадратичного диференціала (2.4). Має місце подальше твердження.

Теорема 2.9 ([6]). *Нехай* $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$, $\gamma \in (0,\, n]$. *Тоді для будь-якої фіксованої системи різних точок* $\{a_k\}_{k=1}^{n} \in \mathbb{C} \backslash \{0\}$ *і будь-яких областей, що взаємно не перетинаються,* B_k, $a_k \in B_k \subset \overline{\mathbb{C}}$, $k = \overline{0, n}$, $a_0 = 0$, *справедлива нерівність*

$$I_n(\gamma) \leqslant n^{-\frac{\gamma}{2}} \left(I_n(0)\right)^{1-\frac{\gamma}{n}} \left(\prod_{k=1}^{n} |a_k| \right)^{\frac{2\gamma}{n}}. \tag{2.8}$$

Доведення. Нехай $d(E)$ – трансфінітний діаметр компактної множини $E \subset \mathbb{C}$ і нехай $B^{+} = \left\{ z : \frac{1}{z} \in B \right\}$. Внутрішній радіус області, яка містить нескінченно віддалену точку, дорівнює величині, оберненій до трансфінітного діаметра доповнення до даної області [15, 16], тобто справджується рівність

$$r\left(B_0, 0\right) = r\left(B_0^{+}, \infty\right) = \frac{1}{d\left(\overline{\mathbb{C}} \setminus B_0^{+}\right)}. \tag{2.9}$$

За теоремою Пойа [30], має місце нерівність

$$\mu E \leqslant \pi d^2(E),$$

де μE позначає лебегову міру компактної множини E. Звідси одержуємо, що

$$d(E) \geqslant \left(\frac{1}{\pi} \mu E \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Врахувавши співвідношення (2.9), отримуємо

$$\frac{1}{d\left(\overline{\mathbb{C}}\setminus B_0^+\right)} \leqslant \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{\pi}\mu\left(\overline{\mathbb{C}}\setminus B_0^+\right)}}.$$

Використавши монотонність та адитивність міри Лебега, будемо мати

$$\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{\pi}\mu\left(\overline{\mathbb{C}}\setminus B_0^+\right)}} \leqslant \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{\pi}\mu\left(\bigcup\limits_{k=1}^{n}\overline{B}_k^+\right)}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{\pi}\sum\limits_{k=1}^{n}\mu\overline{B}_k^+}}.$$

Таким чином,

$$r\left(B_0,0\right) \leqslant \left(\frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{n}\mu\overline{B}_k^+\right)^{-\frac{1}{2}}. \tag{2.10}$$

Із теореми про мінімізацію площі [15] слідує, що

$$\mu(B) \geqslant \pi r^2\left(B,a\right).$$

Із нерівності (2.10) безпосередньо випливає, що

$$r\left(B_0,0\right) \leqslant \left[\frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{n}\mu\overline{B}_k^+\right]^{-\frac{1}{2}} \leqslant \left[\frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{n}\mu B_k^+\right]^{-\frac{1}{2}} \leqslant \left[\sum_{k=1}^{n} r^2\left(B_k^+,a_k^+\right)\right]^{-\frac{1}{2}}.$$

Звідси одержуємо нерівність

$$r\left(B_0,0\right) \leqslant \frac{1}{\left[\sum\limits_{k=1}^{n} r^2\left(B_k^+,a_k^+\right)\right]^{\frac{1}{2}}}.$$

Використавши інваріантність функції Гріна при конформному та однолистому відображенні, маємо

$$g_{B_k}(z,a_k) = g_{B_k^+}(w^+,a_k^+), \quad w^+ = \frac{1}{z}.$$

Тоді

$$g_{B_k^+}(w^+,a_k^+) = g_{B_k^+}\left(\frac{1}{z},\frac{1}{a_k}\right) = \ln\frac{1}{|\frac{1}{z}-a_k^+|} + \ln r(B_k^+,a_k^+) + o(1).$$

Виконавши нескладні перетворення, отримуємо

$$g_{B_k^+}(w^+,a_k^+) = \ln\frac{|z|}{|1-za_k^+|} + \ln r(B_k^+,a_k^+) + o(1) =$$

$$= \ln\frac{|z|}{|a_k^+|}\frac{1}{|\frac{1}{a_k^+}-z|} + \ln r(B_k^+,a_k^+) + o(1) =$$

$$= \ln \frac{1}{|z-a_k|} + \ln |a_k z| + \ln r(B_k^+, a_k^+) + o(1) =$$

$$= \ln \frac{1}{|z-a_k|} + \ln |a_k|^2 + \ln \left| 1 - \frac{1}{a_k}(z-a_k) \right| + \ln r(B_k^+, a_k^+) + o(1) =$$

$$= \ln \frac{1}{|z-a_k|} + \ln |a_k|^2 r(B_k^+, a_k^+) + o(1).$$

Таким чином,

$$r\left(B_k^+, a_k^+\right) = \frac{r\left(B_k, a_k\right)}{|a_k|^2}$$

і приходимо до наступної нерівності

$$r\left(B_0, 0\right) \leqslant \frac{1}{\left[\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{r^2\left(B_k, a_k\right)}{|a_k|^4}\right]^{\frac{1}{2}}}.$$

З припущення теореми випливає співвідношення

$$r^{\gamma}\left(B_0, 0\right) \prod_{k=1}^{n} r\left(B_k, a_k\right) \leqslant \frac{\prod\limits_{k=1}^{n} r\left(B_k, a_k\right)}{\left[\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{r^2\left(B_k, a_k\right)}{|a_k|^4}\right]^{\frac{\gamma}{2}}}.$$

Із нерівності Коші автоматично отримуємо наступне співвідношення

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{r^2\left(B_k, a_k\right)}{|a_k|^4} \geqslant \left(\prod_{k=1}^{n} \frac{r^2\left(B_k, a_k\right)}{|a_k|^4}\right)^{\frac{1}{n}}.$$

Звідси, неважко отримати, що

$$\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{r^2\left(B_k, a_k\right)}{|a_k|^4}\right)^{\frac{\gamma}{2}} \geqslant \left(n \left(\prod_{k=1}^{n} \frac{r^2\left(B_k, a_k\right)}{|a_k|^4}\right)^{\frac{1}{n}}\right)^{\frac{\gamma}{2}}.$$

Таким чином,

$$I_n(\gamma) \leqslant \frac{\prod\limits_{k=1}^{n} r\left(B_k, a_k\right)}{n^{\frac{\gamma}{2}} \left(\prod\limits_{k=1}^{n} \frac{r\left(B_k, a_k\right)}{|a_k|^2}\right)^{\frac{\gamma}{n}}} = n^{-\frac{\gamma}{2}} \left(\prod_{k=1}^{n} r\left(B_k, a_k\right)\right)^{1-\frac{\gamma}{n}} \left(\prod_{k=1}^{n} |a_k|\right)^{\frac{2\gamma}{n}}.$$

Звідси отримуємо нерівність (2.8) даної теореми. Теорема 2.9 доведена. □

Використавши нерівність, доведену в теоремі 2.9, одержимо таке твердження.

Теорема 2.10 ([8, 9]). *Нехай $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 3$, $\gamma \in (1, \gamma_n]$, $\gamma_n = \sqrt{n}$. Тоді для будь-якої системи різних точок $A_n = \{a_k\}_{k=1}^{n}$ одиничного кола і будь-якого набору областей, що взаємно не перетинаються, B_0, B_k, $a_0 = 0 \in B_0 \subset \overline{\mathbb{C}}$, $a_k \in B_k \subset \overline{\mathbb{C}}$, $k = \overline{1,n}$, справедлива нерівність*

$$r^{\gamma}(B_0, 0) \prod_{k=1}^{n} r(B_k, a_k) \leqslant r^{\gamma}(D_0, 0) \prod_{k=1}^{n} r(D_k, d_k),$$

де d_k, D_k, $k = \overline{0,n}$, $d_0 = 0$, є, відповідно, полюсами і круговими областями квадратичного диференціала (2.4).

Доведення. Розглянемо спочатку випадок, якщо

$$\alpha_0 \sqrt{\gamma} \geqslant 2, \quad \alpha_0 := \max_{1 \leqslant k \leqslant n} \alpha_k.$$

Аналогічно міркуванням при доведенні теореми 2.6 розглянемо величину

$$\Lambda_n(\gamma) := \frac{I_n(\gamma)}{I_n^0(\gamma)} = \frac{r^{\gamma}(B_0, 0) \prod\limits_{k=1}^{n} r(B_k, a_k)}{r^{\gamma}(D_0, 0) \prod\limits_{k=1}^{n} r(D_k, d_k)},$$

де d_k, D_k, $k = \overline{0,n}$, $d_0 = 0$, є, відповідно, полюси та кругові області квадратичного диференціала (2.4). Як показано в роботі [7] (див. також теорему 2.9) при умовах теореми 2.10 виконується нерівність

$$r^{\gamma}(B_0, 0) \prod_{k=1}^{n} r(B_k, a_k) \leqslant n^{-\frac{\gamma}{2}} \left(\prod_{k=1}^{n} r(B_k, a_k) \right)^{1-\frac{\gamma}{n}}.$$

Тоді, маємо наступне співвідношення

$$\Lambda_n(\gamma) \leqslant \frac{n^{-\frac{\gamma}{2}} \left(\prod\limits_{k=1}^{n} r(B_k, a_k) \right)^{1-\frac{\gamma}{n}}}{\left(\frac{4}{n}\right)^{n-1-\gamma\left(1-\frac{1}{n}\right)} \left(\frac{4}{n}\right)^{\gamma+1-\frac{\gamma}{n}} \left(\frac{4\gamma}{n^2}\right)^{\frac{\gamma}{n}} \left(1-\frac{\gamma}{n^2}\right)^{-n-\frac{\gamma}{n}} \left(\frac{1-\frac{\sqrt{\gamma}}{n}}{1+\frac{\sqrt{\gamma}}{n}}\right)^{2\sqrt{\gamma}}} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{n^{-\frac{\gamma}{2}} \left(\frac{4^n}{(n-1)^{n-1}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\gamma}} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{\gamma}}\right)^{n-1} \right)^{1-\frac{\gamma}{n}}}{\left(\frac{4}{n}\right)^{n-1-\gamma\left(1-\frac{1}{n}\right)} \left(\frac{4}{n}\right)^{\gamma+1-\frac{\gamma}{n}} \left(\frac{4\gamma}{n^2}\right)^{\frac{\gamma}{n}} \left(1-\frac{\gamma}{n^2}\right)^{-n-\frac{\gamma}{n}} \left(\frac{1-\frac{\sqrt{\gamma}}{n}}{1+\frac{\sqrt{\gamma}}{n}}\right)^{2\sqrt{\gamma}}}.$$

Таким чином, аналогічно роботам [3, 4, 20], одержуємо

$$\Lambda_n(\gamma) \leqslant \prod_{k=1}^{6} f_k(n),$$

де

$$f_1(n) = n^{-\frac{\gamma}{2}} \cdot \left[\frac{n}{4}\right]^{\gamma+1} \cdot \left[1 - \frac{1}{\sqrt{\gamma}}\right]^{n-1-\gamma\frac{n-1}{n}}, \quad f_2(n) = \left(\frac{n}{\gamma}\right)^{\frac{\gamma}{n}},$$

$$f_3(n) = \left(1 - \frac{\gamma}{n^2}\right)^{n+\frac{\gamma}{n}}, \quad f_4(n) = \left(\frac{1 + \frac{\sqrt{\gamma}}{n}}{1 - \frac{\sqrt{\gamma}}{n}}\right)^{2\sqrt{\gamma}},$$

$$f_5(n) = \left(\frac{4}{\sqrt{\gamma}}\right)^{1-\frac{\gamma}{n}}, \quad f_6(n) = \left(\frac{n}{n-1}\right)^{n-1-\gamma\frac{n-1}{n}}.$$

Нехай спочатку $\gamma_n = n^{0,5}$, тоді

$$\Lambda_n\left(n^{0,5}\right) = \prod_{k=1}^{6} f_k(n),$$

де

$$f_1(n) = (n)^{-\frac{n^{0,5}}{2}} \left[\frac{n}{4}\right]^{n^{0,5}+1} \left[1 - \frac{1}{n^{0,25}}\right]^{n-1-\frac{n-1}{n^{0,5}}}, f_2(n) = \left(n^{0,5}\right)^{n^{-0,5}},$$

$$f_3(n) = \left(1 - n^{-1,5}\right)^{n+n^{-0,5}}, \quad f_4(n) = \left(\frac{1 + n^{-0,75}}{1 - n^{-0,75}}\right)^{2n^{0,25}},$$

$$f_5(n) = \left(\frac{4}{n^{0,25}}\right)^{1-n^{-0,5}}, \quad f_6(n) = \left(\frac{n}{n-1}\right)^{n-1-\frac{n-1}{n^{0,5}}}.$$

Далі, за стандартною схемою досліджуємо кожну функцію $f_k(n)$, $k = \overline{1,6}$, останнього співвідношення. Даний аналіз показує, що функція $f_1(n)$ монотонно спадає на проміжку $n \geqslant 7$ (див. Рис. 2.1), тому справедлива нерівність

$$f_1(n) < f_1(7) \leqslant 0,016666, \quad n \geqslant 7.$$

Функція $f_2(n)$ також монотонно спадає на проміжку $n \geqslant 7$. Таким чином,

$$f_2(n) < f_2(7) \leqslant 1,444469, \quad n \geqslant 7.$$

Очевидно, що

$$f_3(n) < f_3(7) \leqslant 1, \quad n \geqslant 7.$$

Функцію $f_4(n)$ представимо наступним чином

$$f_4(n) = \left(1 + n^{-0,75}\right)^{n^{0,75}n^{-0,75}2n^{0,25}} \left(1 - n^{-0,75}\right)^{(-n^{0,75})(n^{-0,75})2n^{0,25}}.$$

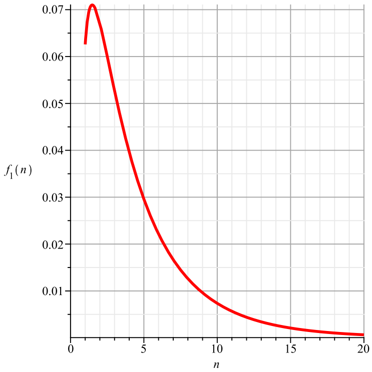

Рис. 2.1. Графік функції $f_1(n)$

Оскільки $\left(1+n^{-0,75}\right)^{n^{0,75}} < e$ при $n \in \mathbb{N}$, а $\left(1-n^{-0,75}\right)^{-n^{0,75}} < 3$ при $n \geqslant 10$, тоді

$$f_4(n) \leqslant (3e)^{2n^{-0,5}}.$$

Таким чином, $y_4(n)$ спадає на всій області визначення і

$$f_4(n) < f_4(10) \leqslant 4,886133, \quad n \geqslant 10.$$

Функція $f_5(n)$ спадає на проміжку $n \geqslant 8$, звідси

$$f_5(n) < f_5(8) \leqslant 1,750853, \quad n \geqslant 8.$$

Для функції $f_6(n)$ справедливе наступне співвідношення

$$f_6(n) = \left(\frac{n}{n-1}\right)^{n-1-\frac{n-1}{n^{0,5}}} < \left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1} \leqslant 3, \quad n \geqslant 7.$$

Тоді, врахувавши все вище сказане, маємо

$$\Lambda_n\left(n^{0,5}\right) = \prod_{k=1}^{6} f_k(n) \leqslant$$

$$\leqslant 0,016666 \cdot 1,444469 \cdot 1 \cdot 4,886133 \cdot 1,750853 \cdot 3 \approx 0,617839 < 1,$$

тобто

$$\Lambda_n\left(n^{0,5}\right) < 1 \quad \text{для } n \geqslant 10.$$

З іншої сторони, безпосередні обчислення показують, що $\Lambda_n\left(n^{0,5}\right) < 1$ для $n \in [3,9]$ (див. таблицю нижче).

n	$f_1(n)$	$f_2(n)$	$f_3(n)$	$f_4(n)$	$f_5(n)$	$f_6(n)$	$\Lambda_n\left(n^{0,5}\right)$
3	0,052699	1,373197	0,465492	11,910563	1,599730	1,408801	0,904224
4	0,039628	1,414213	0,548322	8,086547	1,681792	1,539600	0,643422
5	0,029590	1,433159	0,600258	6,329659	1,722722	1,637880	0,454626
6	0,022149	1,441582	0,636628	5,320779	1,742416	1,715055	0,323209
7	0,016666	1,444469	0,663961	4,664524	1,750178	1,777704	0,231974
8	0,012616	1,444259	0,685515	4,202238	1,750853	1,829872	0,168163
9	0,009607	1,442249	0,703109	3,858081	1,747161	1,874189	0,123077

Таким чином,

$$\Lambda_n\left(n^{0,5}\right) < 1 \quad \text{при всіх} \quad n \geqslant 3.$$

Нехай $\gamma \in (1, \gamma_n]$. Покажемо, що при кожному $n \geqslant 3$, функція

$$\mu_n(\gamma) = n^{-\frac{\gamma}{2}} \left[\frac{4^n}{\sqrt{\gamma}}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{\gamma}}\right)^{n-1} (n-1)^{-(n-1)}\right]^{1-\frac{\gamma}{n}}$$

монотонно зростає по γ на проміжку $\gamma \in (1, \gamma_n]$.

Справедливі співвідношення

$$\ln(\mu_n(\gamma)) = -\frac{\gamma}{2}\ln n +$$

$$+\left(1-\frac{\gamma}{n}\right)\left[n\ln 4 - \frac{1}{2}\ln\gamma + (n-1)\ln\left(1-\frac{1}{\sqrt{\gamma}}\right) - (n-1)\ln(n-1)\right],$$

$$[\ln(\mu_n(\gamma))]'_{\gamma} = -\frac{\ln n}{2} - \ln 4 + \frac{1}{2n}\ln\gamma - \frac{n-1}{n}\ln\left(1-\frac{1}{\sqrt{\gamma}}\right) +$$

$$+\frac{n-1}{n}\ln(n-1) + \left(1-\frac{\gamma}{n}\right)\frac{1}{2\gamma}\left(\frac{n-1}{\sqrt{\gamma}-1} - 1\right).$$

Врахуємо, що

$$0 < -\frac{\ln 3}{2} + \ln\left(\frac{1}{4}\right) + \frac{2}{3}\ln 2 < -\frac{\ln n}{2} + \ln\left(\frac{1}{4}\right) + \frac{n-1}{n}\ln(n-1),$$

і

$$-\frac{n-1}{n}\ln\left(1-\frac{1}{\sqrt{\gamma}}\right) \geqslant 0,\ \left(1-\frac{\gamma}{n}\right)\frac{1}{2\gamma}\left(\frac{n-1}{\sqrt{\gamma}-1} - 1\right) \geqslant 0,\ \frac{1}{2n}\ln\gamma \geqslant 0.$$

Отже, $\mu_n(\gamma)$ монотонно зростає при вказаних параметрах n, γ.

Далі, доведемо, що при кожному фіксованому $n \geqslant 3$, функціонал $I_n^0(\gamma)$ монотонно спадає по γ на проміжку $\gamma \in (1, \gamma_n]$. Врахувавши, що величина $I_n^0(\gamma)$ задовольняє наступну рівність

$$I_n^0(\gamma) = \left(\frac{4}{n}\right)^n \frac{\left(\frac{4\gamma}{n^2}\right)^{\frac{\gamma}{n}}}{\left(1-\frac{\gamma}{n^2}\right)^{n+\frac{\gamma}{n}}} \left(\frac{n-\sqrt{\gamma}}{n+\sqrt{\gamma}}\right)^{2\sqrt{\gamma}},$$

маємо

$$\ln I_n^0(\gamma) = n\ln\frac{4}{n} + \frac{\gamma}{n}\ln\frac{4\gamma}{n^2} - \left(n+\frac{\gamma}{n}\right)\ln\left(1-\frac{\gamma}{n^2}\right) + 2\sqrt{\gamma}\ln\left(\frac{n-\sqrt{\gamma}}{n+\sqrt{\gamma}}\right),$$

тоді

$$\left[\ln I_n^0(\gamma)\right]'_\gamma = \frac{1}{n}\ln\frac{4\gamma}{n^2-\gamma} + \frac{1}{4\sqrt{\gamma}}\ln\left(\frac{1-\frac{\sqrt{\gamma}}{n}}{1+\frac{\sqrt{\gamma}}{n}}\right).$$

Позначимо $\frac{\sqrt{\gamma}}{n} = x$, тоді $\gamma = n^2x^2$, $\sqrt{\gamma} = nx$ і $\frac{1}{n} < x \leqslant n^{-0{,}75}$. В результаті перетворень, одержуємо

$$\left[\ln I_n^0(\gamma)\right]'_\gamma = \frac{2}{n}\ln 2x - \frac{1}{n}\ln(1-x^2) + \frac{1}{4nx}\ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right).$$

І врахувавши, що

$$\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \ldots - \frac{x^n}{n} - \ldots,$$

$$\ln\frac{1-x}{1+x} = -2x\left(1+\frac{1}{3}x^2+\frac{1}{5}x^4+\ldots+\frac{1}{2k+1}x^{2k}+\ldots\right),$$

маємо

$$\left[\ln I_n^0(\gamma)\right]'_\gamma = \frac{2}{n}\ln 2x + \frac{1}{n}\left(x^2+\frac{x^4}{2}+\ldots+\frac{x^{2n}}{n}+\ldots\right) -$$

$$-\frac{1}{2n}\left(1+\frac{1}{3}x^2+\frac{1}{5}x^4+\ldots+\frac{x^{2k}}{2k+1}+\ldots\right).$$

Отже,

$$\left[\ln I_n^0(\gamma)\right]'_\gamma = \frac{2}{n}\ln 2x - \frac{1}{2n} +$$

$$+\frac{x^2}{n}\left(1-\frac{1}{6}\right) + \frac{x^4}{n}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{10}\right) + \ldots + \frac{x^{2n}}{n}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{4n+2}\right) + \ldots.$$

Далі, врахувавши, що $\frac{1}{n} - \frac{1}{4n+2} \leqslant \frac{1}{2}$,

$$\left[\ln I_n^0(\gamma)\right]'_\gamma \leqslant \frac{2}{n}\ln 2x - \frac{1}{2n} + \frac{1}{n}\left(\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}x^4+\ldots+\frac{1}{2}x^{2k}+\ldots\right) =$$

$$= -\frac{1}{2n} + \frac{2}{n}\ln x + \frac{1}{2n}\left(\frac{x^2}{1-x^2}\right).$$

Функція $\dfrac{x^2}{1-x^2}$ монотонно зростає на проміжку $[0,1)$ для $\frac{1}{n} < x \leqslant n^{-0,75}$, тоді справедливі нерівності

$$\left[\ln I_n^0(\gamma)\right]'_\gamma \leqslant -\frac{1}{2n} + \frac{2}{n}\ln x + \frac{1}{2n}\left(\frac{x^2}{1-x^2}\right) =$$

$$= -\frac{1}{2n}\left(1 - 4\ln x - \frac{x^2}{1-x^2}\right) < -\frac{1}{2n}\left(1 - 4\ln(n^{-1}) - \frac{n^{-1,5}}{1-n^{-1,5}}\right) \leqslant$$

$$\leqslant -\frac{1}{2n}\left(1 + 4\ln n - \frac{1}{n^{1,5}}\frac{1}{1-\frac{1}{n^{1,5}}}\right) \leqslant -\frac{1}{2n}\left(1 - \frac{1,03}{n^{1,5}} + 4\ln n\right) < 0,$$

оскільки при $n \geqslant 3$

$$\frac{1}{1-\frac{1}{n^{1,5}}} < 1,03.$$

Очевидно, що

$$1 - \frac{1,03}{n^{1,5}} + 4\ln n > 0 \quad \text{при всіх} \quad n \geqslant 3.$$

Таким чином, $I_n^0(\gamma)$ монотонно спадає при всіх γ з проміжку $(1, \gamma_n]$.

Функція

$$n^{-\frac{\gamma}{2}}\left(\frac{4^n}{(n-1)^{n-1}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\gamma}}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{\gamma}}\right)^{n-1}\right)^{1-\frac{\gamma}{n}}$$

при кожному фіксованому n монотонно зростає по γ на інтервалі $(1, \gamma_n]$, а функція $I_n^0(\gamma)$ монотонно спадає по γ на цьому ж інтервалі, оскільки

$$(\ln I_n^0(\gamma))' = \left(\frac{1}{n}\ln\left(\frac{4\gamma}{n^2-\gamma}\right) + \frac{1}{\sqrt{\gamma}}\ln\left(\frac{n-\sqrt{\gamma}}{n+\sqrt{\gamma}}\right)\right) < 0$$

при кожному фіксованому n. Отже,

$$\Lambda_n(\gamma) = \frac{I_n(\gamma)}{I_n^0(\gamma)} < \frac{I_n(\gamma_n)}{I_n^0(\gamma_n)} = \Lambda_n(\gamma_n) < 1,$$

тобто $I_n(\gamma_n) < I_n^0(\gamma_n)$ при всіх значеннях γ_n, вказаних в теоремі 2.10. А це означає, що у випадку $\alpha_0\sqrt{\gamma} \geqslant 2$ при даних значеннях параметрів екстремальних конфігурацій не має.

Далі, нехай $\alpha_0\sqrt{\gamma} < 2$. Тоді розглянемо систему функцій $\zeta = \pi_k(w) = -i\left(e^{-i\theta_k}w\right)^{\frac{1}{\alpha_k}}$, $k = \overline{1,n}$. Вибравши відповідну вітку багатозначної аналітичної функції $\pi_k(w)$, $k = \overline{1,n}$ отримаємо, що функція $\pi_k(w)$ однолисто і конформно відображає кут

$$P_k := \{w : \arg a_k < \arg w < \arg a_{k+1}\}$$

на праву півплощину при кожному $k = \overline{1,n}$. Сімейство функцій $\{\pi_k(w)\}_{k=1}^{n}$ називається допустимим для розділяючого перетворення областей B_k, $k=\overline{0,n}$, відносно кутів $\{P_k\}_{k=1}^{n}$.

Нехай $L_k^{(1)}$, $k = \overline{1,n}$, позначає область площини $\mathbb{C}_\zeta$, отриману в результаті об'єднання зв'язної компоненти множини $\pi_k(B_k \bigcap \overline{P}_k)$, яка містить точку $\pi_k(a_k)$, зі своїм симетричним відображенням відносно уявної осі. Позначимо через $L_k^{(2)}$, $k = \overline{1,n}$, таку область площини $\mathbb{C}_\zeta$, яка отримана в результаті об'єднання зв'язної компоненти множини $\pi_k(B_{k+1} \bigcap \overline{P}_k)$, яка містить точку $\pi_k(a_{k+1})$, зі своїм симетричним відображенням відносно уявної осі. Відзначимо, що $B_{n+1} := B_1$, $\pi_n(a_{n+1}) := \pi_n(a_1)$. Крім того, позначимо через $L_k^{(0)}$ таку область площини $\mathbb{C}_\zeta$, отриману в результаті об'єднання зв'язної компоненти множини $\pi_k(B_0 \bigcap \overline{P}_k)$, яка містить точку $\zeta = 0$, зі своїм симетричним відображенням відносно уявної осі. Позначимо $\pi_k(a_k) := l_k^{(1)} = -i$, $\pi_k(a_{k+1}) := l_k^{(2)} = i$, $k = \overline{1,n}$, $\pi_n(a_{n+1}) := l_n^{(2)} = i$.

З визначення функцій π_k, випливає, що

$$|\pi_k(w) - l_k^{(1)}| \sim \frac{1}{\alpha_k} \cdot |w - a_k|, \quad w \to a_k, \quad w \in \overline{P_k},$$

$$|\pi_k(w) - l_k^{(2)}| \sim \frac{1}{\alpha_k} \cdot |w - a_{k+1}|, \quad w \to a_{k+1}, \quad w \in \overline{P_k},$$

$$|\pi_k(w)| \sim |w|^{\frac{1}{\alpha_k}}, \quad w \to 0, \quad w \in \overline{P_k}.$$

В околі точки $w = a_k$ величину w можемо записати у вигляді

$$w = a_k + (w - a_k).$$

Тоді має місце такий розклад у ряд:

$$-i\left(e^{-i\arg a_k} w\right)^{\frac{1}{\alpha_k}} = -i\left(e^{-i\arg a_k}(a_k + (w - a_k))\right)^{\frac{1}{\alpha_k}} =$$

$$= -i\left(e^{-i\arg a_k} a_k \left(1 + \frac{1}{a_k}(w - a_k)\right)\right)^{\frac{1}{\alpha_k}} =$$

$$= -i\left(|a_k| \left(1 + \frac{1}{a_k}(w - a_k)\right)\right)^{\frac{1}{\alpha_k}} =$$

$$= -i|a_k|^{\frac{1}{\alpha_k}} \left(1 + \frac{1}{\alpha_k}\frac{1}{a_k}(w - a_k) + o(1)\right) =$$

$$= -i|a_k|^{\frac{1}{\alpha_k}} - i\frac{1}{\alpha_k}\frac{|a_k|^{\frac{1}{\alpha_k}}}{a_k}(w - a_k) + o(1).$$

Звідси отримуємо асимптотичну рівність

$$|\pi_k(w) - l_k^{(1)}| = \frac{1}{\alpha_k}|a_k|^{\frac{1}{\alpha_k}-1} \cdot (w - a_k)(1 + o(1)),$$

де

$$\frac{o(1)}{|w - a_k|} \to 0, \quad w \to a_k.$$

Це рівносильно шуканому співвідношенню еквівалентності, оскільки за умовою теореми $|a_k| = 1$, $k = \overline{1,n}$. Два інших співвідношення одержуємо аналогічно.

Використавши теорему 2.3.13 [20] (див. також теорему 4.10 [12]), приходимо до висновку, що

$$r\left(B_k, a_k\right) \leqslant \left[\alpha_k\, r\left(L_k^{(1)}, -i\right) \cdot \alpha_{k-1}\, r\left(L_{k-1}^{(2)}, i\right)\right]^{\frac{1}{2}}, \quad k = \overline{1,n}, \tag{2.11}$$

$$r\left(B_0, 0\right) \leqslant \left[\prod_{k=1}^{n} r^{\alpha_k^2}\left(L_k^{(0)}, 0\right)\right]^{\frac{1}{2}}. \tag{2.12}$$

Приймаючи до уваги нерівності (2.11) і (2.12), маємо співвідношення

$$I_n(\gamma) \leqslant \prod_{k=1}^{n}\left[r\left(L_k^{(0)}, 0\right)\right]^{\frac{\gamma\alpha_k^2}{2}} \prod_{k=1}^{n}\left[\alpha_{k-1}\cdot\alpha_k\cdot r\left(L_{k-1}^{(2)}, i\right) r\left(L_k^{(1)}, -i\right)\right]^{\frac{1}{2}} =$$

$$= \prod_{k=1}^{n}\alpha_k\left[\prod_{k=1}^{n} r^{\gamma\alpha_k^2}\left(L_k^{(0)}, 0\right) r\left(L_k^{(1)}, -i\right) r\left(L_k^{(2)}, i\right)\right]^{\frac{1}{2}}.$$

Використавши результат роботи [23] для трьох довільних областей, що попарно не перетинаються, маємо нерівність

$$r^{\gamma\alpha_k^2}\left(L_k^{(0)}, 0\right) r\left(L_k^{(1)}, -i\right) r\left(L_k^{(2)}, i\right) \leqslant$$

$$\leqslant r^{\alpha_k^2\gamma}\left(D_k^{(0)}, 0\right) r\left(D_k^{(1)}, -i\right) r\left(D_k^{(2)}, i\right), \tag{2.13}$$

де $D_k^{(0)}$, $D_k^{(1)}$, $D_k^{(2)}$ – кругові області квадратичного диференціала

$$Q(w)dw^2 = \frac{(4 - \alpha_k^2\gamma)w^2 - \alpha_k^2\gamma}{w^2(w^2+1)^2}\, dw^2,$$

які утворюють систему трьох попарно неперетинних областей таких, що $0 \in D_k^{(0)}$, $-i \in D_k^{(1)}$, $i \in D_k^{(2)}$.

Для правої частини нерівності (2.13) маємо рівність

$$r^{\gamma\alpha_k^2}\left(D_0, 0\right) r\left(D_1, -i\right) r\left(D_2, i\right) =$$

$$= S(\sigma) = 2^{\sigma^2+6}\cdot\sigma^{\sigma^2}\cdot(2-\sigma)^{-\frac{1}{2}(2-\sigma)^2}\cdot(2+\sigma)^{-\frac{1}{2}(2+\sigma)^2}, \quad \sigma \in [0,2],$$

де D_0, D_1, D_2 – довільна трійка попарно неперетинних областей така, що $0 \in D_0 \subset \overline{\mathbb{C}}$, $-i \in D_1 \subset \overline{\mathbb{C}}$, $i \in D_2 \subset \overline{\mathbb{C}}$.

Отже, з усього вище наведеного випливає нерівність

$$I_n(\gamma) \leqslant \left(\prod_{k=1}^{n} \alpha_k\right) \left[\prod_{k=1}^{n} r^{\alpha_k^2 \gamma}\left(D_k^{(0)}, 0\right) r\left(D_k^{(1)}, -i\right) r\left(D_k^{(2)}, i\right)\right]^{\frac{1}{2}} \leqslant$$

$$\leqslant \left(\prod_{k=1}^{n} \alpha_k\right) \left[\prod_{k=1}^{n} S\left(\alpha_k \sqrt{\gamma}\right)\right]^{1/2} = \gamma^{-n/2} \left[\prod_{k=1}^{n} P\left(\alpha_k \sqrt{\gamma}\right)\right]^{\frac{1}{2}}, \qquad (2.14)$$

де $P(x) = 2^{x^2+6} \cdot x^{x^2+2} \cdot (2-x)^{-\frac{1}{2}(2-x)^2} \cdot (2+x)^{-\frac{1}{2}(2+x)^2}$, $\quad x \in [0, 2]$. Таким чином, оцінка функціонала $I_n(\gamma)$ зведена до оцінки функції багатьох змінних, яка залежить тільки від аргументів точок a_k.

Розглянемо допоміжну екстремальну задачу:

$$\prod_{k=1}^{n} P(x_k) \longrightarrow \max; \quad \sum_{k=1}^{n} x_k = 2\sqrt{\gamma},$$

$$x_k = \alpha_k \sqrt{\gamma}, \quad 0 < x_k \leqslant 2.$$

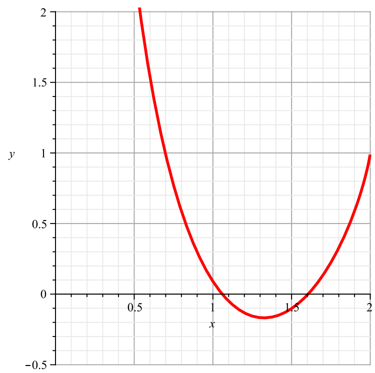

Рис. 2.2. Графік функції $y = F'(x)$

Нехай $F(x) = \ln(P(x))$ і $X^{(0)} = \left\{x_k^{(0)}\right\}_{k=1}^{n}$ буде довільна екстремальна точка вище вказаної задачі. Використавши метод роботи [24], приходимо до висновку, що справедливе наступне твердження: якщо $0 < x_k^{(0)} < x_j^{(0)} < 2$, $k \neq j$, тоді

$$F'\left(x_k^{(0)}\right) = F'\left(x_j^{(0)}\right),$$

і якщо деяке $x_j^{(0)} = 2$, то для довільного $x_k^{(0)} < 2$, справедлива нерівність

$$F'\left(x_k^{(0)}\right) \leqslant F'\left(x_j^{(0)}\right) = F'(2) = 1,$$

де $k, j = \overline{1, n}$, $k \neq j$, $F'(x) = 2x \ln 2x + (2-x)\ln(2-x) - (2+x)\ln(2+x) + \frac{2}{x}$ (див. Рис. 2.2).

Далі для доведення теореми залишилось показати, що виконується умова

$$x_1^{(0)} = x_2^{(0)} = \ldots = x_n^{(0)}.$$

Нехай $F'(x) = t$, $y_0 \leqslant t \leqslant 1$, $y_0 \approx -0,17$. Розглянемо наступні величини t: $t_1 = 1$, $t_2 = 0,95$, $t_3 = 0,9$, $t_4 = 0,85$, …, $t_{23} = -0,15$, $t_{24} = -0,17$. Знайдемо корені рівняння $F'(x) = t_k$, $k = \overline{1, 24}$. Оскільки $\forall t_k \in [y_0, 1)$, то звідси слідує, що рівняння має два корені $x_1(t) \in (0, x_0]$, $x_2(t) \in (x_0, 2]$, $x_0 \approx 1,324683$. Всі обчислення представлені в таблиці нижче.

k	t_k	$x_1(t_k)$	$x_2(t_k)$	$2x_1(t_k) + x_2(t_{k+1})$	$3x_1(t_k) + x_2(t_{k+1})$	$4x_1(t_k) + x_2(t_{k+1})$
1	1,00	0,697331	2,000000			
2	0,95	0,708144	1,992640	3,387302	4,084633	4,781964
3	0,90	0,719344	1,983233	3,399522	4,107666	4,815810
4	0,85	0,730957	1,972549	3,411237	4,130581	4,849925
5	0,80	0,743014	1,960786	3,422699	4,153657	4,884614
6	0,75	0,755550	1,948028	3,434057	4,177071	4,920085
7	0,70	0,768602	1,934315	3,445414	4,200964	4,956513
8	0,65	0,782217	1,919654	3,456859	4,225462	4,994064
9	0,60	0,796446	1,904035	3,468470	4,250687	5,032904
10	0,55	0,811347	1,887429	3,480320	4,276766	5,073211
11	0,50	0,826991	1,869791	3,492485	4,303831	5,115178
12	0,45	0,843462	1,851059	3,505041	4,332032	5,159023
13	0,40	0,860858	1,831149	3,518072	4,361534	5,204996
14	0,35	0,879304	1,809955	3,531672	4,392531	5,253389
15	0,30	0,898950	1,787338	3,545945	4,425249	5,304553
16	0,25	0,919989	1,763115	3,561014	4,459964	5,358914
17	0,20	0,942675	1,737044	3,577023	4,497012	5,417001
18	0,15	0,967348	1,708794	3,594144	4,536819	5,479494
19	0,10	0,994487	1,677892	3,612588	4,579935	5,547283
20	0,00	1,059462	1,604865	3,593838	4,588325	5,582811
21	-0,05	1,100561	1,559491	3,678415	4,737878	5,797340
22	-0,10	1,152868	1,502748	3,703870	4,804430	5,904991
23	-0,15	1,234855	1,416172	3,721907	4,874775	6,027642
24	-0,17	1,324683	1,324683	3,794393	5,029248	6,264103

Із таблиці випливає, що на інтервалі $t \in [0,95; 1]$ досягається мінімальне значення величин $(n-1)x_1(t_1) + x_2(t_2)$, $n \in \{3, 4, 5\}$, яке, відповідно, дорівнює $3,3873$, $4,0846$ і $4,7819$. Для $n = 3$ маємо, що

$$\sum_{k=1}^{3} x_k > 2x_1(t_1) + x_2(t_2) = 3,3873 = 2\sqrt{\gamma_3}.$$

Звідси маємо, що $\gamma_3 = 2,8684$. Тоді для $n = 4$ маємо, що

$$\sum_{k=1}^{4} x_k > 3x_1(t_1) + x_2(t_2) = 4,0846 = 2\sqrt{\gamma_4}.$$

Звідси маємо, що $\gamma_4 = 4,1709$. Аналогічно, для $n = 5$ маємо, що

$$\sum_{k=1}^{5} x_k > 4x_1(t_1) + x_2(t_2) = 4,7819 = 2\sqrt{\gamma_5}.$$

Таким чином, $\gamma_5 = 5,7116$.

Використавши вище наведену таблицю маємо, що відповідний мінімум величин

$$(n-1)x_1(t_k) + x_2(t_{k+1})$$

при $n \in \{6,7,8\}$, дорівнює, відповідно, $\gamma_6 = 7,505$, $\gamma_7 = 9,5369$, $\gamma_8 = 11,8119$.

Із таблиці отримуємо, що для функції $F'(x)$ справедлива нерівність $(x_1 - 0,69)\,n + (x_2 - x_1) > 0$. Отже, $nx_1 + (x_2 - x_1) > 0,69\,n$. І, остаточно, маємо

$$(n-1)x_1 + x_2 > 0,69n = 2\sqrt{\gamma_n}, \quad \gamma_n = 0,1215\,n^2, \quad n \geqslant 9.$$

Таким чином, з вище наведених нерівностей випливає, що для довільного фіксованого $\gamma \in (1, \gamma_n]$, де γ_n задано в умовах теореми, виконується нерівність

$$\sum_{k=1}^{n} x_k^{(0)}(t) > 2\sqrt{\gamma_n}, \quad n \geqslant 3.$$

З іншого боку, необхідною умовою є рівність

$$\sum_{k=1}^{n} x_k^{(0)}(t) = 2\sqrt{\gamma_n}, \quad n \geqslant 3.$$

З цього випливає, що всі точки $\left\{x_k^{(0)}\right\}_{k=1}^{n}$ належать проміжку $(0,\, x_0]$. Тобто, ми маємо, що для екстремального набору $\left\{x_k^{(0)}\right\}_{k=1}^{n}$ виконується рівність $x_1^{(0)} = x_2^{(0)} = \ldots = x_n^{(0)}$, $k = \overline{1,n}$, для всіх $\gamma \in (1, \gamma_n]$ та $n \geqslant 3$. Отже, підсумувавши всі міркування маємо, що справедлива нерівність

$$I_n(\gamma) \leqslant \gamma^{-n/2} \left[\prod_{k=1}^{n} P\left(\frac{2}{n}\sqrt{\gamma}\right) \right]^{\frac{1}{2}}.$$

З іншого боку,

$$\gamma^{-n/2}\left[\prod_{k=1}^{n} P\left(\frac{2}{n}\sqrt{\gamma}\right)\right]^{\frac{1}{2}} = r^{\gamma}\left(D_0^{(0)},0\right)\prod_{k=1}^{n} r\left(D_k^{(0)},a_k^{(0)}\right),$$

де $a_k^{(0)}$ і $D_k^{(0)}$, $k=\overline{0,n}$, є, відповідно, полюсами і круговими областями квадратичного диференціала

$$Q(w)dw^2 = -\frac{(n^2-\gamma)w^n+\gamma}{w^2(w^n-1)^2}\,dw^2.$$

Відомо (див. [20]), що

$$r^{\gamma}\left(D_0^{(0)},0\right)\prod_{k=1}^{n} r\left(D_k^{(0)},a_k^{(0)}\right) = \left(\frac{4}{n}\right)^{n}\frac{\left(\frac{4\gamma}{n^2}\right)^{\frac{\gamma}{n}}}{\left(1-\frac{\gamma}{n^2}\right)^{n+\frac{\gamma}{n}}}\left(\frac{1-\frac{\sqrt{\gamma}}{n}}{1+\frac{\sqrt{\gamma}}{n}}\right)^{2\sqrt{\gamma}}.$$

Твердження про знак рівності перевіряється безпосередньо. Теорема 2.10 доведена. □

3. Екстремальне розбиття комплексної площини з вільними полюсами при додатковій умові симетрії

Метод доведення теорем 2.6 і 2.10 можна застосувати до розв'язання дещо складнішої проблеми.

Проблема 3.1. При всіх значеннях параметра $\gamma\in(0,n]$ показати, що максимум добутку

$$I_n(\gamma) = r^{\gamma}\left(B_0,0\right)\prod_{k=1}^{n} r\left(B_k,a_k\right),$$

де B_0, B_1, $B_2,\ldots,B_n$, $n\geqslant 2$, – області, що взаємно не перетинаються, в $\overline{\mathbb{C}}$ і, крім того, області $B_1,\ldots,B_n$ – симетричні відносно одиничного кола, $a_0=0$, $|a_k|=1$, $k=\overline{1,n}$, $a_k\in B_k\subset\overline{\mathbb{C}}$, $k=\overline{0,n}$, досягається для конфігурації із областей B_k і точок a_k, що володіють n-кратною симетрією.

Проблема 3.1 для випадку $\gamma=1$ була сформульована як відкрита в 1994 році в роботі [23]. Для $\gamma=1$ і $n\geqslant 2$ її розв'язав Л.В. Ковальов [25, 26]. А саме, було показано справедливість наступної нерівності

$$r(B_0,0)\prod_{k=1}^{n} r(B_k,a_k) \leqslant r\left(D_0,0\right)\prod_{k=1}^{n} r\left(D_k,d_k\right),$$

де d_k, D_k, $k=\overline{0,n}$, є, відповідно, полюсами та круговими областями квадратичного диференціала

$$Q(w)dw^2 = -\frac{w^{2n}+2(n^2-1)w^n+1}{w^2(w^n-1)^2}\,dw^2.$$

Однак для значень $\gamma \neq 1$ проблема 3.1 довгий час залишалася не розв'язаною. Лише в 2018 році в статті [18] було одержано результат для $n \geqslant 2$ і $\gamma \in (0,1)$. Для $\gamma \in (1, \sqrt[3]{n}\,)$ і $n \geqslant 14$ задача розв'язана в роботі [1]. В [14] отримано деякий результат для однієї загальнішої задачі, з якого випливає, що проблема 3.1 має розв'язок для $\gamma \in \left(1, \frac{3}{2}\right)$ і $n \geqslant 9$.

В роботі [19] доведено аналог нерівності (2.3) для трьох фіксованих точок 0, 1, -1, і двох симетричних відносно одиничного кола областей.

Теорема 3.1 ([19]). *Нехай $\gamma \in (0,2]$. Тоді для будь-якого фіксованого набору областей, що взаємно не перетинаються, B_0, B_1, B_2, такого, що $0 \in B_0$, $1 \in B_1$, $-1 \in B_2$, і, крім того, області B_k, $k \in \{1,2\}$, – симетричні відносно одиничного кола $\{w \in \mathbb{C} : |w| = 1\}$, справедлива нерівність*

$$r^{\gamma}(B_0,0)\,r(B_1,1)\,r(B_2,-1) \leqslant$$

$$\leqslant 2^{1-\gamma}\left[\frac{2^{2\gamma+6}\cdot(2\gamma)^{\gamma}}{(2-\sqrt{2\gamma})^{\frac{1}{2}(2-\sqrt{2\gamma})^2}\cdot(2+\sqrt{2\gamma})^{\frac{1}{2}(2+\sqrt{2\gamma})^2}}\right]^{\frac{1}{2}}.$$

Знак рівності в цій нерівності досягається тоді, коли області B_0, B_1, B_2 – це кругові області квадратичного диференціала

$$Q(w)dw^2 = -\frac{\gamma w^4+2(4-\gamma)w^2+\gamma}{w^2(w^2-1)^2}\,dw^2. \tag{3.1}$$

Доведення. Нехай

$$P_k := \left\{w : (-1)^{k+1}\mathrm{Im}\,w > 0\right\}, \quad k \in \{1,2\}, \quad D_1 = P_1 \cap U_1,$$

$$D_2 = P_2 \cap U_1, \quad D_3 = \left(\overline{\mathbb{C}}\backslash U_1\right) \cap P_1, \quad D_4 = \left(\overline{\mathbb{C}}\backslash U_1\right) \cap P_2.$$

І нехай

$$\pi(w) = \frac{2w}{1+w^2}.$$

Тоді із визначення функції $\pi(w)$ слідує, що

$$|\pi(w)| \sim 2|w|, \quad w \to 0, \quad w \in \overline{P_k},$$

$$|\pi(w)-1| \sim \frac{1}{2}\,|w-1|^2\,, \quad w \to 1, \quad w \in \overline{P_k},$$

$$|\pi(w)+1| \sim \frac{1}{2}\,|w+1|^2\,, \quad w \to -1, \quad w \in \overline{P_k}.$$

Результат розділяючого перетворення області B_0 відносно функції $\pi(w)$ та системи областей $\left\{\overline{D}_k\right\}_{k=1}^{4}$ позначимо через $B_0^{(k)}$, $k=\overline{1,4}$; результат розділяючого перетворення області B_j, $j\in\{1,2\}$, відносно функції $2w/(1+w^2)$ і системи областей $\left\{\overline{D}_k\right\}_{k=1}^{4}$, позначимо – $B_1^{(k)}, B_2^{(k)}$, $k=\overline{1,4}$. Далі, використавши відповідні результати робіт [12, 23], маємо нерівності

$$r\left(B_0,0\right)\leqslant\left[\frac{1}{2}r\left(B_0^{(1)},0\right)\cdot\frac{1}{2}r\left(B_0^{(2)},0\right)\right]^{\frac{1}{2}},$$

$$r\left(B_1,1\right)\leqslant\left[2r\left(B_1^{(1)},1\right)2r\left(B_1^{(2)},1\right)2r\left(B_1^{(3)},1\right)2r\left(B_1^{(4)},1\right)\right]^{\frac{1}{8}},$$

$$r\left(B_2,-1\right)\leqslant\left[2r\left(B_2^{(1)},-1\right)2r\left(B_2^{(2)},-1\right)2r\left(B_2^{(3)},-1\right)2r\left(B_2^{(4)},-1\right)\right]^{\frac{1}{8}}.$$

Звідси,

$$r^{\gamma}\left(B_0,0\right)r\left(B_1,1\right)r\left(B_2,-1\right)\leqslant\left[\frac{1}{2}r\left(B_0^{(1)},0\right)\cdot\frac{1}{2}r\left(B_0^{(2)},0\right)\right]^{\frac{\gamma}{2}}\times$$
$$\times\left[2r\left(B_1^{(1)},1\right)2r\left(B_1^{(2)},1\right)2r\left(B_1^{(3)},1\right)2r\left(B_1^{(4)},1\right)\right]^{\frac{1}{8}}\times$$
$$\times\left[2r\left(B_2^{(1)},-1\right)2r\left(B_2^{(2)},-1\right)2r\left(B_2^{(3)},-1\right)2r\left(B_2^{(4)},-1\right)\right]^{\frac{1}{8}}.$$

Оскільки області B_1, B_2, – симетричні відносно одиничного кола, тоді

$$r^{\gamma}\left(B_0,0\right)r\left(B_1,1\right)r\left(B_2,-1\right)\leqslant\left[\frac{1}{2}r\left(B_0^{(1)},0\right)\cdot\frac{1}{2}r\left(B_0^{(2)},0\right)\right]^{\frac{\gamma}{2}}\times$$
$$\times\left[\left(2r\left(B_1^{(1)},1\right)\right)^2\left(2r\left(B_1^{(2)},1\right)\right)^2\left(2r\left(B_2^{(1)},-1\right)\right)^2\left(2r\left(B_2^{(2)},-1\right)\right)^2\right]^{\frac{1}{8}}.$$

Далі, виконавши нескладні перетворення, одержуємо

$$r^{\gamma}\left(B_0,0\right)r\left(B_1,1\right)r\left(B_2,-1\right)\leqslant$$
$$\leqslant 2\left[2^{-2\gamma}r^{2\gamma}\left(B_0^{(1)},0\right)\right]^{\frac{1}{4}}\left[r\left(B_1^{(1)},1\right)r\left(B_1^{(2)},1\right)\right]^{\frac{1}{4}}\times$$
$$\times\left[2^{-2\gamma}r^{2\gamma}\left(B_0^{(2)},0\right)\right]^{\frac{1}{4}}\left[r\left(B_2^{(1)},-1\right)r\left(B_2^{(2)},-1\right)\right]^{\frac{1}{4}}\leqslant$$
$$\leqslant 2^{1-\gamma}\left[r^{2\gamma}\left(B_0^{(1)},0\right)r\left(B_1^{(1)},1\right)r\left(B_2^{(1)},-1\right)\right]^{\frac{1}{4}}\times$$
$$\times\left[r^{2\gamma}\left(B_0^{(2)},0\right)r\left(B_1^{(2)},1\right)r\left(B_2^{(2)},-1\right)\right]^{\frac{1}{4}},$$

де $B_0^{(k)}$, $B_1^{(k)}$, $B_2^{(k)}$, $k \in \{1,2\}$, – кругові області квадратичного диференціала

$$Q(z)dz^2 = -\frac{(2-\gamma)z^2+\gamma}{z^2(z^2-1)^2}\,dz^2 \tag{3.2}$$

$\left(0 \in B_0^{(k)},\ 1 \in B_1^{(k)},\ -1 \in B_2^{(k)}\right)$. Оскільки $\gamma \in (0,2]$, тоді з результатів робіт [20, 22, 23], справедлива нерівність

$$r^{2\gamma}\left(B_0^{(1)},0\right) r\left(B_1^{(1)},1\right) r\left(B_2^{(1)},-1\right) \leqslant$$

$$\leqslant 2^{2\gamma+6}\cdot(2\gamma)^{\gamma}\cdot\left(2-\sqrt{2\gamma}\right)^{-\frac{1}{2}\left(2-\sqrt{2\gamma}\right)^2}\cdot\left(2+\sqrt{2\gamma}\right)^{-\frac{1}{2}\left(2+\sqrt{2\gamma}\right)^2}.$$

Звідси,

$$r^{\gamma}\left(B_0,0\right) r\left(B_1,1\right) r\left(B_2,-1\right) \leqslant$$

$$\leqslant 2^{1-\gamma}\left[2^{2\gamma+6}\cdot(2\gamma)^{\gamma}\cdot\left(2-\sqrt{2\gamma}\right)^{-\frac{1}{2}\left(2-\sqrt{2\gamma}\right)^2}\cdot\left(2+\sqrt{2\gamma}\right)^{-\frac{1}{2}\left(2+\sqrt{2\gamma}\right)^2}\right]^{\frac{1}{4}}\times$$

$$\times\left[2^{2\gamma+6}\cdot(2\gamma)^{\gamma}\cdot\left(2-\sqrt{2\gamma}\right)^{-\frac{1}{2}\left(2-\sqrt{2\gamma}\right)^2}\cdot\left(2+\sqrt{2\gamma}\right)^{-\frac{1}{2}\left(2+\sqrt{2\gamma}\right)^2}\right]^{\frac{1}{4}}=$$

$$=2^{1-\gamma}\left[2^{2\gamma+6}\cdot(2\gamma)^{\gamma}\cdot\left(2-\sqrt{2\gamma}\right)^{-\frac{1}{2}\left(2-\sqrt{2\gamma}\right)^2}\cdot\left(2+\sqrt{2\gamma}\right)^{-\frac{1}{2}\left(2+\sqrt{2\gamma}\right)^2}\right]^{\frac{1}{2}}.$$

Таким чином, основна нерівність теореми 3.1 доведена.

Виконавши заміну змінної в квадратичному диференціалі (3.2) за формулою

$$z=\frac{2w}{1+w^2}$$

і врахувавши, що показник степеня дорівнює 2γ, маємо

$$dz=\frac{2-2w^2}{(1+w^2)^2}dw,$$

тоді

$$dz^2=\frac{4-8w^2+4w^4}{(1+w^2)^4}dw^2.$$

І, таким чином, використавши нескладні перетворення, одержуємо квадратичний диференціал (3.1)

$$Q(w)dw^2=-\frac{(4-2\gamma)\frac{4w^2}{(1+w^2)^2}+2\gamma}{\frac{4w^2}{(1+w^2)^2}\left(\frac{4w^2}{(1+w^2)^2}-1\right)^2}\cdot\frac{4-8w^2+4w^4}{(1+w^2)^4}\,dw^2=$$

$$= -\frac{\frac{4w^2(4-2\gamma)}{(1+w^2)^2} + 2\gamma}{\frac{4w^2}{(1+w^2)^2}\left(\frac{4w^2-(1+w^2)^2}{(1+w^2)^2}\right)^2} \cdot \frac{4(1-2w^2+z^4)}{(1+w^2)^4}\, dw^2 =$$

$$= -\frac{\left(4w^2(4-2\gamma) + 2\gamma(1+w^2)^2\right)\left(1-2w^2+w^4\right)}{w^2(4w^2-1-2w^2-w^4)^2}\, dw^2 =$$

$$= -\frac{\left(2\gamma w^4 + (16-8\gamma+4\gamma)w^2 + 2\gamma\right)\left(1-w^2\right)^2}{w^2(1-w^2)^4}\, dw^2 =$$

$$= -\frac{2\gamma w^4 + (16-4\gamma)w^2 + 2\gamma}{w^2(1-w^2)^2}\, dw^2 = -\frac{2\gamma w^4 + 4(4-\gamma)w^2 + 2\gamma}{w^2(1-w^2)^2}\, dw^2.$$

Остаточно, отримуємо (3.1). Знак рівності перевіряється безпосередньо. Теорема 3.1 доведена. □

Наступний результат показує розв'язок проблеми 3.1 для $\gamma_n = 0,25n^2$ і $n \geqslant 4$ при додатковій умові, що відрізки $[0, a_k]$ розташовані один до одного під кутами, що не перевищують $2\pi/\sqrt{2\gamma}$.

Теорема 3.2 ([2]). *Нехай $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$, $\gamma \in (0, \gamma_n]$, $\gamma_2 = 1,49$, $\gamma_3 = 3,01$, $\gamma_n = 0,25\,n^2$, $n \geqslant 4$. Тоді для довільних різних точок одиничного кола $|w| = 1$, таких, що $0 < \alpha_k \leqslant 2/\sqrt{2\gamma}$, $k = \overline{1,n}$, і для довільного набору областей, що взаємно не перетинаються, B_0, B_k, $a_0 = 0 \in B_0 \subset \overline{\mathbb{C}}$, $a_k \in B_k \subset \overline{\mathbb{C}}$, $k = \overline{1,n}$, і, крім того, області B_k, $k = \overline{1,n}$, – симетричні відносно одиничного кола $|w| = 1$, справедлива нерівність*

$$r^\gamma(B_0, 0)\prod_{k=1}^{n} r(B_k, a_k) \leqslant \left(\frac{4}{n}\right)^n \frac{\left(\frac{2\gamma}{n^2}\right)^{\frac{\gamma}{n}}}{\left|1-\frac{2\gamma}{n^2}\right|^{\frac{n}{2}+\frac{\gamma}{n}}} \left|\frac{n-\sqrt{2\gamma}}{n+\sqrt{2\gamma}}\right|^{\sqrt{2\gamma}}. \qquad (3.3)$$

Знак рівності в цій нерівності досягається тоді, коли точки a_k й області B_k, $k = \overline{0,n}$, є, відповідно, полюсами і круговими областями квадратичного диференціала

$$Q(w)dw^2 = -\frac{\gamma w^{2n} + 2(n^2-\gamma)w^n + \gamma}{w^2(w^n-1)^2}\, dw^2. \qquad (3.4)$$

Доведення. Розглянемо систему функцій

$$\pi_k(w) = \left(e^{-i\arg a_k} w\right)^{\frac{1}{\alpha_k}}, \quad k = \overline{1,n}.$$

Сімейство функцій $\{\pi_k(w)\}_{k=1}^n$ називається допустимим для розділяючого перетворення областей B_k, $k = \overline{0,n}$, відносно кутів $\{P_k\}_{k=1}^n$. Нехай

$\Omega_k^{(1)}$, $k=\overline{1,n}$, позначає область площини $\mathbb{C}_\zeta$, отриману в результаті об'єднання зв'язної компоненти множини $\pi_k(B_k\bigcap\overline{P}_k)$, яка містить точку $\pi_k(a_k)=1$, зі своїм симетричним відображенням відносно дійсної осі. Позначимо через $\Omega_k^{(2)}$, $k=\overline{1,n}$, область площини $\mathbb{C}_\zeta$, яка отримана в результаті об'єднання зв'язної компоненти множини $\pi_k(B_{k+1}\bigcap\overline{P}_k)$, яка містить точку $\pi_k(a_{k+1})=-1$, зі своїм симетричним відображенням відносно дійсної осі. Відмітимо, що $B_{n+1}:=B_1$, $\pi_n(a_{n+1}):=\pi_n(a_1)$. Крім того, позначимо через $\Omega_k^{(0)}$ область площини $\mathbb{C}_\zeta$, отриману в результаті об'єднання зв'язної компоненти множини $\pi_k(B_0\bigcap\overline{P}_k)$, яка містить точку $\zeta=0$, зі своїм симетричним відображенням відносно дійсної осі. Позначимо

$$\pi_k(a_k):=\omega_k^{(1)}=1,\quad \pi_k(a_{k+1}):=\omega_k^{(2)}=-1,\quad k=\overline{1,n}.$$

З визначення функцій π_k, слідує, що

$$|\pi_k(w)-1|\sim\frac{1}{\alpha_k}\cdot|w-a_k|,\quad w\to a_k,\quad w\in\overline{P_k},$$

$$|\pi_k(w)+1|\sim\frac{1}{\alpha_k}\cdot|w-a_{k+1}|,\quad w\to a_{k+1},\quad w\in\overline{P_k},$$

$$|\pi_k(w)|\sim|w|^{\frac{1}{\alpha_k}},\quad w\to 0,\quad w\in\overline{P_k}.$$

Використавши формули для розділяючого перетворення області [20,22, 23], маємо нерівності

$$r\left(B_k,a_k\right)\leqslant\left[\alpha_k r\left(\Omega_k^{(1)},1\right)\cdot\alpha_{k-1}r\left(\Omega_k^{(2)},-1\right)\right]^{\frac{1}{2}},\quad k=\overline{1,n},\tag{3.5}$$

$$r\left(B_0,0\right)\leqslant\left[\prod_{k=1}^{n}r^{\alpha_k^2}\left(\Omega_k^{(0)},0\right)\right]^{\frac{1}{2}}.\tag{3.6}$$

З нерівностей (3.5) і (3.6), використавши методику, розвинену в монографії [20, с. 269–274], одержуємо

$$I_n(\gamma)\leqslant\prod_{k=1}^{n}\left[r\left(\Omega_k^{(0)},0\right)\right]^{\frac{\gamma\alpha_k^2}{2}}\prod_{k=1}^{n}\left[\alpha_{k-1}r\left(\Omega_k^{(2)},-1\right)\alpha_k r\left(\Omega_k^{(1)},1\right)\right]^{\frac{1}{2}}=$$

$$=\left(\prod_{k=1}^{n}\alpha_k\right)\left[\prod_{k=1}^{n}r^{\gamma\alpha_k^2}\left(\Omega_k^{(0)},0\right)r\left(\Omega_k^{(1)},1\right)r\left(\Omega_k^{(2)},-1\right)\right]^{\frac{1}{2}}.\tag{3.7}$$

Далі, розглянемо добуток трьох областей

$$r^{\gamma\alpha_k^2}(G_0,0)r(G_1,1)r(G_2,-1).$$

До областей G_0, G_1, G_2 знову застосуємо розділяюче перетворення. Тоді згідно теореми 3.1 для випадку $2\alpha_k^2\gamma \leqslant 4$, одержуємо

$$r^{2\alpha_k^2\gamma}\left(G_0^{(s)},0\right) r\left(G_1^{(s)},1\right) r\left(G_2^{(s)},-1\right) \leqslant$$

$$\leqslant \frac{2^{2\gamma\alpha_k^2+6}\left(\alpha_k\sqrt{2\gamma}\right)^{2\gamma\alpha_k^2}}{\left(2-\alpha_k\sqrt{2\gamma}\right)^{\frac{1}{2}\left(2-\alpha_k\sqrt{2\gamma}\right)^2}\left(2+\alpha_k\sqrt{2\gamma}\right)^{\frac{1}{2}\left(2+\alpha_k\sqrt{2\gamma}\right)^2}}, \quad s\in\{1,3\}.$$

Рівність в цій нерівності досягається коли області $G_0^{(s)}$, $G_1^{(s)}$, $G_2^{(s)}$ є круговими областями квадратичного диференціала

$$Q(z)dz^2 = -\frac{(4-2\alpha_k^2\gamma)z^2+2\alpha_k^2\gamma}{z^2(z^2-1)^2}\,dz^2 \tag{3.8}$$

$\left(0\in G_0^{(s)},\ 1\in G_1^{(s)},\ -1\in G_2^{(s)},\ s\in\{1,3\}\right)$. Якщо $\alpha_k^2\gamma \leqslant 2$, тоді згідно робіт [23, 24], справедлива нерівність

$$r^{\gamma}(B_0,0)\prod_{k=1}^{n} r(B_k,a_k) \leqslant \left(\frac{1}{\sqrt{2\gamma}}\right)^n \prod_{k=1}^{n}\left(\alpha_k\sqrt{2\gamma}\right) 2^{\frac{1-\alpha_k^2\gamma}{2}}\times$$

$$\times\left[\frac{2^{2\gamma\alpha_k^2+6}\left(\alpha_k\sqrt{2\gamma}\right)^{2\gamma\alpha_k^2}}{\left(2-\alpha_k\sqrt{2\gamma}\right)^{\frac{1}{2}\left(2-\alpha_k\sqrt{2\gamma}\right)^2}\left(2+\alpha_k\sqrt{2\gamma}\right)^{\frac{1}{2}\left(2+\alpha_k\sqrt{2\gamma}\right)^2}}\right]^{\frac{1}{4}} =$$

$$= \left(\frac{1}{\sqrt{2\gamma}}\right)^n \prod_{k=1}^{n}\left[\frac{2^{8}\left(\alpha_k\sqrt{2\gamma}\right)^{2\gamma\alpha_k^2+4}}{\left(2-\alpha_k\sqrt{2\gamma}\right)^{\frac{1}{2}\left(2-\alpha_k\sqrt{2\gamma}\right)^2}\left(2+\alpha_k\sqrt{2\gamma}\right)^{\frac{1}{2}\left(2+\alpha_k\sqrt{2\gamma}\right)^2}}\right]^{\frac{1}{4}}.$$

Нехай

$$\Psi(x) = 2^8\cdot x^{x^2+4}\cdot(2-x)^{-\frac{1}{2}(2-x)^2}\cdot(2+x)^{-\frac{1}{2}(2+x)^2},$$

де $x=\alpha_k\sqrt{2\gamma}$, $x\in(0,2]$.

Розглянемо наступну екстремальну задачу:

$$\prod_{k=1}^{n}\Psi(x_k)\longrightarrow \max;\quad \sum_{k=1}^{n}x_k = 2\sqrt{2\gamma},$$

$$x_k=\alpha_k\sqrt{2\gamma},\quad 0<x_k\leqslant 2.$$

Нехай $F(x) = \ln(\Psi(x))$ і $X^{(0)} = \left\{x_k^{(0)}\right\}_{k=1}^{n}$ – довільна екстремальна точка вище сформульованої задачі. Використавши міркування статті [24], ми одержуємо твердження: якщо $0<x_k^{(0)}<x_j^{(0)}<2$, тоді мають місце наступні рівності

$$F'\left(x_k^{(0)}\right) = F'\left(x_j^{(0)}\right),$$

і якщо деяке $x_j^{(0)} = 2$, тоді для будь-якого $x_k^{(0)} < 2$,

$$F'\left(x_k^{(0)}\right) \leqslant F'(2),$$

де $k, j = \overline{1, n}$, $k \neq j$,

$$F'(x) = 2x \ln x + (2 - x) \ln(2 - x) - (2 + x) \ln(2 + x) + \frac{4}{x}$$

(див. Рис. 3.1).

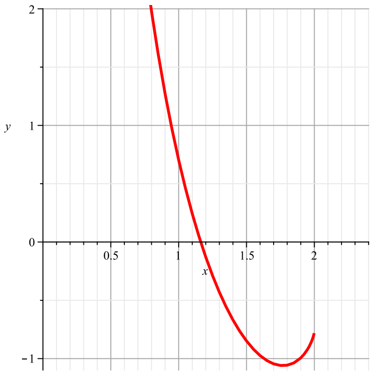

Рис. 3.1. Графік функції $y = F'(x)$

Перевіримо справедливість наступного твердження: якщо функція $Z(x_1, \ldots, x_n) = \sum\limits_{k=1}^{n} F(x_k)$ досягає максимума в точці $\left(x_1^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}\right)$ при умовах $0 < x_k^{(0)} \leqslant 2$, $k = \overline{1, n}$, $\sum\limits_{k=1}^{n} x_k^{(0)} = 2\sqrt{2\gamma}$, тоді

$$x_1^{(0)} = x_2^{(0)} = \ldots = x_n^{(0)}.$$

Для простоти, нехай $x_1^{(0)} \leqslant x_2^{(0)} \leqslant \ldots \leqslant x_n^{(0)}$. Функція

$$F''(x) = \ln\left(\frac{x^2}{4 - x^2}\right) - \frac{4}{x^2}$$

строго зростає на проміжку $(0, 2)$ та існує $x_0 \approx 1,768828$ таке, що

$$signF''(x) \equiv sign(x - x_0).$$

Врахувавши властивості функції $F'(x)$, умови теореми і застосувавши метод, розроблений в статті [24], отримуємо, що для $F'(x)$ завжди виконується нерівність

$$(x_1 - 1,45)\, n + (x_2 - x_1) > 0$$

при $n \geqslant 4$. Звідси, $nx_1 + (x_2 - x_1) > 1,45\,n$. Таким чином, остаточно, маємо

$$(n-1)x_1 + x_2 > 1,45n = 2\sqrt{2\gamma_n}, \quad \gamma_n = 0,25\,n^2, \quad n \geqslant 4.$$

Таким чином, у випадку $n \geqslant 4$ множина точок $\left\{x_k^{(0)}\right\}_{k=1}^{n}$ не може бути екстремальною при умові $x_n^{(0)} \in (x_0,\, 2]$. Отже, для екстремальної множини $\left\{x_k^{(0)}\right\}_{k=1}^{n}$ можливий лише випадок, коли $x_k^{(0)} \in (0,\, x_0]$, $k = \overline{1,n}$, і $x_1^{(0)} = x_2^{(0)} = \ldots = x_n^{(0)}$. Для $\gamma < \gamma_n$, $n \geqslant 4$, повторюються всі попередні міркування.

Далі, нехай $F'(x) = t$, $y_0 \leqslant t \leqslant -0,78$, $y_0 \approx -1,059$. Розглянемо наступні величини t: $t_1 = -0,78$, $t_2 = -0,80$, $t_3 = -0,85$, $t_4 = -0,90$, …, $t_{11} = -1,05$, $t_{12} = -1,059$. Рівняння $F'(x) = t_k$, $k = \overline{1,12}$, для будь-якого $t_k \in [y_0, -0,78)$ має два розв'язки: $x_1(t) \in (0, x_0]$, $x_2(t) \in (x_0, 2]$, $x_0 \approx 1,768828$. Безпосередні обчислення представлені в таблиці нижче.

k	t_k	$x_1(t_k)$	$x_2(t_k)$	$x_1(t_k) + x_2(t_{k+1})$	$2x_1(t_k) + x_2(t_{k+1})$
1	-0,78	1,458417	1,998914		
2	-0,80	1,470034	1,994779	3,453196	4,911613
3	-0,85	1,501193	1,980165	3,450199	4,920233
4	-0,90	1,536275	1,959964	3,461157	4,962350
5	-0,95	1,577242	1,932788	3,469063	5,005338
6	-1,00	1,628755	1,894239	3,471481	5,048723
7	-1,01	1,641325	1,884177	3,512932	5,141687
8	-1,02	1,655169	1,872815	3,514140	5,155465
9	-1,03	1,670801	1,859641	3,514810	5,169979
10	-1,04	1,689217	1,843656	3,514457	5,185258
11	-1,05	1,712998	1,822285	3,511502	5,200719
12	-1,059	1,768589	1,769066	3,482064	5,195062

Врахувавши властивості функції $F'(x)$ і умови теореми, маємо наступну нерівність

$$\sum_{k=1}^{n} x_k(t) > (n-1)x_1(t_k) + x_2(t_{k+1}) \geqslant$$

$$\geqslant \min_{1 \leqslant k \leqslant 11} \left((n-1)x_1(t_k) + x_2(t_{k+1})\right) = 2\sqrt{2\gamma_n},$$

де $t_k \leqslant t \leqslant t_{k+1}$, $k = \overline{1,11}$. Таким чином, для екстремального набору $X^{(0)}$ можливий лише випадок, коли $\left\{x_k^{(0)}\right\}_{k=1}^{n} \in (0,\, x_0]$, $x_0 \approx 1,7688283$, і тому $x_1^{(0)} = x_2^{(0)} = \ldots = x_n^{(0)}$. Звідси, остаточно, має місце співвідношення

$$r^{\gamma}(B_0,0)\prod_{k=1}^{n} r(B_k,a_k) \leqslant \left(\frac{1}{\sqrt{2\gamma}}\right)^{n}\left[\Psi\left(\frac{2}{n}\sqrt{2\gamma}\right)\right]^{\frac{n}{4}}.$$

Використавши точне представлення функції $\Psi\left(x\right)$ та нескладні перетворення, одержуємо нерівність (3.3). Таким чином, основна нерівність теореми 3.2 доведена. Зробивши заміну змінної в квадратичному диференціалі (3.8) за формулою $z = 2w^{\frac{n}{2}}/(1+w^{n})$, отримаємо (3.4). Твердження про знак рівності перевіряється безпосередньо. Теорема 3.2 доведена. □

Теорема 3.3 ([8]). *Нехай $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 8$, $\gamma \in (1,\gamma_n]$, $\gamma_n = \sqrt{n}$. Тоді для довільної системи різних точок $A_n = \{a_k\}_{k=1}^{n}$ одиничного кола $|w| = 1$ і будь-якого набору областей, що взаємно не перетинаються, B_0, B_k, $a_0 = 0 \in B_0 \subset \overline{\mathbb{C}}$, $a_k \in B_k \subset \overline{\mathbb{C}}$, $k = \overline{1,n}$, причому області B_k, $k = \overline{1,n}$, – симетричні відносно одиничного кола $|w| = 1$, справедлива нерівність*

$$r^{\gamma}\left(B_0,0\right)\prod_{k=1}^{n} r\left(B_k,a_k\right) \leqslant r^{\gamma}\left(D_0,0\right)\prod_{k=1}^{n} r\left(D_k,d_k\right),$$

де d_k, D_k, $k = \overline{0,n}$, $d_0 = 0$, – є, відповідно, полюси та кругові області квадратичного диференціала (3.4).

Доведення. Спочатку розглянемо випадок, коли $\alpha_0\sqrt{2\gamma} \geqslant 2$, $\alpha_0 := \max\limits_{1\leqslant k\leqslant n} \alpha_k$. Згідно із міркуваннями роботи [20, теорема 5.2.3], маємо

$$r^{\gamma}\left(B_0,0\right)\prod_{k=1}^{n} r\left(B_k,a_k\right) = \prod_{k=1}^{n}\left[r\left(B_0,0\right) r\left(B_k,a_k\right)\right]^{\frac{\gamma}{n}}\left[\prod_{k=1}^{n} r\left(B_k,a_k\right)\right]^{1-\frac{\gamma}{n}}.$$

Із теореми М.О. Лаврентьєва [29], слідує нерівність

$$r\left(B_0,0\right) r\left(B_k,a_k\right) \leqslant 1.$$

Тоді

$$\prod_{k=1}^{n}\left[r\left(B_0,0\right) r\left(B_k,a_k\right)\right]^{\frac{\gamma}{n}} \leqslant 1.$$

Оскільки області B_k, $k = \overline{1,n}$, взаємно не перетинаються, то згідно наслідку 5.1.3 [20], справедлива нерівність

$$\prod_{k=1}^{n} r(B_k,a_k) \leqslant 2^{n}\cdot\prod_{k=1}^{n}\alpha_k.$$

Тоді очевидно, що

$$\left[\prod_{k=1}^{n} r\left(B_k, a_k\right)\right]^{1-\frac{\gamma}{n}} \leqslant \left[2^n \cdot \prod_{k=1}^{n} \alpha_k\right]^{1-\frac{\gamma}{n}}.$$

Легко бачити, що $\alpha_0 = \alpha_{k_0} = \max\limits_{k} \alpha_k$, де k_0 – деяке натуральне число, яке міститься між 1 і n. Використавши нерівність Коші і врахувавши, що $\sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k = 2$, одержуємо такий ланцюжок нерівностей

$$\prod_{k=1}^{n} \alpha_k = \alpha_{k_0} \prod_{k=1, k\neq k_0}^{n} \alpha_k \leqslant$$

$$\leqslant \alpha_{k_0} \left(\frac{1}{n-1} \sum_{k=1, k\neq k_0}^{n} \alpha_k\right)^{n-1} = \alpha_0 \left(\frac{2-\alpha_0}{n-1}\right)^{n-1}.$$

Звідси маємо співвідношення

$$\left[\prod_{k=1}^{n} r\left(B_k, a_k\right)\right]^{1-\frac{\gamma}{n}} \leqslant \left[2^n \alpha_0 \left(\frac{2-\alpha_0}{n-1}\right)^{n-1}\right]^{1-\frac{\gamma}{n}} =$$

$$= \left[2^n \alpha_0 (2-\alpha_0)^{n-1} (n-1)^{-(n-1)}\right]^{1-\frac{\gamma}{n}}.$$

В свою чергу, врахувавши попередні міркування, приходимо до нерівності

$$r^{\gamma}\left(B_0, 0\right) \prod_{k=1}^{n} r\left(B_k, a_k\right) \leqslant \left[2^n \alpha_0 (2-\alpha_0)^{n-1} (n-1)^{-(n-1)}\right]^{1-\frac{\gamma}{n}}.$$

Розглянемо поліном

$$T_n(x) = x(2-x)^{n-1}, \quad x \in (0, 2].$$

$$T_n'(x) = (2-x)^{n-2}(2-nx).$$

$$T_n'(x) = 0 \Longleftrightarrow x = \frac{2}{n} \quad \text{або} \quad x = 2.$$

Звідси слідує, що поліном $T_n(x)$ має єдиний максимум на проміжку $(0, 2]$ в точці $x = \frac{2}{n}$. Таким чином, поліном $T_n(x)$ монотонно зростає на проміжку $\left(0, \frac{2}{n}\right)$ від значення $T_n(0) = 0$ до $T_n\left(\frac{2}{n}\right)$ і монотонно спадає на проміжку $\left(\frac{2}{n}, 2\right)$ від значення $T_n\left(\frac{2}{n}\right)$ до значення $T_n(2) = 0$. Далі, розглянемо γ такі, щоб виконувалась умова $\frac{2}{\sqrt{2\gamma}} \geqslant \frac{2}{n}$, тобто такі γ, при яких виконується нерівність $\gamma \leqslant \frac{n^2}{2}$. Тоді, на проміжку $\frac{2}{\sqrt{2\gamma}} \leqslant x \leqslant 2$ $(\gamma \in (0, \sqrt{n}\,])$ має місце нерівність

$$x(2-x)^{n-1} \leqslant 2^{n-1}\frac{2}{\sqrt{2\gamma}}\left(1-\frac{1}{\sqrt{2\gamma}}\right)^{n-1} = \frac{2^n}{\sqrt{2\gamma}}\left(1-\frac{1}{\sqrt{2\gamma}}\right)^{n-1}. \quad (3.9)$$

Нехай

$$I_n^0(\gamma) = r^{\gamma}\left(B_0^{(0)},0\right)\prod_{k=1}^{n} r\left(B_k^{(0)},a_k^{(0)}\right),$$

де $0\cup\left\{a_k^{(0)}\right\}_{k=1}^{n}$ і $\left\{B_k^{(0)}\right\}_{k=1}^{n}$ є, відповідно, полюсами та круговими областями квадратичного диференціала (3.4). Із вигляду квадратичного диференціала слідує, що полюси $a_k^{(0)} = \omega_k$, $k=\overline{1,n}$, де $\omega_k = e^{\frac{2\pi k i}{n}}$, $k=\overline{0,n-1}$, тобто є коренями n-тої степені із одиниці. Для подальшого вичислимо величину $I_n^0(\gamma)$ при всіх $\gamma\in(1,\sqrt{n}]$ та $n\geqslant 8$. Справедливе наступне твердження.

Лема 3.4. *При умовах теореми 3.3 виконуються рівності*

$$I_n^0(\gamma) = r^{\gamma}\left(B_0^{(0)},0\right)\prod_{k=1}^{n} r\left(B_k^{(0)},\omega_k^{(0)}\right) =$$

$$= \left(\frac{4}{n}\right)^n \frac{\left(\frac{2\gamma}{n^2}\right)^{\frac{\gamma}{n}}}{\left|1-\frac{2\gamma}{n^2}\right|^{\frac{n}{2}+\frac{\gamma}{n}}}\left|\frac{n-\sqrt{2\gamma}}{n+\sqrt{2\gamma}}\right|^{\sqrt{2\gamma}}. \quad (3.10)$$

Доведення. Система кругових областей квадратичного диференціала (3.4) володіє n-кратною симетрією обертання відносно початку координат, а також симетрією відносно кожного променя $l_k = \left\{w : \arg w = \frac{2\pi k}{n}\right\}$, $k=\overline{0,n-1}$. Нехай $P_k := \{w : \arg\omega_k < \arg w < \arg\omega_{k+1}\}$. Застосуємо розділяюче перетворення до системи кругових областей квадратичного диференціала (3.4) за допомогою системи функцій $\zeta = \{\pi_k(w)\}_{k=1}^{n}$, де $\pi_k(w) = (\overline{\omega}_k\cdot w)^{\frac{n}{2}}$ і вітка функції $t=\zeta^{\frac{n}{2}}$ вибрана так, що $\zeta^{\frac{n}{2}} = x^{\frac{n}{2}} > 0$, $\zeta = x$, якщо $x>0$. У випадку системи кругових областей квадратичного диференціала (3.4), як було показано вище, $a_k^{(0)} = \omega_k$, $k=\overline{1,n}$, $a_0^{(0)} = 0$.

Нехай $\Omega_k^{(1)}$, $k=\overline{1,n}$, позначає область площини $\mathbb{C}_\zeta$, отриману в результаті об'єднання зв'язної компоненти множини $\pi_k(B_k^{(0)}\bigcap\overline{P}_k)$, яка містить точку $\pi_k(\omega_k)$, зі своїм симетричним відображенням відносно дійсної осі. Позначимо через $\Omega_k^{(2)}$, $k=\overline{1,n}$, область площини

$\mathbb{C}_\zeta$, яка отримана в результаті об'єднання зв'язної компоненти множини $\pi_k(B_{k+1}^{(0)} \bigcap \overline{P}_k)$, яка містить точку $\pi_k(\omega_{k+1})$, зі своїм симетричним відображенням відносно дійсної осі. Відмітимо, що $B_{n+1}^{(0)} := B_1^{(0)}$, $\pi_n(\omega_{n+1}) := \pi_n(\omega_1)$. Крім того, позначимо через $\Omega_k^{(0)}$ область площини $\mathbb{C}_\zeta$, отриману в результаті об'єднання зв'язної компоненти множини $\pi_k(B_0^{(0)} \bigcap \overline{P}_k)$, яка містить точку $\zeta = 0$, зі своїм симетричним відображенням відносно дійсної осі. З визначення функцій π_k, слідує, що

$$|\pi_k(w) - \omega_k^{(1)}| \sim \frac{n}{2} \cdot |w - \omega_k|, \quad w \to \omega_k, \quad w \in \overline{P_k},$$

$$|\pi_k(w) - \omega_k^{(2)}| \sim \frac{n}{2} \cdot |w - \omega_{k+1}|, \quad w \to \omega_{k+1}, \quad w \in \overline{P_k},$$

$$|\pi_k(w)| \sim |w|^{\frac{n}{2}}, \quad w \to 0, \quad w \in \overline{P_k}.$$

Відмітимо, що в силу вище описаних симетрій системи кругових областей $B_k^{(0)}$ квадратичного диференціала (3.4) і властивостей розділяючого перетворення слідує, що всі області $\Omega_k^{(1)}$, $k = \overline{1,n}$, співпадають при всіх k з однією і тією ж областю Ω_1. Точно так, всі $\Omega_k^{(2)}$, $k = \overline{1,n}$, співпадають при всіх k з однією і тією ж областю Ω_2. І, відповідно, області $\Omega_k^{(0)}$, $k = \overline{1,n}$, співпадають при всіх k з одною і тою ж областю Ω_0, причому область Ω_1 симетрична області Ω_2 відносно уявної осі, а область Ω_0 володіє симетрією відносно дійсної осі. Тоді, використавши властивості розділяючого перетворення і симетрії областей $B_k^{(0)}$, одержуємо

$$r\left(B_0^{(0)}, 0\right) = \left[\prod_{k=1}^{n} r^{\frac{4}{n^2}}\left(\Omega_k^{(0)}, 0\right)\right]^{\frac{1}{2}},$$

$$r\left(B_k^{(0)}, \omega_k^{(0)}\right) = \left[\frac{2}{n} r\left(\Omega_k^{(1)}, 1\right) \cdot \frac{2}{n} r\left(\Omega_k^{(2)}, -1\right)\right]^{\frac{1}{2}}, \quad k = \overline{1,n}.$$

Тоді, маємо

$$r^{\gamma}\left(B_0^{(0)}, 0\right) \prod_{k=1}^{n} r\left(B_k^{(0)}, \omega_k^{(0)}\right) =$$

$$= \left[\prod_{k=1}^{n} r^{\frac{4\gamma}{n^2}}\left(\Omega_k^{(0)}, 0\right)\right]^{\frac{1}{2}} \left[\prod_{k=1}^{n} \frac{4}{n^2} r\left(\Omega_k^{(1)}, 1\right) \cdot r\left(\Omega_k^{(2)}, -1\right)\right]^{\frac{1}{2}} =$$

$$= \left(\frac{2}{n}\right)^{n} \left[\prod_{k=1}^{n} r^{\frac{4\gamma}{n^2}}\left(\Omega_k^{(0)}, 0\right) r\left(\Omega_k^{(1)}, 1\right) r\left(\Omega_k^{(2)}, -1\right)\right]^{\frac{1}{2}} =$$

$$= \left(\frac{2}{n}\right)^n \left[r^{\frac{4\gamma}{n^2}}\left(\Omega_0, 0\right) r\left(\Omega_1, 1\right) r\left(\Omega_2, -1\right)\right]^{\frac{n}{2}} =$$

$$= \left(\frac{2}{n}\right)^n \left[r^{\frac{2\gamma}{n^2}}\left(\Omega_0, 0\right) r^{\frac{2\gamma}{n^2}}\left(\Omega_\infty, \infty\right) r\left(\Omega_1, 1\right) r\left(\Omega_2, -1\right)\right]^{\frac{n}{2}} =$$

$$= \left(\frac{2}{n}\right)^n \left(\frac{2^{\frac{8\gamma}{n^2}+6}\left(\frac{8\gamma}{n^2}\right)^{\frac{4\gamma}{n^2}}}{\left(2-\frac{2\sqrt{2\gamma}}{n}\right)^{\frac{1}{2}\left(2-\frac{2\sqrt{2\gamma}}{n}\right)^2}\left(2+\frac{2\sqrt{2\gamma}}{n}\right)^{\frac{1}{2}\left(2+\frac{2\sqrt{2\gamma}}{n}\right)^2}}\right)^{\frac{n}{4}},$$

де $\Omega_\infty = \left\{\zeta \in \overline{\mathbb{C}} : \frac{1}{\zeta} \subset \Omega_0\right\}$ і $r\left(\Omega_0, 0\right) = r\left(\Omega_\infty, \infty\right)$.

Виконавши нескладні перетворення, отримуємо

$$A = \left(2-\frac{2\sqrt{2\gamma}}{n}\right)^{\frac{1}{2}\left(2-\frac{2\sqrt{2\gamma}}{n}\right)^2} = 2^{2\left(1-\frac{\sqrt{2\gamma}}{n}\right)^2}\left(1-\frac{\sqrt{2\gamma}}{n}\right)^{2\left(1-\frac{\sqrt{2\gamma}}{n}\right)^2},$$

$$B = \left(2+\frac{2\sqrt{2\gamma}}{n}\right)^{\frac{1}{2}\left(2+\frac{2\sqrt{2\gamma}}{n}\right)^2} = 2^{2\left(1+\frac{\sqrt{2\gamma}}{n}\right)^2}\left(1+\frac{\sqrt{2\gamma}}{n}\right)^{2\left(1+\frac{\sqrt{2\gamma}}{n}\right)^2}.$$

$$M = \left(1-\frac{\sqrt{2\gamma}}{n}\right)^{2\left(1-\frac{\sqrt{2\gamma}}{n}\right)^2} = \left(1-\frac{\sqrt{2\gamma}}{n}\right)^{2-\frac{4\sqrt{2\gamma}}{n}+\frac{4\gamma}{n^2}},$$

$$N = \left(1+\frac{\sqrt{2\gamma}}{n}\right)^{2\left(1+\frac{\sqrt{2\gamma}}{n}\right)^2} = \left(1+\frac{\sqrt{2\gamma}}{n}\right)^{2+\frac{4\sqrt{2\gamma}}{n}+\frac{4\gamma}{n^2}}.$$

Звідси слідує, що

$$MN = \left(1-\frac{2\gamma}{n^2}\right)^{2\left(1+\frac{2\gamma}{n^2}\right)}\left(\frac{1+\frac{\sqrt{2\gamma}}{n}}{1-\frac{\sqrt{2\gamma}}{n}}\right)^{\frac{4\sqrt{2\gamma}}{n}},$$

і

$$AB = 2^{4\left(1+\frac{2\gamma}{n^2}\right)}MN = 2^{4\left(1+\frac{2\gamma}{n^2}\right)}\left(1-\frac{2\gamma}{n^2}\right)^{2\left(1+\frac{2\gamma}{n^2}\right)}\left(\frac{1+\frac{\sqrt{2\gamma}}{n}}{1-\frac{\sqrt{2\gamma}}{n}}\right)^{\frac{4\sqrt{2\gamma}}{n}}.$$

Таким чином,

$$I_n^0(\gamma) = \left(\frac{2}{n}\right)^n \left(\frac{2^{\frac{8\gamma}{n^2}+6} \left(\frac{2\sqrt{2\gamma}}{n}\right)^{\frac{8\gamma}{n^2}}}{2^{\frac{4\gamma}{n^2}+4} \left(1-\frac{2\gamma}{n^2}\right)^{\left(2+\frac{4\gamma}{n^2}\right)}} \left(\frac{1-\frac{\sqrt{2\gamma}}{n}}{1+\frac{\sqrt{2\gamma}}{n}}\right)^{\frac{4\sqrt{2\gamma}}{n}} \right)^{\frac{n}{4}}.$$

Виконавши нескладні перетворення, одержуємо справедливість леми 3.4. Лема 3.4 доведена. □

Нехай

$$\Lambda_n(\gamma) = \frac{I_n(\gamma)}{I_n^0(\gamma)} = \frac{r^\gamma(B_0, 0) \prod\limits_{k=1}^{n} r(B_k, a_k)}{r^\gamma\left(B_0^{(0)}, 0\right) \prod\limits_{k=1}^{n} r\left(B_k^{(0)}, a_k^{(0)}\right)}.$$

Для систем областей, що взаємно не перетинаються, B_k, $k = \overline{0, n}$, справедлива наступна нерівність (див. також теорему 2.9)

$$r^\gamma(B_0, 0) \prod_{k=1}^{n} r(B_k, a_k) \leqslant n^{-\frac{\gamma}{2}} \left(\prod_{k=1}^{n} r(B_k, a_k)\right)^{1-\frac{\gamma}{n}}.$$

Тоді, врахувавши вище наведені міркування, при умові

$$\alpha_0\sqrt{2\gamma} \geqslant 2, \quad \alpha_0 := \max_{1\leqslant k\leqslant n} \alpha_k,$$

маємо

$$\Lambda_n(\gamma) \leqslant \frac{n^{-\frac{\gamma}{2}} \left(2^n \alpha_0 (2-\alpha_0)^{n-1} (n-1)^{-(n-1)}\right)^{1-\frac{\gamma}{n}}}{\left(\frac{4}{n}\right)^n \left(\frac{2\gamma}{n^2}\right)^{\frac{\gamma}{n}} \left|1-\frac{2\gamma}{n^2}\right|^{-\frac{n}{2}-\frac{\gamma}{n}} \left|\frac{n-\sqrt{2\gamma}}{n+\sqrt{2\gamma}}\right|^{\sqrt{2\gamma}}} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{n^{-\frac{\gamma}{2}} \left(2^n \frac{2^n}{\sqrt{2\gamma}} (1-\frac{1}{\sqrt{2\gamma}})^{n-1} (n-1)^{-(n-1)}\right)^{1-\frac{\gamma}{n}}}{\left(\frac{4}{n}\right)^n \left(\frac{2\gamma}{n^2}\right)^{\frac{\gamma}{n}} \left|1-\frac{2\gamma}{n^2}\right|^{-\frac{n}{2}-\frac{\gamma}{n}} \left|\frac{n-\sqrt{2\gamma}}{n+\sqrt{2\gamma}}\right|^{\sqrt{2\gamma}}} =$$

$$= n^{-\frac{\gamma}{2}} 2^{-2\gamma} \left(\frac{1}{\sqrt{2\gamma}}\right)^{1+\frac{\gamma}{n}} \left(1-\frac{1}{\sqrt{2\gamma}}\right)^{n-1-\gamma+\frac{\gamma}{n}} \left(\frac{1}{n-1}\right)^{n-1-\gamma+\frac{\gamma}{n}} \times$$

$$\times n^{1+\gamma+\frac{\gamma}{n}} \cdot \left(1-\frac{2\gamma}{n^2}\right)^{\frac{n}{2}+\frac{\gamma}{n}} \left(\frac{1+\frac{\sqrt{2\gamma}}{n}}{1-\frac{\sqrt{2\gamma}}{n}}\right)^{\sqrt{2\gamma}}.$$

І, остаточно, отримуємо

$$\Lambda_n(\gamma) \leqslant n^{-\frac{\gamma}{2}} \left(\frac{n}{4}\right)^{\gamma+1} \left(1-\frac{1}{\sqrt{2\gamma}}\right)^{n-1-\gamma+\frac{\gamma}{n}} \left(\frac{4}{\sqrt{2\gamma}}\right) \left(\frac{n}{\sqrt{2\gamma}}\right)^{\frac{\gamma}{n}} \times$$

$$\times\left(1-\frac{2\gamma}{n^2}\right)^{\frac{n}{2}+\frac{\gamma}{n}}\left(\frac{1+\frac{\sqrt{2\gamma}}{n}}{1-\frac{\sqrt{2\gamma}}{n}}\right)^{\sqrt{2\gamma}}\left(\frac{n}{n-1}\right)^{n-1-\gamma+\frac{\gamma}{n}}.$$

Таким чином, нам вдалося отримати оцінку величини $\Lambda_n(\gamma)$ через п'ять елементарних функцій, які залежать від n і γ. Введемо позначення

$$\Lambda_n(\gamma)\leqslant\prod_{k=1}^{5}f_k(n),$$

де

$$f_1(n)=n^{-\frac{\gamma}{2}}\left(\frac{n}{4}\right)^{\gamma+1}\left(1-\frac{1}{\sqrt{2\gamma}}\right)^{n-1-\gamma+\frac{\gamma}{n}},$$

$$f_2(n)=\left(\frac{4}{\sqrt{2\gamma}}\right)\left(\frac{n}{\sqrt{2\gamma}}\right)^{\frac{\gamma}{n}},\quad f_3(n)=\left(1-\frac{2\gamma}{n^2}\right)^{\frac{n}{2}+\frac{\gamma}{n}},$$

$$f_4(n)=\left(\frac{1+\frac{\sqrt{2\gamma}}{n}}{1-\frac{\sqrt{2\gamma}}{n}}\right)^{\sqrt{2\gamma}},\quad f_5(n)=\left(\frac{n}{n-1}\right)^{n-1-\gamma\frac{n-1}{n}}.$$

Спочатку дослідимо поведінку величини $\Lambda_n(\gamma)$ при $\gamma=n^{\frac{1}{2}}$. В цьому випадку, маємо таку нерівність

$$\Lambda_n\left(n^{\frac{1}{2}}\right)\leqslant\prod_{k=1}^{5}f_k(n),$$

де

$$f_1(n)=n^{-\frac{1}{2}\sqrt{n}}\left(\frac{n}{4}\right)^{\sqrt{n}+1}\left(1-\frac{1}{\sqrt{2n^{\frac{1}{2}}}}\right)^{n-1-n^{\frac{1}{2}}+n^{-\frac{1}{2}}},$$

$$f_2(n)=\left(\frac{4}{\sqrt{2n^{\frac{1}{2}}}}\right)\left(\frac{n}{\sqrt{2n^{\frac{1}{2}}}}\right)^{n^{-\frac{1}{2}}},\quad f_3(n)=\left(1-2n^{-\frac{3}{2}}\right)^{\frac{n}{2}+\frac{1}{\sqrt{n}}},$$

$$f_4(n)=\left(\frac{1+\sqrt{2}n^{-\frac{3}{4}}}{1-\sqrt{2}n^{-\frac{3}{4}}}\right)^{\sqrt{2}n^{\frac{1}{4}}},\quad f_5(n)=\left(\frac{n}{n-1}\right)^{n-1-n^{\frac{1}{2}}+n^{-\frac{1}{2}}}.$$

Тепер дослідимо кожну функцію $f_k(n)$, $k=\overline{1,5}$, за допомогою стандартних методів математичного аналізу.

Аналіз показує, що функція $f_1(n)$ монотонно спадає на проміжку $n\geqslant 17$ (див. Рис. 3.2), тому справедлива нерівність

$$f_1(n)<f_1(17)\leqslant 0,026888,\quad n\geqslant 17.$$

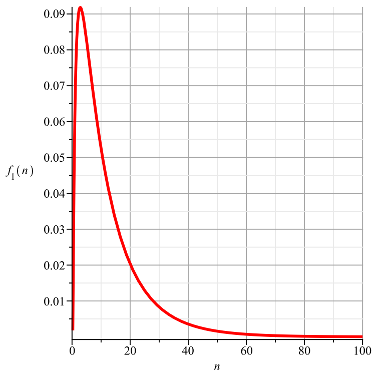

Рис. 3.2. Графік функції $f_1(n)$

Функція $f_2(n)$ також монотонно спадає на проміжку $n \geqslant 8$. Таким чином,

$$f_2(n) < f_2(8) \leqslant 2,582410, \quad n \geqslant 8.$$

Очевидно, що

$$f_3(n) < f_3(8) \leqslant 1, \quad n \geqslant 8.$$

Функцію $f_4(n)$ представимо наступним чином

$$f_4(n) =$$

$$= \left(1+\sqrt{2}n^{-\frac{3}{4}}\right)^{\left(\frac{n^{\frac{3}{4}}}{\sqrt{2}}\right)\left(\sqrt{2}n^{-\frac{3}{4}}\right)\sqrt{2}n^{\frac{1}{4}}} \left(1-\sqrt{2}n^{-\frac{3}{4}}\right)^{\left(-\frac{n^{\frac{3}{4}}}{\sqrt{2}}\right)\left(\sqrt{2}n^{-\frac{3}{4}}\right)\sqrt{2}n^{\frac{1}{4}}}.$$

Оскільки

$$\left(1+\sqrt{2}n^{-\frac{3}{4}}\right)^{\left(\frac{n^{\frac{3}{4}}}{\sqrt{2}}\right)} < e \quad \text{при} \quad n \in \mathbb{N},$$

а

$$\left(1-\sqrt{2}n^{-\frac{3}{4}}\right)^{\left(-\frac{n^{\frac{3}{4}}}{\sqrt{2}}\right)} < 3 \quad \text{при} \quad n \geqslant 17,$$

тоді

$$f_4(n) \leqslant (3e)^{2n^{-\frac{1}{2}}}.$$

Таким чином, $y_4(n)$ спадає на всій області визначення і

$$f_4(n) < f_4(17) \leqslant 2,767588, \quad n \geqslant 17.$$

Для функції $f_5(n)$ справедливе наступне співвідношення

$$f_5(n) = \left(\frac{n}{n-1}\right)^{n-1-n^{\frac{1}{2}}+n^{-\frac{1}{2}}} < \left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1} \leqslant 3, \quad n \geqslant 8.$$

Тоді, підсумувавши все вище сказане, отримуємо

$$\Lambda_n\left(\sqrt{n}\right) = \prod_{k=1}^{6} f_k(n) \leqslant$$

$$\leqslant 0,026888 \cdot 2,582410 \cdot 1 \cdot 2,767588 \cdot 3 \approx 0,6 < 1,$$

тобто

$$\Lambda_n\left(\sqrt{n}\right) < 1 \quad \text{для } n \geqslant 17.$$

З іншої сторони, безпосередні обчислення показують, що $\Lambda_n\left(\sqrt{n}\right) < 1$ для $n \in [8, 16]$ (див. таблицю нижче).

n	$f_1(n)$	$f_2(n)$	$f_3(n)$	$f_4(n)$	$f_5(n)$	$\Lambda_n\left(\sqrt{n}\right)$
8	0,063573	2,582410	0,668390	4,298391	1,829873	0,863087
9	0,057824	2,519841	0,689369	3,926708	1,874189	0,739222
10	0,052537	2,461040	0,706571	3,642385	1,912447	0,636378
11	0,047710	2,406071	0,721019	3,417261	1,945912	0,550384
12	0,043324	2,354774	0,733385	3,234174	1,975511	0,478027
13	0,039347	2,306895	0,744133	3,082056	2,001935	0,416755
14	0,035748	2,262157	0,753594	2,953443	2,025716	0,364602
15	0,032493	2,220283	0,762012	2,843112	2,047267	0,319984
16	0,029550	2,181015	0,769567	2,747296	2,066917	0,281638

Таким чином, підсумувавши всі попередні міркування, одержуємо, що $\Lambda_n\left(\sqrt{n}\right) < 1$ при $n \geqslant 8$ і $\alpha_0\sqrt{2\gamma} \geqslant 2$.

Далі, необхідно показати, що справедлива нерівність $\Lambda_n(\gamma) < 1$ при $n \geqslant 8$, $\gamma \in (1, \sqrt{n}\,]$ і $\alpha_0\sqrt{2\gamma} \geqslant 2$. Для цього доведемо наступне твердження.

Лема 3.5. *При кожному фіксованому $n \geqslant 8$ функція*

$$n^{-\frac{\gamma}{2}}\left(\frac{4^n}{\sqrt{2\gamma}}\left(1-\frac{1}{\sqrt{2\gamma}}\right)^{n-1}(n-1)^{-(n-1)}\right)^{1-\frac{\gamma}{n}}$$

монотонно зростає по γ на проміжку $(1, \sqrt{n}\,]$.

Доведення. Мають місце наступні співвідношення

$$\ln\left(m_n(\gamma)\right) = -\frac{\gamma}{2}\ln n + \left(1-\frac{\gamma}{n}\right) \times$$

$$\times\left(n\ln 4 - \frac{1}{2}\ln 2 - \frac{1}{2}\ln\gamma + (n-1)\ln\left(1-\frac{1}{\sqrt{2\gamma}}\right) - (n-1)\ln(n-1)\right),$$

$$\left(\ln\left(m_n(\gamma)\right)\right)'_\gamma =$$

$$= -\frac{1}{2}\ln n - \ln 4 + \frac{1}{2n}\ln 2 + \frac{1}{2n}\ln\gamma - \frac{n-1}{n}\ln\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2\gamma}}\right) +$$

$$+\frac{n-1}{n}\ln(n-1) + \left(1 - \frac{\gamma}{n}\right)\frac{1}{2\gamma}\left(\frac{n-1}{\sqrt{2\gamma}-1} - 1\right).$$

Оскільки справедливі такі нерівності

$$0 < -\frac{1}{2}\ln 8 + \ln\left(\frac{1}{4}\right) + \frac{7}{8}\ln 7 < -\frac{1}{2}\ln n + \ln\left(\frac{1}{4}\right) + \frac{n-1}{n}\ln(n-1)$$

і

$$-\frac{n-1}{n}\ln\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2\gamma}}\right) \geqslant 0, \quad \left(1 - \frac{\gamma}{n}\right)\frac{1}{2\gamma}\left(\frac{n-1}{\sqrt{2\gamma}-1} - 1\right) \geqslant 0,$$

одержуємо, що $m_n(\gamma)$ монотонно зростає при вказаних в лемі параметрах n і γ. Лема 3.5 доведена. □

Лема 3.6. *При кожному фіксованому $n \geqslant 8$ функціонал $I_n^{(0)}(\gamma)$ монотонно спадає по γ на проміжку $(1, \sqrt{n}\,]$.*

Доведення. В лемі 3.4 показано, що величина $I_n^0(\gamma)$ задовольняє таку рівність

$$I_n^0(\gamma) = \left(\frac{4}{n}\right)^n \frac{\left(\frac{2\gamma}{n^2}\right)^{\frac{\gamma}{n}}}{\left(1 - \frac{2\gamma}{n^2}\right)^{\frac{n}{2}+\frac{\gamma}{n}}}\left(\frac{n-\sqrt{2\gamma}}{n+\sqrt{2\gamma}}\right)^{\sqrt{2\gamma}}.$$

Так як

$$\ln I_n^0(\gamma) = n\ln\frac{4}{n} + \frac{\gamma}{n}\ln\frac{2\gamma}{n^2} - \left(\frac{n}{2} + \frac{\gamma}{n}\right)\ln\left(1 - \frac{2\gamma}{n^2}\right) + \sqrt{2\gamma}\ln\left(\frac{n-\sqrt{2\gamma}}{n+\sqrt{2\gamma}}\right),$$

тоді

$$\left(\ln I_n^0(\gamma)\right)'_\gamma = \frac{1}{n}\ln\frac{2\gamma}{n^2 - 2\gamma} + \frac{1}{\sqrt{2\gamma}}\ln\left(\frac{1 - \frac{\sqrt{2\gamma}}{n}}{1 + \frac{\sqrt{2\gamma}}{n}}\right).$$

Позначимо $\frac{\sqrt{2\gamma}}{n} = x$, і отримуємо, що

$$\gamma = \frac{1}{2}n^2x^2, \quad \sqrt{\gamma} = \frac{nx}{\sqrt{2}}, \quad \frac{\sqrt{2}}{n} \leqslant x \leqslant \sqrt{2}n^{-\frac{3}{4}}.$$

Використавши вказані позначення, перетворимо вираз логарифмічної похідної $I_n^0(\gamma)$ наступним чином

$$\left(\ln I_n^0(\gamma)\right)'_\gamma = \frac{2}{n}\ln x - \frac{1}{n}\ln(1 - x^2) + \frac{1}{nx}\ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right).$$

Далі використавши відомі формули

$$\ln(1 - x) = -x - \frac{x^2}{2} - \ldots - \frac{x^n}{n} - \ldots,$$

$$\ln\frac{1-x}{1+x}=-2x\left(1+\frac{1}{3}x^2+\frac{1}{5}x^4+\ldots+\frac{1}{2k+1}x^{2k}+\ldots\right),$$

отримаємо, що

$$\left(\ln I_n^0(\gamma)\right)'_\gamma=\frac{2}{n}\ln x+\frac{1}{n}\left(x^2+\frac{x^4}{2}+\ldots+\frac{x^{2n}}{n}+\ldots\right)-$$

$$-\frac{2}{n}\left(1+\frac{1}{3}x^2+\frac{1}{5}x^4+\ldots+\frac{1}{2k+1}x^{2k}+\ldots\right).$$

Звідси легко бачити, що справедливе таке твердження

$$\left(\ln I_n^0(\gamma)\right)'_\gamma=\frac{2}{n}\ln x-\frac{2}{n}+$$

$$+\frac{x^2}{n}\left(1-\frac{2}{3}\right)+\frac{x^4}{n}\left(\frac{1}{2}-\frac{2}{5}\right)+\ldots+\frac{x^{2n}}{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{2}{2k+1}\right)+\ldots.$$

Врахувавши, що

$$n\geqslant 8,\quad \frac{\sqrt{2}}{n}\leqslant x\leqslant\sqrt{2}n^{-\frac{3}{4}},\quad \frac{1}{k}-\frac{2}{2k+1}=\frac{1}{k(2k+1)}\leqslant\frac{1}{3},\quad k\geqslant 1,$$

маємо

$$\left(\ln I_n^0(\gamma)\right)'_\gamma\leqslant-\frac{2}{n}+\frac{2}{n}\ln x+\frac{1}{8}\left(\frac{1}{3}x^2+\frac{1}{3}x^4+\ldots+\frac{1}{3}x^{2k}+\ldots\right)=$$

$$=-\frac{2}{n}+\frac{2}{n}\ln x+\frac{1}{24}\left(\frac{x^2}{1-x^2}\right).$$

В силу монотонного зростання функції $\dfrac{x^2}{1-x^2}$ на проміжку $(0,1)$ для $x\in\left[\frac{\sqrt{2}}{n},\sqrt{2}n^{-\frac{3}{4}}\right]$, справедливі нерівності

$$\left(\ln I_n^0(\gamma)\right)'_\gamma\leqslant-\frac{2}{n}\left(1+\ln\frac{1}{x}\right)+\frac{1}{24}\left(\frac{x^2}{1-x^2}\right)\leqslant$$

$$\leqslant-\frac{2}{n}\left(1+\ln\frac{n^{\frac{3}{4}}}{\sqrt{2}}\right)+\frac{1}{24}\left(\frac{2n^{-\frac{3}{2}}}{1-2n^{-\frac{3}{2}}}\right)\leqslant$$

$$\leqslant-\frac{2}{n}\left(1+\ln\frac{n^{\frac{3}{4}}}{\sqrt{2}}\right)+\frac{1}{24}\frac{2}{n^{\frac{3}{2}}}\left(\frac{1}{\frac{n^{\frac{3}{2}}}{2}-1}\right)\leqslant$$

$$\leqslant -\frac{2}{n}\left(0,65+\frac{3}{4}\ln n-\frac{1}{24}\frac{1}{n^{\frac{1}{2}}}\frac{1}{\frac{n^{\frac{3}{2}}}{2}-1}\right)\leqslant -\frac{2}{n}\left(0,65-\frac{1}{n^{\frac{1}{2}}}\right),$$

оскільки

$$\frac{1}{24}\frac{1}{\frac{n^{\frac{3}{2}}}{2}-1}<1, \quad n\geqslant 8.$$

Очевидно, що

$$\left(0,65-\frac{1}{n^{\frac{1}{2}}}\right)>0 \quad \text{при всіх} \quad n\geqslant 8.$$

Таким чином, $I_n^0(\gamma)$ монотонно спадає по γ на всьому проміжку $\gamma \in (1, \sqrt{n}\,]$. Лема 3.6 доведена. □

Взявши до уваги результати леми 3.5 і леми 3.6, маємо, що справедливі такі співвідношення

$$\Lambda_n(\gamma)=\frac{I_n(\gamma)}{I_n^0(\gamma)}<\frac{I_n(\sqrt{n})}{I_n^0\left(\sqrt{n}\right)}=\Lambda_n\left(\sqrt{n}\right)<1.$$

Таким чином, при $n\geqslant 8$, $\gamma\in(1,\sqrt{n}\,]$ і $\alpha_0\sqrt{2\gamma}\geqslant 2$, виконується нерівність

$$I_n(\gamma_n)<I_n^0(\gamma_n),$$

а це означає, що для вказаних параметрів екстремальних конфігурацій не існує.

При умові $\alpha_0\sqrt{2\gamma}<2$ і $n\geqslant 8$ твердження теореми 3.3 слідує із теореми 3.2. Твердження про знак рівності перевіряється безпосередньо. Теорема 3.3 доведена. □

Для $n=\overline{2,7}$ поки що не відомо жодних результатів при $\gamma>1$. Як показав досвід дослідження проблеми 3.1, найбільші складності виникають при $n=2$ і $n=3$ (див. [10]).

Література

[1] A. Bakhtin, L. Vyhivska. Estimates of inner radii of symmetric non-overlapping domains. *J. Math. Sci.*, 241(1):1–18, 2019.

[2] A. Bakhtin, L. Vyhivska, I. Denega. Inequality for the inner radii of symmetric non-overlapping domains. *Bull. Soc. Sci. Lett. Lodz, Ser. Rech. Deform.*, 68(2):37–44, 2018.

[3] A. K. Bakhtin. Extremal decomposition of the complex plane with restrictions for free poles. *J. Math. Sci.*, 231(1):1–15, 2018.

[4] A. K. Bakhtin. Separating transformation and extremal problems on nonoverlapping simply connected domains. *J. Math. Sci.*, 234(1):1 – 13, 2018.

[5] A. K. Bakhtin, I. V. Denega. Addendum to a theorem on extremal decomposition of the complex plane. *Bull. Soc. Sci. Lett. Lodz, Ser. Rech. Deform.*, 62(2):83–92, 2012.

[6] A. K. Bakhtin, I. V. Denega. Inequalitiesfor the inner radii of nonoverlapping domains. *Ukr. Math. J.*, 71:1138–1145, 2019.

[7] A. K. Bakhtin, I. V. Denega. Weakened problem on extremal decomposition of the complex plane. *Matematychni Studii*, 51(1):35–40, 2019.

[8] A. K. Bakhtin, I. V. Denega. Extremal decomposition of the complex plane with free poles. *J. Math. Sci.*, 246(1):1–17, 2020.

[9] A. K. Bakhtin, I. V. Denega. Extremal decomposition of the complex plane with free poles II. *J. Math. Sci.*, 246(5):602–616, 2020.

[10] A. K. Bakhtin, L. V. Vyhivska, I. V. Denega. Problem of extreme decomposition for a complex plane with free poles on a circle. *Ukr. Math. J.*, 72(12):1847–1871, 2021.

[11] A. K. Bakhtin, Y. V. Zabolotnyi. Estimates of a product of the inner radii of nonoverlapping domains. *J. Math. Sci.*, 221(5):623–629, 2017.

[12] V. N. Dubinin. *Condenser capacities and symmetrization in geometric function theory.* Birkhäuser/Springer, Basel, 2014.

[13] P. Duren. *Univalent functions.* Haidelberg and New York: Springer-Verlag, 1983.

[14] I. Y. Dvorak. Estimates of the products of inner radii for partially nonoverlapping domains of the complex plane. *J. Math. Sci.*, 241(1):36–46, 2019.

[15] G. M. Goluzin. *Geometric theory of functions of a complex variable.* Amer. Math. Soc. Providence, R.I., 1969.

[16] N. S. Landkof. *Foundations of modern potential theory.* Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 1972.

[17] K. Strebel. *Quadratic differentials.* Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1984.

[18] Y. V. Zabolotnyi, L. V. Vyhivska. On a product of the inner radii of symmetric multiply connected domains. *J. Math. Sci.*, 231(1):101–109, 2018.

[19] А. К. Бахтин, Г. П. Бахтина, И. В. Денега. Экстремальное разбиение комплексной плоскости с фиксированными полюсами. *Зб. праць Ін-ту математики НАН України*, 14(1):34–38, 2017.

[20] А. К. Бахтин, Г. П. Бахтина, Ю. Б. Зелинский. *Тополого-алгебраические структуры и геометрические методы в комплексном анализе.* Праці ін-ту мат-ки НАН Укр., 2008.

[21] Дж. А. Дженкинс. *Однолистные функции и конформные отображения.* М.: Изд-во иностр. лит., 1962.

[22] В. Н. Дубинин. Разделяющее преобразование областей и задачи об экстремальном разбиении. *Зап. науч. сем. Ленингр. отд-ния Мат. ин-та АН СССР*, 168:48–66, 1988.

[23] В. Н. Дубинин. Метод симметризации в геометрической теории функций комплексного переменного. *Успехи мат. наук.*, 49 (295)(1):3–76, 1994.

[24] Л. В. Ковалев. К задаче об экстремальном разбиении со свободными полюсами на окружности. *Дальневосточный матем. сборник*, (2):96–98, 1996.

[25] Л. В. Ковалев. О внутренних радиусах симметричных неналегающих областей. *Изв. вузов. матем.*, (6):82–87, 2000.

[26] Л. В. Ковалев. О трех непересекающихся областях. *Дальневосточный мат. журнал*, 1(1):3–7, 2000.

[27] Л. И. Колбина. Конформное отображение единичного круга на неналегающие области. *Вестник Ленингр. ун-та*, 5:37–43, 1955.

[28] Г. В. Кузьмина. Метод экстремальной метрики в задачах о максимуме произведения степеней конформных радиусов неналегающих областей приналичии свободных параметров. *Зап. научн. сем. ПОМИ*, 302:52–67, 2003.

[29] М. А. Лаврентьев. К теории конформных отображений. *Тр. физ.-мат. ин-та АН СССР*, 5:159–245, 1934.

[30] Г. Полиа, Г. Сеге. *Изопериметрические неравенства в математической физике.* М.: Физматгиз, 1962.

І. В. Денега

Інститут математики НАН України, м. Київ

Email: iradenega@gmail.com

ORCID: orcid.org/0000-0001-8122-4257

Збірник праць Ін-ту математики НАН України (2022) Т. 19, № 1, 135–152

Оцінки добутків деяких функціоналів на класах функцій без спільних значень

Я. В. Заболотний

Присвячується пам'яті професора Олександра Бахтіна

Abstract. In this paper two problems of geometric function theory about the extreme partition of the complex plane are considered, namely, about finding the maximum of two functionals on classes of functions without common values. The exact solutions to this problem are currently known only for some partial cases. In this paper we find estimates that can be applied in various extreme problems of geometric function theory.

Анотація. В роботі розглядаються дві відомі відкриті проблеми геометричної теорії функцій про екстремальне розбиття комплексної площини, а саме: про знаходження максимуму двох функціоналів на класах функцій без спільних значень. Точні розв'язки даних проблем на даний момент відомі тільки для окремих частинних випадків. В даній роботі знайдено оцінки, які можуть бути застосовані в різних екстремальних задачах геометричної теорії функцій.

1. Вступ

Нехай $\mathbb{N}$ і $\mathbb{R}$ – множини натуральних і дійсних чисел, відповідно, $\mathbb{C}$ – комплексна площина, і нехай $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C}\bigcup\{\infty\}$ – розширена комплексна площина, $\mathbb{R}^+ = (0, \infty)$ – додатна дійсна піввісь, $U = \{z : |z| < 1\}$ – відкритий одиничний круг.

Нехай функція $f(z)$, регулярна в крузі U, однолисто відображає даний круг на область $B \subset \overline{\mathbb{C}}$ так, що $f(0) = a$, де $a \in B$ і $a \neq \infty$.

Означення 1.1. *Величина $|f'(0)|$ називається конформним радіусом області B в точці a.*

2010 Mathematics Subject Classification: 57R30
УДК 517.54
Ключові слова: конформний радіус області, функції без спільних значень

Конформний радіус області B в точці a будемо позначати $R(B, a)$.

Якщо $a = \infty$, то існує єдина функція $f(z)$, регулярна в області B, за винятком точки a, яка в околі даної точки розкладається в ряд Лорана вигляду

$$f(z) = z + c_0 + c_1 z^{-1} + \dots$$

і яка однолисто відображає дану область на область $w > R$. Величина $R = R(B, \infty)$ називається конформним радіусом області B в нескінченно віддаленій точці.

Означення конформного радіуса в нескінченно віддаленій точці a можна також сформулювати наступним чином: нехай функція $f(z)$, регулярна в області $|z| > 1$, за винятком нескінченно віддаленої точки, однолисто відображає дану область на деяку область B так, що $f(\infty) = \infty$. Величину $|f'(\infty)|$ називають конформним радіусом області B в нескінченно віддаленій точці.

Зауважимо, що в точці $a = \infty$ дане означення конформного радіуса співпадає з означеннями, даними в роботах [10, 18], на відміну від, наприклад, [13, с. 13].

Означення 1.2. *Функцією Гріна $g_B(z, a)$ області B з полюсом в скінченній точці $a \in B$ називається дійсна функція, гармонічна по z в $B \backslash a$, яка прямує до нуля, коли z прямує до межі B, і для якої в деякому околі точки a правильний асимптотичний розклад:*

$$g_B(z, a) = -\ln|z - a| + \gamma + o(1), \quad z \to a;$$

якщо ж $a = \infty$, тоді правильний розклад

$$g_B(z, a) = \ln|z| + \gamma + o(1), \quad z \to a.$$

Означення 1.3. *Внутрішнім радіусом $r(B, a)$ області B відносно скінченної точки a називається величина e^{γ}, а відносно нескінченно віддаленої — величина $e^{-\gamma}$.*

Відзначимо, що для однозв'язних областей внутрішній радіус області дорівнює її конформному радіусу.

В даній роботі вивчаються наступні задачі:

Задача 1.4. Нехай $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, і дано набір фіксованих точок a_k, $k = \overline{1, n}$, комплексної площини. Знайти максимум виразу

$$\prod_{k=1}^{n} \left| f_k'(0) \right|, \tag{1.1}$$

де f_k, $k=\overline{1,n}$, – функції, регулярні в крузі $|z|<1$, для яких $f_k(0)=a_k$, причому $f_i(z_1)\neq f_j(z_2)$ для довільних натуральних $1\leq i,j\leq n$, $i\neq j$ та довільних різних $z_1,z_2\in U$.

Кожна з функцій f_k, $k=\overline{1,n}$, відображає круг U на деяку область B_k, причому $B_i\bigcap B_j=\emptyset$ для $1\leq i,j\leq n$ та $i\neq j$. Тобто, іншими словами, потрібно знайти максимум добутку конформних радіусів для довільної конфігурації n неперетинних областей, які містять відповідно n заданих фіксованих точок комплексної площини.

Задача 1.5. Нехай при $k=\overline{1,n}$, де $n\geq 3$, задано деякі додатні дійсні числа α_k і деякий набір точок a_k комплексної площини. Знайти максимум наступного добутку:

$$\prod_{k=1}^{n}\left|f_k'(0)\right|^{\alpha_k}, \tag{1.2}$$

де f_k, $k=\overline{1,n}$ – функції, регулярні в крузі $|z|<1$, для яких $f_k(0)=a_k$, причому $f_i(z_1)\neq f_j(z_2)$ для довільних натуральних $1\leq i,j\leq n$, $i\neq j$, та довільних різних $z_1,z_2\in U$.

В даній задачі потрібно знайти максимум добутку деяких наперед заданих степенів конформних радіусів для довільної конфігурації n неперетинних областей, які містять відповідно n заданих фіксованих точок комплексної площини.

Виникнення в теорії однолистих функцій екстремальних задач на класах функцій без спільних значень пов’язано з роботою М.О. Лаврентьєва [20]. В цій роботі була вперше поставлена і розв’язана задача про добуток конформних радіусів двох взаємно неперетинних однозв’язних областей. А саме, М.О. Лаврентьєвим був отриманий наступний результат.

Теорема 1.6 (Лаврентьєв, 1934)**.** *Нехай a_1 і a_2 – деякі фіксовані точки комплексної площини, і B_1, B_2 – довільні неперетинні однозв’язні області, такі, що $a_k\in B_k\subset\mathbb{C}$, $k=1,2$. Тоді для функцій $f_k(z)$, $k=1,2$, регулярних в U, які здійснюють однолисте відображення даного круга на області B_k так, що $f_k(0)=a_k$, правильна нерівність*

$$\left|f_1'(0)\right|\left|f_2'(0)\right|\leq|a_1-a_2|^2, \tag{1.3}$$

де рівність досягається тільки для півплощин B_k і точок a_k, симетричних відносно їх спільної межі.

Пізніше даний результат був узагальнений на випадок багатозв’язних областей і внутрішніх радіусів. Зокрема, правильна наступна теорема.

Теорема 1.7. *Нехай a_1 і a_2 – деякі фіксовані точки комплексної площини, і B_1, B_2 – довільні неперетинні області, такі, що $a_k \in B_k \subset \mathbb{C}$, $k = 1, 2$. Тоді правильна нерівність*

$$r(B_1, a_1)r(B_2, a_2) \leq |a_1 - a_2|^2. \tag{1.4}$$

Причому, для областей B_k, $k = 1, 2$, які мають класичну функцію Гріна, знак рівності в нерівності (1.4) досягається тоді і тільки тоді, коли області B_1 і B_2 обмежені колом $\left|\frac{z-a_1}{z-a_2}\right| = C$, де C – довільна додатна константа.

Зауважимо, що задача 1.4 є узагальненням задачі М.О. Лаврентьєва на випадок довільного скінченного числа n, $n \geq 3$, взаємно неперетинних однозв'язних областей B_k, і точок $a_k \in B_k \subset \mathbb{C}$ ($\{a_k\}_{k=1}^n$ – довільні фіксовані скінченні та різні точки комплексної площини). Дане узагальнення було зроблено в 1947 році Г.М. Голузіним, який також при $n = 3$ отримав точну оцінку для добутку конформних радіусів трьох неперетинних областей (див. [10, с. 165]):

Теорема 1.8 (Голузін, 1951)**.** *Нехай a_1, a_2, a_3 – деякі фіксовані точки комплексної площини $\mathbb{C}$, D_k, $a_k \in D_k$, $k = 1, 2, 3$ – довільні взаємно неперетинні області на $\overline{\mathbb{C}}$, і функції $f_k(z)$, $k = 1, 2, 3$, регулярно відображають одиничний круг $\{z : |z| < 1\}$ на області D_k, $k = 1, 2, 3$ так, що $f_k(0) = a_k$, $k = 1, 2, 3$. Тоді правильна нерівність*

$$\prod_{k=1}^{3} \left|f_k'(0)\right| \leq \tag{1.5}$$

$$\leq \frac{61}{81\sqrt{3}} \left|(f_1(0) - f_2(0))(f_1(0) - f_3(0))(f_2(0) - f_3(0))\right|.$$

Причому, якщо точки $a_k = a\exp\left\{\frac{2\pi i}{3}\right\}$, $k = 1, 2, 3$, $a > 0$, то знак рівності в нерівності (1.5) досягається, з точністю до конформних автоморфізмів, для функцій $f_k(z) = a_k\left(\frac{1+z\exp\{i\alpha_k\}}{1-z\exp\{i\alpha_k\}}\right)^{\frac{2}{3}}$, $k = 1, 2, 3$ і тільки для них.

Тобто рівність в (1.5) досягається, з точністю до конформних автоморфізмів розширеної комплексної площини, тільки для областей, які є рівними кутами і точок, які лежать на бісектрисах цих кутів на однакових відстанях від їх спільної вершини.

Оскільки дробово-лінійним відображенням будь-які три наперед задані точки завжди можна перевести в довільні три точки комплексної площини, наприклад, у вершини правильного трикутника, то випадок

$n > 3$ істотно відрізняється від ситуації $n \leq 3$ і виявився значно складнішим. Для випадку $n = 4$ Г.В. Кузьміна в 1980 році в роботі [18] отримала наступний результат:

Теорема 1.9 (Кузьміна, 1980)**.** *Нехай a_k, $k = \overline{1,4}$ – деякі фіксовані точки комплексної площини $\mathbb{C}$, D_k, $a_k \in D_k$, $k = \overline{1,4}$ – довільні взаємно неперетинні області на $\overline{\mathbb{C}}$, і функції $f_k(z)$, $k = \overline{1,4}$, регулярно відображають одиничний круг $\{z : |z| < 1\}$ на області D_k, $k = \overline{1,4}$ так, що $f_k(0) = a_k$, $k = 1,2,3,4$. Тоді справедлива нерівність*

$$\prod_{k=1}^{4} \left|f_k'(0)\right| \leq \frac{9}{4^{8/3}} \left(\prod_{1 \leq k < l \leq 4} |a_l - a_k| \right)^{\frac{2}{3}}. \tag{1.6}$$

Рівність досягається тільки в тому випадку, коли, з точністю до конформного автоморфізму, $a_1 = -a_2 = 1$, $a_3 = -a_4 = i(2-\sqrt{3})$, а межа множини $\bigcup\limits_{k=1}^{4} D_k$ складається із відрізків $[\sqrt{3}-2,\ 2-\sqrt{3}]$, променів $\{z|z = it,\ t \in [1, +\infty)\}$ і $\{z|z = it,\ t \in [-\infty, -1)\}$, частини кругової дуги ρ, яка проходить через точки -1, i, $2-\sqrt{3}$, яка лежить в першому квадранті, а також кругових дуг, які ми отримуємо з ρ перетвореннями $w \to -w$, $w \to \overline{w}$, $w \to -\overline{w}$.

Для $n \geq 5$ повного розв'язку даної проблеми на даний час не отримано.

Проблему 1.4 можна звести до оцінки наступного, інваріантного відносно конформних автомофізмів комплексної площини, виразу:

$$T_n := \frac{\prod\limits_{k=1}^{n} f_k'(0)}{\left\{ \prod\limits_{1 \leqslant k < l \leqslant n}{}' |a_k - a_l| \right\}^{\frac{2}{n-1}}}, \tag{1.7}$$

(тут штрих у добутку означає, що для нескінченно віддаленої точки під відповідним множником розуміємо одиницю). Виходячи з результатів робіт [10, 18, 20], отримаємо наступні оцінки:

$$T_2 \leq 1, \qquad T_3 \leq \frac{64}{81\sqrt{3}} \approx 0.45618, \qquad T_4 \leq \frac{9}{4^{8/3}} \approx 0.22323.$$

В той же час виникало питання: чи буде існувати максимум виразу, аналогічного до (1.1), у тому випадку, коли похідні функцій $f_k(z)$ в точці 0 будуть братися в деяких додатних, наперед заданих, степенях. Перші результати з даної проблеми було отримано Л.І. Колбіною в роботах [16, 17], де було доведено наступні теореми:

Теорема 1.10 (Колбіна, 1952)**.** *Нехай $\alpha > 0$ і $\beta > 0$ – деякі, наперед задані, дійсні числа, a_1, a_2 – деякі різні точки комплексної площини, функції f_1 і f_2 регулярно і однолисто відображають одиничний круг $|z| < 1$ відповідно на неперетинні області B_1 і B_2, причому $f_1(0) = a_1$, $f_2(0) = a_2$. Тоді виконується нерівність:*

$$\left|\left(f_1'(0)\right)^{\alpha}\left(f_2'(0)\right)^{\beta}\right| \leq \frac{4^{\alpha+\beta}\alpha^{\alpha}\beta^{\beta}}{|\alpha-\beta|^{\alpha+\beta}}\left|\frac{\sqrt{\alpha}-\sqrt{\beta}}{\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}}\right|^{2\sqrt{\alpha\beta}}|a_l - a_2|^{\alpha+\beta}. \quad (1.8)$$

Теорема 1.11 (Колбіна, 1955)**.** *Нехай $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $\gamma > 0$ — деякі, наперед задані, дійсні числа, a_1, a_2, a_3 — деякі різні точки комплексної площини, функції f_1, f_2, f_3 регулярно і однолисто відображають одиничний круг $|z| < 1$ відповідно на неперетинні області B_1, B_2, B_3 причому $f_1(0) = a_1$, $f_2(0) = a_2$, $f_3(0) = a_3$ Тоді виконується нерівність:*

$$\left|\left(f_1'(0)\right)^{\alpha}\left(f_2'(0)\right)^{\beta}\left(f_3'(0)\right)^{\gamma}\right| \leq$$
$$\leq A_{\alpha,\beta,\gamma}|a_1-a_2|^{\alpha+\beta-\gamma}|a_1-a_3|^{\alpha-\beta+\gamma}|a_2-a_3|^{-\alpha+\beta+\gamma}, \quad (1.9)$$

де

$$A_{\alpha,\beta,\gamma} =$$
$$\frac{4^{\alpha+\beta+\gamma}\alpha^{\alpha}\beta^{\beta}\gamma^{\gamma}\left|2(\alpha\beta+\beta\gamma+\alpha\gamma)-\alpha^2-\beta^2-\gamma^2\right|^{\sqrt{\alpha\beta}+\sqrt{\beta\gamma}+\sqrt{\alpha\gamma}-\frac{1}{2}(\alpha+\beta+\gamma)}}{|(\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta})^2-\gamma|^{2\sqrt{\alpha\beta}}|(\sqrt{\beta}+\sqrt{\gamma})^2-\alpha|^{2\sqrt{\beta\gamma}}|(\sqrt{\alpha}+\sqrt{\gamma})^2-\beta|^{2\sqrt{\alpha\gamma}}}.$$

Деякі нерівності щодо конформних радіусів було отримано також в роботі [4].

М.О. Лєбєдєв в монографії [21, с. 32] узагальнив задачу, поставлену в роботах Л.І. Колбіної, і розглянув наступну екстремальну задачу: на площині w дано n різних фіксованих точок a_k, $k = \overline{1,n}$, $n > 3$ і n фіксованих додатних чисел α_k. Що можна сказати про максимум добутку

$$\prod_{k=1}^{n}\left|f_k'(0)\right|^{\alpha_k},$$

де f_k, $k = \overline{1,n}$ – функції, регулярні в крузі $|z| < 1$, для яких $f_k(0) = a_k$, причому $f_i(z_1) \neq f_j(z_2)$ для довільних натуральних $1 \leq i, j \leq n$, $i \neq j$ та довільних різних $z_1, z_2 \in U$. Однак, на даний момент ця задача в загальному випадку не розв'язана, вдалося отримати її розв'язок тільки в часткових випадках. Ця задача є безпосереднім узагальненням попередніх результатів М.О. Лаврентьєва, Г.М. Голузіна, З. Нехарі, Дж. Дженкінса.

Також М.О. Лєбєдєвим було отримано наступний результат [21, с. 220]:

Теорема 1.12 (Лєбєдєв, 1978)**.** *Нехай* $\{f_l(z)\}_{l=0}^{n}$ *– деякий набір функцій, які конформно і однолисто відображають відкритий одиничний круг відповідно на неперетинні області* $\{B_l\}_{l=0}^{n}$ *так, що* $f_l(0) = a_l$*, де* a_l *– деякий набір фіксованих скінченних точок, і* γ_l*,* $l = \overline{0,n}$ *– фіксовані комплексні числа, такі, що* $\sum\limits_{l=0}^{n} \gamma_l = 0$ *і* $\sum\limits_{l=0}^{n} |\gamma_l| \neq 0$*. Тоді правильна нерівність:*

$$\prod_{l=0}^{n} |f_l^{'}(0)|^{|\gamma_l|^2} \leq \prod_{0 \leq k < l \leq n} |a_k - a_l|^{-2\mathrm{Re}\,(\overline{\gamma_l}\gamma_k)} . \tag{1.10}$$

Деякі узагальнення нерівності (1.10) для випадку дійсних γ_l було запропоновано в роботі [11].

Оскільки повного розв'язку ні задачі 1.4, ні задачі 1.5 отримати не вдавалося, пошуки було продовжено в іншому напрямку. Так, в 1968 році П.М. Тамразов у роботі [23] зауважив, що значний інтерес представляють задачі, де точки a_k не фіксовані, а мають певну "свободу". Такі задачі отримали назву задач з вільними полюсами. Відповідно до цієї ідеї, Г.П. Бахтіна (див, наприклад, [6, 7]) сформулювала ряд нових екстремальних задач і отримала їхні розв'язки для деяких часткових випадків. Внаслідок цього тематика отримала новий поштовх для свого розвитку.

Відзначимо, що в той же час В.М. Дубініним було розроблено метод розділяючого перетворення (див. [12–14]), за допомогою якого було отримано значний прогрес в розв'язанні екстремальних задач геометричної теорії функцій. На основі цього методу був розроблений метод управляючих функціоналів, за допомогою якого вдалося суттєво послабити вимоги щодо систем точок, що розглядаються (див., наприклад, [5]).

В подальшому екстремальні задачі з вільними полюсами дуже активно вивчалися багатьма спеціалістами і були узагальнені для випадку багатозв'язних областей і внутрішніх радіусів.

Однак, не зважаючи на значну кількість робіт з даної тематики, багато екстремальних задач на даний момент не розв'язані. Тому актуальною є задача отримання якщо не точних розв'язків, то достатньо ефективних оцінок відповідних функіоналів. Саме цьому і присвячена дана робота.

2. Оцінки добутку конформних радіусів n неперетинних областей відносно n наперед заданих фіксованих точок

Справедливі наступні теореми.

Теорема 2.1. *Нехай $n \in \mathbb{N}$ - деяке натуальне число, $n \geq 2$, $a_k \in \mathbb{C}$, $k = \overline{1,n}$ – деякий набір фіксованих точок комплексної площини. Тоді для довільного набору функцій f_k, $k = \overline{1,n}$, регулярних і однолистих в крузі $|z| < 1$, для яких $f_k(0) = a_k$, причому $f_i(z_1) \neq f_j(z_2)$ для довільних натуральних $1 \leq i, j \leq n$ та $i \neq j$ та довільних різних $z_1, z_2 \in U$, правильна нерівність:*

$$\prod_{k=1}^{n} \left|f_k'(0)\right| \leq (n-1)^{-\frac{n}{4}} \left(\prod_{1 \leq p < k \leq n} |a_p - a_k| \right)^{\frac{2}{n-1}}. \tag{2.1}$$

У випадку, коли одна з точок a_k є нескінченно віддаленою, правильна наступна теорема.

Теорема 2.2. *Нехай n – деяке натуральне число, $n \geq 2$, a_k, $k = \overline{1,n}$ – деякий набір фіксованих точок розширеної комплексної площини, причому $a_n = \infty$; f_k, $k = \overline{1, n-1}$ – функції, регулярні і однолисті в крузі $|z| < 1$, для яких $f_k(0) = a_k$; f_n – регулярна і однолиста в області $|z| > 1$, за винятком нескінченно віддаленої точки, причому $f_n(\infty) = \infty$. Тоді правильна нерівність:*

$$\frac{1}{|f_n'(\infty)|} \prod_{k=1}^{n-1} \left|f_k'(0)\right| \leq (n-1)^{-\frac{n}{4}} \left(\prod_{1 \leq p < k \leq n-1} |a_p - a_k| \right)^{\frac{2}{n-1}}. \tag{2.2}$$

Доведення теореми 2.1. Скористаємося ідеєю, запропонованою в роботі [15], а також при доведенні теореми 1 роботи [1] (див. також [2,3]).

Нехай B_k, $k = \overline{1,n}$ – області, які отримуються при відображенні круга U за допомогою, відповідно, функцій f_k. Тоді, згідно з означенням 1.1,

$$\left|f_k'(0)\right| = R(B_k, a_k). \tag{2.3}$$

Зафіксуємо деяке натуральне $1 \leq k \leq n$ і нехай $B^{(k)}$ – образ множини B при відображенні $w = \frac{1}{z - a_k}$. За теоремою про похідну складної функції отримаємо, що:

$$R(B_k, a_k) = \frac{1}{R(B_k^{(k)}, \infty)}. \tag{2.4}$$

Нехай $d(E)$ – трансфінітний діаметр компактної множини $E \subset \mathbb{C}$ (див., наприклад, [10, с. 286]). Згідно з теоремою 3 [10, с. 304] (див.

також [13, с. 15]) конформний радіус області, яка містить нескінченно віддалену точку, дорівнює трансфінітному діаметру доповнення до даної області, тобто правильна рівність:

$$R(B_k^{(k)}, \infty) = d\left(\overline{\mathbb{C}} \setminus B_k^{(k)}\right). \tag{2.5}$$

Далі, нехай μE – міра Лебега компактної множини E. Згідно з теоремою Пойа [22, с. 28], правильна наступна нерівність:

$$\pi d^2(E) \geq \mu E,$$

а отже

$$d(E) \geq \sqrt{\frac{\mu E}{\pi}}.$$

Звідси отримаємо

$$\frac{1}{d(\overline{\mathbb{C}} \setminus B_k^{(k)})} \leq \sqrt{\frac{\pi}{\mu(\overline{\mathbb{C}} \setminus B_k^{(k)})}}. \tag{2.6}$$

Враховуючи монотонність та адитивність міри Лебега, будемо мати:

$$\sqrt{\frac{\pi}{\mu(\overline{\mathbb{C}} \setminus B_k^{(k)})}} \leq \left(\frac{1}{\pi}\,\mu\Bigg(\bigcup_{\substack{p=1\\p\neq k}}^{n} \overline{B_p^{(k)}}\Bigg)\right)^{-\frac{1}{2}} = \left(\frac{1}{\pi}\sum_{\substack{p=1\\p\neq k}}^{n} \mu\overline{B_p^{(k)}}\right)^{-\frac{1}{2}}. \tag{2.7}$$

Враховуючи співвідношення (2.4) – (2.7), отримаємо:

$$R(B_k, a_k) \leq \left(\frac{1}{\pi}\sum_{\substack{p=1\\p\neq k}}^{n} \mu\overline{B_p^{(k)}}\right)^{-\frac{1}{2}}.$$

Оскільки серед областей з даним конформним радіусом в наперед заданій точці найменшу площу має круг з центром в даній точці (див. [10, с. 34]), отримаємо нерівність $\mu B \geq \pi R^2\,(B, a)$, а тому в попередній нерівності одержуємо:

$$R(B_k, a_k) \leq \left(\sum_{\substack{p=1\\p\neq k}}^{n} R^2(B_p^{(k)}, a_p^{(k)})\right)^{-\frac{1}{2}}. \tag{2.8}$$

Далі, за нерівністю Коші, будемо мати:

$$\sum_{\substack{p=1\\p\neq k}}^{n} R^2(B_p^{(k)}, a_p^{(k)}) \geq (n-1)\Bigg(\prod_{\substack{p=1\\p\neq k}}^{n} R(B_p^{(k)}, a_p^{(k)})\Bigg)^{\frac{2}{n-1}},$$

а звідси отримаємо

$$\left(\sum_{\substack{p=1\\p\neq k}}^{n} R^2(B_p^{(k)},a_p^{(k)})\right)^{-\frac{1}{2}} \leq (n-1)^{-\frac{1}{2}}\left(\prod_{\substack{p=1\\p\neq k}}^{n} R(B_p^{(k)},a_p^{(k)})\right)^{-\frac{1}{n-1}}. \tag{2.9}$$

Покажемо, що

$$R(B_p^{(k)},a_p^{(k)}) = \frac{R(B_p,a_p)}{|a_p-a_k|^2} \quad (p\neq k). \tag{2.10}$$

Справді, якщо функція $f_p(z)$ конформно і однолистно відображає круг U на область B_p так, що $f_p(0)=a_p$, то функція $w_p^{(k)}(z)=\frac{1}{f_p(z)-a_k}$ буде конформно і однолистно відображати круг U на область $B_p^{(k)}$ так, що $f_p(0)=a_p^{(k)}$. Звідси

$$R(B_p^{(k)},a_p^{(k)}) = \left|(w_p^{(k)}(0))'\right| = \frac{f_p'(0)}{|f_p(0)-a_k|^2} = \frac{R(B_p,a_p)}{|a_p-a_k|^2}.$$

А це означає, що $r(B_p,a_p)=|a_p-a_k|^2 r(B_p^{(k)},a_p^{(k)})$, звідки і випливає рівність (2.10).

Далі, використовуючи (2.8) і (2.9), отримаємо

$$R(B_k,a_k) \leq (n-1)^{-\frac{1}{2}}\times$$
$$\times\left[\frac{|a_1-a_k|^2|a_2-a_k|^2...|a_{k-1}-a_k|^2|a_{k+1}-a_k|^2...|a_n-a_k|^2}{R(B_1,a_1)R(B_2,a_2)...R(B_{k-1},a_{k-1})R(B_{k+1},a_{k+1})...R(B_n,a_n)}\right]^{\frac{1}{n-1}} =$$
$$= (n-1)^{-\frac{1}{2}}\left(\prod_{\substack{p=1\\p\neq k}}^{n}|a_p-a_k|\right)^{\frac{2}{n-1}}\left(\prod_{\substack{p=1\\p\neq k}}^{n}R(B_p,a_p)\right)^{-\frac{1}{n-1}},$$

Оцінимо тепер вираз $\prod\limits_{k=1}^{n} R(B_k,a_k)$, використовуючи попередню нерівність для кожного $k=\overline{1,n}$.

$$\prod_{k=1}^{n} R(B_k,a_k) \leq$$
$$\leq \prod_{k=1}^{n}\left((n-1)^{-\frac{1}{2}}\left(\prod_{\substack{p=1\\p\neq k}}^{n}|a_p-a_k|\right)^{\frac{2}{n-1}}\left(\prod_{\substack{p=1\\p\neq k}}^{n}R(B_p,a_p)\right)^{-\frac{1}{n-1}}\right) =$$

$$= (n-1)^{-\frac{n}{2}} \prod_{k=1}^{n}\Bigg(\prod_{\substack{p=1\\p\neq k}}^{n} |a_p - a_k|\Bigg)^{\frac{2}{n-1}} \prod_{k=1}^{n}\Bigg(\prod_{\substack{p=1\\p\neq k}}^{n} R(B_p, a_p)\Bigg)^{-\frac{1}{n-1}}. \quad (2.11)$$

Враховуючи рівності

$$\prod_{k=1}^{n}\Bigg(\prod_{\substack{p=1\\p\neq k}}^{n} |a_p - a_k|\Bigg)^{\frac{2}{n-1}} = \Bigg(\prod_{\substack{p,k=1\\p\neq k}}^{n} |a_p - a_k|\Bigg)^{\frac{2}{n-1}} = \Bigg(\prod_{1\leq p<k\leq n} |a_p - a_k|\Bigg)^{\frac{4}{n-1}},$$

$$\prod_{k=1}^{n}\Bigg(\prod_{\substack{p=1\\p\neq k}}^{n} R(B_p, a_p)\Bigg)^{\frac{1}{n-1}} = \Bigg(\prod_{k=1}^{n} R^{n-1}(B_k, a_k)\Bigg)^{\frac{1}{n-1}} = \prod_{k=1}^{n} R(B_k, a_k),$$

з нерівності (2.11) отримуємо

$$\prod_{k=1}^{n} R(B_k, a_k) \leq (n-1)^{-\frac{n}{2}} \frac{\Bigg(\prod\limits_{1\leq p<k\leq n} |a_p - a_k|\Bigg)^{\frac{4}{n-1}}}{\prod\limits_{k=1}^{n} R(B_k, a_k)},$$

звідки будемо мати

$$\Bigg(\prod_{k=1}^{n} R(B_k, a_k)\Bigg)^{2} \leq (n-1)^{-\frac{n}{2}} \Bigg(\prod_{1\leq p<k\leq n} |a_p - a_k|\Bigg)^{\frac{4}{n-1}}.$$

Добуваючи корінь з обох частин попередньої нерівності, отримуємо:

$$\prod_{k=1}^{n} R(B_k, a_k) \leq (n-1)^{-\frac{n}{4}} \Bigg(\prod_{1\leq p<k\leq n} |a_p - a_k|\Bigg)^{\frac{2}{n-1}}.$$

Враховуючи, що $R(B_k, a_k) = |f'_k(0)|$ (див. (2.3)), отримуємо нерівність (2.1). Теорему 2.1 доведено. □

З доведеної вище теореми випливає наступний результат:

Наслідок 2.3. *Нехай для довільного натурального* $n \geq 2$ *області* B_k *і точки* a_k, $k = \overline{1, n}$, *задовольняють усім умовам теореми 2.1. Тоді правильна нерівність:*

$$T_n \leq (n-1)^{-\frac{n}{4}}. \quad (2.12)$$

Порівняємо цю оцінку з точними оцінками, отриманими в роботах [10, 18, 20]. Так, для $n = 2$ за формулою (2.12) отримаємо $T_2 \leq 1$, що збігається з точною оцінкою, отриманою в роботі [20]. Для $n = 3$ отримаємо $T_3 \le 2^{-\frac{3}{4}} \approx 0.5947$ у той час, коли отримане в роботі [10] точне значення $T_3 = \frac{64}{81\sqrt{3}} \le 0.4562$ (для даного випадку відносна похибка $\delta_3 \approx 30\%$); для $n = 4$ отримаємо $T_4 \le \frac{1}{3} \approx 0.3334$ у той час, коли отримане в роботі [18] точне значення $T_4 = \frac{9}{4^{8/3}} \le 0.2233$ (відносна похибка $\delta_4 \approx 49\%$).

Також було висловлено припущення (див. [19]), що

$$T_5 \le 4^{\frac{11}{3}} \cdot 3^{-\frac{3}{4}} \cdot 5^{-\frac{25}{6}} = 8.656 \cdot 10^{-2},$$

причому рівність виконується, зокрема, коли

$$\{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\} = \{1, e^{-\frac{2\pi i}{3}}, 0, e^{\frac{2\pi i}{3}}, \infty\},$$

а області B_k, $k = \overline{1,5}$, є круговими областями квадратичного диференціала

$$Q(z)dz^2 = -\frac{z^6 + 7z^2 + 1}{z^2(z^3 - 1)^2} dz^2.$$

Згідно з нерівністю (2.12) отримаємо $T_5 \le 4^{-\frac{5}{4}} \approx 0.1769$, тобто для цього випадку відносна похибка $\delta_5 \approx 104\%$.

Доведення теореми 2.2. Як і при доведенні теореми 2.1, маємо $|f_k'(0)| = R(B_k, a_k)$ для $k = \overline{1, n-1}$ і, крім того, $|f_n'(\infty)| = R(B_n, \infty)$. Зафіксуємо деяке натуральне k таке, що $1 \le k \le n-1$. Як і в (2.9), отримуємо

$$R(B_k, a_k) \le (n-1)^{-\frac{1}{2}} \left(\prod_{\substack{p=1 \\ p \ne k}}^{n} R(B_p^{(k)}, a_p^{(k)}) \right)^{-\frac{1}{n-1}}. \tag{2.13}$$

Зауважимо також, що $R(B_n^{(k)}, a_n^{(k)}) = R(B_n^{(k)}, 0) = \frac{1}{R(B_n, \infty)}$.

Якщо $1 \le p \le n-1$, $p \ne k$, то, виконуючи перетворення, аналогічні до проведених при доведенні теореми 2.1, отримуємо рівність $r(B_p^{(k)}, a_p^{(k)}) = \frac{r(B_p, a_p)}{|a_p - a_k|^2}$. Таким чином, з (2.13) для $1 \le k \le n-1$ маємо нерівність

$$R(B_k, a_k) \le (n-1)^{-\frac{1}{2}} \left(\prod_{\substack{p=1 \\ p \ne k}}^{n-1} |a_p - a_k| \right)^{\frac{2}{n-1}} \left(\prod_{\substack{p=1 \\ p \ne k}}^{n} R(B_p, a_p) \right)^{-\frac{1}{n-1}}. \tag{2.14}$$

У випадку $k = n$ отримуємо

$$\frac{1}{R(B_n, \infty)} \le (n-1)^{-\frac{1}{2}} \left(\prod_{p=1}^{n-1} r(B_p, a_p) \right)^{-\frac{1}{n-1}}. \tag{2.15}$$

Аналогічно до теореми 2.1, враховуючи (2.14) і (2.15), отримуємо:

$$\frac{1}{R(B_n,\infty)}\prod_{k=1}^{n-1}R(B_k,a_k)\le(n-1)^{-\frac{n}{2}}\left(\prod_{\substack{p,k=1\\p\neq k}}^{n-1}|a_p-a_k|\right)^{\frac{2}{n-1}}\frac{R(B_n,\infty)}{\prod\limits_{k=1}^{n-1}R(B_k,a_k)}.$$

Звідси будемо мати:

$$\left(\frac{1}{R(B_n,\infty)}\prod_{k=1}^{n-1}R(B_k,a_k)\right)^2\le(n-1)^{-\frac{n}{2}}\left(\prod_{\substack{p,k=1\\p\neq k}}^{n-1}|a_p-a_k|\right)^{\frac{2}{n-1}}.$$

Добуваючи корінь з обох частин попередньої нерівності, отримуємо:

$$\frac{1}{R(B_n,\infty)}\prod_{k=1}^{n-1}R(B_k,a_k)\le(n-1)^{-\frac{n}{4}}\left(\prod_{1\le p<k\le n-1}|a_p-a_k|\right)^{\frac{2}{n-1}}.$$

Врахувавши, що $R(B_k,a_k)=|f_k'(0)|$, отримаємо нерівність (2.2). Теорему 2.2 доведено. $\square$

3. Оцінки добутку деяких степенів конформних радіусів n неперетинних областей відносно n наперед заданих фіксованих точок

Теорема 3.1. *Нехай n - деяке натуральне число, $n\ge 3$, a_k, $k=\overline{1,n}$, деякий набір фіксованих точок комплексної площини, і нехай γ_k, $k=\overline{1,n}$ - деякі додатні дійсні числа, причому для кожного $k=\overline{1,n}$*

$$\gamma_k>\frac{\sum\limits_{l=1}^{n}\gamma_l}{2n-2}. \tag{3.1}$$

Тоді для довільного набору функцій f_k, $k=\overline{1,n}$, регулярних і однолистих в крузі $|z|<1$, для яких $f_k(0)=a_k$, причому $f_i(z_1)\neq f_j(z_2)$ для довільних натуральних $1\le i,j\le n$, $i\neq j$, та довільних різних $z_1,z_2\in U$, правильна нерівність:

$$\prod_{k=1}^{n}\left|f_k'(0)\right|^{\gamma_k}\le(n-1)^{-\frac{1}{4}\sum\limits_{k=1}^{n}\gamma_k}\prod_{i,j=1,i<j}^{n}|a_j-a_i|^{\frac{2}{n-2}\left(\gamma_i+\gamma_j-\frac{1}{n-1}\sum\limits_{k=1}^{n}\gamma_k\right)}. \tag{3.2}$$

При доведенні теореми 3.1 використовується наступна лема.

Лема 3.2. *Нехай n - деяке натуральне число, $n\ge 3$, a_k, $k=\overline{1,n}$ — деякий набір фіксованих точок комплексної площини, α_k, $k=\overline{1,n}$ —*

деякі додатні дійсні числа, і нехай

$$\lambda := \sum_{k=1}^{n} \alpha_k. \tag{3.3}$$

Тоді для довільного набору функцій f_k, $k = \overline{1,n}$, *регулярних і однолистих в крузі* $|z| < 1$, *для яких* $f_k(0) = a_k$, *причому* $f_i(z_1) \neq f_j(z_2)$ *для довільних натуральних* $1 \leq i, j \leq n$, $i \neq j$, *та довільних різних* $z_1, z_2 \in U$, *правильна нерівність:*

$$\prod_{k=1}^{n} \left|f_k'(0)\right|^{\alpha_k} \leq (n-1)^{-\frac{\lambda}{2}\frac{n-1}{n-2}} \frac{\prod\limits_{i,j=1, i<j}^{n} |a_j - a_i|^{\frac{2(\alpha_i+\alpha_j)}{n-2}}}{\left(\prod\limits_{k=1}^{n} \left|f_k'(0)\right|\right)^{\frac{\lambda}{n-2}}}. \tag{3.4}$$

Доведення. Як і під час доведення теореми 2.1, для кожного фіксованого $k = \overline{1,n}$ отримуємо нерівність

$$R(B_k, a_k) = \frac{1}{(n-1)^{\frac{1}{2}} \left(\prod\limits_{\substack{p=1 \\ p\neq k}}^{n} R(B_p^{(k)}, a_p^{(k)})\right)^{\frac{1}{n-1}}},$$

а також рівність

$$R(B_p^{(k)}, a_p^{(k)}) = \frac{R(B_p, a_p)}{|a_p - a_k|^2} \quad (p \neq k).$$

Далі отримуємо

$$R(B_k, a_k) \leq \frac{\left(\prod\limits_{\substack{p=1 \\ p\neq k}}^{n} |a_p - a_k|\right)^{\frac{2}{n-1}}}{(n-1)^{\frac{1}{2}} \left(\prod\limits_{\substack{p=1 \\ p\neq k}}^{n} R(B_p, a_p)\right)^{\frac{1}{n-1}}}.$$

Звідси будемо мати

$$(R(B_k, a_k))^{\alpha_k} \leq \frac{\left(\prod\limits_{\substack{p=1 \\ p\neq k}}^{n} |a_p - a_k|\right)^{\frac{2\alpha_k}{n-1}}}{(n-1)^{\frac{\alpha_k}{2}} \left(\prod\limits_{\substack{p=1 \\ p\neq k}}^{n} R(B_p, a_p)\right)^{\frac{\alpha_k}{n-1}}}. \tag{3.5}$$

Враховуючи (3.5) і (3.3), отримуємо

$$\prod_{k=1}^{n}(R(B_k,a_k))^{\alpha_k}\le$$

$$\le (n-1)^{-\frac{\lambda}{2}}\frac{\prod\limits_{i,j=1,i<j}^{n}|a_j-a_i|^{\frac{2(\alpha_i+\alpha_j)}{n-1}}}{\left(\prod\limits_{k=1}^{n}R(B_k,a_k)\right)^{\frac{\lambda}{n-1}}}\left(\prod_{k=1}^{n}(r(B_k,a_k))^{\alpha_k}\right)^{\frac{1}{n-1}}.$$

З останньої нерівності отримуємо:

$$\left(\prod_{k=1}^{n}(R(B_k,a_k))^{\alpha_k}\right)^{1-\frac{1}{n-1}}\le (n-1)^{-\frac{\lambda}{2}}\frac{\prod\limits_{i,j=1,i<j}^{n}|a_j-a_i|^{\frac{2(\alpha_i+\alpha_j)}{n-1}}}{\left(\prod\limits_{k=1}^{n}R(B_k,a_k)\right)^{\frac{\lambda}{n-1}}}.$$

Звідси після піднесення обох частин останньої нерівності до степеня $\frac{n-1}{n-2}$ отримаємо нерівність (3.4). Лему 3.2 доведено. $\square$

Доведення теореми 3.1. Позначимо тепер

$$\alpha_k=\gamma_k-\frac{1}{2n-2}\sum_{k=1}^{n}\gamma_k. \tag{3.6}$$

Оскільки нерівність (3.1) виконується при $k=\overline{1,n}$, то всі $\alpha_k>0$, і ми можемо застосувати Лему 3.2. З нерівності (3.4) отримуємо:

$$\prod_{k=1}^{n}(R(B_k,a_k))^{\alpha_k+\frac{\lambda}{n-2}}\le (n-1)^{-\frac{\lambda}{2}\frac{n-1}{n-2}}\prod_{i,j=1,i<j}^{n}|a_j-a_i|^{\frac{2(\alpha_i+\alpha_j)}{n-2}}. \tag{3.7}$$

Додаючи рівності (3.6) для всіх $k=\overline{1,n}$, отримуємо:

$$\lambda=\sum_{k=1}^{n}\alpha_k=\frac{n-2}{2n-2}\sum_{k=1}^{n}\gamma_k,$$

а тому, враховуючи (3.6), маємо

$$\alpha_k+\frac{\lambda}{n-2}=\gamma_k.$$

Також отримуємо

$$-\frac{\lambda}{2}\frac{n-1}{n-2}=-\frac{n-2}{2n-2}\frac{n-1}{2(n-2)}\sum_{k=1}^{n}\gamma_k=-\frac{1}{4}\sum_{k=1}^{n}\gamma_k,$$

$$\frac{2(\alpha_i+\alpha_j)}{n-2}=\frac{2}{n-2}\left(\gamma_i+\gamma_j-\frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n}\gamma_k\right).$$

Підставивши останні рівності в нерівність (3.7), отримаємо нерівність (3.2). Теорему 3.1 доведено. □

Зауваження 3.3. Для кожного натурального $n\geq 2$ і деяких наборів додатніх чисел $\{\alpha_k\}$ і $\{\gamma_k\}$, $k=\overline{1,n}$, функціонал

$$I_n(\alpha_k)=\prod_{k=1}^{n}\left(R(B_k,a_k)\right)^{\alpha_k}$$

будемо називати спряженим до функціонала

$$I_n(\gamma_k)=\prod_{k=1}^{n}\left(R(B_k,a_k)\right)^{\gamma_k},$$

якщо виконуються рівності

$$\gamma_k=\alpha_k+\frac{1}{n-2}\sum_{k=1}^{n}\alpha_k,\quad \alpha_k=\gamma_k-\frac{1}{2n-2}\sum_{k=1}^{n}\gamma_k.$$

Таким чином, ми можемо оцінювати функціонал $I_n(\gamma_k)$ за допомогою спряженого функціонала.

Використовуючи теорему 3.1, можна отримати аналоги теорем 1.8 і 1.11.

Наслідок 3.4. *Нехай $\{a_k\}_{k=1}^{3}$ і $\{B_k\}_{k=1}^{3}$ – деякі набори відповідно точок і областей комплексної площини, причому $a_k\in B_k\subset\overline{\mathbb{C}}$, функції f_1, f_2, f_3 регулярно і однолистно відображають одиничний круг $|z|<1$ відповідно на області B_1, B_2, B_3, причому $f_1(0)=a_1$, $f_2(0)=a_2$, $f_3(0)=a_3$. Тоді правильна наступна нерівність:*

$$\prod_{k=1}^{3}\left|f_k'(0)\right|\leqslant 2^{-\frac{3}{4}}|a_2-a_1||a_3-a_1||a_3-a_2|.$$

Для доведення даного наслідку достатньо підставити в нерівності (3.2) $\gamma_1=\gamma_2=\gamma_3=1$.

Оскільки $2^{-\frac{3}{4}}\approx 0.5946$ і $\frac{64}{81\sqrt{3}}\leq 0.4562$, то наша оцінка ненабагато поступається точній оцінці Голузіна [10, с. 165].

Наслідок 3.5. *Нехай задано деякі набори $\{a_k\}_{k=1}^{3}$ і $\{B_k\}_{k=1}^{3}$ відповідно точок і областей комплексної площини, причому $a_k\in B_k\subset\overline{\mathbb{C}}$, і деякі додатні дійсні числа γ_k, $k=\overline{1,3}$, які задовольняють нерівність* (3.1) *при* $n = 3$. *Нехай функції* f_1, f_2, f_3 *регулярно і однолистно відображають одиничний круг* $|z| < 1$ *відповідно на області* B_1, B_2, B_3 *причому* $f_1(0) = a_1$, $f_2(0) = a_2$, $f_3(0) = a_3$. *Тоді правильна наступна нерівність:*

$$\prod_{k=1}^{3} \left|f_k'(0)\right|^{\gamma_k} \leq 2^{-\frac{\sum\limits_{k=1}^{3}\gamma_k}{4}} |a_1 - a_2|^{\gamma_1+\gamma_2-\gamma_3} |a_1 - a_3|^{\gamma_1-\gamma_2+\gamma_3} |a_2 - a_3|^{-\gamma_1+\gamma_2+\gamma_3}.$$

Зауваження 3.6. Оцінка, отримана в теоремі 3.1, для багатьох окремих випадків точніша за оцінку, отриману в Теоремі 1 [21, с. 220]. Розглянемо, наприклад, наступну конфігурацію: $a_3 = 0$, $a_k = exp(\frac{2\pi i}{3}k)$, $k = \overline{0,2}$ і $\gamma_k = 1$, $k = \overline{0,3}$. Тоді нерівність (3.2) перетворюється в нерівність:

$$\prod_{k=0}^{3} \left|f_k'(0)\right|^{\gamma_k} \leq \frac{1}{3}\left((\sqrt{3})^3\right)^{\frac{2}{3}} = 1.$$

У той же час, покладаючи в нерівності (1.10) $\gamma_0 = \gamma_1 = 1$; $\gamma_2 = \gamma_3 = -1$, отримуємо:

$$\prod_{k=0}^{3} \left|f_k'(0)\right|^{\gamma_k} \leq (\sqrt{3})^2(\sqrt{3})^2(\sqrt{3})^{-2} = 3.$$

Таким чином, для вказаної конфігурації наша оцінка точніша.

Зауважимо, що аналоги теорем 2.1 і 3.1 для випадку багатозв'язних областей і конформних радіусів було доведено відповідно в роботах [8] і [9].

Література

[1] A. K. Bakhtin, I. V. Denega. Inequalities for the inner radii of nonoverlapping domains. *Ukr. Math. J.*, 71(7):1138–1145, 2019.

[2] A. K. Bakhtin, I. V. Denega. Weakened problem on extremal decomposition of the complex plane. *Matematychni Studii*, 51(1):35–40, 2019.

[3] A. K. Bakhtin, I. V. Denega. Generalized M. A. Lavrentiev's inequality. *J. Math. Sci.*, 262(2):138–153, 2022.

[4] Z. Nehari. Some inequalities in the theory of functions. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 75(2):256–286, 1953.

[5] А. К. Бахтин, Г. П. Бахтина, Ю. Б. Зелинский. *Тополого-алгебраические структуры и геометрические методы в комплексном анализе.* Праці ін-ту мат-ки НАН Укр., 2008.

[6] Г. П. Бахтина. Вариационные методы и квадратичные дифференциалы в задачах о неналегающих областях. Автореф.дис. канд. физ.-мат. наук., 1975.

[7] Г. П. Бахтина. О конформных радиусах симметричных неналегающих областей. *Современные вопросы вещественного и комплексного анализа. Киев: Ин-т математики АН УССР*, 149:21–27, 1984.

[8] О. К. Бахтін, Я. В. Заболотний. Оцінки добутків внутрішніх радіусів багатозв'язних областей. *Український математичний журнал*, 73(1):9–22, 2021.

[9] О. К. Бахтін, Я. В. Заболотний. Оцінки добутків деяких степенів внутрішніх радіусів багатозв'язних областей. *Український математичний журнал*, 73(9):1155–1169, 2021.

[10] Г. М. Голузин. *Геометрическая теория функций комплексного переменного.* М.: Наука, 1966.

[11] Л. Л. Громова. Некоторые приложения принципа площадей. *Вест. Ленинград. гос. ун-та.*, (7):31–40, 1968.

[12] В. Н. Дубинин. О прозведении внутренних радиусов "частично неналегающих"областей. *Вопросы метрической теории отображений и ее применение*, pages 24–31, 1978. Киев: Наук. Думка.

[13] В. Н. Дубинин. Метод симметризации в геометрической теории функций комплексного переменною. *Успехи мат. наук.*, 49(1(295)):3–76, 1994.

[14] В. Н. Дубинин. *Емкости конденсаторов и симметризация в геометрической теории функций комплексного переменного.* Владивосток: "Дальнаука"ДВО РАН, 2009.

[15] Л. В. Ковалев. О трех непересекающихся областях. *Дальневосточный мат. журн.*, 1(1):3–7, 2000.

[16] Л. И. Колбина. Некоторые экстремальные задачи в конформном отображении. *Докл. АН СССР. Серия мат.*, 84(5):865–868, 1952.

[17] Л. И. Колбина. Конформное отображение единичного круга наненалегающие области. *Вестник Ленинград. ун-та.*, 5:37–43, 1955.

[18] Г. В. Кузьмина. К задаче о максимуме произведения конформных радиусов неналегающих областей. *Зап. научн. сем. ЛОМИ*, pages 131–145, 1980.

[19] Г. В. Кузьмина. Задачи об экстремальном разбиении римановой сферы. *Зап. научн. сем. ПОМИ*, 276:253–275, 2001.

[20] М. А. Лаврентьев. К теории конформных отображений. *Тр. Физ.-мат.ин-та АН СССР.*, 5:159–245, 1934.

[21] Н. А. Лебедев. *Принцип площадей в теории однолистных функций.* М.: Наука, 1975.

[22] Г. Полиа, Г. Сеге. *Изопереметрические неравенства в математической физике.* М.: Физматгиз, 1962.

[23] П. М. Тамразов. Экстремальные конформные отображения и полюсы квадратичных дифференциалов. *Известия АН СССР, серия мат.*, 32(5):1033–1043, 1968.

Я. В. Заболотний

Інститут математики НАН України, м. Київ

Email: yaroslavzabolotnii@gmail.com

ORCID: orcid.org/0000-0002-1878-2077

Збірник праць Ін-ту математики НАН України (2022) Т. 19, № 1, 153–171

Топологічні та геометричні властивості узагальнено опуклих множин і задача про тінь

Т. М. Осіпчук

Присвячується пам'яті професора Олександра Бахтіна

Abstract. This paper reviews the results of the theory of m-convex and m-semiconvex sets in the space $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, $m = 1, 2, \ldots, n-1$. A list of shadow problems consisting in finding certain conditions of the belonging of some fixed point in the space $\mathbb{R}^n$ to the m-convex or m-semiconvex hull of a family of compact sets, is separately highlighted.

Анотація. В даній роботі зроблено огляд результатів теорії m-опуклих та m-напівопуклих множин у просторі $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, $m = 1, 2, \ldots, n-1$. Окремо виділено цикл задач про тінь, які полягають у знаходженні певних умов належності деякої фіксованої точки простору $\mathbb{R}^n$ m-опуклій чи m-напівопуклій оболонці сім'ї компактних множин.

1. Вступ

У роботах Юрія Зелінського та його учнів закладено основи теорії m-опуклих та m-напівопуклих множин у багатовимірному дійсному просторі $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, $m = 1, 2, \ldots, n-1$, центральні поняття якої є дійсними аналогами лінійно опуклих (lineally convex) множин у багатовимірному комплексному просторі $\mathbb{C}^n$, $n \geq 2$. Поняття лінійно опуклої множини було введено у 1935 році німецькими математиками Генріхом Бенке та Ернстом Пешлем [2] для двовимірного комплексного простору. Проте широкого застосування це поняття набуло завдяки роботам французького математика Андре Мартіно та радянського Льва Айзенберга, які

2010 Mathematics Subject Classification: 32F17, 52A30

УДК 514.172

Ключові слова: m-опукла множина, слабко m-опукла множина, m-напівопукла множина, слабко m-напівопукла множина, m-опукла оболонка, m-напівопукла оболонка, задача про тінь

незалежно один від одного розглядали лінійно опуклі множини у просторі $\mathbb{C}^n$, $n \geq 2$. Перший автор в означенні лінійно опуклої множини використовував усі точки з доповнення множини до всього простору $\mathbb{C}^n$, а другий — точки межі області.

Означення 1.1 (А. Мартіно [4]). *Множина у просторі $\mathbb{C}^n$ називається* ***лінійно опуклою****, якщо її доповнення до всього простору $\mathbb{C}^n$ є об'єднанням комплексних гіперплощин.*

Означення 1.2 (Л. Айзенберг [1]). *Область у просторі $\mathbb{C}^n$ називається* ***лінійно опуклою****, якщо через кожну точку межі області проходить комплексна гіперплощина, яка цю область не перетинає.*

Керуючись схожими міркуваннями, Ю. Зелінський запропонував розглянути m-опуклі множини у просторі $\mathbb{R}^n$, які є дійсним аналогом лінійно опуклих множин за Мартіно і властивості яких досліджувалися починаючи з 80-х років у роботах Ю. Зелінського, О. Герасіна, В. Мельник, І. Момот та інших (див. літературу в [14]), а також слабко m-опуклі множини, які, відповідно, є дійсним аналогом лінійно опуклих множин за Айзенбергом.

Ще одним узагальненням поняття опуклості є m-напівопуклість. Множини з цього класу, по аналогії з m-опуклістю, розділяються на m-напівопуклі та слабко m-напівопуклі. Поняття m-напівопуклої множини, зокрема, узагальнює поняття лінійно досяжної (linearly accessible) області з теорії однолистих функції.

Означення 1.3 (М. Бернацький [3]). *Область у комплексній площині називається* ***лінійно досяжною****, якщо її доповнення до всієї площини є об'єднання променів, які не перетинаються, окрім тих випадків, коли початок одного променя може належати іншому такому променю.*

Не дивлячись на те, що поняття (слабко) m-опуклих та (слабко) m-напівопуклих множин фактично отримані заміною комплексних гіперплоскостей в означеннях 1.1, 1.2 на m-вимірні дійсні площини та півплощини, сама теорія цих множин не є повним дійсним аналогом теорії лінійно опуклих множин. Відрізняється вона і від теорії опуклих множин. Нові властивості (слабко) m-опуклих і (слабко) m-напівопуклих множин розглянуто у розділі 1.

Ю. Зелінським та його учнями і колегами також сформульовано та розв'язано низку аналогів задачі про тінь, поставленої Гульмірзою Худайбергановим у 1982 році [33]. Ці задачі еквівалентні знаходженню певних умов належності деякої фіксованої точки простору $\mathbb{R}^n$ m-опуклій

(m-напівопуклій) оболонці сім'ї компактних множин. Задачу про тінь та її аналоги розглянуто в розділі 2.

2. Узагальнено опуклі множини

2.1. **m-опуклі та слабко m-опуклі множини.** Будемо використовувати наступні стандартні позначення. Для множини $G \subset \mathbb{R}^n$ нехай $\overline{G}$ — її замикання, $\operatorname{Int} G$ — її внутрішність, та $\partial G = \overline{G} \setminus \operatorname{Int} G$ — її межа.

Довільна m-вимірна площина простору $\mathbb{R}^n$, $m = 0, 1, \ldots, n-1$, називається ***m-площиною***; $(n-1)$-площина називається ***гіперплощиною*** [9].

Означення 2.2 ([14]). *Множина $E \subset \mathbb{R}^n$ називається **m-опуклою відносно точки** $x \in \mathbb{R}^n \backslash E$, якщо знайдеться m-вимірна площина L, така що $x \in L$ і $L \cap E = \varnothing$.*

Означення 2.3 ([14]). *Множина $E \subset \mathbb{R}^n$ називається **m-опуклою**, якщо вона m-опукла відносно кожної точки $x \in \mathbb{R}^n \backslash E$.*

В роботі [14] Ю. Зелінським досліджено властивості m-опуклих компактів у просторі $\mathbb{R}^n$, пов'язані з оцінкою їх груп когомологій. Вивченню властивостей $(n-1)$-опуклих множин у просторі $\mathbb{R}^n$ присвячено роботи В. Л. Мельник [25], а при деяких додаткових умовах А. І. Герасіна [10], [11]. Зокрема, в роботі [25] отримана топологічна класифікація $(n-1)$-опуклих множин простору $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, з гладкою межею:

Теорема 2.4 ([25]). *Довільна $(n-1)$-опукла множина у просторі $\mathbb{R}^n$ з гладкою межею є або опуклою, або складається не більше ніж з двох необмежених зв'язних компонент, або задається декартовим добутком $E^1 \times \mathbb{R}^{n-1}$, де $E^1 \subset \mathbb{R}$.*

Означення 2.5 ([22]). *Відкрита множина $E \subset \mathbb{R}^n$ називається **слабко m-опуклою**, якщо вона m-опукла відносно кожної точки $x \in \partial E$.*

Означення 2.6 ([1]). *Кажуть, що множина A апроксимується ззовні сім'єю відкритих множин A_k, $k = 1, 2, \ldots$, якщо $\overline{A}_{k+1}$ міститься в A_k та $A = \cap_k A_k$.*

Неважко показати, що всяка множина, яка апроксимується ззовні сім'єю відкритих множин, замкнена.

Означення 2.7 ([24]). *Замкнена множина $E \subset \mathbb{R}^n$ називається **слабко m-опуклою**, якщо вона апроксимується ззовні сім'єю відкритих слабко m-опуклих множин.*

Теорема 2.8 ([7]). *Непорожня внутрішність замкненої слабко* 1-*опуклої множини зі скінченним числом компонент зв'язності на евклідовій площині також слабко* 1-*опукла.*

Теорема 2.9 ([13]). *Якщо* E_1 *і* E_2 *відповідно слабко* k-*опукла і слабко* m-*опукла множини,* $k \leq m$, *то множина* $E_1 \cap E_2$ *слабко* k-*опукла.*

Теорема 2.10 ([21]). *Довільний набір із трьох куль з однаковими радіусами, які попарно не перетинаються, утворює слабко* 1-*опуклу множину у тривимірному евклідовому просторі.*

Теорема 2.11 ([12]). *Кожна слабко* $(n-1)$-*опукла відкрита множина у просторі* $\mathbb{R}^n$ *з гладкою межею є* $(n-1)$-*опуклою.*

Теорема 2.12 ([12]). *Кожна компонента слабко* $(n-1)$-*опуклої відкритої множини є опуклою.*

Наслідок 2.13 ([12]). *Довільна слабко* $(n-1)$-*опукла множина у просторі* $\mathbb{R}^n$ *з гладкою межею є або опуклою, або складається не більше ніж з двох необмежених зв'язних компонент, або задається декартовим добутком* $E^1 \times \mathbb{R}^{n-1}$, *де* $E^1 \subset \mathbb{R}$.

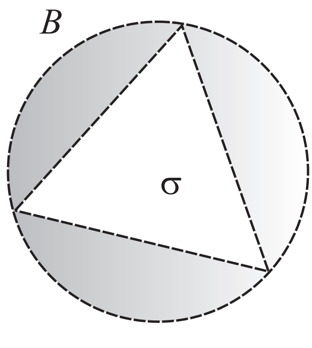

Рис. 2.1. Слабко 1-опукла та не 1-опукла множина

Довільна відкрита m-опукла множина вочевидь є слабко m-опуклою у просторі $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, $1 \leq m \leq n-1$. Зворотне твердження не є вірним для всіх вказаних n і m. В [13] побудовано простий та елегантний приклад відкритої слабко 1-опуклої, але не 1-опуклої множини.

Приклад 2.14 ([13]). Нехай $B = \{(x, y) : x^2 + y^2 < 1\}$ — відкритий круг на площині xOy. Виберемо три точки на колі, яке обмежує круг і розглянемо симплекс σ з вершинами в цих точках. Тоді множина $E =$

$B \setminus \sigma$, яка складається з трьох компонент зв'язності, слабко 1-опукла, але не 1-опукла (див. Рис 2.1).

Цікаво, що три є мінімальним числом компонент для відкритої слабко 1-опуклої, але не 1-опуклої множини на площині. Тобто, справедлива така

Теорема 2.15 ([12]). *Кожна відкрита слабко $(n-1)$-опукла множина $E \subset \mathbb{R}^n$, яка не є $(n-1)$-опуклою, складається не менше ніж з трьох компонент зв'язності.*

В роботі [7] встановлюється, що для замкнених слабко $(n-1)$-опуклих і не $(n-1)$-опуклих множин у просторі $\mathbb{R}^n$, справедлива така ж оцінка знизу числа їх компонент зв'язності, як і у випадку відкритих множин. Для цього, зокрема, будуються приклади відкритих і замкнених слабко $(n-1)$-опуклих і не $(n-1)$-опуклих множин з трьома і більше компонентами зв'язності. А також доводиться, що довільна замкнена слабко m-опукла і не m-опукла множина простору $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, $1 \leq m \leq n-1$, може апроксимуватися ззовні сім'єю відкритих слабко m-опуклих і не m-опуклих множин із числом компонент зв'язності, яке не перевищує число компонент замкненої множини. В роботі [29] встановлюється існування слабко m-опуклих і не m-опуклих областей у просторах $\mathbb{R}^n$, $n \geq 3$, $1 \leq m < n-1$. Спочатку будуються приклади слабко 1-опуклих і не 1-опуклих областей $E^p \subset \mathbb{R}^p$ для довільного $p \geq 3$. А далі доводиться, що область $E^p \times \mathbb{R}^{m-1} \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 3$, $1 \leq m < n-1$, слабко m-опукла і не m-опукла. Існування замкнених, зв'язних, слабко m-опуклих і не m-опуклих множин у просторах $\mathbb{R}^n$, $n \geq 3$, $1 \leq m < n-1$, встановлено в роботі [7].

Нижче наведено приклад замкненої слабко 1-опуклої і не 1-опуклої множини на площині з трьома та більше компонентами і приклад слабко 1-опуклої та не 1-опуклої області у просторі $\mathbb{R}^3$.

Приклад 2.16 ([29]). Нехай γ_k^α, $k = 1,2,3$, $\alpha = [0,1]$, — прямі, що попарно перетинаються в точках

$$a^\alpha = \gamma_1^\alpha \cap \gamma_2^\alpha,\ b^\alpha = \gamma_2^\alpha \cap \gamma_3^\alpha,\ c^\alpha = \gamma_3^\alpha \cap \gamma_1^\alpha,\ \alpha = [0,1].$$

При цьому, при кожному фіксованому $k \in \{1,2,3\}$, усі прямі γ_k^α, $\alpha = [0,1]$, паралельні; відстань між прямими $\gamma_k^{\alpha_1}$ й $\gamma_k^{\alpha_2}$, де $\alpha_1 < \alpha_2$, $\alpha_1, \alpha_2 \in [0,1]$, дорівнює $\alpha_2 - \alpha_1$; і

$$\triangle a^{\alpha_1} b^{\alpha_1} c^{\alpha_1} \supset \triangle a^{\alpha_2} b^{\alpha_2} c^{\alpha_2}.$$

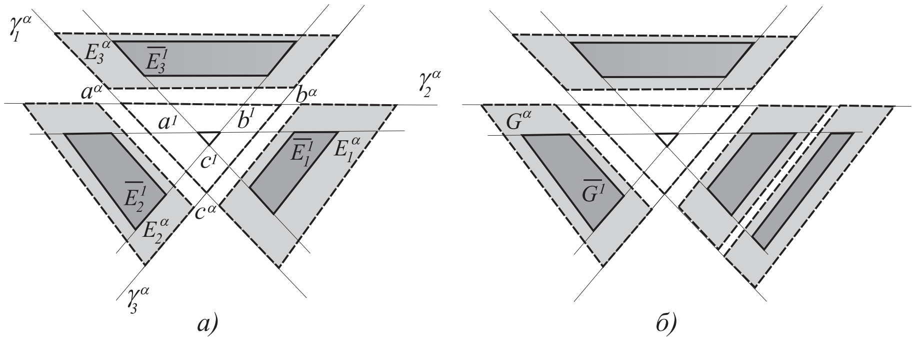

Рис. 2.2. Приклад 2.16

У кут між прямими γ_1^α, γ_2^α, який містить трикутник $a^\alpha b^\alpha c^\alpha$, вписуємо область E_1^α, обмежену трапецією, так, щоб

$$\overline{E_1^\alpha} \cap \overline{\triangle a^\alpha b^\alpha c^\alpha} = \varnothing \text{ та } E_1^{\alpha_1} \supset \overline{E_1^{\alpha_2}},\ \alpha_1 < \alpha_2,\ \alpha_1, \alpha_2 \in [0,1].$$

Аналогічно будуємо область E_2^α між прямими γ_2^α, γ_3^α та область E_3^α між прямими γ_3^α, γ_1^α.

Тоді кожна відкрита множина

$$E^\alpha = \bigcup_{l=1}^{3} E_l^\alpha, \quad \alpha \in [0,1],$$

слабко 1-опукла та не 1-опукла, оскільки через кожну точку ∂E^α можна провести пряму, яка не перетинає E^α, проте довільна пряма, яка проходить через довільну точку внутрішності трикутника $a^\alpha b^\alpha c^\alpha$, $\alpha \in [0,1]$, перетинає принаймні одну з компонент E_l^α, $l = 1,2,3$, множини E^α (див. Рис 2.2 а)).

Із сім'ї множин E^α, $\alpha \in [0,1)$, вочевидь, можна вибрати зчисленну підсім'ю E^k, $k = 1,2,\ldots$, якою апроксимується ззовні множина $\overline{E^1} = \bigcup\limits_{l=1}^{3} \overline{E_l^1}$. Отже, замкнена множина $\overline{E^1}$ слабко 1-опукла. При цьому вона не є 1-опуклою, оскільки довільна пряма, яка проходить через довільну точку $\overline{\triangle a^1 b^1 c^1}$, перетинає принаймні одну з компонент $\overline{E_l^1}$, $l = 1,2,3$, множини $\overline{E^1}$.

За допомогою множин E^α, $\alpha \in [0,1)$, $\overline{E^1}$ легко побудувати відкриті слабко 1-опуклі, але не 1-опуклі множини G^α, $\alpha \in [0,1]$, і замкнену слабко 1-опуклу, але не 1-опуклу множину $\overline{G^1}$ з довільним скінченним більше трьох або навіть зчисленним числом компонент зв'язності, якщо продовжувати вписувати області, обмежені трапеціями з паралельними основами, у кути між прямими γ_k^α, $k = 1,2,3$, $\alpha \in [0,1]$ (див. Рис 2.2 б)).

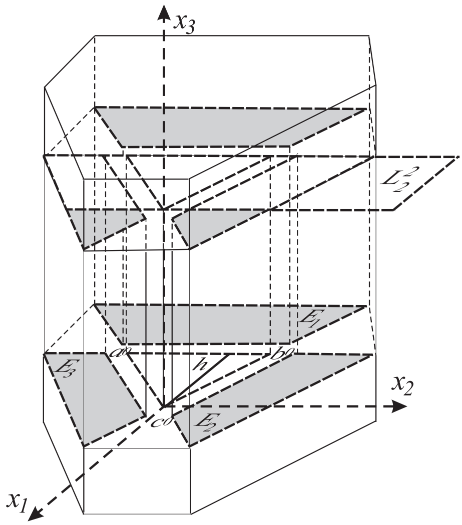

Рис. 2.3. Приклад 2.17

Приклад 2.17 ([29]). Розгляньмо відкриту множину E^0 із прикладу 2.16. Нехай $\tilde{\tilde{E}}^3 := E^0 \times [0,1]$. Нехай $P^2 \subset \mathbb{R}^2$ — це опукла оболонка множини E^0. Побудуймо призми $P_1^3 := P^2 \times \left[-\dfrac{1}{3}, 0\right]$, $P_2^3 := P^2 \times \left[1, 1\dfrac{1}{3}\right]$. Тепер розгляньмо множину

$$\tilde{E}^3 := \operatorname{Int}(P_1^3 \cup \tilde{\tilde{E}}^3 \cup P_2^3).$$

Вона 1-опукла відносно кожної точки $\partial\tilde{E}^3$, окрім точок трикутників

$$\{(x_1, x_2, x_3) \in \partial\tilde{E}^3 : (x_1, x_2) \in \operatorname{Int}(\triangle a^0 b^0 c^0), x_3 = 0, 1\}. \tag{2.1}$$

Щоб побудувати множину, 1-опуклу відносно кожної точки її межі, вилучмо з множини $\tilde{E}^3$ смуги, які містять трикутники (2.1) (див. Рис. 2.3). Нехай h — це висота $\triangle a^0 b^0 c^0$, опущена з вершини c^0. Тоді множини

$$L_1^2 := \{(x_1, x_2, x_3) \in \tilde{E}^3 : (x_1, x_2) \in h \times (-\infty, \infty), x_3 = 0\},$$

$$L_2^2 := \{(x_1, x_2, x_3) \in \tilde{E}^3 : (x_1, x_2) \in h \times (-\infty, \infty), x_3 = 1\}$$

містять трикутники (2.1), а множина

$$E^3 := \tilde{E}^3 \setminus (\overline{L_1^2} \cup \overline{L_2^2}) \tag{2.2}$$

слабко 1-опукла. При цьому довільна пряма, яка проходить через точки відкритої призми $L^3 := \operatorname{Int}(\triangle a^0 b^0 c^0) \times (0, 1)$, перетинає множину E^3. Отже, відкрита зв'язна множина $E^3 \subset \mathbb{R}^3$ є слабко 1-опукла, але не 1-опукла.

У роботі [22] досліджуються властивості класу узагальнено опуклих множин на грасманових многовидах, тісно пов'язані з властивостями так званих спряжених множин (див. означення 2, [22]). Цей клас включає в себе m-опуклі множини та слабко m-опуклі області простору $\mathbb{R}^n$.

Не важко показати, що перетин довільного числа m-опуклих множин, знову буде m-опуклою множиною [31]. Тоді по аналогії з опуклою оболонкою дається означення мінімальної m-опуклої множини, що містить довільну задану множину простору $\mathbb{R}^n$.

Означення 2.18 ([31])**.** *Перетин усіх m-опуклих множин, при фіксованому m, які містять задану множину $X \subset \mathbb{R}^n$ називається* ***m-опуклою оболонкою*** *множини X і позначається*

$$\operatorname{conv}_m X = \bigcap_{K \supset X} K, \quad \text{де } K - m\text{-опуклі множини.}$$

Означення 2.19 ([29])**.** *Точка $x \in \mathbb{R}^n \setminus E$ називається* ***точкою m-неопуклості множини*** *$E \subset \mathbb{R}^n$, якщо всі m-площини, які містять x, перетинають множину E.* ***Множина точок m-неопуклості*** *множини $E \subset \mathbb{R}^n$ позначається $E_m^{\triangle}$, при цьому*

$$E^{\triangle} := E_1^{\triangle}, \quad E \subset \mathbb{R}^2.$$

Теорема 2.20 ([30])**.** *Для довільної множини $E \subset \mathbb{R}^n$ справедливо, що*

$$\operatorname{conv}_m E = E \cup E_m^{\triangle}, \quad m = 1, 2, \ldots, n-1.$$

Теорема 2.21 ([30])**.** *Нехай множина $E \subset \mathbb{R}^n$ обмежена та не m-опукла, $1 \leq m < n$. Тоді множина $E_m^{\triangle}$ обмежена.*

Теорема 2.22 ([30])**.** *Нехай відкрита слабко 1-опукла, але не 1-опукла множина $E \subset \mathbb{R}^2$ складається зі скінченного числа компонент зв'язності. Тоді $E^{\triangle}$ відкрита.*

Теорема 2.23 ([30])**.** *Нехай обмежена відкрита слабко 1-опукла, але не 1-опукла множина $E \subset \mathbb{R}^2$ складається зі скінченного числа компонент зв'язності рівному s. Тоді кожна компонента множини $E^{\triangle}$ — внутрішність опуклого многокутника з числом вершин, що дорівнює p, при чому $p \leq 2s$.*

Теорема 2.24 ([30])**.** *Для довільного опуклого многокутника P, існує відкрита слабко 1-опукла, але не 1-опукла множина E така, що $E^{\triangle} = \operatorname{Int} P$.*

2.25. **m-напівопуклі та слабко m-напівопуклі множини.** Одна з двох замкнених частин m-площини, $m \geq 1$, простору $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, на які вона розбивається своєю довільною $(m-1)$-площиною, називається ***m-півплощиною*** [9].

Означення 2.26 ([16])**.** *Скажемо, що множина $E \subset \mathbb{R}^n$ m-**напівопукла відносно точки** $x \in \mathbb{R}^n \setminus E$, якщо знайдеться m-півплощина P, така що $x \in P$ і $P \cap E = \varnothing$.*

Означення 2.27 ([16])**.** *Скажемо, що множина $E \subset \mathbb{R}^n$ m-**напівопукла**, якщо вона m-напівопукла відносно кожної точки $x \in \mathbb{R}^n \setminus E$.*

Лема 2.28 ([12])**.** *Кожна обмежена $(n-1)$-напівопукла множина $E \subset \mathbb{R}^n$ не розбиває простору $\mathbb{R}^n$.*

Означення 2.29 ([24])**.** *Відкрита множина $E \subset \mathbb{R}^n$ називається **слабко m-напівопуклою**, якщо вона m-напівопукла відносно кожної точки $x \in \partial E$.*

Лема 2.30 ([12])**.** *Кожна обмежена слабко $(n-1)$-напівопукла множина $E \subset \mathbb{R}^n$ не розбиває простору $\mathbb{R}^n$.*

Означення 2.31 ([24])**.** *Замкнена множина $E \subset \mathbb{R}^n$ називається **слабко m-напівопуклою**, якщо вона апроксимується ззовні сім'єю відкритих слабко m-напівопуклих множин.*

Теорема 2.32 ([8])**.** *Непорожня внутрішність замкненої слабко 1-напівопуклої множини зі скінченним числом компонент зв'язності на евклідовій площині також слабко 1-напівопукла.*

Довільна відкрита 1-напівопукла множина на площині вочевидь є слабко 1-напівопуклою. Зворотнє твердження, взагалі кажучи, не є вірним, що доводить наступний приклад.

Приклад 2.33 ([24])**.** Нехай $B = \{(x, y) : x^2 + y^2 < 1\}$ — відкритий круг на площині xOy. Виберемо три точки a, c, b всередині круга і розглянемо симплекс σ з вершинами в цих точках (див. Рис. 2.4). Продовжимо сторони трикутника $[a, c]$, $[c, b]$, $[b, a]$ в напрямку другої координати до перетину з колом в точках d, e, f, відповідно. Тоді множина $E = B \setminus \sigma \setminus ([a, d] \cup [c, e] \cup [b, f])$ слабко 1-напівопукла, але не 1-напівопукла.

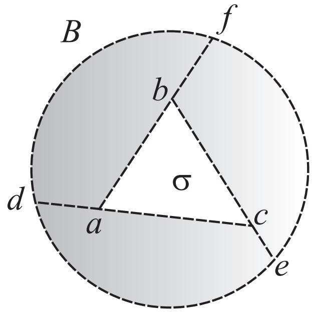

Рис. 2.4. Слабко 1-напівопукла та не 1-напівопукла множина

Теорема 2.34 ([24]). *Довільна відкрита слабко 1-напівопукла множина на евклідовій площині, яка не є 1-напівопуклою, незв'язна.*

Теорема 2.35 ([12], [8]). *Довільна відкрита або замкнена слабко 1-напівопукла множина на евклідовій площині, яка не є 1-напівопуклою, складається не менше ніж з трьох компонент зв'язності.*

В роботі [8] будуються приклади відкритих і замкнених слабко 1-напівопуклих і не 1-напівопуклих множин з трьома і більше компонентами зв'язності. А також встановлюється існування слабко m-напівопуклих і не m-напівопуклих областей і замкнених зв'язних множин у просторах $\mathbb{R}^n$, $n \geq 3$, $1 \leq m < n-1$. Задача знаходження мінімального числа компонент зв'язності слабко $(n-1)$-напівопуклих і не $(n-1)$-напівопуклих множин у просторах $\mathbb{R}^n$, $n \geq 3$, залишається відкритою.

Означення 2.36 ([6]). *Точка $x \in \mathbb{R}^n \setminus E$ називається* ***точкою** m**-ненапівопуклості множини*** $E \subset \mathbb{R}^n$, *якщо всі m-півплощини, які містять x, перетинають множину E.*

Означення 2.37 ([6]). *Скажемо, що множина $A \subset \mathbb{R}^n$* ***проектується****, на множину $B \subset \mathbb{R}^n$ з точки $x \in \mathbb{R}^n$, якщо всі промені, які починаються в точці x і перетинають множину A, перетинають також множину B.*

Лема 2.38 ([6]). *Нехай відкрита слабко 1-напівопукла, але не 1-напівопукла множина $E \subset \mathbb{R}^2$ має три компоненти зв'язності. Тоді жодна з її компонент не проектується на об'єднання решти з довільної точки 1-ненапівопуклості множини E.*

Скажемо, що компонента зв'язності відкритої обмеженої множини на площині має гладку межу, якщо її межа – це образ C^1-вкладення одиничного кола. Скажемо, що відкрита обмежена множина на площині має гладку межу, якщо кожна з її компонент має гладку межу.

Теорема 2.39 ([6]). *Довільна відкрита обмежена слабко 1-напівопукла множина на евклідовій площині, яка не є 1-напівопуклою і з гладкою межею, складається не менше ніж з чотирьох компонент зв'язності.*

Наслідок 2.40 ([6]). *Нехай відкрита обмежена слабко 1-напівопукла, але не 1-напівопукла множина $E \subset \mathbb{R}^2$ з гладкою межею має чотири компоненти зв'язності. Тоді жодна з її компонент не проектується на об'єднання решти з довільної точки 1-ненапівопуклості множини E.*

Теорема 2.41 ([8]). *Довільна замкнена обмежена слабко 1-напівопукла множина на евклідовій площині, яка не є 1-напівопуклою, з гладкою межею та не 1-напівопуклою внутрінішністю, складається не менше ніж з чотирьох компонент зв'язності.*

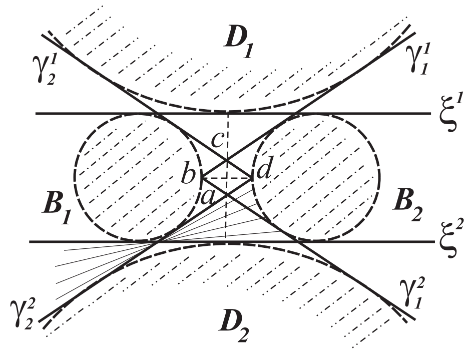

Рис. 2.5. Приклад 2.42

В [6] побудовано приклад відкритої слабко 1-напівопуклої, але не 1-напівопуклої множини з гладкою межею.

Приклад 2.42 ([6]). Нехай $B_1 = \{(x, y) : (x + 2)^2 + y^2 < 1\}$, $B_2 = \{(x, y) : (x - 2)^2 + y^2 < 1\}$ — відкриті круги на площині xOy. Проведемо промінь γ_1^1 (промінь γ_1^2), який починається в точці $(-1, 0) \in \partial B_1$, є дотичним до B_2 і лежить над віссю Ox (під віссю Ox) (див. Рис. 2.5). Аналогічно проведемо промінь γ_2^1 (промінь γ_2^2), який починається в точці $(1, 0) \in \partial B_2$, є дотичним до B_1 і лежить над віссю Ox (під віссю Ox).

Проведемо також пряму ξ^1 (пряму ξ^2), паралельну осі Ox, дотичну до кругів B_1, B_2, і таку, що проходить над (під) віссю Ox. Побудуймо круг D_1 з центром на осі Oy вище точки $(0,1)$ і дотичний до γ_1^1, γ_2^1, ξ^1 і круг D_2 з центром на осі Oy нижче точки $(0,-1)$ і дотичний до γ_1^2, γ_2^2, ξ^2. Тоді множина $E = B_1 \cup B_2 \cup D_1 \cup D_2$ слабко 1-напівопукла, але не 1-напівопукла, при цьому точки всередині ромба $abcd$ є точками 1-ненапівопуклості.

У [8] також побудовано приклад замкненої слабко 1-напівопуклої, але не 1-напівопуклої множини з гладкою межею.

3. Задача про тінь

3.1. **Задача про тінь в дійсному евклідовому просторі.** Задача про тінь Г. Худайберганова [33] полягає в тому, щоб: *знайти мінімальне число відкритих (замкнених) куль у просторі $\mathbb{R}^n$, які попарно не перетинаються, з центрами на сфері S^{n-1} (див.* [9]*), не містять центр сфери і такі, що довільна пряма, яка проходить через центр сфери, перетинає принаймні одну з куль.*

Ю. Зелінський [20] переформулював її в термінах 1-опуклої оболонки: *яка мінімальна кількість відкритих (замкнених) куль у просторі $\mathbb{R}^n$, які попарно не перетинаються, з центрами на сфері S^{n-1} та радіусами не більшими (меншими) за радіус сфери, забезпечать належність центра сфери 1-опуклій оболонці сім'ї цих куль?*

Кажуть, що сім'я множин ***створює тінь в точці***, якщо довільна пряма, яка проходить через точку, перетинає принаймні одну множину із сім'ї.

Задача була розв'язана Г. Худайбергановим для випадку при $n = 2$: було показано, що для кола на площині достатньо двох кругів [33]. Там же було зроблено припущення про те, що для випадку $n > 2$ мінімальне число куль дорівнює n. В роботах [20], [19] доведено, що для $n = 3$ трьох куль не достатньо, при цьому чотири кулі вже будуть створювати тінь в центрі сфери. Там же доводиться, що в загальному випадку мінімальне число куль дорівнює $n + 1$.

В [23] задачу про тінь узагальнено на довільну точку внутрішності круга на площині.

Теорема 3.2 ([23])**.** *Мінімальне число відкритих (замкнених) кругів, які попарно не перетинаються, з центрами на колі, радіусами не більшими (меншими) за радіус кола і створюють тінь в кожній точці всередині кола, дорівнює трьом.*

В [32] поставлено та розв'язано задачу про тінь, де замість сфери розглядається видовжений еліпсоїд обертання. Показано, що *для видовженого еліпсоїда обертання з достатньо великим відношенням довжин більшої півосі до меншої, мінімальне число відкритих (замкнених) куль з центрами на еліпсоїді, які не містять його центр та створюють в ньому тінь, дорівнює трьом.*

Тоді виникає така задача: *знайти мінімальне відношення d_{min} довжин більшої півосі еліпсоїда до меншої, при якому три відкриті (замкнені) кулі з центрами на еліпсоїді і які не містять його центр, створюватимуть тінь в центрі еліпсоїда.* В [32] показано, що $d_{min} = 2\sqrt{2}$, причому це значення не досягається.

У роботах [26], [27], для довільної обмеженої області $D \subset \mathbb{R}^n$, $n = 2, 3$, і довільної фіксованої точки $x \in D$, отримано точну верхню оцінку мінімального числа куль у просторі $\mathbb{R}^n$, які попарно не перетинаються, з центрами на межі області D, не містять точку x і створюють в точці x тінь.

Теорема 3.3 ([26], [27])**.** *Для довільної обмеженої області $D \subset \mathbb{R}^2$ ($D \subset \mathbb{R}^3$) і довільної фіксованої точки $x \in D$, існує набір із двох (чотирьох) відкритих або замкнених кругів (куль), які попарно не перетинаються, з центрами на межі області, не містять точку x і створюють в точці x тінь.*

В роботі [28] частково дається відповідь на наступне питання:

Задача 3.4 ([28])**.** Яка мінімальна кількість $m(x)$ відкритих (замкнених) куль у просторі $\mathbb{R}^3$, які попарно не перетинаються, з центрами на сфері $S^2(r)$ радіуса r і центром в початку координат, не містять деяку фіксовану точку x всередині сфери і створюють в точці x тінь?

Теорема 3.5 ([28])**.** *$m(x) = 3$ для кожної точки $x \in \mathbb{R}^3$ такої, що $\frac{7}{9}r \leq \|x\| \leq r$.*

В роботі [17] розв'язано задачу Худайберганова з посиленими умовами на радіуси куль.

Задача 3.6 ([18])**.** Яка мінімальна кількість відкритих (замкнених) куль з однаковими радіусами в просторі $\mathbb{R}^3$, які попарно не перетинаються, з центрами на сфері S^2, не містять центр сфери і створюють в ньому тінь?

Розв'язок цієї задачі міститься у наступних трьох теоремах.

Теорема 3.7 ([17]). *Існує набір з $(n+1)$-ї замкненої кулі з однаковими радіусами в просторі $\mathbb{R}^n$, з центрами на сфері S^{n-1}, які не містять центр сфери і створюють в ньому тінь, якщо кулі можуть дотикатися одна одної.*

Теорема 3.8 ([17]). *Не існує набору відкритих куль з однаковими радіусами в просторі $\mathbb{R}^3$, які попарно не перетинаються, з центрами на сфері S^2, не містять центр сфери і створюють в ньому тінь.*

Теорема 3.9 ([17]). *Не існує набору з $m > 4$ замкнених куль з однаковими радіусами в просторі $\mathbb{R}^3$, які попарно не перетинаються (або дотикаються), з центрами на сфері S^2, не містять центр сфери і створюють в ньому тінь.*

Наступний результат отримано для куль, центри яких не прив'язані до жодної наперед заданої множини.

Теорема 3.10 ([15]). *Мінімальне число відкритих (замкнених) куль, які попарно не перетинаються, не містять деяку фіксовану точку простору $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, і створюють в ній тінь, дорівнює n.*

В роботах [17], [21], [13], [5] розв'язується задача Худайберганова з послабленими умовами на центри куль, але з посиленими умовами на їх радіуси.

Задача 3.11 ([18]). Яка мінімальна кількість $m(n)$ відкритих (замкнених) куль з однаковими радіусами у просторі $\mathbb{R}^n$, які попарно не перетинаються, не містять фіксовану точку простору і створюють в ній тінь?

Теорема 3.12 ([17]). *Існує набір з чотирьох замкнених (відкритих) куль з однаковими радіусами у просторі $\mathbb{R}^3$, які попарно не перетинаються, не містять фіксовану точку простору і створюють в ній тінь.*

Задача 3.11 повністю розв'язана у роботах [21], [5]:

Теорема 3.13 ([21]). *У просторі $\mathbb{R}^3$, число $m(3) = 4$.*

Теорема 3.14 ([5]). *У просторі $\mathbb{R}^n$, $n \geq 3$, число $m(n) = n + 1$.*

Для набору з трьох куль з однаковими радіусами у просторі $\mathbb{R}^n$ також має місце наступне твердження.

Теорема 3.15 ([13]). *Для довільної точки $x \in \mathbb{R}^n \setminus \cup_{j=1}^{3} B_j$, де B_1, B_2, B_3 – кулі з однаковими радіусами, які попарно не перетинаються і не містять точку x, існує $(n-2)$-вимірна площина, яка проходить через точку x і не перетинає жодну з куль.*

Наступний результат показує, що в Теоремі 3.10 можна замінити кулі опуклими тілами з непорожньою внутрішністю.

Теорема 3.16 ([15]). *Для довільної фіксованої точки $x \in \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, мінімальне число попарно неперетинних відкритих (замкнених) множин, отриманих із заданої опуклої множини з непорожньою внутрішністю за допомогою групи перетворень, яка складається з рухів та гомотетій, і таких, що точка x належить їх 1-опуклій оболонці, дорівнює n.*

Якщо групу перетворень зменшити, то кількість елементів сім'ї множин, які створюють тінь в точці вочевидь може збільшитися. Але в [23] показано, що результат не зміниться, якщо з групи рухів виключити повороти.

Теорема 3.17 ([23]). *Для довільної фіксованої точки $x \in \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, мінімальне число попарно неперетинних замкнених множин, отриманих із заданої опуклої множини з непорожньою внутрішністю за допомогою групи перетворень, яка складається з паралельних перенесень та гомотетій, і таких, що точка x належить їх 1-опуклій оболонці, дорівнює n.*

3.18. **Задача про півтінь в дійсному евклідовому просторі.** Якщо в задачі Худайберганова замінити прямі на промені з початком в центрі сфери, то можна розглядати так звану задачу про півтінь.

З іншого боку, перетин m-напівопуклих множин також буде m-напівопуклою множиною. Тоді, для довільної множини $E \subset \mathbb{R}^n$ розглядатимемо мінімальну m-напівопуклу множину, яка містить E, і назвемо її m-напівопуклою оболонкою множини E.

Означення 3.19 ([31]). *Перетин всіх m-напівопуклих множин, які містять задану множину $E \subset \mathbb{R}^n$ при фіксованому m називається* ***m-напівопуклою оболонкою*** *множини E.*

В наступній теоремі дається розв'язок задачі про півтінь на площині.

Теорема 3.20 ([16], [19]). *Мінімальне число відкритих (замкнених) кругів, які попарно не перетинаються, з центрами на колі, з радіусами не більшими (меншими) за радіус кола, і таких, що центр кола належить їх 1-напівопуклій оболонці, дорівнює трьом.*

Зі збільшенням розмірності простору, задача ускладнюється.

Теорема 3.21 ([16], [19]). *Існує десять відкритих (замкнених) куль у просторі $\mathbb{R}^3$, які попарно не перетинаються, з центрами на сфері S^2, з радіусами не більшими (меншими) за радіус сфери, і таких, що центр кола належить їх 1-напівопуклій оболонці.*

Наслідок 3.22 ([16], [19]). *Існує десять відкритих (замкнених) куль у просторі $\mathbb{R}^n$, які попарно не перетинаються, з центрами на сфері $S^{(n-1)}$, з радіусами не більшими (меншими) за радіус сфери, і таких, що центр кола належить їх $(n-2)$-напівопуклій оболонці.*

Задача 3.23 ([18]). Яка мінімальна кількість відкритих (замкнених) куль з однаковими радіусами у просторі $\mathbb{R}^3$, які попарно не перетинаються не містять задану точку простору і такі, що довільний промінь, який проходить через цю точку, перетинає принаймні одну з куль?

В наступній теоремі отримана оцінка зверху для задачі 3.23.

Теорема 3.24 ([21]). *Для довільної фіксованої точки $x \in \mathbb{R}^3$, існує набір із вісьми відкритих (замкнених) куль з однаковими радіусами у просторі $\mathbb{R}^3$, які попарно не перетинаються, не містять точку x і такі, що x належить їх 1-напівопуклій оболонці.*

Якщо радіуси куль не фіксувати, то отримаємо такий результат.

Теорема 3.25 ([15]). *Для довільної фіксованої точки $x \in \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, мінімальне число відкритих (замкнених) куль, які попарно не перетинаються, не містять точку x, і таких, що x належить їх 1-напівопуклій оболонці, дорівнює $n+1$.*

Наступний результат показує, що в попередній теоремі можна замінити замкнені кулі опуклими замкненими тілами з непорожньою внутрішністю.

Теорема 3.26 ([15]). *Для довільної фіксованої точки $x \in \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, мінімальне число попарно неперетинних замкнених множин, отриманих із заданої опуклої множини з непорожньою внутрішністю за допомогою групи перетворень, яка складається з рухів та гомотетій,* *і таких, що точка x належить їх 1-напівопуклій оболонці, дорівнює $n + 1$.*

Але, якщо зменшувати групу допустимих перетворень, то кількість множин, таких, що задана точка простору $\mathbb{R}^n$ належить їх 1-напівопуклій оболонці, збільшується.

Теорема 3.27 ([23]). *Для довільної фіксованої точки $x \in \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, мінімальне число попарно неперетинних замкнених множин, отриманих із заданої опуклої множини з непорожньою внутрішністю за допомогою групи перетворень, яка складається з паралельних перенесень та гомотетій, і таких, що точка x належить їх 1-напівопуклій оболонці, дорівнює $2n$.*

3.28. **Задача про тінь дотичну до многовиду.**

Означення 3.29 ([13]). *Скажемо, що сім'я множин $\mathfrak{F} = \{F_\alpha\}$* ***створює тінь, дотичну до многовиду*** *M в точці $x \in M \setminus \cup_\alpha F_\alpha$, якщо кожна пряма, дотична до многовиду M в точці x, має непорожній перетин хоча б з однією з множин F_α, яка належить до сім'ї $\mathfrak{F}$.*

Задача 3.30. Яка мінімальна кількість відкритих (замкнених) куль у просторі $\mathbb{R}^3$, що попарно не перетинаються, з центрами на сфері S^2, не містять точку $x \in S^2$ і такі, що створюють тінь, дотичну до сфери в точці x?

Теорема 3.31 ([13]). *Існує набір із 14 відкритих (замкнених) куль $_i$, $i = \overline{1, 14}$, у просторі $\mathbb{R}^3$, що попарно не перетинаються, з центрами на сфері S^2 і не створюють тінь, дотичну до сфери в кожній точці $x \in S^2 \setminus \cup_{i=1}^{14} B_i$.*

Теорема 3.32 ([12]). *Існує система з 16 куль у просторі $\mathbb{R}^3$ з центрами на сфері S^2, які створюють тінь, дотичну до сфери.*

Література

[1] L. A. Aizenberg. Decomposition of holomorphic functions of several complex variables into partial fractions. *Sibirskii Matematicheskii Zhurnal*, 8(5):859–872, 1967.

[2] H. Behnke, E. Peschl. Zur theorie der funktionen mehrererkomplexer veränderlichen konvexität in bezug auf analytischeebenen im kleinen und großen. *Math. Ann.*, 111(2):158–177, 1935.

[3] M. Biernacki. Sur la representation conforme des domaines iineairement accessibles. *Prace Mat. Fiz.*, 44:293–314, 1937.

[4] A. Martineau. Sur la topologie des espaces de fonctions holomorphes. *Math. Ann.*, 163(1):62–88, 1966.

[5] T. M. Osipchuk. On system of balls with equal radii generating shadow at point. *Bull. Soc. Sci. Lett. Lodz, Ser. Rech. Deform.*, 68(2):77–84, 2018.
[6] T. M. Osipchuk. On semiconvexity of open sets with smooth boundary in the plane. *Proceedings of the International Geometry Center*, 12(4):69–88, 2019.
[7] T. M. Osipchuk. On closed weakly m-convex sets. *Proceedings of the International Geometry Center*, 15(1):50–65, 2022.
[8] T. M. Osipchuk. Topological properties of closed weakly m-semiconvex sets. *J. Math. Sci.*, 260:678–692, 2022.
[9] B. A. Rozenfeld. *Multi-dimensional spaces.* Moskow: Nauka, 1966.
[10] А. И. Герасин. Об $(n-1)$-выпуклых множествах. *Некоторые вопросы анализа и дифференциал. топологии: Сб. Науч. Тр. Киев: Ин-тут математики АН УССР*, pages 8–14, 1988.
[11] А. И. Герасин. Обозримость $(n-1)$-выпуклых множеств. *Комплексный анализ, алгебра и топология: Сб. Науч. Тр. Киев: Ин-тут математики АН УССР*, pages 20–28, 1990.
[12] Х. К. Дакхіл. Задачі про тінь та відображення постійної кратності. Рукопис дис. канд. фіз.-мат. наук, 2017.
[13] Х. К. Дакхіл, Ю. Б. Зелінський, Б. А. Кліщук. Про слабко m-опуклі множини. *Допов. Нац. акад. наук Укр.*, 224(4):603–606, 2017.
[14] Ю. Б. Зелинский. *Многозначные отображения в анализе.* К.: Наукова думка, 1993.
[15] Ю. Б. Зелинский. Задача о тени для семейства множеств. *Зб. праць Ін-ту математики НАН України*, 12(3):197–204, 2015.
[16] Ю. Б. Зелинский. Обобщенно выпуклые оболочки множеств и задача о тени. *Укр. мат. вісник*, 12(2):278–289, 2015.
[17] Ю. Б. Зелинский, И. Ю. Выговская, Х. К. Дакхил. Задача о тени для шаров фиксированного радиуса. *Укр. мат. вісник*, 68(6):657–662, 2016.
[18] Ю. Б. Зелинский, И. Ю. Выговская, Х. К. Дакхил. Задача о тени и смежные залачи. *Proceedings of the International Geometry Center*, 13(4):599–602, 2016.
[19] Ю. Б. Зелинский, И. Ю. Выговская, М. В. Стефанчук. Задача о тени. *Доп. НАН України*, (5):15–20, 2015.
[20] Ю. Б. Зелинский, И. Ю. Выговская, М. В. Стефанчук. Обобщённо выпуклые множества и задача о тени. *Укр. мат. журн.*, 67(12):1658–1666, 2015.
[21] Ю. Б. Зелинский, Х. К. Дакхил. Об одной задаче о тени для шаров фиксированного радиуса. *Праці ІПММ НАН України*, 30:75–81, 2016.
[22] Ю. Б. Зелинский, И. В. Момот. О (n, m)-выпуклых множествах. *Укр. мат. журн.*, 53(3):422–427, 2001.
[23] Ю. Б. Зелинский, М. В. Стефанчук. Узагальнення задачі про тінь. *Укр. мат. журн.*, 68(6):657–662, 2016.
[24] Ю. Б. Зелінський. Варіації до задачі про "тінь". *Зб. праць Ін-ту математики НАН України*, 14(1):163–170, 2017.
[25] В. Л. Мельник. Топологічна класифікація $(n-1)$-опуклих множин. *Укр. мат. журн.*, 50(9):1236–1243, 1998.
[26] Т. М. Осипчук. Задача о тени для областей на плоскости. *Праці ІПММ НАН України*, 30:100–105, 2016.
[27] Т. М. Осипчук, М. В. Ткачук. Задача о тени для областей в евклидовых пространствах. *Укр. мат. вісник*, 13(4):532–542, 2016.
[28] Т. М. Осіпчук. Деякі зауваження про системи куль, які створюють тінь в точці. *Праці ІПММ НАН України*, 31:109–116, 2017.

[29] Т. М. Осіпчук. Топологічні властивості слабко m-опуклих множин. *Праці ІПММ НАН України*, 34:75–84, 2020.

[30] Т. М. Осіпчук. Топологічні та геометричні властивості множини точок 1-неопуклості слабко 1-опуклої множини на площині. *Укр. мат. журн.*, 73(12):1657–1672, 2021.

[31] М. В. Стефанчук. Узагальнено опуклі множини та їх застосування. Рукопис дис. канд. фіз.-мат. наук, 2016.

[32] М. В. Ткачук, Т. М. Осіпчук. Задача о тени для эллипсоида вращения. *Зб. праць Ін-ту математики НАН України*, 12(4):246–253, 2015.

[33] Г. Х. Худайберганов. Об однородно-полиномиально выпуклой оболочке объединения шаров. Рукопись деп. в ВИНИТИ 21.02.1982, №1772 – 85 Деп., 1982.

Т. М. Осіпчук

Інститут математики НАН України, м. Київ

Email: `osipchuk.tania@gmail.com`

Збірник праць Ін-ту математики НАН України (2022) Т. 19, № 1, 172–196

Моногенні функції у просторах з комутативним множенням і гармонічні вектори

С. А. Плакса

Присвячується пам'яті професора Олександра Бахтіна

Abstract. We consider infinite-dimensional topological vector spaces with a commutative multiplication such that monogenic functions, which take values in these spaces, are associated with the three-dimensional Laplace equation. Monogenic functions are understood as continuous and differentiable in the sense of Gâteaux functions. We prove that for every harmonic vector as well as every spatial harmonic function, there exist monogenic functions generating this vector and the mentioned harmonic function. Sufficient conditions for infinite monogeneity of functions are established.

Анотація. Розглядаються нескінченновимірні топологічні векторні простори з комутативним множенням такі, що моногенні функції, які приймають значення в цих просторах, асоційовані з тривимірним рівнянням Лапласа. Моногенні функції розуміються як неперервні і диференційовні за Гато функції. Доведено, що для кожного гармонічного вектора, як і для кожної просторової гармонічної функції, існують моногенні функції, які породжують цей вектор і згадану гармонічну функцію. Встановлено достатні умови для нескінченної моногенності функцій.

2010 Mathematics Subject Classification: 30G35, 35J05

УДК 517.9

Ключові слова: рівняння Лапласа, гармонічна функція, гармоніний вектор, моногенна функція, похідна Гато, топологічний векторний простір, комутативна банахова алгебра

1. Попередні відомості

Відомо, що кожна двічі неперервно диференційовна функція $u(x, y, z)$, яка задовольняє тривимірне рівняння Лапласа

$$\Delta_3 u(x, y, z) := \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) u(x, y, z) = 0 \tag{1.1}$$

породжує вектор-функцію $\mathbf{V} = \operatorname{grad} u$, що є розв'язком системи рівнянь

$$\operatorname{div} \mathbf{V} = 0\,, \qquad \operatorname{rot} \mathbf{V} = 0 \tag{1.2}$$

яку запишемо також у розгорнутому вигляді:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y} + \frac{\partial v_3}{\partial z} = 0\,, \\ &\frac{\partial v_3}{\partial y} - \frac{\partial v_2}{\partial z} = 0\,, \quad \frac{\partial v_1}{\partial z} - \frac{\partial v_3}{\partial x} = 0\,, \quad \frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{\partial v_1}{\partial y} = 0\,, \end{aligned} \tag{1.3}$$

де $\mathbf{V} := (v_1, v_2, v_3)$ і $v_k := v_k(x, y, z)$ — дійсні функції декартових координат x, y, z при $k = 1, 2, 3$.

Двічі неперервно диференційовні функції, що задовольняють рівняння (1.1), називаються просторовими *гармонічними* функціями, а розв'язки системи (1.2) — *гармонічними* векторами.

Очевидно, що у випадку плоского поля, коли $v_3 \equiv 0$ і функції v_1, v_2 не залежать від z, рівняння системи (1.3) перетворюються в класичні умови Коші–Рімана для компонент $u = v_1$, $v = -v_2$ комплексного потенціалу $F(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$, що є аналітичною функцією комплексної змінної $x + iy$. Більш того, кожна аналітична функція $F(x + iy)$ задовольняє двовимірне рівняння Лапласа

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) F(x + iy) \equiv F''(x + iy)\,(1^2 + i^2) = 0$$

в силу рівності $1^2 + i^2 = 0$ для одиниці 1 і уявної одиниці i алгебри комплексних чисел.

Вагомим надбанням математики є опис плоских потенціальних полів, які описуються двовимірним рівнянням Лапласа, за допомогою аналітичних функцій комплексної змінної. Ефективність і легкість застосування методів теорії аналітичних функцій комплексної змінної до дослідження плоских потенціальних полів спонукає математиків до відшукання аналогічних методів для просторових полів.

М.О. Лаврентьєв (див., наприклад, [15, с. 205]) в загальних рисах окреслив проблему розробки методів дослідження просторових потенціальних полів, аналогічних до методів теорії аналітичних функцій комплексної змінної. Такі методи, зокрема, можуть базуватися на відображеннях алгебр гіперкомплексних чисел.

Напевно, У. Гамільтон [14] зробив перші спроби побудувати алгебру, асоційовану з тривимірним рівнянням Лапласа (1.1) у тому сенсі, щоб компоненти гіперкомплексних функцій задовольняли рівняння (1.1).

У. Гамільтон [14] побудував некомутативну алгебру кватерніонів з базисом $\{1, i, j, k\}$ і таблицею множення

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1, \quad ij = -ji = k, \quad jk = -kj = i, \quad ki = -ik = j\,.$$

Використовуючи оператор $\nabla := i\frac{\partial}{\partial x} + j\frac{\partial}{\partial y} + k\frac{\partial}{\partial z}$, він переписав рівняння (1.3) в еквівалентній формі $\nabla W(x,y,z) = 0$ для функції $W(x,y,z) := iv_1(x,y,z) + jv_2(x,y,z) + kv_3(x,y,z)$. В цьому випадку рівняння (1.3) можна розглядати як аналоги умов Коші–Рімана для функції $W(x,y,z)$, що приймає значення в алгебрі кватерніонів.

Г. Мойсіл і Н. Теодореску [6], Р. Фуетер [1] розглядали узагальнення системи (1.3) для функцій зі значеннями в алгебрі кватерніонів.

І.П. Мельниченко [16] розглянув задачу про знаходження комутативної алгебри такої, що диференційовні у певному сенсі функції зі значеннями в цій алгебрі мають компоненти, які породжують розв'язки системи (1.3). Ця задача пов'язана з задачею про знаходження комутативних гармонічних алгебр, яку розглянув П.В. Кетчум [3]. П.В. Кетчум назвав комутативну алгебру *гармонічною*, якщо в ній існує *гармонічна* трійка $\{e_1, e_2, e_3\}$ лінійно незалежних векторів, що задовольняють рівність

$$e_1^2 + e_2^2 + e_3^2 = 0\,. \tag{1.4}$$

Нехай $E_3 := \{\zeta = xe_1 + ye_2 + ze_3 \; : \; x, y, z \in \mathbb{R}\}$ — лінійна оболонка векторів e_1, e_2, e_3 над дійсним полем $\mathbb{R}$.

Будемо використовувати однакове позначення Ω для області $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ і для області в E_3, яка є конгруентною до області Ω.

І.П. Мельниченко [16] використав диференційовні за Гато функції для розв'язання вказаних задач. Використовуючи диференціал Гато, І.П. Мельніченко запропонував розглядати похідну Гато як функцію, визначену в тій же області, що і задана функція.

Далі розглядатимемо конкретні хаусдорфові топологічні векторні простори. Нехай $\mathbb{A}$ — хаусдорфів топологічний векторний простір, у якому комутативне множення $\xi\zeta$ визначене для всіх $\xi \in \mathbb{A}$ і всіх $\zeta \in E_3 \subset \mathbb{A}$.

Означення 1.1 (І.П. Мельниченко [16]). *Функція* $\Phi\colon \Omega \to \mathbb{A}$, *задана в області* $\Omega \subset E_3$, *називається диференційовною за Гато в точці* $\zeta \in \Omega$, *якщо існує елемент* $\Phi'_G(\zeta) \in \mathbb{A}$ *такий, що*

$$\lim_{\delta\to 0+0} \left(\Phi(\zeta+\delta h) - \Phi(\zeta)\right)\delta^{-1} = h\Phi'_G(\zeta) \qquad \forall\, h \in E_3.$$

Ми називаємо $\Phi'_G(\zeta)$ *похідною Гато функції* Φ *в точці* ζ.

Розглянемо також поняття моногенної функції.

Означення 1.2 (див. [7, 18]). *Ми говоримо, що функція* $\Phi\colon \Omega \to \mathbb{A}$ *моногенна в області* $\Omega \subset E_3$, *якщо* Φ *— неперервна і диференційовна за Гато в кожній точці області* $\zeta \in \Omega$.

Ми використовуємо поняття моногенної функції у сенсі існування для неї похідних чисел (див. [2,20]) у поєднанні з неперервністю цієї функції.

У науковій літературі назва моногенна функція використовується також для функцій, які задані у некомутативних алгебрах і задовольняють деякі умови, подібні до класичних умов Коші–Рімана (див., наприклад, [11]). Такі функції називають також регулярними (див., наприклад, [12]) або гіперголоморфними (див., наприклад, [5]).

Сформулюємо в наступному твердженні результати, отримані І.П. Мельниченком:

Теорема 1.3 (І.П. Мельниченко [16]). *Комутативна асоціативна алгебра* $\mathbb{A}$ *над комплексним полем* $\mathbb{C}$ *є гармонічною, якщо таблиця множення для базису* $\{e_1, e_2, e_3\}$ *має вигляд*

$$\begin{aligned}
&e_k\, e_1 = e_k, \qquad k = 1,2,3;\\
&e_2\, e_2 = -\frac{1}{2}\, e_1 - \frac{i}{2}\,(\sin\omega)\, e_2 + \frac{i}{2}\,(\cos\omega)\, e_3\,,\\
&e_2\, e_3 = \frac{i}{2}\,(\cos\omega)\, e_2 + \frac{i}{2}\,(\sin\omega)\, e_3\,,\\
&e_3\, e_3 = -\frac{1}{2}\, e_1 + \frac{i}{2}\,(\sin\omega)\, e_2 - \frac{i}{2}\,(\cos\omega)\, e_3\,,
\end{aligned}$$

де i *— уявна комплексна одиниця і* $\omega \in \mathbb{C}$.

Більш того, якщо функція $\Phi : \Omega \to \mathbb{A}$ *— диференційовна за Гато в області* $\Omega \subset E_3$, *то компоненти* $U_k : \Omega \to \mathbb{C}$, $k = 1,2,3$, *розкладу*

$$\Phi(xe_1 + ye_2 + ze_3) = \sum_{k=1}^{3} U_k(x,y,z)\, e_k, \qquad (x,y,z) \in \Omega\,,$$

породжують гармонічні вектори $\mathbf{V_1} = (\operatorname{Re} U_1, -\frac{1}{2}\operatorname{Re} U_2, -\frac{1}{2}\operatorname{Re} U_3)$, $\mathbf{V_2} = (\operatorname{Im} U_1, -\frac{1}{2}\operatorname{Im} U_2, -\frac{1}{2}\operatorname{Im} U_3)$.

Проте неможливо отримати усі розв'язки тривимірного рівняння Лапласа (1.1) у формі компонент моногенних функцій, що приймають значення в скінченновимірній комутативній асоціативній алгебрі (див., наприклад, [4, 7, 17]). Більш того, для кожної такої алгебри існують сферичні функції, які не є компонентами вказаних гіперкомплексних моногенних функцій.

У роботах [7, 17] ми розглядали нескінченновимірну комутативну банахову алгебру $\mathbb{F}$ над дійсним полем і встановили, що будь-яка сферична функція є компонентою деякої моногенної функції, що приймає значення в цій алгебрі.

Звернемо увагу на те, що алгебра $\mathbb{F}$ міститься у векторному просторі, розглянутому в роботі П.В. Кетчума [4]. Цей векторний простір не є алгеброю, проте П.В. Кетчум довів, що множина компонент функцій, які приймають значення у згаданому просторі, включає всі аналітичні розв'язки рівняння (1.1). М.Н. Рошкулець [10] розглянув інший нескінченновимірний векторний простір і функції, що породжують розв'язки рівняння (1.1).

У роботі [8] ми розглянули топологічний векторний простір, що містить алгебру $\mathbb{F}$ і довели, що всі просторові гармонічні функції є компонентами моногенних функцій, що приймають значення в цьому просторі. Ми описали деякі зв'язки між згаданими моногенними функціями та гармонічними векторами в тривимірному дійсному просторі. Ми також довели аналогічні результати для моногенних функцій, що приймають значення в топологічному векторному просторі, носій якого збігається з векторним простором, розглянутим у роботі М.Н. Рошкулеця [10]. Розгляд таких топологічних векторних просторів мотивований необхідністю опису всіх просторових гармонічних функцій як компонент гіперкомплексних моногенних функцій.

У цій роботі ми продовжуємо дослідження зв'язків між моногенними функціями і гармонічними векторами, що були започатковані в роботі [8]. Ми доводимо, що для кожного гармонічного вектора існують моногенні функції, що породжують цей вектор подібно до того, як це описано в Теоремі 1.3. Використовуючи цей факт і деякі властивості гармонічних векторів, ми встановлюємо достатні умови для того, щоб похідні Гато всіх порядків моногенної функції бути моногенними. На відміну від класичного комплексного аналізу, це робиться у випадку, коли справедливість інтегральної формули Коші для моногенних функцій залишається відкритою проблемою.

2. Нескінченновимірна гармонічна алгебра $\mathbb{F}$

Розглянемо нескінченновимірну комутативну банахову алгебру

$$\mathbb{F} := \left\{ g = \sum_{k=1}^{\infty} c_k e_k \ : \ c_k \in \mathbb{R}, \ \sum_{k=1}^{\infty} |c_k| < \infty \right\}$$

над дійсним полем $\mathbb{R}$ з нормою

$$\|g\|_{\mathbb{F}} := \sum_{k=1}^{\infty} |c_k| \tag{2.1}$$

і базисом $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$, де таблиця множення для елементів базису має наступний вигляд:

$$\begin{aligned}
&e_n e_1 = e_n, \qquad e_{2n+1} e_{2n} = \frac{1}{2}\, e_{4n} \quad \forall\, n \ge 1\,,\\
&e_{2n+1} e_{2m} = \frac{1}{2}\Big(e_{2n+2m} - (-1)^m e_{2n-2m}\Big) \quad \forall\, n > m \ge 1\,,\\
&e_{2n+1} e_{2m} = \frac{1}{2}\Big(e_{2n+2m} + (-1)^n e_{2m-2n}\Big) \quad \forall\, m > n \ge 1\,,\\
&e_{2n+1} e_{2m+1} = \frac{1}{2}\Big(e_{2n+2m+1} + (-1)^m e_{2n-2m+1}\Big) \quad \forall\, n \ge m \ge 1\,,\\
&e_{2n} e_{2m} = \frac{1}{2}\Big(-e_{2n+2m+1} + (-1)^m e_{2n-2m+1}\Big) \quad \forall\, n \ge m \ge 1\,.
\end{aligned}$$

Очевидно, що елементи e_1, e_2, e_3 утворюють гармонічну трійку векторів, тобто вони задовольняють рівність (1.4).

Зазначимо, що алгебра $\mathbb{F}$ ізоморфна алгебрі $\mathbf{F}$ абсолютно збіжних тригонометричних рядів Фур'є

$$g(\tau) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \big(a_k\, i^k \cos k\tau + b_k\, i^k \sin k\tau\big)$$

з дійсними коефіцієнтами a_0, a_k, b_k і нормою

$$\|g\|_{\mathbf{F}} := |a_0| + \sum_{k=1}^{\infty} \big(|a_k| + |b_k|\big),$$

при цьому відповідності

$$e_{2k-1} \leftrightarrow i^{k-1} \cos\,(k-1)\tau\,, \qquad e_{2k} \leftrightarrow i^k \sin\, k\tau$$

задають ізоморфізм між елементами базисів.

3. Моногенні функції в алгебрі $\mathbb{F}$

Наступну теорему доведено в роботі [7]:

Теорема 3.1. *Нехай функція* $\Phi:\Omega\longrightarrow\mathbb{F}$ *є неперервною в області* $\Omega\subset E_3$ *і функції* $U_k:\Omega\longrightarrow\mathbb{R}$ *з розкладу*

$$\Phi(xe_1+ye_2+ze_3)=\sum_{k=1}^{\infty}U_k(x,y,z)\;e_k \tag{3.1}$$

є диференційовними в Ω. *Для того щоб функція* Φ *була моногенною в області* Ω *необхідно і достатньо, щоб у цій області виконувались умови*

$$\frac{\partial\Phi}{\partial y}=\frac{\partial\Phi}{\partial x}\,e_2\,,\qquad \frac{\partial\Phi}{\partial z}=\frac{\partial\Phi}{\partial x}\,e_3 \tag{3.2}$$

і наступні співвідношення:

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left|\frac{\partial U_k(x,y,z)}{\partial x}\right|<\infty\,, \tag{3.3}$$

$$\begin{aligned}\lim_{\delta\to0+0}\sum_{k=1}^{\infty}\Bigg|\,&U_k(x+\delta h_1,y+\delta h_2,z+\delta h_3)-U_k(x,y,z)-\\&-\frac{\partial U_k(x,y,z)}{\partial x}\;\delta h_1-\frac{\partial U_k(x,y,z)}{\partial y}\;\delta h_2-\\&-\frac{\partial U_k(x,y,z)}{\partial z}\;\delta h_3\Bigg|\,\delta^{-1}=0\quad\forall\,h_1,h_2,h_3\in\mathbb{R}\,.\end{aligned} \tag{3.4}$$

Зазначимо, що умови (3.2) за своїм змістом аналогічні класичним умовам Коші–Рімана для голоморфних функцій комплексної змінної, а співвідношення (3.3), (3.4) обумовлені нормою абсолютної збіжності (2.1) в нескінченновимірній алгебрі $\mathbb{F}$.

Запишемо розклади степеневої та експоненціальної функцій, для яких похідні Гато всіх порядків, очевидно, є моногенними функціями.

Щоб отримати розклад за базисом $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ степеневої функції змінної $\zeta=xe_1+ye_2+ze_3$, використаємо сферичні координати ρ,θ,ϕ, які мають наступний зв'язок з декартовими координатами x,y,z:

$$x=\rho\cos\theta,\quad y=\rho\sin\theta\sin\phi,\quad z=\rho\sin\theta\cos\phi\,. \tag{3.5}$$

Зважаючи на ізоморфізм алгебр $\mathbb{F}$ і $\mathbf{F}$, побудова розкладів такого типу зводиться до визначення відповідних коефіцієнтів Фур'є.

Отже, маємо

$$\zeta^n = \rho^n \Bigg(P_n(\cos\theta)\ e_1 + 2 \sum_{m=1}^{n} \frac{n!}{(n+m)!}\ P_n^m(\cos\theta) \Big(\sin\ m\phi\ e_{2m} + \cos\ m\phi\ e_{2m+1} \Big) \Bigg), \quad (3.6)$$

де n — додатнє ціле часло, P_n і P_n^m відповідно поліноми Лежандра і приєднані поліноми Лежандра, а саме:

$$P_n(t) := \frac{1}{2^n\ n!}\ \frac{d^n}{dt^n}\ (t^2 -\ 1)^n, \qquad P_n^m(t) := (1-t^2)^{m/2}\ \frac{d^m}{dt^m}\ P_n(t)\,.$$

У такий же спосіб отримуємо розклад показникової функції:

$$e^{\zeta} = e^{\rho\cos\theta} \Big(J_0(\rho\sin\theta) e_1 + 2 \sum_{m=1}^{\infty} J_m(\rho\sin\theta) \big(\sin\ m\phi\, e_{2m} + \cos\ m\phi\, e_{2m+1} \big) \Big),$$

де J_m — функції Бесселя, а саме:

$$J_m(t) := \frac{(-1)^m}{\pi} \int_0^{\pi} e^{it\cos\tau}\ \cos m\tau\ d\tau\,.$$

Отже, $(2n+1)$ лінійно незалежних сферичних функцій степеня n є компонентами розкладу (3.6) функції ζ^n. Використовуючи розклад (3.6) і правила множення для базисних елементів алгебри $\mathbb{F}$, легко довести таке твердження:

Теорема 3.2 ([7, 17])**.** *Кожна сферична функція*

$$\rho^n \Bigg(a_{n,0} P_n(\cos\theta) + \sum_{m=1}^{n} \Big(a_{n,m} \cos m\phi + b_{n,m} \sin m\phi \Big) P_n^m(\cos\theta) \Bigg)\,,$$

де $a_{n,0}, a_{n,m}, b_{n,m} \in \mathbb{R}$*, є першою компонентою* U_1 *розкладу* (3.1) *моногенної функції*

$$\Phi(\zeta) = \Bigg(a_{n,0}\, e_1 + \sum_{m=1}^{n} (-1)^m\, \frac{(n+m)!}{n!}\, \Big(b_{n,m}\, e_{2m} + a_{n,m}\, e_{2m+1} \Big) \Bigg) \zeta^n$$

за базисом $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$*, де* $\zeta = xe_1 + ye_2 + ze_3$*, і* x, y, z *зв'язані співвідношеннями* (3.5) *зі сферичними координатами* ρ, θ, ϕ*.*

4. Моногенні функції в топологічному векторному просторі $\widetilde{\mathbb{F}}$, що містить алгебру $\mathbb{F}$

Помістимо алгебру $\mathbb{F}$ в топологічний векторний простір

$$\widetilde{\mathbb{F}} := \left\{ g = \sum_{k=1}^{\infty} c_k e_k \ : \ c_k \in \mathbb{R} \right\}$$

з топологією покоординатної збіжності.

Зазначимо, що $\widetilde{\mathbb{F}}$ не є алгеброю, тому що добуток елементів $g_1, g_2 \in \widetilde{\mathbb{F}}$ визначений не завжди. Проте для всіх

$$g = \sum_{k=1}^{\infty} c_k e_k \in \widetilde{\mathbb{F}} \quad \text{і} \quad \zeta = x e_1 + y e_2 + z e_3$$

можна визначити добуток

$$g\zeta \equiv \zeta g := x \sum_{k=1}^{\infty} c_k e_k + y \biggl(-\frac{c_2}{2}\, e_1 + \Bigl(c_1 - \frac{c_5}{2} \Bigr) e_2 - \frac{c_4}{2}\, e_3 + \frac{1}{2} \sum_{k=2}^{\infty} (c_{2k-1} - c_{2k+3})\, e_{2k} - \frac{1}{2} \sum_{k=2}^{\infty} (c_{2k-2} + c_{2k+2})\, e_{2k+1} \biggr) + z \biggl(-\frac{c_3}{2}\, e_1 - \frac{c_4}{2}\, e_2 + \Bigl(c_1 - \frac{c_5}{2} \Bigr) e_3 + \frac{1}{2} \sum_{k=4}^{\infty} (c_{k-2} - c_{k+2})\, e_k \biggr).$$

Отже, поняття диференційовності за Гато, визначене в Означенні 1.1, застосовне до функцій $\Phi : \Omega \to \widetilde{\mathbb{F}}$, що задані в області $\Omega \subset E_3$ та приймають значення в просторі $\widetilde{\mathbb{F}}$. У випадку, що розглядається, для моногенної функції $\Phi : \Omega \to \widetilde{\mathbb{F}}$ похідна Гато $\Phi'_G(\zeta)$ приймає значення в просторі $\widetilde{\mathbb{F}}$ для всіх $\zeta \in \Omega$.

П.В. Кетчум у роботі [4] фактично розглядав простір $\widetilde{\mathbb{F}}$, хоча він не використовував поняття топологічного векторного простору, як і диференційовність за Гато.

Розглянемо розклад (3.1) за базисом $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ функції $\Phi : \Omega \to \widetilde{\mathbb{F}}$, визначеної в області $\Omega \subset E_3$, при цьому припускаємо, що всі функції $U_k : \Omega \to \mathbb{R}$ — диференційовні в області Ω. З цього припущення випливає неперервність функції (3.1) в області Ω.

В наступній теоремі встановлено необхідні і достатні умови моногенності таких функцій в області $\Omega \subset E_3$. Відзначимо, що у порівнянні з Теоремою 4.1 для функцій, що приймають значення в просторі $\widetilde{\mathbb{F}}$, формулювання аналогічного за змістом твердження може бути спрощене, при цьому додаткові співвідношення (3.3) і (3.4), зумовлені нормою абсолютної збіжності (2.1) в алгебрі $\mathbb{F}$, не потрібні:

Теорема 4.1 ([8]). *Нехай у розкладі* (3.1) *функції* $\Phi : \Omega \longrightarrow \widetilde{\mathbb{F}}$, *заданої в області* $\Omega \subset E_3$, *всі компоненти* $U_k : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ — *диференційовні функції в області* Ω. *Тоді для того щоб функція* Φ *була моногенною в області* Ω *необхідно і достатньо, щоб у цій області виконувались умови* (3.2).

Запишемо умови (3.2), які за своєю природою схожі на умови Коші–Рімана для голоморфних функцій комплексної змінної, у розгорнутому вигляді:

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial U_1(x,y,z)}{\partial y} = -\frac{1}{2}\,\frac{\partial U_2(x,y,z)}{\partial x}\,,\\
&\frac{\partial U_2(x,y,z)}{\partial y} = \frac{\partial U_1(x,y,z)}{\partial x} + \frac{1}{2}\,\frac{\partial U_5(x,y,z)}{\partial x}\,,\\
&\frac{\partial U_3(x,y,z)}{\partial y} = -\frac{1}{2}\,\frac{\partial U_4(x,y,z)}{\partial x}\,,\\
&\frac{\partial U_{2k}(x,y,z)}{\partial y} = \frac{1}{2}\,\frac{\partial U_{2k-1}(x,y,z)}{\partial x} + \frac{1}{2}\,\frac{\partial U_{2k+3}(x,y,z)}{\partial x}\,,\\
&\frac{\partial U_{2k+1}(x,y,z)}{\partial y} = -\frac{1}{2}\,\frac{\partial U_{2k-2}(x,y,z)}{\partial x} - \frac{1}{2}\,\frac{\partial U_{2k+2}(x,y,z)}{\partial x}\,,\\
&\frac{\partial U_1(x,y,z)}{\partial z} = -\frac{1}{2}\,\frac{\partial U_3(x,y,z)}{\partial x}\,,\\
&\frac{\partial U_2(x,y,z)}{\partial z} = -\frac{1}{2}\,\frac{\partial U_4(x,y,z)}{\partial x}\,,\\
&\frac{\partial U_3(x,y,z)}{\partial z} = \frac{\partial U_1(x,y,z)}{\partial x} - \frac{1}{2}\,\frac{\partial U_5(x,y,z)}{\partial x}\,,\\
&\frac{\partial U_{2k}(x,y,z)}{\partial z} = \frac{1}{2}\,\frac{\partial U_{2k-2}(x,y,z)}{\partial x} - \frac{1}{2}\,\frac{\partial U_{2k+2}(x,y,z)}{\partial x}\,,\\
&\frac{\partial U_{2k+1}(x,y,z)}{\partial z} = \frac{1}{2}\,\frac{\partial U_{2k-1}(x,y,z)}{\partial x} - \frac{1}{2}\,\frac{\partial U_{2k+3}(x,y,z)}{\partial x}\,,\\
&\qquad k = 2,3,\ldots\,,
\end{aligned}
\tag{4.1}
$$

де функції $U_k : \Omega \to \mathbb{R}$ при $k = 1,2,\ldots$ визначені розкладом (3.1).

Додамо і віднімемо другу і восьму рівності, а також третю і сьому рівності системи (4.1). Крім того, додамо і віднімемо четверту і десяту рівності, а також п'яту і дев'яту рівності системи (4.1). В результаті отримаємо наступний еквівалентний вигляд системи (4.1):

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial U_1}{\partial x}-\frac{1}{2}\,\frac{\partial U_2}{\partial y}-\frac{1}{2}\,\frac{\partial U_3}{\partial z}=0\,,\\
&\frac{\partial U_3}{\partial y}-\frac{\partial U_2}{\partial z}=0\,,\\
&\frac{\partial U_1}{\partial y}+\frac{1}{2}\,\frac{\partial U_2}{\partial x}=0\,,\\
&\frac{\partial U_1}{\partial z}+\frac{1}{2}\,\frac{\partial U_3}{\partial x}=0\,,\\
&\frac{\partial U_{2k}}{\partial x}=-\frac{\partial U_{2k-2}}{\partial z}-\frac{\partial U_{2k-1}}{\partial y}\,,\\
&\frac{\partial U_{2k+1}}{\partial x}=\frac{\partial U_{2k-2}}{\partial y}-\frac{\partial U_{2k-1}}{\partial z}\,,\\
&\frac{\partial U_{2k}}{\partial z}-\frac{\partial U_{2k+1}}{\partial y}=\frac{\partial U_{2k-2}}{\partial x}\,,\\
&\frac{\partial U_{2k}}{\partial y}+\frac{\partial U_{2k+1}}{\partial z}=\frac{\partial U_{2k-1}}{\partial x}\,,\qquad k=2,3,\ldots\,.
\end{aligned}\tag{4.2}$$

Деякі зв'язки між розв'язками системи (4.2) і просторовими потенціальними полями досліджено у роботах [7, 17], проте при цьому не розглядалися моногенні функції, що приймають значення у просторі $\widetilde{\mathbb{F}}$.

5. Деякі умови існування гармонічних векторів

Перш, ніж описати зв'язок між моногенними функціями, що приймають значення в просторі $\widetilde{\mathbb{F}}$, і гармонічними векторами, розглянемо наступну властивість розв'язків системи (1.3):

Твердження 5.1. *Для кожної просторової гармонічної функції $v_1:\Omega\to\mathbb{R}$ в однозв'язній області $\Omega\subset\mathbb{R}^3$ існує гармонічний вектор $\mathbf{V}_0=(v_1,v_2^0,v_3^0)$ в області Ω. Більш того, для будь-якої кулі $\mho\subset\Omega$ з центром у довільній точці $(x_0,y_0,z_0)\in\Omega$ і для будь-якого гармонічного в $\mho$ вектора $\mathbf{V}=(v_1,v_2,v_3)$ компоненти v_2,v_3 визначаються з точністю до дійсної і уявної частин довільної функції $h(t)$ голоморфної в області $\{t=z+iy:(x,y,z)\in\mho\}$ комплексної площини, тобто для всіх $(x,y,z)\in\mho$ виконуються наступні рівності:*

$$v_2(x,y,z)=v_2^0(x,y,z)+\mathrm{Re}\,h(z+iy),\quad v_3(x,y,z)=v_3^0(x,y,z)+\mathrm{Im}\,h(z+iy).$$

Доведення. Покажемо, що існує просторова гармонічна функція $u:\Omega\to\mathbb{R}$ така, що $v_1(x,y,z)=\partial u(x,y,z)/\partial x$ для всіх $(x,y,z)\in\Omega$.

Перш за все, для (x,y,z), що належить кулі $\mho\subset\Omega$ з центром у довільній точці $(x_0,y_0,z_0)\in\Omega$, ми знайдемо цю функцію у вигляді

$$u(x,y,z)=\int\limits_{x_0}^{x} v_1(\tau,y,z)\,d\tau+\widetilde{u}(z,y)\,. \tag{5.1}$$

Підставляючи вираз (5.1) в рівняння (1.1) і враховуючи, що v_1 — просторова гармонічна функція в області $\mho$, отримуємо двовимірне рівняння Пуассона

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\widetilde{u}(z,y)=-\frac{\partial v_1(x,y,z)}{\partial x}\bigg|_{x=x_0}$$

для знаходження функції $\widetilde{u}$. Зрозуміло, що функція $\widetilde{u}$ визначається з точністю до доданка, який є гармонічною функцією в області $\{(z,y):(x,y,z)\in\mho\}\subset\mathbb{R}^2$.

Далі використаємо стандартне продовження гармонічної функції (5.1) уздовж кривої. Почнемо з фіксованої функції (5.1), визначеної у згаданому сферичному околі $\mho$ фіксованої точки $(x_0,y_0,z_0)\in\Omega$, і продовжимо цю функцію уздовж будь-якої кривої гармонічними функціями вигляду (5.1), визначеними в маленьких налягаючих кульках, що покривають цю криву. Оскільки область Ω є однозв'язною, то, враховуючи теорему єдиності для просторових гармонічних функцій (див., наприклад, А.Ф. Тіман і В.Н. Трофімов [19, p. 88]), в результаті отримуємо функцію u, визначену в області Ω. За побудовою u є просторовою гармонічною функцією в Ω і $v_1(x,y,z)=\partial u(x,y,z)/\partial x$ для всіх $(x,y,z)\in\Omega$.

Тоді $\mathbf{V}_0:=\mathrm{grad}\,u$, тобто $v_2^0:=\partial u(x,y,z)/\partial y$ і $v_3^0:=\partial u(x,y,z)/\partial z$ для всіх $(x,y,z)\in\Omega$.

Крім того, для будь-якого вектора $\mathbf{V}=(v_1,v_2,v_3)$, гармонічного в кулі $\mho$, розглянемо гармонічний вектор $\mathbf{V}-\mathbf{V}_0$ в $\mho$. Очевидно, що його координати $(0,v_2-v_2^0,v_3-v_3^0)$ задовольняють рівняння (1.3), які набувають вигляду

$$\frac{\partial(v_2-v_2^0)}{\partial z}=\frac{\partial(v_3-v_3^0)}{\partial y}\,,\qquad \frac{\partial(v_2-v_2^0)}{\partial y}=-\frac{\partial(v_3-v_3^0)}{\partial z}\,,$$
$$\frac{\partial(v_2-v_2^0)}{\partial x}=0\,,\qquad \frac{\partial(v_3-v_3^0)}{\partial x}=0\,.$$

Тому функції $v_2-v_2^0$ і $v_3-v_3^0$ є відповідно дійсною та уявною частинами функції $h(t)$, голоморфної в області $\{t=z+iy:(x,y,z)\in\mho\}$ комплексної площини. $\square$

Сформулюємо також дві аналогічні властивості розв'язків системи (1.3), доведення яких подібне до доведення Твердження 5.1.

Твердження 5.2. *Для кожної просторової гармонічної функції $v_2 : \Omega \to \mathbb{R}$ в однозв'язній області $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ існує гармонічний вектор $\mathbf{V}_0 = (v_1^0, v_2, v_3^0)$ в області Ω. Більш того, для будь-якої кулі $\mho \subset \Omega$ з центром у довільній точці $(x_0, y_0, z_0) \in \Omega$ і для будь-якого гармонічного в $\mho$ вектора $\mathbf{V} = (v_1, v_2, v_3)$ компоненти v_3, v_1 визначаються з точністю до дійсної і уявної частин довільної функції $h(t)$ голоморфної в області $\{t = x + iz : (x, y, z) \in \mho\}$ комплексної площини, тобто для всіх $(x, y, z) \in \mho$ виконуються наступні рівності:*

$$v_3(x,y,z) = v_3^0(x,y,z) + \mathrm{Re}\, h(x+iz), \quad v_1(x,y,z) = v_1^0(x,y,z) + \mathrm{Im}\, h(x+iz).$$

Твердження 5.3. *Для кожної просторової гармонічної функції $v_3 : \Omega \to \mathbb{R}$ в однозв'язній області $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ існує гармонічний вектор $\mathbf{V}_0 = (v_1^0, v_2^0, v_3)$ в області Ω. Більш того, для будь-якої кулі $\mho \subset \Omega$ з центром у довільній точці $(x_0, y_0, z_0) \in \Omega$ і для будь-якого гармонічного в $\mho$ вектора $\mathbf{V} = (v_1, v_2, v_3)$ компоненти v_2, v_1 визначаються з точністю до дійсної і уявної частин довільної функції $h(t)$ голоморфної в області $\{t = x + iy : (x, y, z) \in \mho\}$ комплексної площини, тобто для всіх $(x, y, z) \in \mho$ виконуються наступні рівності:*

$$v_2(x,y,z) = v_2^0(x,y,z) + \mathrm{Re}\, h(x+iy), \quad v_1(x,y,z) = v_1^0(x,y,z) + \mathrm{Im}\, h(x+iy).$$

6. Зв'язки між моногенними функціями, що приймають значення в просторі $\widetilde{\mathbb{F}}$, і гармонічними векторами

Розглянемо розклад (3.1) за базисом $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ функції $\Phi : \Omega \to \widetilde{\mathbb{F}}$, моногенної в області $\Omega \subset E_3$, при цьому припускаємо, що всі функції $U_k : \Omega \to \mathbb{R}$ — диференційовні в області Ω.

Очевидно, що рівняння (1.3) для координатних функцій вектора $\mathbf{V} = (U_1, -\frac{1}{2}\, U_2, -\frac{1}{2}\, U_3)$ збігаються з першими чотирма рівняннями системи (4.2). Тому справедливе наступне твердження, сформульоване в роботі [8]:

Теорема 6.1. *Припустимо, що у розкладі (3.1) функції $\Phi : \Omega \to \widetilde{\mathbb{F}}$, моногенної в області $\Omega \subset E_3$, всі функції $U_k : \Omega \to \mathbb{R}$ — диференційовні в області Ω. Тоді компоненти U_1, U_2, U_3 породжують гармонічний вектор $\mathbf{V} = (U_1, -\frac{1}{2}\, U_2, -\frac{1}{2}\, U_3)$ в області Ω.*

Таким чином, між гармонічними векторами і моногенними функціями, що приймають значення в просторі $\widetilde{\mathbb{F}}$, існує такий самий зв'язок, як і в Теоремі 1.3, доведеній І.П. Мельниченком у роботі [16].

Деякі зв'язки між розв'язками системи (4.2) і просторовими потенціальними полями досліджено у роботах [7, 17], проте в них не розглядаються моногенні функції, що приймають значення в просторі $\widetilde{\mathbb{F}}$.

Базуючись на цих результатах, у роботі [8] сформульована наступна теорема, що є аналогічною до відповідного результату П.В. Кетчума з роботи [4]. Наведемо її повне доведення.

Теорема 6.2. *Для кожної просторової гармонічної функції* $u : \Omega \to \mathbb{R}$, *заданої в однозв'язній області* $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, *існує моногенна функція* $\Phi : \Omega \to \widetilde{\mathbb{F}}$ *така, що функція* $U_1 \equiv u$ *є першою компонентою розкладу* (3.1). *Крім того, усі компоненти* U_k *з розкладу* (3.1) *є проторовими гармонічними функціями в області* Ω *.*

Доведення. Покажемо, що існує розв'язок системи (4.2) для компонент розкладу (3.1) шуканої моногенної функції Φ, де $U_1 \equiv u$ — задана просторова гармонічна функція в області Ω.

Перш за все, існує гармонічний вектор $\mathbf{V} = (U_1, v_2, v_3)$ в області Ω в силу Твердження 5.1. Тоді, враховуючи Теорему 6.1, визначаємо функції $U_2 := -2\, v_2$, $U_3 := -2\, v_3$, які є просторовими гармонічними функціями в області Ω.

Тепер покажемо, що останні чотири рівняння системи (4.2) дозволяють визначити функції U_{2k}, U_{2k+1}, якщо просторові гармонічні функції $U_2, U_3, \ldots, U_{2k-1}$ вже визначено. Дійсно, інтегруючи п'яте та шосте рівняння системи (4.2), отримуємо вирази

$$U_{2k}(x,y,z) = -\int\limits_{x_0}^{x} \left(\frac{\partial U_{2k-2}(\tau,y,z)}{\partial z} + \frac{\partial U_{2k-1}(\tau,y,z)}{\partial y} \right) d\tau + \widetilde{u}_{2k}(z,y),$$

$$U_{2k+1}(x,y,z) = \int\limits_{x_0}^{x} \left(\frac{\partial U_{2k-2}(\tau,y,z)}{\partial y} - \frac{\partial U_{2k-1}(\tau,y,z)}{\partial z} \right) d\tau + \widetilde{u}_{2k+1}(z,y)$$

при (x,y,z), що належить деякій кулі $\mho \subset \Omega$ з центром у довільній фіксованій точці $(x_0,y_0,z_0) \in \Omega$.

Підставляючи ці вирази у сьоме і восьме рівняння системи (4.2) та враховуючи, що U_{2k-2}, U_{2k-1} є просторовими гармонічними функціями в області $\mho$, отримуємо наступну неоднорідну систему Коші–Рімана (див., наприклад, монографію І.Н. Векуа [13, p. 27]) для знаходження функцій $\widetilde{u}_{2k}$, $\widetilde{u}_{2k+1}$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \widetilde{u}_{2k}(z,y)}{\partial z} - \frac{\partial \widetilde{u}_{2k+1}(z,y)}{\partial y} &= \left.\frac{\partial U_{2k-2}(x,y,z)}{\partial x}\right|_{x=x_0}, \\ \frac{\partial \widetilde{u}_{2k}(z,y)}{\partial y} + \frac{\partial \widetilde{u}_{2k+1}(z,y)}{\partial z} &= \left.\frac{\partial U_{2k-1}(x,y,z)}{\partial x}\right|_{x=x_0}. \end{aligned} \tag{6.1}$$

Зрозуміло, що розв'язки системи (6.1) визначаються з точністю до дійсної та уявної частин довільної функції, голоморфної в області $\{t = z + iy : (x, y, z) \in \mho\}$ комплексної площини.

Оскільки U_{2k-2}, U_{2k-1} є просторовими гармонічними функціями в області $\mho$, то, враховуючи рівності (6.1), легко встановити, що функції U_{2k}, U_{2k+1} задовольняють рівняння (1.1) в $\mho$, тобто U_{2k}, U_{2k+1} також є просторовими гармонічними функціями в області $\mho$. Крім того, оскільки область Ω є однозв'язною, то, використовуючи теорему єдиності для просторових гармонічних функцій (див., наприклад, А.Ф. Тіман і В.Н. Трофімов [19, p. 88]) так, як це було зроблено для функції u при доведенні Твердження 5.1, продовжуємо функції U_{2k}, U_{2k+1} з кулі $\mho$ в область Ω. □

Зауваження 6.3. З доведення Теореми 6.2 випливає, що для будь-якого фіксованого $k \geq 2$ і для будь-яких просторових гармонічних функцій U_{2k-2}, U_{2k-1} у кулі $\mho \subset \Omega$ з центром у довільній точці $(x_0, y_0, z_0) \in \Omega$, функції U_{2k}, U_{2k+1}, що задовольняють останні чотири рівняння системи (4.2), визначаються з точністю до дійсної та уявної частин довільної функції $h_k(t)$, голоморфної в області $\{t = z + iy : (x, y, z) \in \mho\}$ комплексної площини, тобто для всіх $(x, y, z) \in \mho$ виконуються рівності

$$
\begin{aligned}
U_{2k}(x,y,z) \quad &= U_{2k}^0(x,y,z) + \mathrm{Re}\; h_k(z+iy)\,,\\
U_{2k+1}(x,y,z) &= U_{2k+1}^0(x,y,z) + \mathrm{Im}\; h_k(z+iy)\,,
\end{aligned}
$$

де U_{2k}^0, U_{2k+1}^0 — функції, які утворюють частинний розв'язок останніх чотирьох рівнянь системи (4.2).

У наступній теоремі ми покажемо, що всі гармонічні вектори $\mathbf{V} = (v_1, v_2, v_3)$ з неперервно диференційовними координатними функціями v_1, v_2, v_3 можуть бути асоційовані з моногенними функціями, що приймають значення в топологічному векторному просторі $\widetilde{\mathbb{F}}$.

Теорема 6.4. *Припустимо, що у вектора* $\mathbf{V} = (v_1, v_2, v_3)$, *гармонічного в однозв'язній області* $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, *компоненти* $v_k : \Omega \to \mathbb{R}$ *при* $k = 1, 2, 3$ *— неперервно диференційовні функції в* Ω. *Тоді існує моногенна функція* $\Phi : \Omega \to \widetilde{\mathbb{F}}$ *така, що функції* $U_1 = v_1$, $U_2 = -2\,v_2$, $U_3 = -2\,v_3$ *є трьома першими компонентами розкладу* (3.1). *Крім того, усі компоненти* U_k *з розкладу* (3.1) *є проторовими гармонічними функціями в області* Ω.

Доведення. Оскільки функції v_1, v_2, v_3 — неперервно диференційовні в однозв'язній області Ω і рівність $\mathrm{rot}\,\mathbf{V} = 0$ виконується в Ω, то існує функція $u : \Omega \to \mathbb{R}$ така, що $\mathbf{V} = \mathrm{grad}\, u$. Крім того, u — просторова гармонічна функція в області Ω в силу рівності $\operatorname{div}\mathbf{V}=0$ в Ω. Тому v_1, v_2, v_3 також є просторовими гармонічними функціями в області Ω.

Тепер з доведення Теореми 6.2 випливає, що існує моногненна функція $\Phi:\Omega\to\widetilde{\mathbb{F}}$ така, що функції $U_1:=v_1$, $U_2:=-2\,v_2$, $U_3:=-2\,v_3$ є трьома першими компонентами розкладу (3.1), і всі компоненти U_k в розкладі (3.1) є просторовими гармонічними функціями. □

7. Моногенність похідних Гато

Очевидно, що якщо в розкладі (3.1) функції $\Phi:\Omega\to\widetilde{\mathbb{F}}$, моногенної в області $\Omega\subset E_3$, усі функції $U_k:\Omega\to\mathbb{R}$ мають неперервні частинні похідні другого порядку в області Ω, то функція (3.1) — двічі диференційовна за Гато і тому задовольняє рівність

$$\Delta_3\Phi(\zeta)\equiv\Phi''_G(\zeta)\,(e_1^2+e_2^2+e_3^2)=0 \tag{7.1}$$

для всіх $\zeta=xe_1+ye_2+ze_3\in\Omega$, оскільки гармонічна трійка $\{e_1,e_2,e_3\}$ задовольняє рівність (1.4).

Покажемо, що рівність (7.1) виконується за більш слабких умов на функції U_k у розкладі (3.1).

Теорема 7.1. *Припустимо, що в розкладі* (3.1) *функції* $\Phi:\Omega\to\widetilde{\mathbb{F}}$, *моногенної в області* $\Omega\subset E_3$, *усі функції* $U_k:\Omega\to\mathbb{R}$ *— диференційовні в* Ω *і, крім того, перша компонента* U_1 *є просторовою гармонічною функцією в області* Ω. *Тоді похідні Гато* $\Phi_G^{(n)}$ *усіх порядків* n *є моногенними функціями в області* Ω.

Доведення. Розглянемо довільну точку $\zeta_0=x_0e_1+y_0e_2+z_0e_3\in\Omega$, де $(x_0,y_0,z_0)\in\mathbb{R}^3$, і кулю $\mho\subset\Omega$ з центром у точці ζ_0.

Беручи до уваги Теорему 6.1 і Твердження 5.1, ми можемо стверджувати, що функції $v_1=U_1$, $v_2=-U_2/2$, $v_3=-U_3/2$, які задовольняють систему (1.3), є просторовими гармонічними функціями в кулі $\mho$, як і функції U_1,U_2,U_3.

Тепер із доведення Теореми 6.2 випливає, що для всіх $k=2,3,\ldots$, функції U_{2k}, U_{2k+1}, які утворюють розв'язок системи (4.2) разом із функціями U_1,U_2,U_3, також є гармонічними в області $\mho$.

Отже, в розкладі

$$\Phi'_G(\zeta)=\frac{\partial\Phi(\zeta)}{\partial x}\equiv\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\partial U_k(x,y,z)}{\partial x}\,e_k$$

усі компоненти $\partial U_k(x,y,z)/\partial x$ є неперервно диференційовними функціями, які, в свою чергу, задовольняють систему вигляду (4.2) в області $\mho$. Тому похідна Гато Φ'_G є моногенною функцією в області $\mho$.

В силу довільності вибору точки ζ_0 і кулі $\mho$ ми можемо стверджувати, що похідна Гато Φ'_G є моногенною функцією в області Ω.

Нарешті, аналогічно доводиться, що похідна Гато n-го порядку $\Phi_G^{(n)}$ також є моногенною функцією в області Ω для будь-якого n. □

Теорема 7.2. *Припустимо, що в розкладі* (3.1) *функції* $\Phi:\Omega\to\widetilde{\mathbb{F}}$, *моногенної в області* $\Omega\subset E_3$, *усі функції* $U_k:\Omega\to\mathbb{R}$ *— диференційовні в* Ω *і, крім того, перші три компоненти* U_1,U_2,U_3 *— неперервно диференційовні функції в* Ω. *Тоді похідні Гато* $\Phi_G^{(n)}$ *усіх порядків* n *є моногенними функціями в області* Ω.

Доведення. За Теоремою 6.1 моногенна функція Φ породжує гармонічний вектор $\mathbf{V}=(U_1,-\frac{1}{2}\,U_2,-\frac{1}{2}\,U_3)$, що задовольняє рівність $\mathrm{rot}\,\mathbf{V}=0$ в області Ω.

Розглянемо довільну точку $\zeta_0=x_0e_1+y_0e_2+z_0e_3\in\Omega$ і кулю $\mho\subset\Omega$ з центром у точці ζ_0, де $(x_0,y_0,z_0)\in\mathbb{R}^3$. Оскільки куля $\mho$ є однозв'язною областю і функції U_1,U_2,U_3 — неперервно диференційовні в Ω, то існує просторова гармонічна функція $u:\mho\to\mathbb{R}$ така, що $\mathbf{V}=\mathrm{grad}\,u$ в $\mho$. Тому функції U_1,U_2,U_3 також є просторовими гармонічними функціями в кулі $\mho$.

Далі Теорема 7.2 доводиться так само, як Теорема 7.1. □

Зауваження 7.3. Таким чином, за умов Теореми 7.1 або Теореми 7.2 рівність (7.1) виконується для всіх $\zeta=xe_1+ye_2+ze_3\in\Omega$. У цьому випадку всі компоненти $U_k(x,y,z)$ у розкладі (3.1) є просторовими гармонічними функціями, тобто вони задовольняють рівняння (1.1).

Зауваження 7.4. У роботі [9] ми розглянули комплексифікацію $\widetilde{\mathbb{F}}_{\mathbb{C}}$ топологічного векторного простору $\widetilde{\mathbb{F}}$ і довели, що кожна моногенна функція $\Phi:\Omega\to\widetilde{\mathbb{F}}$ продовжується із заданої області $\Omega\subset E_3$ до моногенної функції в деякій області певного чотиривимірного дійсного простору $E_4\subset\mathbb{F}_{\mathbb{C}}$. Ми довели аналоги інтегральної теореми Коші та інтегральної формули Коші, а також аналоги теореми Морера і теореми Тейлора для моногенних функцій, що задані в областях простору E_4 і приймають значення в просторі $\widetilde{\mathbb{F}}_{\mathbb{C}}$.

Однак, на відміну від класичного комплексного аналізу, аналог інтегральної формули Коші, доведений у роботі [9], не може бути застосований для доведення Теореми 7.2, оскільки він вимагає додаткових припущень щодо функції Φ. Крім того, у згаданій формулі використовується інтегруванням по кривій, яка не міститься в E_3.

У той же час питання про справедливість інтегральної формули Коші при інтегруванні моногенних функцій $\Phi : \Omega \to \widetilde{\mathbb{F}}$ по кривій, розташованій в E_3, залишається відкритою проблемою.

8. Нескінченновимірна гармонічна алгебра $\mathbb{G}$ і моногенні функції в $\mathbb{G}$

Розглянемо нескінченновимірну комутативну банахову алгебру

$$\mathbb{G} := \left\{ g = \sum_{k=1}^{\infty} c_k e_k : c_k \in \mathbb{R}, \sum_{k=1}^{\infty} |c_k| < \infty \right\}$$

над полем $\mathbb{R}$ з нормою

$$\|g\|_{\mathbb{G}} := \sum_{k=1}^{\infty} |c_k| \tag{8.1}$$

і базисом $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$, де таблиця множення базисних елементів має наступний вигляд:

$$e_n e_1 = e_n, \quad e_{2n+1} e_m = e_{2n+m}, \quad e_{2n} e_{2m} = -e_{2n+2m-3} - e_{2n+2m+1} \tag{8.2}$$

для всіх натуральних n і m.

Очевидно, що елементи e_1, e_2, e_3 утворюють гармонічну трійку векторів, тобто вони задовольняють рівність (1.4).

Встановивши відповідність

$$e_{2n-1} \leftrightarrow i^{n-1} \cos^{n-1} \tau\,, \qquad e_{2n} \leftrightarrow i^{n} \sin\tau \cos^{n-1} \tau$$

між базисиними елементами e_k і тригонометричними функціями, отримаємо модель алгебри $\mathbb{G}$.

Розглянемо розклад (3.1) за базисом $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ функції $\Phi : \Omega \to \mathbb{G}$, моногенної в області $\Omega \subset E_3$, при цьому припускаємо, що всі функції $U_k : \Omega \to \mathbb{R}$ — диференційовні в області Ω.

В наступній теоремі встановлено необхідні і достатні умови моногенності функції Φ в області Ω.

Теорема 8.1 ([8]). *Нехай функція $\Phi : \Omega \to \mathbb{G}$ є неперервною в області $\Omega \subset E_3$ і всі функції $U_k : \Omega \to \mathbb{R}$ з розкладу* (3.1) *є диференційовними в Ω. Для того щоб функція Φ була моногенною в області Ω необхідно і достатньо, щоб в області Ω виконувались умови* (3.2) *і співвідношення* (3.3), (3.4).

Зауважимо, що співвідношення (3.3), (3.4) зумовлені нормою абсолютною збіжності (8.1) в алгебрі $\mathbb{G}$.

9. Моногенні функції в топологічному векторному просторі $\widetilde{\mathbb{G}}$, що містить алгебру $\mathbb{G}$

Напевно, неможливо отримати всі просторові гармонічні функції у вигляді компонент моногенних функцій зі значеннями в алгебрі $\mathbb{G}$. Тому помістимо алгебру $\mathbb{G}$ в топологічний векторний простір

$$\widetilde{\mathbb{G}} := \left\{ g = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e_k : c_k \in \mathbb{R} \right\}$$

з топологією покоординатної збіжності і базисом $\{e_k\}_{k=-\infty}^{\infty}$. Покладаємо, що базисні елементи множаться за правилами (8.2) для всіх цілих n і m.

М.Н. Рошкулець у роботі [10] фактично розглядав простір $\widetilde{\mathbb{G}}$, хоча він і не використовував поняття топологічного векторного простору, як і диференційовність за Гато. В роботі [10] доведено, що кожна сферична функція є компонентою розкладу за базисом функції $\lambda\zeta^n$, де $\lambda \in \widetilde{\mathbb{G}}$.

Зазначимо, що $\widetilde{\mathbb{G}}$ не є алгеброю, оскільки добуток елементів $g_1, g_2 \in \widetilde{\mathbb{G}}$ визначений не завжди. Проте для всіх

$$g = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e_k \in \widetilde{\mathbb{G}} \quad \text{і} \quad \zeta = xe_1 + ye_2 + ze_3$$

можна визначити добуток

$$g\zeta \equiv \zeta g := x \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e_k$$
$$+ y \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_{2k-1}\, e_{2k} - \sum_{k=-\infty}^{\infty} (c_{2k-2} + c_{2k+2})\, e_{2k+1} \right) + z \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_{k-2}\, e_k\,.$$

Отже, поняття диференційовності за Гато, визначене в Означенні 1.1, застосовне до функцій $\Phi : \Omega \to \widetilde{\mathbb{G}}$, що задані в області $\Omega \subset E_3$ та приймають значення в просторі $\widetilde{\mathbb{G}}$. У випадку, що розглядається, для моногенної функції $\Phi : \Omega \to \widetilde{\mathbb{G}}$, похідна Гато $\Phi'_G(\zeta)$ приймає значення в просторі $\widetilde{\mathbb{G}}$ для всіх $\zeta \in \Omega$.

Розглянемо розклад

$$\Phi(\zeta) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} U_k(x, y, z)\; e_k\,, \tag{9.1}$$

за базисом $\{e_k\}_{k=-\infty}^{\infty}$ функції $\Phi : \Omega \to \widetilde{\mathbb{G}}$, визначеної в області $\Omega \subset E_3$, при цьому припускаємо, що всі функції $U_k : \Omega \to \mathbb{R}$ — диференційовні в області Ω. З цього припущення випливає неперервність функції (9.1) в області Ω.

В наступній теоремі встановлено необхідні і достатні умови моногенності таких функцій в області $\Omega \subset E_3$. Відзначимо, що у порівнянні з Теоремою 8.1 для функцій, що приймають значення в просторі $\widetilde{\mathbb{G}}$, формулювання аналогічного за змістом твердження може бути спрощене, при цьому додаткові співвідношення (3.3) і (3.4), зумовлені нормою абсолютної збіжності (8.1) в алгебрі $\mathbb{G}$, не потрібні:

Теорема 9.1 ([8]). *Нехай у розкладі* (9.1) *функції* $\Phi : \Omega \longrightarrow \widetilde{\mathbb{G}}$, *заданої в області* $\Omega \subset E_3$, *всі компоненти* $U_k : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ *— диференційовні функції в області* Ω. *Тоді для того щоб функція* Φ *була моногеннною в області* Ω *необхідно і достатньо, щоб у цій області виконувались умови* (3.2).

Запишемо умови (3.2) у розгорнутому вигляді:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial U_{2m+2}}{\partial y} = \frac{\partial U_{2m+1}}{\partial x}\,, \\ &\frac{\partial U_{2m+1}}{\partial y} = -\frac{\partial U_{2m-2}}{\partial x} - \frac{\partial U_{2m+2}}{\partial x}\,, \\ &\frac{\partial U_{m+2}}{\partial z} = \frac{\partial U_{m}}{\partial x} \end{aligned} \tag{9.2}$$

для всіх цілих m.

Перепишемо систему (9.2) в такому евівалентному вигляді:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial U_{2m+2}}{\partial x} + \frac{\partial U_{2m+1}}{\partial y} + \frac{\partial U_{2m}}{\partial z} = 0\,, \\ &\frac{\partial U_{2m}}{\partial y} - \frac{\partial U_{2m+1}}{\partial z} = 0\,, \\ &\frac{\partial U_{2m+2}}{\partial z} - \frac{\partial U_{2m}}{\partial x} = 0\,, \\ &\frac{\partial U_{2m+1}}{\partial x} - \frac{\partial U_{2m+2}}{\partial y} = 0 \end{aligned} \tag{9.3}$$

для всіх цілих m.

Отже, рівняння (9.3), які за своєю природою подібні до умов Коші–Рімана для голоморфних функцій комплексної змінної, включають лише рівняння (1.2) для векторів $\mathbf{V} = (U_{2m+2}, U_{2m+1}, U_{2m})$ при всіх цілих m.

10. Зв'язки між моногенними функціями, що приймають значення в просторі $\widetilde{\mathbb{G}}$, і гармонічними векторами

Розглянемо розклад (9.1) функції $\Phi : \Omega \to \widetilde{\mathbb{G}}$, моногенної в області $\Omega \subset E_3$, при цьому припускаємо, що всі функції $U_k : \Omega \to \mathbb{R}$ — диференційовні в області Ω. Кожна така функція породжує в області Ω сім'ю розв'язків системи (9.3), тобто справедливе наступне твердження:

Теорема 10.1 ([8])**.** *Припустимо, що у розкладі* (9.1) *функції* $\Phi : \Omega \to \widetilde{\mathbb{G}}$, *моногенної в області* $\Omega \subset E_3$, *всі функції* $U_k : \Omega \to \mathbb{R}$ — *диференційовні в області* Ω. *Тоді компоненти розкладу* (9.1) *породжують гармонічні вектори* $\mathbf{V} = (U_{2m+2}, U_{2m+1}, U_{2m})$ *в області* Ω *при всіх цілих* m.

У наступній теоремі ми доводимо, що всі просторові гармонічні функції є компонентами моногенних функцій, що приймають значення у просторі $\widetilde{\mathbb{G}}$. Цей результат аналогічний до Теореми 6.2.

Теорема 10.2 ([8])**.** *Для кожної просторової гармонічної функції* $u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$, *заданої в однозв'язній області* $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, *існує моногенна функція* $\Phi : \Omega \longrightarrow \widetilde{\mathbb{G}}$ *така, що функція* $U_1 \equiv u$ *є компонентою розкладу* (9.1). *Крім того, усі компоненти* U_k *з розкладу* (9.1) *є проторовими гармонічними функціями в області* Ω.

Доведення. Покажемо, що існує розв'язок системи (9.3) для компонент розкладу (9.1) шуканої моногенної функції Φ, де $U_1 \equiv u$ — задана просторова гармонічна функція в області Ω.

Перш за все, існує гармонічний вектор $\mathbf{V} = (v_2, U_1, v_0)$ в області Ω в силу Твердження 5.2. Тоді, враховуючи Теорему 10.1, визначаємо функції $U_0 := v_0$, $U_2 := v_2$, які є просторовими гармонічними функціями в області Ω.

Тепер покажемо, що рівняння (9.3) дозволяють визначити функції U_{2m+1}, U_{2m+2}, якщо функцію U_{2m} вже визначено для деякого натурального m. Дійсно, у цьому випадку існує гармонічний вектор $\mathbf{V}_{2m} := (v_{2m+2}, v_{2m+1}, U_{2m})$ в області Ω в силу Твердження 5.3. Тоді, враховуючи Теорему 10.1, визначаємо функції $U_{2m+1} := v_{2m+1}$, $U_{2m+2} := v_{2m+2}$, які є просторовими гармонічними функціями в області Ω.

Нарешті, покажемо, що рівняння (9.3) дозволяють також визначити функції U_{2m}, U_{2m+1}, якщо функцію U_{2m+2} вже визначено для деякого від'ємного цілого числа m. Дійсно, у цьому випадку існує гармонічний вектор $\mathbf{V}_{2m+1} := (U_{2m+2}, v_{2m+1}, v_{2m})$ в області Ω в силу Твердження 5.1. Тоді, враховуючи Теорему 10.1, визначаємо функції $U_{2m} := v_{2m}$,

$U_{2m+1} := v_{2m+1}$, які є просторовими гармонічними функціями в області Ω.

Отже, отримані у такий спосіб функції U_k задовольняють систему (9.3) і утворюють функцію (9.1), моногенну в області Ω. $\square$

У наступній теоремі ми покажемо, що всі гармонічні вектори $\mathbf{V} = (v_1, v_2, v_3)$ з неперервно диференційовними координатними функціями v_1, v_2, v_3 можуть бути асоційовані з моногенними функціями, що приймають значення в топологічному векторному просторі $\widetilde{\mathbb{G}}$.

Теорема 10.3. *Припустимо, що у вектора* $\mathbf{V} = (v_1, v_2, v_3)$*, гармонічного в однозв'язній області* $\Omega \subset \mathbb{R}^3$*, компоненти* $v_k : \Omega \to \mathbb{R}$ *при* $k = 1, 2, 3$ *— неперервно диференційовні функції в* Ω*. Тоді існує моногенна функція* $\Phi : \Omega \to \widetilde{\mathbb{G}}$ *така, що функції* $U_0 := v_3$, $U_1 := v_2$, $U_2 := v_1$ *є компонентами розкладу* (9.1)*. Крім того, усі компоненти* U_k *з розкладу* (9.1) *є проторовими гармонічними функціями в області* Ω.

Доведення. Оскільки функції v_1, v_2, v_3 — неперервно диференційовні в однозв'язній області Ω і рівність $\operatorname{rot} \mathbf{V} = 0$ виконується в Ω, то існує функція $u : \Omega \to \mathbb{R}$ така, що $\mathbf{V} = \operatorname{grad} u$. Крім того, u — просторова гармонічна функція в області Ω в силу рівності $\operatorname{div} \mathbf{V} = 0$ в Ω. Тому v_1, v_2, v_3 також є просторовими гармонічними функціями в області Ω.

Тепер з доведення Теореми 10.2 випливає, що існує моногненна функція $\Phi : \Omega \to \widetilde{\mathbb{G}}$ така, що функції $U_0 := v_3$, $U_1 := v_2$, $U_2 := v_1$ є компонентами розкладу (9.1), і всі компоненти U_k в розкладі (9.1) є просторовими гармонічними функціями. $\square$

Встановимо достатні умови нескінченної моногенності функції $\Phi : \Omega \to \widetilde{\mathbb{G}}$.

Наступна теорема аналогічна до Теореми 7.1.

Теорема 10.4. *Припустимо, що в розкладі* (9.1) *функції* $\Phi : \Omega \to \widetilde{\mathbb{G}}$*, моногенної в області* $\Omega \subset E_3$*, усі функції* $U_k : \Omega \to \mathbb{R}$ *— диференційовні в* Ω *і, крім того, компонента* U_{k_0} *є просторовою гармонічною функцією в області* Ω *при деякому цілому* k_0*. Тоді похідні Гато* $\Phi_G^{(n)}$ *усіх порядків* n *є моногенними функціями в області* Ω.

Доведення. Розглянемо довільну точку $\zeta_0 = x_0 e_1 + y_0 e_2 + z_0 e_3 \in \Omega$, де $(x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$, і кулю $\mho \subset \Omega$ з центром у точці ζ_0.

За Теоремою 10.1 вектор $\mathbf{V} = (U_{2m+2}, U_{2m+1}, U_{2m})$ є гармонічним в області $\mho$, де $U_{2m} = U_{k_0}$ у випадку $k_0 = 2m$ або $U_{2m+1} = U_{k_0}$ у випадку $k_0 = 2m+1$ для деякого цілого m. Крім того, $U_{2m+2}, U_{2m+1}, U_{2m}$

є просторовими гармонічними функціями в кулі $\mho$ в силу Твердження 5.3 у випадку $k_0 = 2m$ і Твердження 5.2 у випадку $k_0 = 2m+1$.

Тепер, використовуючи Твердження 5.3, ми встановлюємо, що для всіх цілих $k > m$ і для заданої просторової гармонічної функції U_{2k}, функції U_{2k+2}, U_{2k+1}, що задовольняють систему (9.3), в якій k підставляється замість m, також є гармонічними в області $\mho$. Аналогічно, використовуючи Твердження 5.1, ми встановлюємо, що для всіх цілих $k < m$ і для заданої просторової гармонічної функції U_{2k}, функції U_{2k-1}, U_{2k-2}, що задовольняють систему (9.3), в якій $(k-1)$ підставляється замість m, також є гармонічними в $\mho$.

Таким чином, усі компоненти U_k у розкладі (9.1) є просторовими гармонічними функціями, що задовольняють систему (9.3) в області $\mho$. Отже, в розкладі

$$\Phi'_G(\zeta) = \frac{\partial \Phi(\zeta)}{\partial x} \equiv \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{\partial U_k(x,y,z)}{\partial x}\, e_k\,,$$

усі компоненти $\partial U_k(x,y,z)/\partial x$ є неперервно диференційовними функціями, які, в свою чергу, задовольняють систему вигляду (9.3) в області $\mho$. Тому похідна Гато Φ'_G є моногенною функцією в області $\mho$.

В силу довільності вибору точки ζ_0 і кулі $\mho$ ми можемо стверджувати, що похідна Гато Φ'_G є моногенною функцією в області Ω.

Нарешті, аналогічно доводиться, що похідна Гато n-го порядку $\Phi_G^{(n)}$ також є моногенною функцією в області Ω для будь-якого n. $\square$

Наступна теорема аналогічна до Теореми 7.2.

Теорема 10.5. *Припустимо, що в розкладі* (9.1) *функції* $\Phi : \Omega \to \widetilde{\mathbb{G}}$, *моногенної в області* $\Omega \subset E_3$, *усі функції* $U_k : \Omega \to \mathbb{R}$ *— диференційовні в* Ω *і, крім того, компоненти* $U_{2k_0}, U_{2k_0+1}, U_{2k_0+2}$ *— неперервно диференційовні функції в* Ω *при деякому цілому* k_0. *Тоді похідні Гато* $\Phi_G^{(n)}$ *усіх порядків* n *є моногенними функціями в області* Ω.

Доведення. За Теоремою 10.1 моногенна функція Φ породжує гармонічний вектор $\mathbf{V} = (U_{2k_0+2}, U_{2k_0+1}, U_{2k_0})$, що задовольняє рівність $\operatorname{rot}\mathbf{V} = 0$ в області Ω.

Розглянемо довільну точку $\zeta_0 = x_0e_1 + y_0e_2 + z_0e_3 \in \Omega$ і кулю $\mho \subset \Omega$ з центром у точці ζ_0, де $(x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$. Оскільки куля $\mho$ є однозв'язною областю і функції $U_{2k_0}, U_{2k_0+1}, U_{2k_0+2}$ — неперервно диференційовні в Ω, то існує просторова гармонічна функція $u : \mho \to \mathbb{R}$ така, що $\mathbf{V} = \operatorname{grad} u$ в $\mho$. Тому функції $U_{2k_0}, U_{2k_0+1}, U_{2k_0+2}$ також є просторовими гармонічними функціями в кулі $\mho$.

Далі Теорема 10.5 доводиться так само, як Теорема 10.4. $\square$

Зауваження 10.6. Таким чином, за умов Теореми 10.4 або Теореми 10.5 рівність (7.1) виконується для всіх $\zeta = xe_1 + ye_2 + ze_3 \in \Omega$. У цьому випадку всі компоненти $U_k(x, y, z)$ у розкладі (9.1) є просторовими гармонічними функціями, тобто вони задовольняють рівняння (1.1).

Література

[1] R. Fueter. Die funktionentheorie der differentialgleichungen $\Delta u = 0$ und $\Delta\Delta u = 0$ mit vier reellen variablen. *Comment. math. helv.*, 7:307–330, 1935.

[2] E. Goursat. *Cours d'analyse mathematique, 2.* Gauthier–Villars, Paris, 1910.

[3] P. W. Ketchum. Analytic functions of hypercomplex variables. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 30:641–667, 1928.

[4] P. W. Ketchum. A complete solution of Laplace's equation by an infinite hypervariable. *Amer. J. Math.*, 51:179–188, 1929.

[5] V. V. Kravchenko, M. V. Shapiro. *Integral representations for spatial models of mathematical physics.* Pitman Research Notes in Mathematics, Addison Wesley Longman Inc, 1996.

[6] G. C. Moisil, N. Theodoresco. Functions holomorphes dans l'espace. *Mathematica (Cluj)*, 5:142–159, 1931.

[7] S. A. Plaksa. Commutative algebras associated with classic equations of mathematical physics. In *Advances in Applied Analysis, Trends in Mathematics*, pages 177–223. Springer, Basel, 2012. doi:10.1007/978-3-0348-0417-5.

[8] S. A. Plaksa, V. S. Shpakivskyi. A description of spatial potential fields by means of monogenic functions in infinite-dimensional spaces with a commutative multiplication. *Bulletin Soc. Sci. et Lettr. Łódź*, 62(2):55–65, 2012.

[9] S. A. Plaksa, V. S. Shpakivskyi. An extension of monogenic functions and spatial potentials. *Lobachevskii Journal of Mathematics*, 38(2):330–337, March 2017. doi: 10.1134/s1995080217020160.

[10] M. N. Roşculeţ. Algebre infinite associate la ecuaţii cu derivate parţiale, omogene, cu coeficienţi constanţi de ordin oarecare. *Studii şi Cercetări Matematice*, 6(3–4):567–643, 1955.

[11] J. Ryan. Dirac operators, conformal transformations and aspects of classical harmonic analysis. *J. of Lie Theory*, 8:67–82, 1998.

[12] A. Sudbery. Quaternionic analysis. *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.*, 85:199–225, 1979.

[13] И. Н. Векуа. *Обобщенные аналитические функции.* Наука, Москва, 1988.

[14] У. Р. Гамильтон. *Избранные труды: Оптика. Динамика. Кватернионы.* Классики науки. Москва: Наука, 1994.

[15] М. А. Лаврентьев, Б. В. Шабат. *Проблемы гидродинамики и их математические модели.* Москва: Наука, 1977.

[16] И. П. Мельниченко. О представлении моногенными функциями гармонических отображений. *Укр. мат. журн.*, 27(5):606–613, 1975.

[17] И. П. Мельниченко, С. А. Плакса. *Коммутативные алгебры и пространственные потенциальные поля.* Ин-т математики НАН Украины, Киев, 2008.

[18] С. А. Плакса, В. С. Шпаковский. Конструктивное описание моногенных функций в гармонической алгебре третьего ранга. *Укр. мат. журн.*, 62(8):1078–1091, 2010. doi:10.1007/s11253-011-0427-x.

[19] А. Ф. Тиман, В. Н. Трофимов. *Введение в теорию гармонических функций.* Наука, Москва, 1968.

[20] Ю. Ю. Трохимчук. *Непрерывные отображения и условия моногенности.* Москва: Физматиз, 1963.

С. А. Плакса

Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Ukraine;
University of Padova, Italy

Email: plaksa62@gmail.com

ORCID: orcid.org/0000-0002-2828-0329

Збірник праць Ін-ту математики НАН України (2022) Т. 19, № 1, 197–209

Про кільцеві Q-гомеоморфізми відносно p-модуля

Р. Р. Салімов, Б. А. Кліщук

Присвячується пам'яті професора Олександра Бахтіна

Abstract. In this paper ring Q-homeomorphisms with respect to the p-modulus in the space $\mathbb{R}^n$ at $p > n$ are studied. For such class of mappings lower bounds of the volume of the ball image were obtained and their behavior at infinity was investigated. Extremal problems on minimization of the functionals of the volume of the ball image and the area of the sphere image were solved.

Анотація. В даній роботі вивчаються кільцеві Q-гомеоморфізми відносно p-модуля в просторі $\mathbb{R}^n$ при $p > n$. Для такого класу відображень наведено нижні оцінки об'єму образу кулі та досліджено їх поведінку на нескінченності. Розв'язано екстремальні задачі про мінімізацію функціоналів об'єму образу кулі і площі образу сфери.

1. Вступ

Наведемо деякі означення. Нехай задано сім'ю Γ кривих γ в просторі $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$. Борелеву функцію $\rho : \mathbb{R}^n \to [0, \infty]$ називають *допустимою* для Γ, пишуть $\rho \in \operatorname{adm} \Gamma$, якщо

$$\int\limits_{\gamma} \rho(x)\, ds \ \geqslant\ 1$$

для кожної (локально спрямлюваної) кривої $\gamma \in \Gamma$. Нехай $p \in (1, \infty)$. Тоді *p–модулем* сім'ї Γ називається величина

$$\mathrm{M}_p(\Gamma) \ = \inf_{\rho \in \operatorname{adm} \Gamma} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \rho^p(x)\, dm(x)\,.$$

Тут m — міра Лебега в $\mathbb{R}^n$.

2010 Mathematics Subject Classification: 30C65

УДК 517.5

Ключові слова: кільцеві Q-гомеоморфізми, p-модуль сім'ї кривих, квазіконформні відображення, конденсатор, p-ємність конденсатора

Для довільних множин E, F і G в $\mathbb{R}^n$, позначимо через $\Delta(E,F,G)$ сім'ю всіх неперервних кривих $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$, які з'єднують E та F в G, тобто $\gamma(a) \in E$, $\gamma(b) \in F$ і $\gamma(t) \in G$ при $a < t < b$. Нехай D — область в $\mathbb{R}^n$, $x_0 \in D$, $0 < r_1 < r_2 < d_0$, $r > 0$ та $d_0 = \operatorname{dist}(x_0, \partial D)$. Покладемо

$$\mathbb{A}(x_0, r_1, r_2) = \{x \in \mathbb{R}^n : r_1 < |x - x_0| < r_2\}\,,$$

$$B(x_0, r) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x - x_0| \leqslant r\}\,,$$

$$S_i = S(x_0, r_i) = \{x \in \mathbb{R}^n : \ |x - x_0| = r_i\}\,, \quad i = 1, 2\,.$$

Нехай $Q : D \to [0, \infty]$ — вимірна за Лебегом функція. Будемо говорити, що гомеоморфізм $f : D \to \mathbb{R}^n$ є кільцевим Q-гомеоморфізмом відносно p-модуля в точці $x_0 \in D$, якщо співвідношення

$$\mathrm{M}_p(\Delta(fS_1, fS_2, fD)) \ \leqslant \ \int\limits_{\mathbb{A}} Q(x)\, \eta^p(|x - x_0|)\, dm(x)$$

виконується для будь-якого кільця $\mathbb{A} = \mathbb{A}(x_0, r_1, r_2)$ і для кожної вимірної функції $\eta : (r_1, r_2) \to [0, \infty]$ такої, що $\int\limits_{r_1}^{r_2} \eta(r)\, dr = 1\,.$

Теорія Q-гомеоморфізмів при $p = n$ досліджувалась в роботах [18], [19], [20], [21], [22], [34], [38], при $1 < p < n$ див. [10], [11], [12], [13], [23], [24], [25], [26], і при $p > n$ див. в [17], [27], [28], [29], [30], [31], [32], [33]. Більш загальні класи відображень досліджувались в [4], [5], [6], [14], [15], [16].

Нехай $Q : D \to [0, \infty]$ — вимірна за Лебегом функція. Тоді через $q_{x_0}(r) = \frac{1}{\omega_{n-1}\, r^{n-1}} \int\limits_{S(x_0,r)} Q(x)\, d\mathcal{A}$ позначимо середнє інтегральне значення функції Q по сфері $S(x_0, r) = \{x \in \mathbb{R}^n : \ |x - x_0| = r\}$, де ω_{n-1} — площа одиничної сфери $\mathbb{S}^{n-1}$ в $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, і $d\mathcal{A}$ — элемент площі поверхні.

Нижче сформульовано критерій належності класу кільцевих Q-гомеоморфізмів відносно p-модуля при $p > 1$ в $\mathbb{R}^n$.

Твердження 1.1. *Нехай D — область в $\mathbb{R}^n$ і нехай $Q : D \to [0, \infty]$ — вимірна за Лебегом функція така, що середнє інтегральне значення $q_{x_0}(r)$ скінченне для м.в. $r \in (0, d_0)$, $d_0 = \operatorname{dist}(x_0, \partial D)$. Гомеоморфізм $f : D \to \mathbb{R}^n$ є кільцевим Q-гомеоморфізмом в точці $x_0 \in D$ тоді і тільки тоді, коли для будь-яких $0 < r_1 < r_2 < d_0$*

$$\mathrm{M}_p\left(\Delta(fS_1, fS_2, fD)\right) \leqslant \frac{\omega_{n-1}}{\left(\int\limits_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r^{\frac{n-1}{p-1}}\, q_{x_0}^{\frac{1}{p-1}}(r)}\right)^{p-1}},$$

де S_1 *та* S_2 *— сфери* $S(x_0, r_1)$ *і* $S(x_0, r_2)$ *(див. теорему 2.3 в [24]).*

2. Спотворення образу кулі

Задача про спотворення площ при квазіконформних відображеннях вперше зустрічається в роботі Б. Боярського, див. [35]. Низку результатів в цьому напрямку одержано в роботах [1], [3], [7], [9].

Вперше верхня оцінка площі образу круга при квазіконформних відображеннях зустрічається у монографії М.О. Лаврентьєва, див [37]. У монографії [2], див. твердження 3.7, отримано уточнення нерівності Лаврентьєва у термінах кутової дилатації. Також раніше у роботах [38] та [39] були отримані верхні оцінки спотворення площі круга для кільцевих та нижніх Q-гомеоморфізмів. В.І. Кругліковим була отримана оцінка міри образу кулі для відображень квазіконформних в середньому в $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$ (див. лему 9 в [36]). У роботі [24] були отримані верхні оцінки міри образу кулі в $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, при кільцевих Q-гомеоморфізмах для випадку $1 < p \leqslant n$.

Нижче наведено нижні оцінки об'єму образу кулі при кільцевих Q-гомеоморфізмах відносно p-модуля в $\mathbb{R}^n$ для $p > n$, $n \geqslant 2$.

Теорема 2.1 ([30]). *Нехай* D *— обмежена область в* $\mathbb{R}^n$ *і нехай* $f : D \to \mathbb{R}^n$ *— кільцевий* Q*-гомеоморфізм відносно* p*-модуля в точці* $x_0 \in D$ *при* $p > n$*. Тоді для всіх* $r \in (0,\, d_0)$ *має місце оцінка*

$$m(f(B(x_0, r))) \geqslant \Omega_n \left(\frac{p-n}{p-1}\right)^{\frac{n(p-1)}{p-n}} \left(\int\limits_0^r \frac{dt}{t^{\frac{n-1}{p-1}}\, q_{x_0}^{\frac{1}{p-1}}(t)}\right)^{\frac{n(p-1)}{p-n}},$$

де Ω_n *— об'єм одиничної кулі в* $\mathbb{R}^n$*.*

Теорема 2.2 ([30]). *Нехай* D *— обмежена область в* $\mathbb{R}^n$*,* $n \geqslant 2$*, і* $f : D \to \mathbb{R}^n$ *— кільцевий* Q*-гомеоморфізм відносно* p*-модуля в точці* $x_0 \in D$ *при* $p > n$*. Припустимо, що функція* Q *задовольняє умову*

$$q_{x_0}(t) \leqslant q_0\, t^{-\alpha},\ q_0 \in (0, \infty)\,,\ \alpha \in [0, \infty)\,,$$

для $x_0 \in D$ *і майже всіх* $t \in (0, \varepsilon_0)$*,* $\varepsilon_0 \in (0, d_0)$*. Тоді при всіх* $r \in (0, \varepsilon_0)$ *має місце оцінка*

$$m(fB(x_0,r)) \geqslant \Omega_n \left(\frac{p-n}{\alpha+p-n}\right)^{\frac{n(p-1)}{p-n}} q_0^{\frac{n}{n-p}} \, r^{\frac{n(\alpha+p-n)}{p-n}},$$

де Ω_n *— об'єм одиничної кулі в* $\mathbb{R}^n$*.*

Поклавши $\alpha = 0$ в теоремі 2.2, одержимо наступний наслідок.

Наслідок 2.3. *Нехай* D *— обмежена область в* $\mathbb{R}^n$ *і* $f : D \to \mathbb{R}^n$ *— кільцевий* Q*-гомеоморфізм відносно* p*-модуля в точці* $x_0 \in D$ *при* $p > n$ *і* $q_{x_0}(t) \leqslant q_0$*,* $0 < q_0 < \infty$*, для м.в.* $t \in (0, d_0)$*. Тоді має місце оцінка*

$$m(fB(x_0,r)) \geqslant q_0^{\frac{n}{n-p}} \, \Omega_n \, r^n$$

для всіх $r \in (0, d_0)$ *.*

Теорема 2.4 ([30]). *Нехай* $f : D \to \mathbb{R}^n$ *— кільцевий* Q*-гомеоморфізм відносно* p*-модуля в точці* $x_0 \in D$ *при* $p > n$*. Припустимо, що функція* $Q : D \to [0, \infty]$ *задовольняє умову*

$$q_{x_0}(t) \leqslant q_0 \left(\ln\frac{1}{t}\right)^{k(p-1)} t^{p-n}, \; q_0 \in (0,\infty), \; k \in (1,\infty),$$

для м.в. $t \in (0, \delta_0)$*,* $\delta_0 = \min\{1, d(x_0, \partial D)\}$*. Тоді при всіх* $r \in (0, \delta_0)$*, має місце оцінка*

$$m(fB(x_0,r)) \geqslant \Omega_n \left(\frac{p-n}{(p-1)(k-1)}\right)^{\frac{n(p-1)}{p-n}} q_0^{\frac{n}{n-p}} \left(\ln\frac{1}{r}\right)^{-\frac{(k-1)n(p-1)}{p-n}},$$

де Ω_n *— об'єм одиничної кулі в* $\mathbb{R}^n$*.*

3. Спотворення площі за Мінковським

Наведемо деякі означення. Для множини $E \subset \mathbb{R}^n$ задамо верхній $(n-1)$-вимірний об'єм Мінковського

$$M^{*\,n-1}(E) = \varlimsup_{\varepsilon \to +0} \frac{m\{x : \operatorname{dist}(x; E) < \varepsilon\}}{2\,\varepsilon},$$

і $(n-1)$-вимірний нижній об'єм Мінковського

$$M_*^{n-1}(E) = \varliminf_{\varepsilon \to +0} \frac{m\{x : \operatorname{dist}(x; E) < \varepsilon\}}{2\,\varepsilon}.$$

У випадку, коли верхній і нижній об'єми Мінковського співпадають, їх спільне значення називається $(n-1)$-вимірним об'ємом Мінковського $M_{n-1}(E)$ (див. [8], с. 294). Відомо, що якщо $E \subset \mathbb{R}^n$ і $m(\overline{E}) < \infty$, то

$$M_*^{n-1}(\partial E) \geqslant n\, \Omega_n^{\frac{1}{n}} \left(m(\overline{E})\right)^{\frac{n-1}{n}}\,,$$

(див. [8], п. 3.2.43, с. 299).

Нехай множина $E \subset \mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, ∂E — межа множини E, тоді *нижньою $(n-1)$-вимірною площею* межі ∂E будемо називати $(n-1)$-вимірний нижній об'єм Мінковського.

Нижче наведено нижні оцінки нижньої $(n-1)$-вимірної площі образу сфери при кільцевих Q-гомеоморфізмах відносно p-модуля у випадку $p > n$.

Теорема 3.1 ([30]). *Нехай D — обмежена область в $\mathbb{R}^n$, $p > n$ і нехай $f : D \to \mathbb{R}^n$ — кільцевий Q-гомеоморфізм відносно p-модуля в точці $x_0 \in D$. Тоді для всіх $r \in (0, d_0)$, $d_0 = \mathrm{dist}(x_0, \partial D)$, має місце оцінка*

$$M_*^{n-1}(fS(x_0,r)) \geqslant \omega_{n-1} \left(\frac{p-n}{p-1}\right)^{\frac{(n-1)(p-1)}{p-n}} \left(\int\limits_0^r \frac{dt}{t^{\frac{n-1}{p-1}}\, q_{x_0}^{\frac{1}{p-1}}(t)}\right)^{\frac{(n-1)(p-1)}{p-n}}\,,$$

де ω_{n-1} — площа одиничної сфери $\mathbb{S}^{n-1}$ в $\mathbb{R}^n$.

Теорема 3.2 ([30]). *Нехай D — обмежена область в $\mathbb{R}^n$ і $f : D \to \mathbb{R}^n$ — кільцевий Q-гомеоморфізм відносно p-модуля в точці $x_0 \in D$ при $p > n$. Припустимо, що функція Q задовольняє умову*

$$q_{x_0}(t) \leqslant q_0\, t^{-\alpha},\ q_0 \in (0,\infty)\,,\ \alpha \in [0,\infty)\,,$$

для м.в. $t \in (0, d_0)$. Тоді при всіх $r \in (0, d_0)$ має місце оцінка

$$M_*^{n-1}(fS(x_0,r)) \geqslant \omega_{n-1} \left(\frac{p-n}{\alpha+p-n}\right)^{\frac{(n-1)(p-1)}{p-n}} q_0^{\frac{n-1}{n-p}}\, r^{\frac{(n-1)(\alpha+p-n)}{p-n}}\,,$$

де ω_{n-1} — площа одиничної сфери $\mathbb{S}^{n-1}$ в $\mathbb{R}^n$.

Наслідок 3.3. *Нехай D — обмежена область в $\mathbb{R}^n$ і $f : D \to \mathbb{R}^n$ — кільцевий Q-гомеоморфізм відносно p-модуля в точці $x_0 \in D$ при $p > n$ і $q_{x_0}(t) \leqslant q_0$, $0 < q_0 < \infty$, для м.в. $t \in (0, d_0)$. Тоді має місце оцінка*

$$M_*^{n-1}(fS(x_0,r)) \geqslant q_0^{\frac{n-1}{n-p}}\, \omega_{n-1}\, r^{n-1}$$

для всіх $r \in (0, d_0)$.

Теорема 3.4 ([30]). *Нехай $f : D \to \mathbb{R}^n$ — кільцевий Q-гомеоморфізм відносно p-модуля в точці $x_0 \in D$ при $p > n$. Припустимо, що функція $Q : D \to [0, \infty]$ задовольняє умову*

$$q_{x_0}(t) \leqslant q_0 \left(\ln \frac{1}{t}\right)^{k(p-1)} t^{p-n},\ q_0 \in (0, \infty),\ k \in (1, \infty)\,,$$

для м.в. $t \in (0, \delta_0)$, $\delta_0 = \min\{1, d(x_0, \partial D)\}$. Тоді при всіх $r \in (0, \delta_0)$ має місце оцінка

$$M_*^{n-1}(fS(x_0, r)) \geqslant q_0^{\frac{n-1}{n-p}}\, \omega_{n-1}\, c_0\, \left(\ln \frac{1}{r}\right)^{-\frac{(k-1)(n-1)(p-1)}{p-n}}\,,$$

де $c_0 = \left(\frac{p-n}{(p-1)(k-1)}\right)^{\frac{(n-1)(p-1)}{p-n}}$, $S(x_0, r) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x - x_0| = r\}$ та ω_{n-1} — площа одиничної сфери $\mathbb{S}^{n-1}$ в $\mathbb{R}^n$.

4. Екстремальні задачі для функціоналів об'єму і площі

Нехай далі $\mathbb{B}^n = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < 1\}$, $p > n$, $q_0 \in (0, \infty)$, $\alpha \in [0, \infty)$. Позначимо через $\mathcal{H}_1 = \mathcal{H}(p, q_0, \alpha)$ сім'ю всіх гомеоморфізмів $f : \mathbb{B}^n \to \mathbb{R}^n$ для яких знайдеться функція $Q = Q_f : \mathbb{B}^n \to [0, \infty]$ така, що f є кільцевим Q-гомеоморфізмом у точці $x_0 = 0$ відносно p-модуля, причому

$$q(t) = \frac{1}{\omega_{n-1}\, t^{n-1}} \int\limits_{S_t} Q(x)\, d\mathcal{A} \leqslant q_0\, t^{-\alpha}$$

для м.в. $t \in (0, 1)$, де $S_t = S(0, t) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| = t\}$.

Нехай $r > 0$. Позначимо $B_r = B(0, r) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| \leqslant r\}$ та розглянемо на класі $\mathcal{H}_1$ функціонал об'єму $\mathbf{V}_r(f) = m(fB_r)$ і функціонал площі за Мінковським $\mathbf{A}_r(f) = M_*^{n-1}(fS_r)$.

Нижче наведено теорему про мінімізацію функціоналів $\mathbf{V}_r(f)$ і $\mathbf{A}_r(f)$.

Теорема 4.1 ([30]). *Для всіх $r \in [0, 1]$ справедливі рівності*

$$\min_{f \in \mathcal{H}_1} \mathbf{V}_r(f) = \Omega_n \left(\frac{p-n}{\alpha + p - n}\right)^{\frac{n(p-1)}{p-n}} q_0^{\frac{n}{n-p}}\, r^{\frac{n(\alpha+p-n)}{p-n}}\,,$$

$$\min_{f \in \mathcal{H}_1} \mathbf{A}_r(f) = \omega_{n-1} \left(\frac{p-n}{\alpha + p - n}\right)^{\frac{(n-1)(p-1)}{p-n}} q_0^{\frac{n-1}{n-p}}\, r^{\frac{(n-1)(\alpha+p-n)}{p-n}}\,,$$

де Ω_n — об'єм одиничної кулі в $\mathbb{R}^n$, ω_{n-1} — площа одиничної сфери $\mathbb{S}^{n-1}$ в $\mathbb{R}^n$.

Наведемо гомеоморфізм $f_1 \in \mathcal{H}_1$, на якому реалізуються мінімуми функціоналів $\mathbf{V}_r(f)$ і $\mathbf{A}_r(f)$. Нехай $f_1 : \mathbb{B}^n \to \mathbb{R}^n$, де

$$f_1(x) = \begin{cases} q_0^{\frac{1}{n-p}} \left(\frac{p-n}{\alpha+p-n}\right)^{\frac{p-1}{p-n}} |x|^{\frac{\alpha+p-n}{p-n}} \frac{x}{|x|}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Легко перевірити, що за твердженням 1.1, гомеоморфізм f_1 є кільцевим Q-гомеоморфізмом відносно p-модуля при $p > n$ з функцією $Q(x) = q_0 \, |x|^{-\alpha}$ в точці $x_0 = 0$.

Зафіксуємо $q_0 \in (0, \infty)$, $k \in (1, \infty)$, $p > n$. Позначимо через $\mathcal{H}_2 = \mathcal{H}_2(q_0, p, k)$ сім'ю всіх гомеоморфізмів $f : \mathbb{B}^n \to \mathbb{R}^n$ для яких знайдеться функція $Q = Q_f : \mathbb{B}^n \to [0, \infty]$ така, що f є кільцевим Q-гомеоморфізмом у точці $x_0 = 0$ відносно p-модуля, причому

$$q(t) \leqslant q_0 \left(\ln \frac{1}{t}\right)^{k(p-1)} t^{p-n} \tag{4.1}$$

при м.в. $t \in (0, 1)$.

Справедливий наступний результат.

Теорема 4.2 ([30]). *Для всіх $r \in [0, 1)$ справедливі рівності*

$$\min_{f \in \mathcal{H}_2} \mathbf{V}_r(f) = \Omega_n \left(\frac{p-n}{(p-1)(k-1)}\right)^{\frac{n(p-1)}{p-n}} q_0^{\frac{n}{n-p}} \left(\ln \frac{1}{r}\right)^{-\frac{(k-1)n(p-1)}{p-n}},$$

$$\min_{f \in \mathcal{H}_2} \mathbf{A}_r(f) = \omega_{n-1} \left(\frac{p-n}{(p-1)(k-1)}\right)^{\frac{(n-1)(p-1)}{p-n}} q_0^{\frac{n-1}{n-p}} \left(\ln \frac{1}{r}\right)^{-\frac{(k-1)(n-1)(p-1)}{p-n}},$$

де Ω_n — об'єм одиничної кулі в $\mathbb{R}^n$, ω_{n-1} — площа одиничної сфери $\mathbb{S}^{n-1}$ в $\mathbb{R}^n$.

Наведемо гомеоморфізм $f \in \mathcal{H}_2$, на якому реалізується мінімум функціоналів $\mathbf{V}_r(f)$ і $\mathbf{A}_r(f)$. Нехай $f_2 : \mathbb{B}^n \to \mathbb{R}^n$, де

$$f_2(x) = \begin{cases} q_0^{\frac{1}{n-p}} \left(\frac{p-n}{(p-1)(k-1)}\right)^{\frac{p-1}{p-n}} \left(\ln \frac{1}{|x|}\right)^{-\frac{(k-1)(p-1)}{p-n}} \frac{x}{|x|}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0. \end{cases} \tag{4.2}$$

Згідно твердження 1.1, гомеоморфізм f_2 є кільцевим Q-гомеоморфізмом відносно p-модуля при $p > n$ з функцією $Q(x) = q_0 \left(\ln \frac{1}{|x|}\right)^{k(p-1)} |x|^{p-n}$ в точці $x_0 = 0$.

5. Поведінка на нескінченності

У цьому пункті наведемо результати наших статей [32], [33] про асимптотичну поведінку на нескінченності кільцевих Q-гомеоморфізмів відносно p-модуля при $p > n$, див. також [17], [31]. Випадок $p = n$ досліджено в роботі [34]. Нехай $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $R > 0$ та для гомеоморфізму $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ покладемо

$$L(x_0, f, R) = \max_{|x-x_0|=R} |f(x) - f(x_0)| \,.$$

Справедливе наступне твердження.

Теорема 5.1 ([33]). *Нехай $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ — кільцевий Q-гомеоморфізм відносно p-модуля в точці x_0 при $p > n$, де x_0 — деяка точка в $\mathbb{R}^n$. Якщо для деяких чисел $c > 0$, $0 \leqslant \kappa \leqslant p$, $r_0 > 0$ виконується умова*

$$\int\limits_{\mathbb{A}(x_0,r_0,R)} Q(x)\, \psi^p(|x-x_0|)\, dm(x) \ \leqslant\ c\, I^{\kappa}(r_0, R) \quad \forall\, R > r_0 \,,$$

де $\psi(t)$ — невід'ємна вимірна за Лебегом функція на $(0, +\infty)$ така, що

$$0 < I(r_0, R) = \int\limits_{r_0}^{R} \psi(t)\, dt < \infty \quad \forall\, R > r_0 \,,$$

то

$$\varliminf_{R\to\infty} L(x_0, f, R)\, I^{\frac{\kappa-p}{p-n}}(r_0, R) \ \geqslant \left(\frac{p-n}{p-1}\right)^{\frac{p-1}{p-n}} \left(\frac{\omega_{n-1}}{c}\right)^{\frac{1}{p-n}} \,,$$

де ω_{n-1} — площа одиничної сфери $\mathbb{S}^{n-1}$ в $\mathbb{R}^n$.

Поклавши в теоремі 5.1 $\kappa = n$, отримаємо наступний наслідок.

Наслідок 5.2. *Нехай $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ — кільцевий Q-гомеоморфізм відносно p-модуля в точці x_0 при $p > n$, де x_0 — деяка точка в $\mathbb{R}^n$. Якщо для деяких чисел $c > 0$, $r_0 > 0$ виконується умова*

$$\int\limits_{\mathbb{A}(x_0,r_0,R)} Q(x)\, \psi^p(|x-x_0|)\, dm(x) \ \leqslant\ c\, I^{n}(r_0, R) \quad \forall\, R > r_0 \,,$$

де $\psi(t)$ — невід'ємна вимірна за Лебегом функція на $(0, +\infty)$ така, що

$$0 < I(r_0, R) = \int\limits_{r_0}^{R} \psi(t)\, dt < \infty \quad \forall\, R > r_0\,,$$

то

$$\varliminf_{R\to\infty} \frac{L(x_0, f, R)}{I(r_0, R)} \geqslant \left(\frac{p-n}{p-1}\right)^{\frac{p-1}{p-n}} \left(\frac{\omega_{n-1}}{c}\right)^{\frac{1}{p-n}}\,,$$

де ω_{n-1} *— площа одиничної сфери* $\mathbb{S}^{n-1}$ *в* $\mathbb{R}^n$.

Наслідок 5.3. *Нехай* $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *— кільцевий* Q*-гомеоморфізм відносно* p*-модуля в точці* x_0 *при* $p > n$, *де* x_0 *— деяка точка в* $\mathbb{R}^n$. *Якщо для деяких чисел* $c > 0$, $0 \leqslant \kappa \leqslant p$, $r_0 > 1$ *виконується умова*

$$\int\limits_{\mathbb{A}(x_0, r_0, R)} \frac{Q(x)\, dm(x)}{|x - x_0|^p} \leqslant c \ln^{\kappa} R \quad \forall\, R > r_0\,,$$

то

$$\varliminf_{R\to\infty} \frac{L(x_0, f, R)}{(\ln R)^{\frac{p-\kappa}{p-n}}} \geqslant \left(\frac{p-n}{p-1}\right)^{\frac{p-1}{p-n}} \left(\frac{\omega_{n-1}}{c}\right)^{\frac{1}{p-n}}\,,$$

де ω_{n-1} *— площа одиничної сфери* $\mathbb{S}^{n-1}$ *в* $\mathbb{R}^n$.

Наслідок 5.4. *Нехай* $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *— кільцевий* Q*-гомеоморфізм відносно* p*-модуля в точці* x_0 *при* $p > n$, *де* x_0 *— деяка точка в* $\mathbb{R}^n$, $r_0 > e$. *Якщо для деяких чисел* $c > 0$, $0 \leqslant \kappa \leqslant p$ *виконується умова*

$$\int\limits_{\mathbb{A}(x_0, r_0, R)} \frac{Q(x)\, dm(x)}{|x - x_0|^p \ln^p |x - x_0|} \leqslant c\, (\ln\ln R)^{\kappa} \quad \forall\, R > r_0\,,$$

то

$$\varliminf_{R\to\infty} \frac{L(x_0, f, R)}{(\ln\ln R)^{\frac{p-\kappa}{p-n}}} \geqslant \left(\frac{p-n}{p-1}\right)^{\frac{p-1}{p-n}} \left(\frac{\omega_{n-1}}{c}\right)^{\frac{1}{p-n}}\,,$$

де ω_{n-1} *— площа одиничної сфери* $\mathbb{S}^{n-1}$ *в* $\mathbb{R}^n$.

Нижче наведено точні оцінки порядку росту на нескінченності.

Теорема 5.5 ([33]). *Нехай* $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *— кільцевий* Q*-гомеоморфізм відносно* p*-модуля в точці* x_0 *при* $p > n$, *де* x_0 *— деяка точка в* $\mathbb{R}^n$. *Тоді для всіх чисел* $r_0 > 0$ *виконується оцінка*

$$\varliminf_{R\to\infty} L(x_0,f,R)\left(\int\limits_{r_0}^{R}\frac{dt}{t^{\frac{n-1}{p-1}}\,q_{x_0}^{\frac{1}{p-1}}(t)}\right)^{-\frac{p-1}{p-n}} \geqslant \left(\frac{p-n}{p-1}\right)^{\frac{p-1}{p-n}}>0\,,$$

де $q_{x_0}(t)=\frac{1}{\omega_{n-1}\,t^{n-1}}\int\limits_{S(x_0,t)} Q(x)\,d\mathcal{A}$ *— середнє інтегральне значення по сфері* $S(x_0,\,t)=\{x\in\mathbb{R}^n: |x-x_0|=t\}$, ω_{n-1} *— площа одиничної сфери* $\mathbb{S}^{n-1}$ *в* $\mathbb{R}^n$.

Наслідок 5.6. *Нехай* $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ *— кільцевий* Q*-гомеоморфізм відносно* p*-модуля в точці* x_0 *при* $p>n$, *де* x_0 *— деяка точка в* $\mathbb{R}^n$ *і для деяких чисел* $r_0>0$, $K>0$ *виконується умова*

$$q_{x_0}(t)\leqslant K\,t^{\alpha}$$

для м.в. $t\in[r_0,+\infty)$. *Якщо* $\alpha\in[0,p-n)$, *тоді*

$$\varliminf_{R\to\infty}\frac{L(x_0,f,R)}{R^{\frac{p-n-\alpha}{p-n}}}\geqslant K^{\frac{1}{n-p}}\left(\frac{p-n}{p-n-\alpha}\right)^{\frac{p-1}{p-n}}>0\,.$$

Якщо $\alpha=p-n$, *тоді*

$$\varliminf_{R\to\infty}\frac{L(x_0,f,R)}{(\ln R)^{\frac{p-1}{p-n}}}\geqslant K^{\frac{1}{n-p}}\left(\frac{p-n}{p-1}\right)^{\frac{p-1}{p-n}}>0\,.$$

Приклад 5.7. Нехай $f_3:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$, $\alpha\in[0,p-n)$, де

$$f_3(x)=\begin{cases}K^{\frac{1}{n-p}}\left(\frac{p-n}{p-n-\alpha}\right)^{\frac{p-1}{p-n}}|x|^{\frac{p-n-\alpha}{p-n}}\,\frac{x}{|x|}\,, & x\neq 0\\ 0, & x=0\,.\end{cases}$$

Легко бачити, що

$$\lim_{R\to\infty}\frac{\max\limits_{|x|=R}|f_3(x)|}{R^{\frac{p-n-\alpha}{p-n}}}=K^{\frac{1}{n-p}}\left(\frac{p-n}{p-n-\alpha}\right)^{\frac{p-1}{p-n}}.$$

Згідно твердження 1.1, гомеоморфізм f_3 є кільцевим Q-гомеоморфізмом відносно p-модуля при $p>n$ з функцією $Q(x)=K\,|x|^{\alpha}$ в точці $x_0=0$.

Покладаючи $\alpha=0$ в наслідку 5.6, отримаємо ще один наслідок.

Наслідок 5.8. *Нехай $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ — кільцевий Q-гомеоморфізм відносно p-модуля в точці x_0 при $p > n$ і для деяких чисел $r_0 > 0$, $K > 0$ виконується умова*

$$q_{x_0}(t) \leqslant K$$

для м.в. $t \in [r_0, +\infty)$. Тоді має місце оцінка

$$\varliminf_{R\to\infty} \frac{L(x_0, f, R)}{R} \geqslant K^{\frac{1}{n-p}} > 0\,.$$

Література

[1] K. Astala. Area distortion of quasiconformal mappings. *Acta Math.*, 173:37–60, 1994.

[2] B. Bojarski, V. Gutlyanskii, O. Martio, V. Ryazanov. *Infinitesimal Geometry of Quasiconformal and Bi-Lipschitz Mappings in the Plane*. EMS Press, 2013. doi:10.4171/122.

[3] B. Bojarski, T. Iwaniec. Analytical foundations of the theory of quasiconformal mappings in $\mathbb{R}^n$. *Ann. Acad.Sci. Fenn. Ser. A I Math.*, 8(2):257–324, 1983.

[4] M. Cristea. Local homeomorphisms satisfying generalized modular inequalities. *Complex Variables and Elliptic Equations*, 59(10):1363–1387, 2014. doi:10.1080/17476933.2013.845176.

[5] M. Cristea. Some properties of open discrete generalized ring mappings. *Complex Variables and Elliptic Equations*, 61(5):623–643, 2016. doi:10.1080/17476933.2015.1108311.

[6] M. Cristea. Eliminability results for mappings satisfying generalized modular inequalities. *Complex Variables and Elliptic Equations*, 64(4):676–684, 2019. doi:10.1080/17476933.2018.1477768.

[7] A. Eremenko, D. H. Hamilton. On the area distortion by quasiconformal mappings. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 123:2793–2797, 1995.

[8] H. Federer. *Geometric measure theory*. Springer Verlag Berlin, 1969.

[9] F. W. Gehring, E. Reich. Area distortion under quasiconformal mappings. *Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A I Math*, 388:1–15, 1966.

[10] A. Golberg. Differential properties of (α, Q)-homeomorphisms. *Further Progress in Analysis, Proc. 6th ISAAC Congr.*, pages 218–228, 2009.

[11] A. Golberg. Integrally quasiconformal mappings in space. *Збірник праць Ін-ту математики НАН України*, 7(2):53–64, 2010.

[12] A. Golberg, R. Salimov. Logarithmic Holder continuity of ring homeomorphisms with controlled p-module. *Complex Variables and Elliptic Equations*, 59(1):91–98, 2014.

[13] A. Golberg, R. Salimov, E. Sevost'yanov. Distortion estimates under mappings with controlled p-module. *Ann. Univ. Bucharest, Ser.Math*, 5 (LXIII):95–114, 2014.

[14] A. Golberg, R. Salimov, E. Sevost'yanov. Singularities of discrete open mappings with controlled p-module. *Journal d'Analyse Mathématique*, 127(1):303–328, 2015. doi:10.1007/s11854-015-0032-2.

[15] A. Golberg, R. Salimov, E. Sevost'yanov. Poletskiĭ Type Inequality for Mappings from the Orlicz-Sobolev Classes. *Complex Analysis and Operator Theory*, 10(5):881–901, 2016. doi:10.1007/s11785-015-0460-0.

[16] A. Golberg, R. Salimov, E. Sevost'yanov. Estimates for Jacobian and Dilatation Coefficients of Open Discrete Mappings with Controlled p-Module. *Complex Analysis and Operator Theory*, 11(7):1521–1542, dec 2017. `doi:10.1007/s11785-016-0628-2`.

[17] B. Klishchuk. On Power-Law Behavior of Some Mapping Class at Infinity. *Journal of Mathematical Sciences*, 268(2):192–198, 2022. `doi:10.1007/s10958-022-06191-2`.

[18] O. Martio, V. Ryazanov, U. Srebro, E. Yakubov. Q-homeomorphisms. *Contemporary Math.*, 364:193–203, 2004.

[19] O. Martio, V. Ryazanov, U. Srebro, E. Yakubov. On Q-homeomorphisms. *Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A1. Math.*, 30:49–69, 2005.

[20] O. Martio, V. Ryazanov, U. Srebro, E. Yakubov. *Moduli in Modern Mapping Theory.* Springer Monographs in Mathematics. Springer, New York, 2009.

[21] V. I. Ryazanov, E. A. Sevost'yanov. Equicontinuous classes of ring Q-homeomorphisms. *Siberian Mathematical Journal*, 48(6):1093–1105, 2007. `doi:10.1007/s11202-007-0111-4`.

[22] R. Salimov. ACL and differentiability of a generalization of quasiconformal maps. *Izvestiya: Mathematics*, 72(5):977–984, 2008.

[23] R. Salimov. On finitely Lipschitz space mappings. *Siberian Elecronic Mathematical Reports*, 8:284–295, 2011.

[24] R. Salimov. Estimation of the measure of the image of the ball. *Siberian Mathematical Journal*, 53(4):920–930, 2012.

[25] R. Salimov. To a theory of ring Q-homeomorphisms with respect to a p-modulus. *Ukrainian Mathematical Bulletin*, 10(3):379–396, 2013.

[26] R. Salimov. One property of ring Q-homeomorphisms with respect to a p-module. *Ukrainian Mathematical Journal*, 65(5):728–733, 2013.

[27] R. Salimov, B. Klishchuk. The extremal problem for the area of an image of a disc. *Reports of the National Academy of Sciences of Ukraine*, (10):22–27, 2016. `doi:DOI:10.15407/dopovidi2016.10.022`.

[28] R. Salimov, B. Klishchuk. Extremal problem for the area of the image of a disk. *Journal of Mathematical Sciences*, 234(3):373–380, aug 2018. `doi:10.1007/s10958-018-4015-6`.

[29] R. Salimov, B. Klishchuk. An extremal problem for the volume functional. *Matematychni Studii*, 50(1):36–43, 2018. `doi:doi:10.15330/ms.50.1.36-43`.

[30] R. Salimov, B. Klishchuk. Lower bounds for the volume of the image of a ball. *Ukrainian Mathematical Journal*, 71(6):774–785, 2019. `doi:10.1007/s11253-019-01686-9`.

[31] R. Salimov, B. Klishchuk. On the asymptotic behavior at infinity of ring Q-homeomorphisms with respect to p-modulus. *Праці ІПММ НАН України*, 36(1):26–35, 2022.

[32] R. Salimov, B. Klishchuk. On the Behavior at Infinity of One Class of Homeomorphisms. *Current Trends in Analysis, its Applications and Computation. Trends in Mathematics. Birkhäuser, Cham*, pages 173–180, 2022.

[33] R. R. Salimov, B. A. Klishchuk. On the behavior of one class of homeomorphisms at infinity. *Ukrainian Mathematical Journal*, 74(10):1416–1426, 2022. `doi:10.37863/umzh.v74i10.7158`.

[34] R. R. Salimov, E. S. Smolovaya. On the order of growth of ring Q-homeomorphisms at infinity. *Ukrainian Mathematical Journal*, 62(6):961–969, 2010. `doi:10.1007/s11253-010-0403-x`.

[35] Б. В. Боярский. Гомеоморфные решения систем Бельтрами. *ДАН СССР*, 102:661–664, 1955.

[36] В. И. Кругликов. Ёмкости конденсаторов и пространственные отображения, квазиконформные в среднем. *Математический сборник*, 130(2):185–206, 1986.

[37] М. А. Лаврентьев. *Вариационный метод в краевых задачах для систем уравнений эллиптического типа.* М.: АН СССР, 1962.

[38] Т. В. Ломако, Р. Р. Салимов. К теории экстремальных задач. *Збірник праць Ін-ту математики НАН України*, 7(2):264–269, 2010.

[39] Р. Р. Салимов. Нижние оценки p-модуля и отображения класса Соболева. *Алгебра и анализ*, 26(6):143–171, 2014.

Р. Р. Салімов

Інститут математики НАН України, м. Київ

Email: ruslan.salimov1@gmail.com

Б. А. Кліщук

Інститут математики НАН України, м. Київ

Email: kban1988@gmail.com

Збірник праць Ін-ту математики НАН України (2022) Т. 19, № 1, 210–219

Про деякі властивості розв'язків нелінійної системи типу Коші-Рімана-Бельтрамі

Р. Р. Салімов, М. В. Стефанчук

Присвячується пам'яті професора Олександра Бахтіна

Abstract. Paper is devoted to investigation of the asymptotic and extremal properties of regular homeomorphic solutions of the nonlinear Cauchy-Riemann-Beltrami type system.

Анотація. Робота присвячена дослідженню асимптотичних та екстремальних властивостей регулярних гомеоморфних розв'язків нелінійної системи типу Коші-Рімана-Бельтрамі.

1. Вступ

Нехай G — область у комплексній площині $\mathbb{C}$, тобто зв'язна та відкрита підмножина $\mathbb{C}$, і нехай $\mu\colon G \to \mathbb{C}$ — вимірна функція з $|\mu(z)| < 1$ м.с. (майже скрізь) в G. Нагадаємо, що *рівнянням Бельтрамі* називається рівняння вигляду

$$f_{\overline{z}} = \mu(z) f_z\,, \tag{1.1}$$

де $f_{\overline{z}} = \frac{1}{2}(f_x + if_y)$, $f_z = \frac{1}{2}(f_x - if_y)$, $z = x + iy$, f_x і f_y — частинні похідні відображення f по x і y, відповідно. Функція μ називається *комплексним коефіцієнтом*, а

$$K_\mu(z) = \frac{1 + |\mu(z)|}{1 - |\mu(z)|}$$

дилатаційним відношенням рівняння (1.1). Рівняння Бельтрамі (1.1) називається *виродженим*, якщо K_μ є суттєво необмеженою, тобто $K_\mu \notin L^\infty(G)$. Теореми існування гомеоморфних розв'язків класу Соболєва $W^{1,1}_{\rm loc}$ були недавно доведені методом модулів для багатьох вироджених

2010 Mathematics Subject Classification: 30C62; 31A15

УДК 517.54; 517.12

Ключові слова: рівняння Бельтрамі, регулярний гомеоморфний розв'язок рівняння рівнянь Бельтрамі, див., наприклад, монографії [6], [9], а також огляди [5], [13].

Нехай $\sigma\colon G \to \mathbb{C}$ — вимірна функція і $m \geqslant 0$. Розглянемо у полярній системі координат (r,θ) наступне рівняння:

$$f_r = \sigma(re^{i\theta})\,|f_\theta|^m\, f_\theta, \tag{1.2}$$

де f_r і f_θ — частинні похідні відображення f по r і θ, відповідно. Зауважимо, якщо $\overline{z}\,(\sigma(z)\,|z|\,i|zf_z - \overline{z}f_{\overline{z}}|^m + 1) \neq 0$, то, враховуючи формули

$$rf_r = zf_z + \overline{z}f_{\overline{z}}\,, \quad f_\theta = i(zf_z - \overline{z}f_{\overline{z}})\,,$$

рівняння (1.2) можна записати у комплексній формі:

$$f_{\overline{z}} = \frac{z}{\overline{z}}\,\frac{\sigma(z)\,|z|\,i|zf_z - \overline{z}f_{\overline{z}}|^m - 1}{\sigma(z)\,|z|\,i|zf_z - \overline{z}f_{\overline{z}}|^m + 1}\, f_z. \tag{1.3}$$

Відмітимо, що подібні нелінійні рівняння зустрічаються у роботі [4], див. теорему 5.7.

При $m = 0$ рівняння (1.3) зводиться до звичайного рівняння Бельтрамі (1.1) з комплексним коефіцієнтом

$$\mu(z) = \frac{z}{\overline{z}}\,\frac{\sigma(z)\,|z|\,i - 1}{\sigma(z)\,|z|\,i + 1}.$$

Якщо у (1.3) покласти $m = 0$ і $\sigma = -i/|z|$, то ми приходимо до відомої системи Коші-Рімана.

При $m > 0$ рівняння (1.3) є частковим випадком загальної нелінійної комплексної системи рівнянь (7.33), п. 7.7 в [1]. Всюди далі будемо вважати, що $m > 0$.

Нелінійне рівняння (1.3) є частковим випадком нелінійної системи двох дійсних рівнянь у частинних похідних див. (1) у [16], [14], див. також [15]. Відмітимо, що нелінійні системи рівнянь у частинних похідних зараз, як і раніше, вивчаються у різноманітних аспектах, див., наприклад, [1], [4], [16], [14], [15], [2], [3].

Нагадаємо деякі означення. Відображення $f\colon G \to \mathbb{C}$ називається *регулярним у точці* $z_0 \in G$, якщо в цій точці f має повний диференціал і його якобіан $J_f = |f_z|^2 - |f_{\bar z}|^2 \neq 0$ (див., наприклад, I. 1.6 в [8]). Гомеоморфізм f класу Соболєва $W^{1,1}_{\rm loc}$ називається *регулярним*, якщо $J_f > 0$ м.с. *Регулярним гомеоморфним розв'язком* рівняння (1.3) будемо називати регулярний гомеоморфізм $f\colon G \to \mathbb{C}$, який м.с. у G задовольняє рівняння (1.3).

Всюди далі будемо вважати, що

$$B_r = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leqslant r\}\,, \quad \gamma_r = \{z \in \mathbb{C} : |z| = r\}\,, \mathbb{B} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}.$$

2. Степенева асимптотика

У даному розділі наведено ряд теорем про асимптотичну поведінку степеневого характеру регулярних гомеоморфних розв'язків рівняння вигляду (1.3), див. [3], [11].

Теорема 2.1 ([3]). *Нехай $f\colon \mathbb{B}\to\mathbb{B}$ — регулярний гомеоморфний розв'язок рівняння* (1.3) *класу Соболева $W^{1,2}_{\rm loc}$ з нормуванням $f(0)=0$. Припустимо, що коефіцієнт $\sigma:\mathbb{B}\to\mathbb{C}$ задовольняє наступну умову*

$$\liminf_{r\to 0}\left(\frac{1}{\pi r^2}\iint\limits_{B_r}\frac{dxdy}{|z|\left(\mathrm{Im}\,\overline{\sigma(z)}\right)^{\frac{1}{m+1}}}\right)^{m+1}\leqslant \sigma_0<\infty\,.$$

Тоді

$$\liminf_{z\to 0}\frac{|f(z)|}{|z|}\leqslant c_m\,\sigma_0^{\frac{1}{m}}<\infty\,,$$

де c_m — додатна стала, яка залежить тільки від m.

Теорема 2.2 ([11]). *Нехай $f\colon \mathbb{B}\to\mathbb{B}$ — регулярний гомеоморфний розв'язок рівняння* (1.3) *класу Соболева $W^{1,2}_{\rm loc}$ з нормуванням $f(0)=0$. Якщо для деяких чисел $\lambda>1$, $\tau>0$ і $C_0>0$ виконується умова*

$$\varepsilon^{\tau}\int\limits_{\varepsilon}^{\lambda\varepsilon}\frac{dr}{\left(\frac{1}{2\pi r}\int\limits_{\gamma_r}\left(\mathrm{Im}\,\overline{\sigma(z)}\right)^{-\frac{1}{m+1}}\,ds\right)^{m+1}}\geqslant C_0$$

для довільного $\varepsilon\in(0,\varepsilon_0)$, $\varepsilon_0\in\left(0,\frac{1}{\lambda}\right)$, то

$$\liminf_{z\to 0}\frac{|f(z)|}{|z|^{\frac{\tau}{m}}}\leqslant C_0^{-\frac{1}{m}}\,m^{-\frac{1}{m}}\,.$$

Теорема 2.3 ([11]). *Нехай $f\colon \mathbb{B}\to\mathbb{B}$ — регулярний гомеоморфний розв'язок рівняння* (1.3) *класу Соболева $W^{1,2}_{\rm loc}$ з нормуванням $f(0)=0$. Якщо для деяких чисел $A>1$ і $c_0>0$ виконується умова*

$$\left(\frac{1}{2\pi r}\int\limits_{\gamma_r}\left(\mathrm{Im}\,\overline{\sigma(z)}\right)^{-\frac{1}{m+1}}\,ds\right)^{m+1}\leqslant c_0\,r^{A}$$

для м.в. $r\in(0,\varepsilon_0)$, $\varepsilon_0\in\left(0,\frac{1}{2}\right)$, то

$$\liminf_{z\to 0}\frac{|f(z)|}{|z|^{\frac{A-1}{m}}}\leqslant \nu_0\,,$$

де ν_0 — додатна стала, яка залежить тільки від m, c_0 і A.

Теорема 2.4 ([11]). *Нехай $f\colon \mathbb{B} \to \mathbb{B}$ — регулярний гомеоморфний розв'язок рівняння (1.3) класу Соболева $W^{1,2}_{\mathrm{loc}}$ з нормуванням $f(0) = 0$, $\alpha > \frac{2}{m}$. Якщо виконується умова*

$$J = \int\limits_{B_{r_0}} \frac{dxdy}{|z|^{\alpha(m+1)} \left(\operatorname{Im} \overline{\sigma(\mathrm{z})}\right)^{\alpha}} < \infty$$

для деякого $r_0 \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$, то

$$\liminf_{z \to 0} \frac{|f(z)|}{|z|^{\kappa}} \leqslant \nu_0 J^{\frac{1}{\alpha m}}\,,$$

де $\kappa = 1 - \frac{2}{\alpha m}$ і ν_0 — додатна стала, яка залежить тільки від m і α.

3. Логарифмічна асимптотика

У даному розділі наведено ряд теорем про асимптотичну поведінку логарифмічного характеру регулярних гомеоморфних розв'язків рівняння (1.3), див. [12].

Теорема 3.1 ([12]). *Нехай $f\colon \mathbb{B} \to \mathbb{C}$ — регулярний гомеоморфний розв'язок рівняння (1.3) класу Соболева $W^{1,2}_{\mathrm{loc}}$ з нормуванням $f(0) = 0$. Якщо для деяких чисел $c_0 > 0$, $\kappa \in \left[0, \frac{m+2}{m+1}\right)$ виконується умова*

$$\int\limits_{\mathbb{A}(0,\varepsilon_1,\varepsilon_2)} \frac{dxdy}{|z|^{\frac{2m+3}{m+1}} \left(\operatorname{Im} \overline{\sigma(z)}\right)^{\frac{1}{m+1}}} \leqslant c_0 \left(\ln \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}\right)^{\kappa}$$

для будь-яких $0 < \varepsilon_1 < \varepsilon_2 < \varepsilon_0$, $\varepsilon_0 \in (0,1)$, то

$$\liminf_{z \to 0} |f(z)| \left(\ln \frac{1}{|z|}\right)^{\frac{m+2-\kappa(m+1)}{m}} \leqslant \nu_0 c_0^{\frac{m+1}{m}} < \infty\,,$$

де ν_0 — додатна стала, яка залежить тільки від m і κ.

Теорема 3.2 ([12]). *Нехай $f\colon \mathbb{B} \to \mathbb{C}$ — регулярний гомеоморфний розв'язок рівняння (1.3) класу Соболева $W^{1,2}_{\mathrm{loc}}$ з нормуванням $f(0) = 0$. Якщо для деякого $r_0 \in (0,1)$ виконується умова*

$$I_0 = \int\limits_{B_{r_0}} \frac{dxdy}{|z|^{\frac{2(m+1)}{m}} \left(\operatorname{Im} \overline{\sigma(z)}\right)^{\frac{2}{m}}} < \infty,$$

то

$$\liminf_{z\to 0} |f(z)| \left(\ln \frac{1}{|z|}\right)^{\frac{m+2}{2m}} \leqslant \nu_0 \sqrt{I_0},$$

де ν_0 *— додатня стала, яка залежить тільки від* m.

Теорема 3.3 ([12]). *Нехай* $f\colon \mathbb{B}\to\mathbb{C}$ *— регулярний гомеоморфний розв'язок рівняння* (1.3) *класу Соболєва* $W^{1,2}_{\mathrm{loc}}$ *з нормуванням* $f(0) = 0$. *Якщо для деякого числа* $M_0 > 0$ *виконується умова*

$$\int\limits_{B_{\varepsilon_0}} \frac{dxdy}{|z|^{\frac{2m+3}{m+1}} \left(\operatorname{Im}\overline{\sigma(z)}\right)^{\frac{1}{m+1}}} \leqslant M_0$$

для деякого $\varepsilon_0 \in (0,1)$, *то*

$$\liminf_{z\to 0} |f(z)| \left(\ln \frac{1}{|z|}\right)^{\frac{m+2}{m}} \leqslant \nu_0 M_0^{\frac{m+1}{m}} < \infty\,,$$

де ν_0 *— додатна стала, яка залежить тільки від* m.

4. Функціональна асимптотика

У даному розділі наведено ряд теорем про функціональну асимптотику регулярних гомеоморфних розв'язків нелінійної системи (1.3), див. [10].

Теорема 4.1 ([10]). *Нехай* $f\colon \mathbb{B}\to\mathbb{C}$ *— регулярний гомеоморфний розв'язок рівняння (1.3) класу Соболєва* $W^{1,2}_{\mathrm{loc}}$ *з нормуванням* $f(0) = 0$. *Тоді для деякого* $\varepsilon_0 \in (0,1)$ *виконується умова*

$$\liminf_{z\to 0} |f(z)| \left(\int\limits_{|z|}^{\varepsilon_0} \frac{dt}{I_{m,\sigma}(t)}\right)^{\frac{1}{m}} \leqslant c_0 < \infty,$$

де $I_{m,\sigma}(t) = \left(\int\limits_{\gamma_t} \frac{ds}{|z|\left(\operatorname{Im}\overline{\sigma(z)}\right)^{\frac{1}{m+1}}}\right)^{m+1}$ *і* $c_0 = (2\pi)^{-\frac{m+1}{m}} m^{-\frac{1}{m}}$.

З теореми 4.1 випливають наступні твердження.

Теорема 4.2 ([10]). *Нехай* $f\colon \mathbb{B}\to\mathbb{C}$ *— регулярний гомеоморфний розв'язок рівняння (1.3) класу Соболєва* $W^{1,2}_{\mathrm{loc}}$ *з нормуванням* $f(0) = 0$ *і* $\operatorname{Im}\overline{\sigma(re^{i\theta})} \geqslant \lambda(r)$ *для м.в.* $r \in (0,\varepsilon_0)$, $\varepsilon_0 \in (0,1)$, *де* $\lambda(r)\colon [0,1) \to$

$[0, \infty)$ — *вимірна функція. Тоді*

$$\liminf_{z\to 0} |f(z)| \left(\int\limits_{|z|}^{\varepsilon_0} \lambda(t)\, dt\right)^{\frac{1}{m}} \leqslant \left(\frac{1}{m}\right)^{\frac{1}{m}} < \infty.$$

Наслідок 4.3 ([10]). *Нехай $f\colon \mathbb{B} \to \mathbb{C}$ — регулярний гомеоморфний розв'язок рівняння (1.3) класу Соболева $W^{1,2}_{\rm loc}$ з нормуванням $f(0) = 0$ і для деяких чисел $q > 0$, $\alpha \geqslant 1$ та $\varepsilon_0 \in (0, 1)$*

$$I_{m,\sigma}(t) = \left(\int\limits_{\gamma_t} \frac{ds}{|z| \left(\operatorname{Im} \overline{\sigma(z)}\right)^{\frac{1}{m+1}}}\right)^{m+1} \leqslant q\, t^{\alpha}$$

для м.в. $t \in (0, \varepsilon_0)$. Тоді при $\alpha = 1$

$$\liminf_{z\to 0} |f(z)| \left(\ln \frac{1}{|z|}\right)^{\frac{1}{m}} \leqslant c_0\, q^{\frac{1}{m}} < \infty,$$

а при $\alpha > 1$

$$\liminf_{z\to 0} \frac{|f(z)|}{|z|^{\frac{\alpha-1}{m}}} \leqslant c_0\, q^{\frac{1}{m}} (\alpha - 1)^{\frac{1}{m}} < \infty,$$

де $c_0 = (2\pi)^{-\frac{m+1}{m}} m^{-\frac{1}{m}}$.

Позначимо:

$$e_1 = e,\ e_2 = e^{e},\ ...,\ e_{k+1} = e^{e_k},$$

$$\ln_1 t = \ln t,\ \ln_2 t = \ln\ln t,\ ...,\ \ln_{k+1} t = \ln\ln_k t,$$

де $k \geqslant 1$ — натуральні числа.

Теорема 4.4 ([10]). *Нехай $f\colon \mathbb{B} \to \mathbb{C}$ — регулярний гомеоморфний розв'язок рівняння (1.3) класу Соболева $W^{1,2}_{\rm loc}$ з нормуванням $f(0) = 0$. Якщо для деяких чисел $q > 0$ і $\varepsilon_0 \in (0, \frac{1}{e_n})$*

$$I_{m,\sigma}(t) = \left(\int\limits_{\gamma_t} \frac{ds}{|z| \left(\operatorname{Im} \overline{\sigma(z)}\right)^{\frac{1}{m+1}}}\right)^{m+1} \leqslant q\, t \ln_1 \frac{1}{t} \ln_2 \frac{1}{t} ... \ln_n \frac{1}{t}$$

для м.в. $t \in (0, \varepsilon_0)$, то

$$\liminf_{z\to 0} |f(z)| \left(\ln_{n+1} \frac{1}{|z|}\right)^{\frac{1}{m}} \leqslant c_0\, q^{\frac{1}{m}} < \infty,$$

де c_0 — додатна стала, яка залежить тільки від m, із теореми 4.1.

Наслідок 4.5 ([10]). *Нехай $f\colon \mathbb{B} \to \mathbb{C}$ — регулярний гомеоморфний розв'язок рівняння (1.3) класу Соболєва $W^{1,2}_{\rm loc}$ з нормуванням $f(0) = 0$. Якщо для деяких чисел $q > 0$, $\alpha > 0$ і $\varepsilon_0 \in (0, 1)$*

$$I_{m,\sigma}(t) = \left(\int\limits_{\gamma_t} \frac{ds}{|z| \left(\mathrm{Im}\,\overline{\sigma(z)}\right)^{\frac{1}{m+1}}} \right)^{m+1} \leqslant q\, t^{\alpha+1} e^{-\frac{1}{t^\alpha}}$$

для м.в. $t \in (0, \varepsilon_0)$, то

$$\liminf_{z\to 0} |f(z)|\, e^{\frac{1}{m|z|^\alpha}} \leqslant c_0 (q\alpha)^{\frac{1}{m}} < \infty,$$

де c_0 — додатна стала, яка залежить тільки від m, із теореми 4.1.

5. Екстремальні задачі

У цьому розділі наведено деякі екстремальні задачі на класі регулярних розв'язків системи (1.3), див. [11], [17], [12], [18].

Нехай $A > 1$, $c_0 > 0$ і H — множина всіх регулярних гомеоморфізмів $f\colon \mathbb{B} \to \mathbb{B}$ класу Соболєва $W^{1,2}_{\rm loc}$, які задовольняють рівнянню (1.3), $f(0) = 0$ і

$$\left(\frac{1}{2\pi r} \int\limits_{\gamma_r} \left(\mathrm{Im}\,\overline{\sigma(z)}\right)^{-\frac{1}{m+1}} ds \right)^{m+1} \leqslant c_0\, r^A$$

для м.в. $r \in [0, 1)$.

У наступній теоремі дається точна верхня оцінка степеневого типу площі образу круга, яка є аналогом відомого результату М. О. Лаврентьєва (1962), див. [15].

Теорема 5.1 ([11]). *Якщо $f \in H$ і $r \in [0, 1)$, то справедлива точна оцінка*

$$|f(B_r)| \leqslant \pi \left(\frac{m}{c_0 (A-1) r^{A-1}} + 1 - \frac{m}{c_0(A-1)} \right)^{-\frac{2}{m}}.$$

Знак рівності досягається на відображенні

$$f_*(z) = \begin{cases} \left(\frac{m}{c_0(A-1)|z|^{A-1}} + 1 - \frac{m}{c_0(A-1)} \right)^{-\frac{1}{m}} \frac{z}{|z|}, & \text{якщо } z \neq 0, \\ 0, & \text{якщо } z = 0. \end{cases} \tag{5.1}$$

Попередня теорема дозволяє нам також отримати екстремальний аналог степеневого типу леми Ікоми-Шварца, див. теорему 2 в [7].

Теорема 5.2 ([11]). *Якщо $f\in H$, то справедлива точна оцінка*

$$\liminf_{z\to 0}\frac{|f(z)|}{|z|^{\frac{A-1}{m}}}\leqslant\left(\frac{c_0(A-1)}{m}\right)^{1/m}.$$

Знак рівності досягається на відображенні виду (5.1).

Наслідок 5.3 ([11]). *Якщо $A=m+1$, то*

$$\liminf_{z\to 0}\frac{|f(z)|}{|z|}\leqslant c_0^{1/m}.$$

Знак рівності досягається на відображенні

$$f_*(z)=\begin{cases}\left(\frac{c_0}{1+c_0|z|^m-|z|^m}\right)^{\frac{1}{m}}z\,, & \textit{якщо } z\neq 0,\\ 0, & \textit{якщо } z=0.\end{cases}$$

Нехай $q>0$, $0<m<2$ і H — множина всіх регулярних гомеоморфізмів $f\colon\mathbb{B}\to\mathbb{B}$ класу Соболєва $W^{1,2}_{\rm loc}$, які задовольняють рівняння (1.3) м.с., $f(0)=0$ і

$$\left(\int\limits_{\gamma_r}\frac{ds}{|z|\left(\operatorname{Im}\overline{\sigma(z)}\right)^{\frac{1}{m+1}}}\right)^{m+1}\leqslant q\,r$$

для м.в. $r\in[0,1)$.

Наступна теорема дає точну верхню оцінку логарифмічного типу площі образу круга.

Теорема 5.4 ([17]). *Для всіх $r\in[0,1)$ справедлива рівність*

$$\max_{f\in H}|fB_r|=\pi\left(1+\frac{m}{q}\ln\frac{1}{r}\right)^{-\frac{2}{m}}.$$

При цьому максимум функціоналу досягається на відображенні

$$f_*(z)=\begin{cases}\left(1+\frac{m}{q}\ln\frac{1}{|z|}\right)^{-\frac{1}{m}}\frac{z}{|z|}\,, & \textit{якщо } z\neq 0,\\ 0, & \textit{якщо } z=0.\end{cases}\tag{5.2}$$

Наступне твердження є екстремальним аналогом логарифмічного типу леми Ікоми-Шварца.

Теорема 5.5 ([12]). *Для будь-якого відображення $f\in H$ справедлива нерівність*

$$\liminf_{z\to 0}|f(z)|\left(\ln\frac{1}{|z|}\right)^{\frac{1}{m}}\leqslant\left(\frac{q}{m}\right)^{\frac{1}{m}}.$$

При цьому, знак рівності досягається на відображені на відображенні (5.2).

Нехай $q > 0$, $\alpha > 0$ і H – множина всіх регулярних гомеоморфізмів $f\colon \mathbb{B} \to \mathbb{B}$ класу Соболєва $W^{1,2}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{B})$, які задовольняють рівняння (1.3) м.с., $f(0) = 0$ і

$$\operatorname{Im} \overline{\sigma(z)} \geqslant q|z|^{-\alpha-1} e^{\frac{1}{|z|^\alpha}}$$

для м.в. $z \in \mathbb{B}$.

У наступній теоремі дається точна верхня оцінка експоненціального типу площі образу круга.

Теорема 5.6 ([18]). *Для всіх $r \in (0,1)$ справедлива рівність*

$$\max_{f\in H} |f(B_r)| = \pi \left(1 + \beta \left(e^{\frac{1}{r^\alpha}} - e\right)\right)^{-\frac{2}{m}} ,$$

де $\beta = \frac{qm}{\alpha}$, при цьому максимум функціоналу досягається на відображенні

$$f_*(z) = \begin{cases} \left(1 + \beta \left(e^{\frac{1}{|z|^\alpha}} - e\right)\right)^{-\frac{1}{m}} \frac{z}{|z|} , & \text{якщо } z \neq 0, \\ 0, & \text{якщо } z = 0. \end{cases} \tag{5.3}$$

Нижче знайдено максимум функціоналу $l_r(f) = \min\limits_{|z|=r} |f(z)|$ на класі H.

Наслідок 5.7 ([18]). *Для всіх $r \in (0,1)$ справедлива рівність*

$$\max_{f\in H} l_r(f) = \left(1 + \beta \left(e^{\frac{1}{r^\alpha}} - e\right)\right)^{-\frac{1}{m}} , \tag{5.4}$$

де $\beta = \frac{qm}{\alpha}$, при цьому максимум функціоналу досягається на відображенні (5.3).

Наступне твердження є екстремальним аналогом експоненціального типу відомої леми Ікоми–Шварца, див. [7].

Наслідок 5.8 ([18]). *Для будь-якого відображення $f \in H$ виконується нерівність*

$$\liminf_{z\to 0} |f(z)|\, e^{\frac{1}{m|z|^\alpha}} \leqslant \left(\frac{\alpha}{qm}\right)^{\frac{1}{m}} .$$

При цьому, знак рівності досягається на відображенні (5.3).

Література

[1] K. Astala, T. Iwaniec, G. Martin. *Elliptic partial differential equations and quasiconformal mappings in the plane*, volume 48 of *Princeton Mathematical Series*. Princeton: Princeton University Press. – NJ, 2009.

[2] M. Carozza, F. Giannetti, A. Passarelli di Napoli, C. Sbordone, R. Schiattarella. Bi-Sobolev mappings and k_p-distortions in the plane. *J. Math. Anal. Appl.*, 457(2):1232–1246, 2018.

[3] A. Golberg, R. Salimov, M. Stefanchuk. Asymptotic dilation of regular homeomorphisms. *Complex Analysis and Operator Theory*, 13(6):2813–2827, 2019.

[4] C. Y. Guo, M. Kar. Quantitative uniqueness estimates for p-Laplace type equations in the plane. *Nonlinear Analysis: Theory, Methods and Applications*, 143:19–44, 2016.

[5] V. Gutlyanskii, V. Ryazanov, U. Srebro, E. Yakubov. On recent advances in the degenerate Beltrami equations. *Ukr. Mat. Visn.*, 4(7):467–515, 2010.

[6] V. Gutlyanskii, V. Ryazanov, U. Srebro, E. Yakubov. *The Beltrami equations: A geometric approach. – Developments in Math*, volume 26. New York etc.: Springer, 2012.

[7] K. Ikoma. On the distortion and correspondence under quasiconformal mappings in space. *Nagoya Math. J.*, 25:175–203, 1965.

[8] O. Lehto, K. Virtanen. *Quasiconformal Mappings in the Plane*. New York: Springer-Verlag, 1973.

[9] O. Martio, V. Ryazanov, U. Srebro, E. Yakubov. *Moduli in modern mapping theory. – Springer Monographs in Mathematics*. New York: Springer, 2009.

[10] R. Salimov, M. Stefanchuk. Nonlinear Beltrami equation and asymptotics of its solution. *J. Math. Sci.*, 264(4):441–454, 2022.

[11] R. R. Salimov, M. V. Stefanchuk. On the local properties of solutions of the nonlinear Beltrami equation. *J. Math. Sci.*, 248:203–216, 2020.

[12] R. R. Salimov, M. V. Stefanchuk. Logarithmic asymptotics of the nonlinear Cauchy-Riemann-Beltrami equation. *Ukr. Math. J.*, 73:463–478, 2021.

[13] U. Srebro, E. Yakubov. The Beltrami equation. *Handbook in Complex Analysis: Geometric function theory. – Amsterdam: Elseiver Sci. B.V.*, 2:555–597, 2005.

[14] М. А. Лаврентьев. Общая задача теории квазиконформных отображений плоских областей. *Матем. сб.*, 21 (63)(2):285–320, 1947.

[15] М. А. Лаврентьев. *Вариационный метод в краевых задачах для систем уравнений эллиптического типа*. М.: Изд-во АН СРСР, 1962.

[16] М. А. Лаврентьев, Б. В. Шабат. Геометрическе свойства решений нелинейных систем уравнений с частными производными. *Докл. АН СРСР*, 112(5):810–811, 1957.

[17] Р. Р. Салімов, М. В. Стефанчук. Про одну екстремальну задачу для нелінійних систем типу Коші-Рімана-Бельтрамі. *Праці ІПММ НАН України*, 34:109–115, 2020.

[18] М. В. Стефанчук. Про екстремальні задачі експоненціального типу для розв'язків нелінійного рівняння Бельтрамі. *Праці ІПММ НАН України*, 36(1):36–43, 2022.

Р. Р. Салімов

Інститут математики НАН України, м. Київ

Email: `ruslan.salimov1@gmail.com`

М. В. Стефанчук
Інститут математики НАН України, м. Київ
Email: stefanmv43@gmail.com

Збірник праць Ін-ту математики НАН України (2022) Т. 19, № 1, 221–230

Деякі екстремальні задачі на рімановій сфері

А. Л. Таргонський

Присвячується пам'яті професора Олександра Бахтіна

Abstract. In this paper we consider some results obtained in joint publications with O.K. Bakhtin. In particular, one result for an invariant "sum type" functional and a result for n-ray system of points are proposed.

Анотація. В даній роботі ми розглядаємо деякі результати отримані у спільних публікаціях з О.К. Бахтіним. Зокрема, один результат для інваріантного функціоналу "типу суми" та результат для n-променевої системи точок на променях.

1. Екстремальна задача для одного інваріантного функціоналу

Нехай $\mathbb{N}$ і $\mathbb{R}$ – множини натуральних і дійсних чисел, відповідно, $\mathbb{C}$ – комплексна площина, $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \bigcup \{\infty\}$ – її одноточкова компактифікація, $\mathbb{R}^+ = (0, \infty)$.

Означення 1.1. *Системою неперетинних областей (с. н. о.) будемо називати скінчений набір $\{B_k\}_{k=1}^n$, $n \geq 2$, довільних областей будь-якої зв'язності таких, що $B_k \subset \overline{\mathbb{C}}$, $B_k \bigcap B_m = \varnothing$ при всіх $k \neq m$.*

Позначимо через Σ_3 довільний набір попарно різних трійок точок $\{a_k\}_{k=1}^3 \subset \overline{\mathbb{C}}$.

Очевидно, що існує дробово-лінійне перетворення T_{Σ_3} таке, що трійка точок набору Σ_3 переходить у трійку фіксованих точок $\exp\left\{i\frac{2\pi}{3}(k-1)\right\}$, $k = 1, 2, 3$.

2010 Mathematics Subject Classification: 30C70, 30C75

УДК 517.54

Ключові слова: внутрішній радіус області, квадратичний диференціал, поділяюче перетворення, функція Гріна, променева система точок, логарифмічна ємність

Нехай
$$E_k = \left\{ w : \frac{2\pi}{3}(k-1) < \arg w < \frac{2\pi}{3}k \right\},\ k = 1,2,3. \tag{1.1}$$
Функція
$$\varphi_k = (-1)^k i w^{\frac{3}{2}} \tag{1.2}$$
однолисто відображає область E_k на праву півплощину при $k = 1,2,3$.

Означення 1.2. *Будемо говорити, що с. н. о. $\{B_k\}_{k=1}^{3}$ задовольняє умову узагальненої опуклості відносно точок набору Σ_3, якщо $a_k \in B_k$ при $k = 1,2,3$ та існують горизонтальні прямі $P_k := \{w : \operatorname{Im} w = c_k\}$, $c_k \in \mathbb{R}$, відносно яких образи зв'язних компонент, при відображенні (1.2) областей $T_{\Sigma_3}(B_k) \cap E_k$, $T_{\Sigma_3}(B_{k+1}) \cap E_k$ при $k = 1,2,3$ (тут позначено $B_4 := B_1$) містять образи точок* $\exp\left\{i\frac{2\pi}{3}(k-1)\right\}$, $\exp\left\{i\frac{2\pi}{3}k\right\}$, *які лежать у різних півплощинах.*

Задача 1.3. Для точок Σ_3 та довільної с. н. о. $\{B_k\}_{k=1}^{3}$, яка задовольняє умову узагальненої опуклості відносно точок Σ_3, розглядається задача по визначенню максимуму функціоналу
$$J_3 = \frac{r(B_1,a_1)\, r(B_2,a_2)}{|a_1-a_2|^2} + \frac{r(B_1,a_1)\, r(B_3,a_3)}{|a_1-a_2|^2} + \frac{r(B_2,a_2)\, r(B_3,a_3)}{|a_2-a_3|^2},$$
де $r(B,a)$ – внутрішній радіус області B відносно точки a [1,5,6,9]. Зауважимо, що функціонал J_3 є інваріантним відносно довільних дробово-лінійних відображень комплексної площини на себе.

Під час розв'язування цієї задачі використовується поняття квадратичного диференціалу, з яким можна ознайомитися у першоджерелі [4]. Подібного типу задачі розглянуті у роботах [1–3, 5].

Теорема 1.4. *Для довільної с. н. о. $\{B_k\}_{k=1}^{3}$, яка задовольняє умову узагальненої опуклості відносно точок Σ_3, справедлива нерівність*
$$J_3 = \frac{r(B_1,a_1)\, r(B_2,a_2)}{|a_1-a_2|^2} + \frac{r(B_1,a_1)\, r(B_3,a_3)}{|a_1-a_2|^2} + \frac{r(B_2,a_2)\, r(B_3,a_3)}{|a_2-a_3|^2} \le \frac{4}{3}.$$
Знак рівності в цій нерівності досягається, зокрема, тоді, коли точки a_k та області B_k є відповідно полюсами та круговими областями квадратичного диференціалу
$$Q(w)dw^2 = -\frac{w}{(w^3-1)^2}dw^2.$$

Доведення. При доведенні цієї теореми будемо використовувати метод поділяючого перетворення, розробленого В.М. Дубініним (див. наприклад, [1,5,6]).

Нехай кути E_k визначені формулами (1.1), а функції φ_k формулами (1.2).

Легко бачити, що

$$\left|\varphi_k(w)-\varphi_k\left(\exp\left\{i\frac{2\pi}{3}(k-1)\right\}\right)\right|\sim\frac{3}{2}\left|w-\exp\left\{i\frac{2\pi}{3}(k-1)\right\}\right|,$$

$$w\to\exp\left\{i\frac{2\pi}{3}(k-1)\right\},\quad k=1,2,3;\quad m=k,k+1. \tag{1.3}$$

Зрозуміло, що

$$\varphi_k\left(\exp\left\{i\frac{2\pi}{3}(k-1)\right\}\right)=-i,\qquad \varphi_k\left(\exp\left\{i\frac{2\pi}{3}k\right\}\right)=i,\quad k=1,2,3.$$

Результат поділяючого перетворення області B_k, $k=1,2,3$, відносно сімейства функцій $\{\varphi_{k-1},\varphi_k\}$ позначимо $\left\{G_{k-1}^{(2)},G_k^{(1)}\right\}$, де $G_0^{(2)}:=G_3^{(2)}$, $\varphi_0:=\varphi_3$. Набори областей $\left\{G_k^{(1)},G_k^{(2)}\right\}$ є системами попарно неперетинних багатозв'язних областей, які містяться у різних півплощинах від прямої P_k, $k=1,2,3$.

Із теорем робіт [1, 5, 6] та рівностей (1.3) для $k=1,2,3$ отримаємо

$$r\left(B_k,\exp\left\{i\frac{2\pi}{3}(k-1)\right\}\right)\le\left(\frac{r\left(G_{k-1}^{(2)},i\right)r\left(G_k^{(1)},-i\right)}{\frac{9}{4}}\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{1.4}$$

Далі, використовуючи нерівності (1.4), отримуємо наступну оцінку функціоналу J_3:

$$J_3\le\frac{1}{9}\left(\sqrt{r\left(G_3^{(2)},i\right)r\left(G_1^{(1)},-i\right)r\left(G_1^{(2)},i\right)r\left(G_2^{(1)},-i\right)}\right.$$

$$+\sqrt{r\left(G_3^{(2)},i\right)r\left(G_1^{(1)},-i\right)r\left(G_2^{(2)},i\right)r\left(G_3^{(1)},-i\right)}$$

$$\left.+\sqrt{r\left(G_1^{(2)},i\right)r\left(G_2^{(1)},-i\right)r\left(G_2^{(2)},i\right)r\left(G_3^{(1)},-i\right)}\right). \tag{1.5}$$

Застосувавши нерівність Коші до співвідношення (1.5), одержимо

$$J_3\le\frac{1}{18}\left(\left(r\left(G_1^{(1)},-i\right)+r\left(G_1^{(2)},i\right)\right)\sqrt{r\left(G_3^{(2)},i\right)r\left(G_2^{(1)},-i\right)}\right.$$

$$+\left(r\left(G_3^{(1)},-i\right)+r\left(G_3^{(2)},i\right)\right)\sqrt{r\left(G_1^{(1)},-i\right)r\left(G_2^{(2)},i\right)}$$

$$+\left(r\left(G_2^{(1)},-i\right)+r\left(G_2^{(2)},i\right)\right)\sqrt{r\left(G_1^{(2)},i\right)r\left(G_3^{(1)},-i\right)}\Bigg). \qquad (1.6)$$

Із результатів роботи [3] та з властивостей внутрішнього радіусу, випливає справедливість наступної нерівності

$$r\left(G_k^{(1)},-i\right)+r\left(G_k^{(2)},i\right)\leq 4, \quad k=1,2,3. \qquad (1.7)$$

Причому функціонал

$$\left(r\left(G_k^{(1)},-i\right)+r\left(G_k^{(2)},i\right)\right)$$

досягає максимуму, рівного 4, тільки на двох півплощинах, обмежених прямою P_k, $k=1,2,3$. Підставляючи у (1.6) співвідношення (1.7), маємо

$$J_3\leq\frac{2}{9}\Bigg(\sqrt{r\left(G_3^{(2)},i\right)r\left(G_2^{(1)},-i\right)}+\sqrt{r\left(G_1^{(1)},-i\right)r\left(G_2^{(2)},i\right)}$$

$$+\sqrt{r\left(G_1^{(2)},i\right)r\left(G_3^{(1)},-i\right)}\Bigg). \qquad (1.8)$$

У свою чергу, використавши у (1.8) нерівність Коші, отримаємо вираз

$$J_3\leq\frac{1}{9}\Big(r\left(G_1^{(1)},-i\right)+r\left(G_1^{(2)},i\right)+r\left(G_2^{(1)},-i\right)+r\left(G_2^{(2)},i\right)$$

$$+r\left(G_3^{(2)},i\right)+r\left(G_3^{(1)},-i\right)\Big). \qquad (1.9)$$

Із співвідношень (1.7) і (1.9) остаточно маємо

$$J_3\leq\frac{4}{3}.$$

Випадок досягнення знаку рівності у останній нерівності перевіряється стандартним чином. Теорему доведено. □

2. Про добуток внутрішніх радіусів попарно неперетинних областей та відкритих множин

Означення 2.1. *Систему точок* $A_n:=\{a_k\}_{k=1}^n$, $a_k\in\mathbb{C}\setminus\{0\}$, $k=\overline{1,n}$, *таку, що*

$$0=\arg a_1<\arg a_2<...<\arg a_n<2\pi,$$

будемо називати променевою системою точок.

Позначимо

$$P_k(A_n):=\{w:\ \arg a_k<\arg w<\arg a_{k+1}\},$$

$$\sigma_k:=\frac{1}{\pi}(\arg a_{k+1}-\arg a_k),\ k=\overline{1,n},$$

$\arg a_{n+1} := 2\pi$. Зрозуміло, що $\sum\limits_{k=1}^{n} \sigma_k = 2$.

Нехай D – довільна відкрита множина в $\overline{\mathbb{C}}$ та $a \in D$. Через $D(a)$ позначаємо ту зв'язну компоненту множини D, що містить точку a. Для довільної променевої системи точок $A_n = \{a_k\}$ та відкритої множини D, $A_n \subset D$, через $D_k(a_p)$ позначимо ту зв'язну компоненту множини $D(a_p) \bigcap \overline{P_k\left(A_n\right)}$, що містить точку a_p, $p = k, k+1$, $k = \overline{1, n}$.

Означення 2.2. *Будемо говорити, що відкрита множина D задовольняє умову неналягання відносно променевої систем точок $A_n = \{a_k\} \subset D$, якщо*

$$D_k(a_k) \bigcap D_k(a_{k+1}) = \varnothing,$$

при кожному фіксованому $k = \overline{1, n}$, $a_{n+1} := a_1$.

Розглянемо клас променевих систем точок A_n таких, що

$$\prod_{k=1}^{n} \chi\left(\left|\frac{a_k}{a_{k+1}}\right|^{\frac{1}{2\sigma_k}}\right)|a_k| = 1, \tag{2.1}$$

$\chi\left(t\right) = \frac{1}{2}\left(t + t^{-1}\right)$.

Задача 2.3. Потрібно визначити максимум функціоналу

$$I_n = \left(r\left(D, 0\right) r\left(D, \infty\right)\right)^{\gamma} \prod_{k=1}^{n} r(D, a_k),$$

де $A_n = \{a_k\}_{k=1}^{n}$ – променева система точок, яка задовольняє (2.1), а D належить деякому класу відкритих множин, $A_n \subset D$, $0 \in D$, $\infty \in D$, $\gamma \in \mathbb{R}^{+}$.

Теорема 2.4. *Для довільного числа $\gamma \in \mathbb{R}^{+}$, довільної променевої системи точок $A_n = \{a_k\}_{k=1}^{n}$, яка задовольняє рівність (2.1), та довільної відкритої множини D, $0 \in D$, $\infty \in D$, $a_k \in D$, $k = \overline{1, n}$, яка задовольняє умову неналягання відносно променевої системи точок A_n, і такої, що*

$$[D(0) \cap D(\infty)] \bigcup [D(0) \cap D(a_k)] \bigcup [D(\infty) \cap D(a_k)] = \varnothing, \quad k = \overline{1, n},$$

існує таке $n_0(\gamma) \in \mathbb{N}$, що при кожному $n \geqslant n_0(\gamma)$ виконується нерівність

$$\left(r\left(D, 0\right) r\left(D, \infty\right)\right)^{\gamma} \prod_{k=1}^{n} r(D, a_k) \leq$$

$$\leq \left(r\left(B_0^{(0)}, 0\right) r\left(B_\infty^{(0)}, \infty\right)\right)^\gamma \prod_{k=1}^n r\left(B_k^{(0)}, a_k^{(0)}\right),$$

де $a_k^{(0)}$ *і* $B_0^{(0)}$, $B_\infty^{(0)}$, $B_k^{(0)}$ $(k = \overline{1, n})$ *є відповідно полюсами та круговими областями квадратичного диференціалу*

$$Q(w)dw^2 = -\frac{\gamma w^{2n} + \left(n^2 - 2\gamma\right) w^n + \gamma}{w^2 \left(w^n - 1\right)^2} dw^2. \tag{2.2}$$

Наступний результат, є наслідком попередньої теореми та доповнює результати роботи [2].

Наслідок 2.5. *Для довільного числа* $\gamma \in \mathbb{R}^+$*, довільної променевої системи точок* $A_n = \{a_k\}_{k=1}^n$*, яка задовольняє рівність (2.1), та довільної системи попарно неперетинних областей* B_0, B_∞ *і* B_k, $k = \overline{1, n}$*, для якої* $a_k \in B_k$, $0 \in B_0$, $\infty \in B_\infty$*, існує таке* $n_0(\gamma) \in \mathbb{N}$*, що при кожному* $n \geqslant n_0(\gamma)$ *виконується нерівність*

$$(r(B_0, 0)\, r(B_\infty, \infty))^\gamma \prod_{k=1}^n r(B_k, a_k) \leq$$

$$\leq \left(r\left(B_0^{(0)}, 0\right) r\left(B_\infty^{(0)}, \infty\right)\right)^\gamma \prod_{k=1}^n r\left(B_k^{(0)}, a_k^{(0)}\right),$$

де $a_k^{(0)}$ *і* $B_0^{(0)}$, $B_\infty^{(0)}$, $B_k^{(0)}$ $(k = \overline{1, n})$ *є відповідно полюсами та круговими областями квадратичного диференціалу (2.2).*

Доведення. Позначимо

$$\sigma_0 = \max_k \sigma_k.$$

Розглянемо спочатку випадок $\sigma_0 < \dfrac{1}{\sqrt{2\gamma}}$.

У подальшому будемо використовувати методи робіт [1,7,8]. Для достатньо малих $t \in \mathbb{R}^+$ утворимо множини

$$E_0 = \overline{\mathbb{C}} \backslash D, \quad \overline{U}_t = \{w \in \mathbb{C} : |w| \leq t\}, \quad \Delta_t = \left\{ w \in \mathbb{C} : |w| \geq \frac{1}{t} \right\},$$

$$E_k(t) = \{w \in \mathbb{C} : |w - a_k| \leq t\}, \quad k = \overline{1, n}.$$

Розглянемо конденсатор

$$C(t, D, A_n) = \left\{ E_0, \overline{U}_t, \Delta_t, E_1(t), \ldots, E_n(t) \right\},$$

зі значеннями $0, \sqrt{\gamma}, \sqrt{\gamma}, \underbrace{1, 1, \ldots, 1}_{n\,\text{раз}}$. Ємністю конденсатора $C(t, D, A_n)$ називається величина (див. [1, 7, 8])

$$\operatorname{cap} C(t, D, A_n) = \inf \int\int \left[(G'_x)^2 + (G'_y)^2\right] dxdy,$$

де нижня межа береться по множині всіх дійсних, неперервних та ліпшицевих у $\overline{\mathbb{C}}$ функцій $G = G(z)$ таких, що $G = 0$ в околі множини E_0, $G\Big|_{\overline{U}_t} = \sqrt{\gamma}$, $G\Big|_{\Delta_t} = \sqrt{\gamma}$, $G\Big|_{E_k(t)} = 1$, $k = \overline{1, n}$. Модуль конденсатора $|C(t, D, A_n)|$ визначається виразом

$$|C(t, D, A_n)| = \left[\operatorname{cap} C(t, D, A_n)\right]^{-1}.$$

Аналогічно роботі [1] визначимо асимптотику модуля конденсатора $C(t, D, A_n)$:

$$|C(t, D, A_n)| = \frac{1}{2\pi}\frac{1}{n + 2\gamma}\log\frac{1}{t} + M(D, A_n) + o(1), \quad t \to 0, \tag{2.3}$$

де

$$M(D, A_n) = \frac{1}{2\pi(n + 2\gamma)^2}\left[\gamma \log r(D, 0) + \right.$$
$$\left. + \sum_{k=1}^{n} \log r(D, a_k) + \sum_{k \neq p} g_D(a_p, a_k)\right] \tag{2.4}$$

і узагальнена функція Гріна відкритої множини B відносно точки $a \in B$ визначається рівністю

$$g_B(z, a) = \begin{cases} g_{B(a)}(z, a), \ z \in B(a), \\ 0, \ z \in \overline{\mathbb{C}} \backslash \overline{B(a)}, \\ \lim\limits_{\zeta \to z} g_{B(a)}(\zeta, a), \ \zeta \in B(a), z \in \partial B(a), \end{cases}$$

де $g_{B(a)}(z, a)$ – функція Гріна області $B(a)$ відносно точки $a \in B(a)$.

Розглянемо поділяюче перетворення (див. [1, 7, 8]) конденсатора $C(t, D, A_n)$ відносно сімейства кутів $\{P_k(A_n)\}_{k=1}^n$ та сімейства функцій $\{z_k(w)\}_{k=1}^n$, де

$$z_k(w) = (-1)^k \, i \left(e^{-i \arg a_k} w\right)^{\frac{1}{\sigma_k}}, \quad k = \overline{1, n}.$$

Справедливі наступні асимптотичні представлення

$$|z_k(w) - z_k(a_m)| \sim \frac{1}{\sigma_k} |a_m|^{\frac{1}{\sigma_k} - 1} |w - a_m|, \quad w \to a_m,$$
$$k = 1, 2, ..., n, \quad m = k, k+1, \quad a_{n+1} := a_1, \tag{2.5}$$

$$|z_k(w)| \sim |w|^{\frac{1}{\sigma_k}}, \quad w \to 0, \quad w \to \infty.$$

Розглянемо наступні конденсатори

$$C_k(t, D, A_n) = \left(E_0^{(k)}, \overline{U}_t^{(k)}, \Delta_t^{(k)}, E_1^{(k)}, E_2^{(k)}\right),$$

де

$$E_0^{(k)} = z_k\left(E_0 \bigcap \overline{P}_k\right) \bigcup \left\{z_k\left(E_0 \bigcap \overline{P}_k\right)\right\}^*,$$
$$U_t^{(k)} = z_k\left(\overline{U}_t \bigcap \overline{P}_k\right) \bigcup \left\{z_k\left(\overline{U}_t \bigcap \overline{P}_k\right)\right\}^*,$$
$$\Delta_t^{(k)} = z_k\left(\Delta_t \bigcap \overline{P}_k\right) \bigcup \left\{z_k\left(\Delta_t \bigcap \overline{P}_k\right)\right\}^*,$$
$$E_1^{(k)} = z_k\left(E_k(t) \bigcap \overline{P}_k\right) \bigcup \left\{z_k\left(E_k(t) \bigcap \overline{P}_k\right)\right\}^*,$$
$$E_2^{(k)} = z_k\left(E_{k+1}(t) \bigcap \overline{P}_k\right) \bigcup \left\{z_k\left(E_{k+1}(t) \bigcap \overline{P}_k\right)\right\}^*,$$
$$k = \overline{1, n}, \quad E_{n+1}(t) = E_1(t), \quad \{A\}^* = \{w \in \overline{\mathbb{C}} : -\overline{w} \in A\}.$$

Кожному конденсатору $C_k(t, D, A_n)$ поставимо у відповідність клас V_k усіх дійсних, неперервних та ліпшицевих у $\overline{\mathbb{C}}$ функцій $G = G(z)$ таких, що $G = 0$ в околі множини $E_0^{(k)}$, $G\Big|_{\overline{U}_t^{(k)}} = \sqrt{\gamma}$, $G\Big|_{\Delta_t^{(k)}} = \sqrt{\gamma}$, $G\Big|_{E_p^{(k)}} = 1$, $k = \overline{1, n}$, $p = 1, 2$.

При поділяючому перетворенні конденсатору $C(t, D, A_n)$ відповідає набір конденсаторів $\{C_k(t, D, A_n)\}_{k=1}^n$, причому згідно з роботами [1,7,8] справедлива нерівність

$$\operatorname{cap} C(t, D, A_n) \geq \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} \operatorname{cap} C_k(t, D, A_n).$$

Звідси безпосередньо отримуємо співвідношення

$$|C(t, D, A_n)| \leq 2 \left(\sum_{l=1}^{n} |C_k(t, D, A_n)|^{-1} \right)^{-1}. \tag{2.6}$$

Аналогічно до (2.3) та (2.4), використовуючи (2.5), маємо (див. [1,7,8])

$$|C_k(t, D, A_n)| = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{(2 + 2\gamma\sigma_k)} \log \frac{1}{t} + M_k(D, A_n) + o(1), \quad t \to 0, \tag{2.7}$$

де

$$M_k(D, A_n) = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{(2 + 2\gamma\sigma_k)^2} \left[\sigma_k^2 \gamma \log \left(r\left(D_0^{(k)}, 0\right) r\left(D_\infty^{(k)}, \infty\right) \right) + \right.$$
$$\left. + \log \frac{r\left(D_k^{(1)}, a_k^{(1)}\right) r\left(D_k^{(2)}, a_k^{(2)}\right)}{\frac{1}{\sigma_k} |a_k|^{\frac{1}{\sigma_k} - 1} \frac{1}{\sigma_k} |a_{k+1}|^{\frac{1}{\sigma_k} - 1}} \right], \tag{2.8}$$

$$z_k(a_k) =: a_k^{(1)}, \quad z_k(a_{k+1}) =: a_k^{(2)}, \quad a_{n+1} = a_1, \quad k = \overline{1, n},$$

при цьому $D_0^{(k)}$, $D_\infty^{(k)}$ і $D_k^{(s)}$ – об'єднання зв'язних компонент множини $z_k\left(D \bigcap \overline{P}_k\right)$, які містять відповідно точки 0, ∞ і $a_k^{(s)}$ з їх симетричним відображенням відносно уявної осі, $k = \overline{1, n}$, $s = 1, 2$.

Обчислимо асимптотику правої частини нерівності (2.6). Для цього у відповідності з (2.7) запишемо

$$|C_k(t, D, A_n)|^{-1} = \frac{2\pi\left(2 + 2\gamma\sigma_k\right)}{\log\frac{1}{t}} -$$
$$- \left(\frac{2\pi\left(2 + 2\gamma\sigma_k\right)}{\log\frac{1}{t}}\right)^2 M_k(D, A_n) + o\left(\frac{1}{\log^2\frac{1}{t}}\right), \quad t \to 0.$$

Тоді

$$\left(\sum_{k=1}^{n} |C_k(t, D, A_n)|^{-1}\right)^{-1} = \frac{1}{4\pi\left(n + 2\gamma\right)} \log\frac{1}{t} +$$
$$+ \frac{1}{(n + 2\gamma)^2} \sum_{k=1}^{n} (1 + \gamma\sigma_k)^2 M_k(D, A_n) + o(1). \quad (2.9)$$

Із співвідношень (2.3), (2.6), (2.9) випливає нерівність

$$M(D, A_n) \leq \frac{2}{(n + 2\gamma)^2} \sum_{k=1}^{n} (1 + \gamma\sigma_k)^2 M_k(D, A_n). \quad (2.10)$$

Враховуючи (2.4) і (2.8), з (2.10) отримуємо

$$(r(D, 0) r(D, \infty))^\gamma \prod_{k=1}^{n} r(D, a_k) \leq 2^n \prod_{k=1}^{n} \chi\left(\left|\frac{a_k}{a_{k+1}}\right|^{\frac{1}{2\sigma_k}}\right) |a_k| \prod_{k=1}^{n} \sigma_k \times$$
$$\times \prod_{k=1}^{n} \left\{\frac{r\left(D_k^{(1)}, a_k^{(1)}\right) r\left(D_k^{(2)}, a_k^{(2)}\right)}{\left(|a_k|^{\frac{1}{\sigma_k}} + |a_{k+1}|^{\frac{1}{\sigma_k}}\right)^2} \left(r\left(D_0^{(k)}, 0\right) r\left(D_\infty^{(k)}, \infty\right)\right)^{\gamma\sigma_k^2}\right\}^{\frac{1}{2}}.$$

Тепер за умов теореми, у свою чергу, отримуємо

$$(r(D, 0) r(D, \infty))^\gamma \prod_{k=1}^{n} r(D, a_k) \leq 2^n \prod_{k=1}^{n} \sigma_k \times \quad (2.11)$$
$$\times \prod_{k=1}^{n} \left\{\frac{r\left(D_k^{(1)}, a_k^{(1)}\right) r\left(D_k^{(2)}, a_k^{(2)}\right)}{\left(|a_k|^{\frac{1}{\sigma_k}} + |a_{k+1}|^{\frac{1}{\sigma_k}}\right)^2} \left(r\left(D_0^{(k)}, 0\right) r\left(D_\infty^{(k)}, \infty\right)\right)^{\gamma\sigma_k^2}\right\}^{\frac{1}{2}}.$$

Нарешті, враховуючи результати роботи [2], з (2.11) отримуємо

$$I_n \le \left(r\left(B_0^{(0)},0\right) r\left(B_\infty^{(0)},\infty\right)\right)^\gamma \prod_{k=1}^{n} r\left(B_k^{(0)},a_k^{(0)}\right) =$$

$$= \frac{4^{n+\frac{2\gamma}{n}}\gamma^{\frac{2\gamma}{n}}}{|n^2-4\gamma|^{\frac{n}{2}+\frac{2\gamma}{n}}}\left|\frac{n-2\sqrt{\gamma}}{n+2\sqrt{\gamma}}\right|^{2\sqrt{\gamma}}.$$

У випадку $\sigma_0 \ge \dfrac{1}{\sqrt{2\gamma}}$ доведення проводиться аналогічно до відповідного доведення з роботи [1]. Теорему доведено. $\square$

Література

[1] А. К. Бахтин, Г. П. Бахтина, Ю. Б. Зелинский. *Тополого-алгебраические структуры и геометрические методы в комплексном анализе.* Київ: Інститут математики НАН України, 2008.

[2] А. К. Бахтин, А. Л. Таргонский. Экстремальные задачи и квадратичные дифференциалы. *Нелінійні коливання*, 8(3):298–303, 2005.

[3] Г. П. Бахтина, Р. В. Подвысоцкий. Разделяющее преобразование и квадратичные дифференциалы в задачах о неналегающих областях. *Зб. праць Ін-ту математики НАН України*, 6(4):323–332, 2009.

[4] Дж. А. Дженкинс. *Однолистные функции и конформные отображения.* М: Изд-во иностр. лит., 1962.

[5] В. Н. Дубинин. Разделяющее преобразование областей и задачи об экстремальном разбиении. *Зап. науч. сем. Ленингр. отд-ния Мат.ин-та АН СССР*, 168:48–66, 1988.

[6] В. Н. Дубинин. Метод симметризации в геометрической теории функций комплексного переменного. *Успехи мат. наук*, 49(1):3–76, 1994.

[7] В. Н. Дубинин. Асимптотика модуля вырождающегося конденсатора и некоторые ее применения. *Зап. науч. сем. ЛОМИ*, 237:56–73, 1997.

[8] В. Н. Дубинин. *Емкости конденсаторов в геометрической теории функций.* Владивосток: Изд. Дальневосточного ун-та, 2003.

[9] В. К. Хейман. *Многолистные функции.* Изд-во иностр. лит., 1960.

А. Л. Таргонський

Житомирський державний університет ім. І. Франка, м. Житомир

Email: targonsk@zu.edu.ua

Збірник праць Ін-ту математики НАН України (2022) Т. 19, № 1, 231–256

σ-моногенні функції в комутативних алгебрах

В. С. Шпаківський

Присвячується пам'яті професора Олександра Бахтіна

Abstract. In finite-dimensional commutative associative algebra, the concept of σ-monogenic function is introduced. Necessary and sufficient conditions for σ-monogeneity have been established. In some low-dimensional algebras, with a special choice of σ, the representation of σ-monogenic functions is obtained using holomorphic functions of a complex variable. We proposed the application of σ-monogenic functions with values in two-dimensional biharmonic algebra to representation of solutions of two-dimensional biharmonic equation.

Анотація. В скінченновимірній комутативній асоціативній алгебрі введено поняття σ-моногенної функції. Встановлено необхідні і достатні умови σ-моногенності. В деяких алгебрах малої розмірності при спеціальному виборі σ отримано представлення σ-моногенних функцій за допомогою голоморфних функцій комплексної змінної. Запропоновано застосування σ-моногенних функцій зі значеннями у двовимірній бігармонічній алгебрі до представлення розв'язків двовимірного бігармонічного рівняння.

2010 Mathematics Subject Classification: 30G20, 30G35

УДК 517.9

Ключові слова: комутативна асоціативна алгебра, моногенна функція, σ-моногенна функція, конструктивний опис σ-моногенної функції, узагальнені псевдоаналітичні функції, узагальнені (p,q)-аналітичні функції

1. Узагальнення теорії аналітичних функцій комплексної змінної

В 1891 Е. Пікар [12,13] висловив припущення про можливість побудови теорії функцій, подібної до теорії аналітичних функцій комплексної змінної, для наступної системи диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} a_1u_x + b_1u_y + a_2v_x + b_2v_y = A_1u + A_2v, \\ c_1u_x + d_1u_y + c_2v_x + d_2v_y = B_1u + B_2v, \end{cases}$$

де a_r, b_r, c_r, d_r при $r = 1, 2,$ — задані функції від x, y. Проте ідея Е. Пікара довгий час залишалася не поміченою.

В 1943 Л. Берс і А. Гелбарт [4] дослідили так звані Σ-моногенні функції. Тобто, функції $f(z) = u(x, y)+iv(x, y)$ комплексної змінної $z = x+iy$, де функції $u(x, y)$, $v(x, y)$ задовольняють систему рівнянь

$$\sigma_1(x)u_x = \tau_1(y)v_y\,, \qquad \sigma_2(x)u_y = -\tau_2(y)v_x\,,$$

де σ_r, τ_r при $r = 1, 2,$ — задані додатні функції своїх аргументів. Вводячи так зване Σ-інтегрування і Σ-диференціювання, автори досягли досить значного успіху у побудові аналогу теорії аналітичних функцій комплексної змінної.

Узагальнюючи теорію Σ-моногенних функцій, в 1947 Г. Положий [17] ввів p-аналітичні функції. Такі функції породжені системою диференціальних рівнянь

$$u_x = \frac{1}{p(x, y)}\, v_y\,, \qquad u_y = -\frac{1}{p(x, y)}\, v_x\,,$$

де p — деяка додатна функція від x, y. p-аналітичні функції можуть бути визначені іншим чином. А саме, функція $f(z) = u(x, y)+iv(x, y) \equiv u(z) + iv(z)$ змінної $z = x + iy$, яка має неперервні частинні похідні по x і по y називається p-аналітичною якщо існує границя

$$\lim_{\Delta z\to 0} \frac{p(z)\Delta u + i\Delta v}{\Delta z},$$

$$\Delta u := u(z + \Delta z) - u(z), \quad \Delta v := v(z + \Delta z) - v(z),$$

яка не залежить від способу прямування Δz до нуля. Для p-аналітичних функцій Положий побудував теорію функцій, повністю аналогічну до аналітичний функцій комплексної змінної: аналоги теореми і формули Коші, аналог теореми Ліувілля, здійснено класифікацію особливих точок, побудовано теорію лишків і т. д. [19].

Інше узагальнення аналітичних функцій, подібне до p-аналітичних функцій, було запропоновано в роботі [31]. Там визначено так звані q-функції $\tilde{f}(z) = \tilde{u}(x, y) + i\tilde{v}(x, y)$ змінної $z = x + iy$, які визначаються наступною системою рівнянь

$$\tilde{u}_x = -\frac{1}{q(x,y)}\,\tilde{v}_x\,, \qquad \tilde{u}_y = -\frac{1}{q(x,y)}\,\tilde{v}_y\,.$$

У цитованій роботі вивчено основні властивості таких функцій, отримано інтегральне представлення $q = x^k$-аналітичних функцій тощо. Трохи пізніше, Г. Положий узагальнив поняття p-аналітичної функції і запровадив (p,q)-аналітичні функції, які визначаються системою рівнянь

$$pu_x + qu_y - v_y = 0\,, \qquad -qu_x + pu_y + v_x = 0,$$

де p і q — задані функції від x, y і $p(x,y) > 0$ [18, 19]. Крім того, (p,q)-аналітичні функції можна визначити іншим чином. А саме, функція $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ змінної $z = x + iy$, яка має неперервні частинні похідні по x і по y є (p,q)-аналітичною якщо існує границя

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{\sigma(z)\Delta u + i\Delta v}{\Delta z}, \qquad \sigma := p(x,y) + iq(x,y),$$

яка не залежить від способу прямування Δz до нуля.

Важливо відмітити, що Г. Положий першим застосував результат Т. Карлемана про розв'язки системи рівнянь

$$U_x - V_y = A_1 U + A_2 V, \qquad U_y + V_x = B_1 U + B_2 V. \tag{1.1}$$

Він показав, що для функції $F(z) = U(x,y) + iV(x,y)$, визначеної системою рівнянь (1.1), класифікація особливих точок і поведінка функції $F(z)$ в їх околах подібна до поведінки аналітичних функцій комплексної змінної. Завдяки цьому результату, Г. Положий побудував повну аналогію теорії p-аналітичних і (p,q)-аналітичних функцій з теорією аналітичних функцій комплексної змінної. Зокрема, доведено теорему зберігання області, аналог теореми про неявну функцію, теорему про ізольованість A-точок (корені рівняння $f(x) = A$, $A = const$), дано класифікацію особливих точок, а також запровадив поняття інтеграла та похідної по спряженій змінній, побудував аналоги теореми Коші, формули Коші та інтеграла типу Коші, побудував теорію лишків тощо.

Детальне вивчення функцій $F(z) = U + iV$, визначених системою рівнянь (1.1), з точки зору побудови теорії функцій, були зроблені у фундаментальній роботі І. Векуа [30].

Істотний крок в розвитку узагальнень теорії аналітичних функцій зробив Л. Берс [3]. Нагадаємо основні поняття. Нехай $F(z)$, $G(z)$ при $z = x + iy$, — дві комплекснозначні функції, визначені в області Ω комплексної площини. Пара (F, G) називається генеруючою парою, якщо частинні похідні F_x, G_x, F_y, G_y існують, задовольняють умову Гельдера і якщо $\mathrm{Im}(\overline{F}G) > 0$. Функція $w(z)$ визначена у підобласті $D \subset \Omega$

допускає єдине подання у вигляді

$$w(z) = \phi(z)F(z) + \psi(z)G(z)$$

з дійсними ϕ і ψ. Функція $w(z)$ називається псевдоаналітичною в D, якщо в кожній точці $z_0 \in D$ існує (і єдина) (F, G)-похідна:

$$\dot{w}(z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{w(z) - \phi(z_0)F(z) - \psi(z_0)G(z)}{z - z_0}. \tag{1.2}$$

Клас псевдоаналітичних функцій замкнений відносно додавання, множення на дійсну сталу і обмежено збіжний. Для псевдоаналітичних функцій Л. Берс побудував теорію, подібну до теорії аналітичних функцій комплексної змінної.

Мета даної роботи — узагальнити ідеї Берса і Положого на клас "аналітичних" функцій гіперкомплексної змінної зі значеннями в комутативній асоціативній алгебрі.

Різні підходи до узагальнення теорії аналітичних функцій на багатовимірні простори були зроблені М. Рошкулецем. Зокрема, він пробував розвивати ідею Берса [21].

Професор О. Бахтін також робив спроби узагальнювати теорію аналітичних функцій комплексної змінної на багатовимірні простори. В роботах [1, 2] він запропонував оригінальну ідею узагальнення основних понять комплексного аналізу. Він запровадив поняття векторного модуля і векторного аргумента комплексного числа. Такий підхід дозволив розповсюдити певні поняття голоморфних відображень на нескінченновимірні простори. Зокрема, професор О. Бахтін переніс добре відомі результати для однолистих функцій з класу S на функцій, зі значеннями у багатовимірних комплексних просторах.

Напевно, перші спроби побудови гіперкомплексного аналогу теорії Берса належать Г. Мальонеку [10]. Він розглядав некомутативну асоціативну алгебру комплексних кватерніонів (інша назва — бікватерніони) $\mathbb{H}(\mathbb{C})$ і функції $f : \Omega \to \mathbb{H}(\mathbb{C})$, де Ω — область в $\mathbb{R}^3$. Для таких функцій Г. Мальонек визначив узагальнену похідну в сенсі Берса і запропонував їх зв'язок з загальними еліптичними системами диференціальних рівнянь, які узагальнюють рівняння Векуа для псевдоаналітичних функцій.

Значних успіхів в узагальненні теорії псевдоаналітичних функцій досяг В. Кравченко, який незалежно і у співпраці з іншими вченими виявив нові співвідношення та застосування теорії псевдоаналітичних і p-аналітичних функцій. Рекомендуємо його монографію [7] і багато послідуючих робіт, які відносяться до цієї тематики. Перш за все, він розвинув елементи гіперболічних псевдоаналітичних функцій і їх застосування до розв'язання рівняння Клейна–Гордона. Також В. Кравченко розглянув бікомплексне узагальнення цієї теорії і її застосування до рівнянь другого порядку з комплексними коефіцієнтами таких як рівняння Дірака. Він показав, що з указаною теорією пов'язане рівняння Дірака з електромагнітними і скалярними потенціалами. Застосування до комплексифікованого стаціонарного рівняння Шредінгера див. у роботі [20]. Наслідуючи Г. Мальонека, В. Кравченко розвинув теорію псевдоаналітичних функцій в алгебрі комплексних кватерніонів.

В кінці книги [7], В. Кравченко поставив 5 відкритих проблем. В четвертій проблемі Кравченко акцентує увагу на необхідності побудови теорії псевдоаналітичних функцій в багатовимірних просторах.

Ця стаття є спробою розв'язати проблему Кравченка у випадку довільної скінченновимірної комутативної асоціативної алгебри. Зокрема, розвиваючи ідеї Берса і Положого, ми вводимо σ-моногенні функції зі значеннями в довільній скінченновимірній комутативній асоціативній алгебрі. У цьому випадку, σ-моногенні функції є узагальненням добре вивчених моногенних функцій (тобто неперервних і диференційовних в сенсі Гато) в комутативних асоціативних алгебрах. Буде встановлено необхідні і достатні умови σ-моногенності. В деяких алгебрах малої розмірності при спеціальному виборі σ буде отримано представлення σ-моногенних функцій через голоморфні (аналітичні) функції комплексної змінної. Також запропоновано застосування σ-моногенних функцій зі значеннями в двовимірній бігармонічній алгебрі до представлення розв'язків двовимірного бігармонічного рівняння.

2. Моногенні функції в комутативних асоціативних алгебрах

Нехай $\mathbb{A}$ — довільна n-вимірна ($1 \le n < \infty$) комутативна асоціативна алгебра з одиницею над полем комплексних чисел $\mathbb{C}$. Е. Картан [5, с. 33] довів, що в $\mathbb{A}$ існує базис $\{I_k\}_{k=1}^n$ такий, що перші m базисних векторів $I_1, I_2, \ldots, I_m$ є ідемпотентами, а решта векторів — $I_{m+1}, I_{m+2}, \ldots, I_n$ є нільпотентами. Елемент $1 = I_1 + I_2 + \cdots + I_m$ є одиницею алгебри $\mathbb{A}$.

В алгебрі $\mathbb{A}$ розглянемо вектори $e_1, e_2, \ldots, e_d$, $2 \le d \le 2n$. Нехай ці вектори мають наступні розклади за базисом алгебри:

$$e_j = \sum_{r=1}^{n} a_{jr}\, I_r\,, \quad a_{jr} \in \mathbb{C}, \quad j = 1, 2, \ldots, d. \tag{2.1}$$

Скрізь у цій роботі ми припускаємо, що хоча б один із векторів $e_1, e_2, \ldots, e_d$ оборотний. Це припущення забезпечує єдиність σ-похідної.

Для елемента $\zeta = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \cdots + x_d e_d$, де $x_1, x_2, \ldots, x_d \in \mathbb{R}$, комплексні числа

$$\xi_u := x_1 a_{1u} + x_2 a_{2u} + \cdots + x_d a_{du}\,, \qquad u = 1, 2, \ldots, m$$

є *спектром* елемента ζ.

В алгебрі $\mathbb{A}$ виділимо лінійну оболонку

$$E_d := \{\zeta = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \dots + x_d e_d : \ x_1, x_2, \dots, x_d \in \mathbb{R}\}$$

породжену векторами $e_1, e_2, \dots, e_d$ з $\mathbb{A}$.

Суттєвим є наступне припущення: для кожного фіксованого $u \in \{1, 2, \dots, m\}$ хоча б одне з чисел $a_{1u}, a_{2u}, \dots, a_{du}$ належить $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$.

Область S простору $\mathbb{R}^d$ ми ототожнюватимемо з областю

$$S := \{\zeta = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \dots + x_d e_d : (x_1, x_2, \dots, x_d) \in S\} \text{ в } E_d \subset \mathbb{A}.$$

Означення 2.1 ([11])**.** *Назвемо неперервну функцію $\Phi : \Omega \to \mathbb{A}$ моногенною в області $\Omega \subset E_d$ якщо Φ диференційовна в сенсі Гато в кожній точці цієї області, тобто якщо для кожного $\zeta \in \Omega$ існує елемент $\Phi'(\zeta)$ алгебри $\mathbb{A}$ такий, що справедлива рівність*

$$\lim_{\varepsilon \to 0+0} \frac{\Phi(\zeta + \varepsilon h) - \Phi(\zeta)}{\varepsilon} = h\Phi'(\zeta) \quad \forall\, h \in E_d\,. \tag{2.2}$$

При цьому $\Phi'(\zeta)$ називається похідною Гато функції Φ в точці ζ.

Розглянемо розклад функції $\Phi : \Omega \to \mathbb{A}$ за базисом $\{I_k\}_{k=1}^n$:

$$\Phi(\zeta) = \sum_{k=1}^{n} U_k(x_1, x_2, \dots, x_d)\, I_k\,. \tag{2.3}$$

У випадку, коли функції $U_k : \Omega \to \mathbb{C}$ є $\mathbb{R}$-диференційовними в області Ω, тобто, якщо для довільної точки $(x_1, x_2, \dots, x_d) \in \Omega$

$$U_k\,(x_1 + \Delta x_1, x_2 + \Delta x_2, \dots, x_d + \Delta x_d) - U_k(x_1, x_2, \dots, x_d)$$

$$= \sum_{j=1}^{d} \frac{\partial U_k}{\partial x_j}\, \Delta x_j + o\left(\sqrt{\sum_{j=1}^{d} (\Delta x_j)^2}\right), \qquad \sum_{j=1}^{d} (\Delta x_j)^2 \to 0\,,$$

функція Φ є моногенною в області Ω тоді і тільки тоді, коли виконуються наступні аналоги умов Коші–Рімана в кожній точці області Ω:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x_j}\, e_1 = \frac{\partial \Phi}{\partial x_1}\, e_j \qquad \text{для всіх} \quad j = 2, 3, \dots, d.$$

Зауважимо, що розклад резольвенти має вигляд [23]:

$$(te_1 - \zeta)^{-1} = \sum_{u=1}^{m} \frac{1}{t - \xi_u}\, I_u + \sum_{s=m+1}^{n} \sum_{r=2}^{s-m+1} \frac{Q_{r,s}}{(t - \xi_{u_s})^r}\, I_s\,, \tag{2.4}$$

$$\forall\, t \in \mathbb{C} : \ t \neq \xi_u\,, \quad u = 1, 2, \dots, m,$$

де коефіцієнти $Q_{r,s}$ визначаються наступними рекурентними співвідно-шеннями:

$$Q_{2,s} = \xi_s\,, \quad Q_{r,s} = \sum_{q=r+m-2}^{s-1} Q_{r-1,q}\, B_{q,\,s}\,, \quad r = 3,4,\ldots,s-m+1,$$

$$B_{q,s} := \sum_{p=m+1}^{s-1} \xi_p \Upsilon_{q,s}^{p}\,, \;\; p = m+2, m+3, \ldots, n,$$

зі структурними константами $\Upsilon_{r,p}^{s} \in \mathbb{C}$, що визначаються рівністю $I_r I_s = \sum\limits_{p} \Upsilon_{r,p}^{s} I_p$ і натуральними числами u_s, які визначаються наступним правилом:

для кожного натурального $m+1 \leq s \leq n$ існує єдине натуральне $1 \leq u_s \leq m$ таке, що для всіх натуральних $1 \leq r \leq m$:

$$I_r I_s = \begin{cases} 0 \;\text{ if }\; r \neq u_s\,, \\ I_s \;\text{ if }\; r = u_s\,. \end{cases}$$

З рівності (2.4) випливає, що точки $(x_1, x_2, \ldots, x_d) \in \mathbb{R}^d$, які відповідають необоронтим елементам $\zeta = \sum\limits_{j=1}^{d} x_j\, e_j$ утворюють множину

$$L_u: \quad \begin{cases} x_1 \operatorname{Re} a_{1u} + x_2 \operatorname{Re} a_{2u} + \cdots + x_d \operatorname{Re} a_{du} = 0, \\ x_1 \operatorname{Im} a_{1u} + x_2 \operatorname{Im} a_{2u} + \cdots + x_d \operatorname{Im} a_{du} = 0, \end{cases} \qquad u = 1,2,\ldots,m$$

в d-вимірному просторі $\mathbb{R}^d$.

Скажемо, що область $\Omega \subset E_k$ є *опуклою відносно множини напрямків* L_u, якщо Ω містить кожен відрізок $\{\zeta_1 + \alpha(\zeta_2 - \zeta_1) : \alpha \in [0,1]\}$ для всіх $\zeta_1, \zeta_2 \in \Omega$ таких, що $\zeta_2 - \zeta_1 \in L_u$.

Введемо позначення

$$D_u := \{\xi_u = x_1 a_{1u} + x_2 a_{2u} + \cdots + x_d a_{du} \in \mathbb{C} :\; \zeta \in \Omega\} \quad u = 1,2,\ldots,m.$$

В наступній теоремі отримано конструктивний опис моногенних функцій зі значеннями в алгебрі $\mathbb{A}$ через голоморфні функції комплексної змінної.

Теорема 2.2 ([23,24]). *Нехай область $\Omega \subset E_d$ опукла відносно множини напрямків L_u, $u = 1,2,\ldots,m$ і нехай для всіх $u = 1,2,\ldots,m$ хоча б одне з чисел $a_{1u}, a_{2u}, \ldots, a_{du}$ належить $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$. Тоді кожна моногенна функція $\Phi : \Omega \to \mathbb{A}$ подається у вигляді*

$$\Phi(\zeta) = \sum_{u=1}^{m} I_u \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma_u} F_u(t)(te_1 - \zeta)^{-1}\, dt +$$

$$+\sum_{s=m+1}^{n} I_s \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma_{u_s}} G_s(t)(te_1-\zeta)^{-1}\,dt, \qquad (2.5)$$

де F_u і G_s — деякі голоморфні функції у відповідних областях D_u і D_{u_s}, а Γ_q — замкнена жорданова спрямлювана крива в D_q, яка охоплює точку ξ_q і не містить точокs ξ_ℓ, $\ell, q = 1, 2, \ldots, m$ при $\ell \neq q$.

При умовах теореми 2.2, із представлення (2.5) випливає, що кожна моногенна в області Ω функція Φ є диференційовною в сенсі сильної похідної, зокрема, в сенсі Лорха [8]. Представлення моногенної функції Φ у вигляді зображення (2.5) єдине. В роботі [23] (а для функцій, визначених в областях підпросторів E_3 — в роботі [24]) доведено, що кожна моногенна функція $\Phi : \Omega \to \mathbb{A}$ в довільній області Ω має r-ту похідну Гато Φ^r, яка є моногенною функцією в Ω для всіх r.

Розглянемо приклади представлення (2.5) в деяких комутативних алгебрах малої розмірності.

Приклад 2.3. В n-вимірній напівпростій алгебрі $\mathbb{A}_n$ з таблицею множення

$\cdot$	I_1	I_2	$\ldots$	I_n
I_1	I_1	0	$\ldots$	0
I_2	0	I_2	$\ldots$	0
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
I_n	0	0	$\ldots$	I_n

представлення (2.5) моногенної функції має такий вигляд [14]:

$$\Phi(\zeta) = F_1(\xi_1)I_1 + F_2(\xi_2)I_2 + \ldots + F_n(\xi_n)I_n\,,$$

де $\zeta = \xi_1 I_1 + \xi_2 I_2 + \cdots \xi_n I_n$. Зокрема, в алгебрі бікомплексних чисел (або комутативних кватерніонів Сегре) $\mathbb{BC} = \{\zeta = \xi_1 I_1 + \xi_2 I_2 : \xi_1, \xi_2 \in \mathbb{C}\}$ моногенна функція має вигляд [9]:

$$\Phi(\zeta) = F_1(\xi_1)I_1 + F_2(\xi_2)I_2. \qquad (2.6)$$

Приклад 2.4. В бігармонічній алгебрі $\mathbb{B}$ з базисом $\{1, \rho\}$, $\rho^2 = 0$ представлення (2.5) моногенної функції має такий вигляд [6]:

$$\Phi(\zeta) = F(\xi_1) + \Big[\xi_2 F'(\xi_1) + F_0(\xi_1)\Big]\rho, \qquad (2.7)$$

де $\zeta = \xi_1 + \xi_2\,\rho, \quad \xi_1, \xi_2 \in \mathbb{C}$.

Приклад 2.5. В 3-вимірній алгебрі $\mathbb{A}_3$ з двовимірним радикалом і таблицею множення

$\cdot$	1	ρ	ρ^2
1	1	ρ	ρ^2
ρ	ρ	ρ^2	0
ρ^2	ρ^2	0	0

представлення (2.5) моногенної функції має вигляд [16]:

$$\Phi(\zeta) = F(\xi_1) + \Big[\xi_2 F'(\xi) + F_1(\xi_1)\Big]\rho +$$

$$+\Big[\xi_3 F'(\xi_1) + \frac{\xi_1^2}{2} F''(\xi_1) + \xi_2 F_1'(\xi_1) + F_2(\xi_1)\Big]\rho^2, \tag{2.8}$$

де $\zeta = \xi_1 + \xi_2\,\rho + \xi_3\,\rho^2, \quad \xi_1, \xi_2, \xi_3 \in \mathbb{C}$.

Приклад 2.6. В 3-вимірній алгебрі $\mathbb{A}_2$ з одновимірним радикалом і таблицею множення

$\cdot$	I_1	I_2	ρ
I_1	I_1	0	0
I_2	0	I_2	ρ
ρ	0	ρ	0

представлення (2.5) моногенної функції має такий вигляд [16]:

$$\Phi(\zeta) = F_1(\xi_1)I_1 + F_2(\xi_2)I_2 + \Big[\xi_3 F_2'(\xi_2) + F_0(\xi_2)\Big]\rho,$$

де $\zeta = \xi_1\,I_1 + \xi_2\,I_2 + \xi_3\,\rho, \quad \xi_1, \xi_2, \xi_3 \in \mathbb{C}$.

В роботі [22] для моногенної функції в областях підпростору E_d, $2 \le d \le 2n$ зі значеннями в довільній комутативній асоціативній алгебрі над полем комплексних чисел доведено криволінійні аналоги теореми і формули Коші, теореми Морера тощо. Ці результати для моногенних функцій в областях з E_3 доведено в роботі [25]. У статті [15] доведено аналог інтегральної теореми Коші для поверхневого інтеграла в $\mathbb{R}^3$ в довільній комутативній алгебрі $\mathbb{A}$. В роботі [28] встановлено відповідність між моногенною функцією в алгебрі $\mathbb{A}$ і скінченним набором моногенних функцій в спеціальній комутативній алгебрі. В роботі [27] запропоновано співвідношення між моногенними функціями зі значеннями в n-вимірній комутативній асоціативній алгебрі і моногенними функціями зі значеннями в спеціальній $(n+1)$-вимірній алгебрі. Нарешті, в роботі [26] всі попередні результати застосовано до розв'язування лінійних диференціальних рівнянь з частинними похідними. Використовуючи моногенні функції, визначені на послідовності комутативних асоціативних алгебр, ми обгрунтовуємо рекурентну процедуру побудови нескінченновимірної сім'ї розв'язків довільного лінійного диференціального рівняння з частинними похідними зі сталими коефіцієнтами у вигляді компонент згаданих моногенних функцій.

У цій статті ми визначимо σ-моногенні функції в довільній n-вимірній $(1 \leq n < \infty)$ комутативній асоціативній алгебрі $\mathbb{A}$ з одиницею над полем комплексних чисел $\mathbb{C}$.

3. σ-моногенні функції в комутативних асоціативних алгебрах

Будемо використовувати всі позначення розділу 2. Нехай розклад функції $\Phi : \Omega \to \mathbb{A}$ за базисом має вигляд (2.3). Нехай σ — це впорядкований набір з n $\mathbb{A}$-значних функцій:

$$\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n),$$

де $\sigma_k = \sigma_k(x_1, x_2, \ldots, x_d) = \sigma_k(\zeta)$ при $k = 1, 2, \ldots, n,$ — функція зі значеннями в $\mathbb{A}$.

Для вектора $h = \sum\limits_{j=1}^{d} h_j e_j$, $h_j \in \mathbb{R}$, визначимо

$$\Delta_{\varepsilon,h,\sigma}\Phi(\zeta) := \sum_{k=1}^{n} \sigma_k(\zeta)\Big(U_k(x_1 + \varepsilon h_1, \ldots, x_d + \varepsilon h_d) - U_k(x_1, \ldots, x_d)\Big)\, I_k \,.$$

Означення 3.1. *Неперервну функцію $\Phi : \Omega \to \mathbb{A}$ будемо називати σ-моногенною в області $\Omega \subset E_d$, якщо для кожного $\zeta \in \Omega$ існує елемент $\Phi'_\sigma(\zeta)$ алгебри $\mathbb{A}$ такий, що для кожного $h \in E_d$ справедлива рівність*

$$\lim_{\varepsilon \to 0+0} \frac{\Delta_{\varepsilon,h,\sigma}\Phi(\zeta)}{\varepsilon} = h\, \Phi'_\sigma(\zeta). \tag{3.1}$$

Значення $\Phi'_\sigma(\zeta)$ називається σ-похідною функції Φ в точці ζ.

Зауваження 3.2. Якщо при всіх $k = 1, 2, \ldots, n$ $\sigma_k \equiv 1$, то означення 3.1 співпадає з означенням 2.1, тобто 1-моногенна функція є моногенною.

Зауваження 3.3. Якщо $\mathbb{A} \equiv \mathbb{C}$ і $\sigma_1 = F(z)$, $\sigma_2\, i = G(z)$, то означення (3.1) співпадає з означенням псевдоаналітичної функції (1.2) за Берсом.

Зауваження 3.4. Означення 3.1 враховує наявність необоротних елементів в комутативній алгебрі.

Теорема 3.5. *Нехай компоненти U_k функції (2.3) є $\mathbb{R}$-диференційовними в області $\Omega \subset E_d$. Функція $\Phi : \Omega \to \mathbb{A}$ вигляду (2.3) є σ-моногенною в області Ω тоді і тільки тоді, коли виконується наступний аналог умов Коші–Рімана:*

$$e_1 \sum_{k=1}^{n} \sigma_k \frac{\partial U_k}{\partial x_j}\, I_k = e_j \sum_{k=1}^{n} \sigma_k \frac{\partial U_k}{\partial x_1}\, I_k \,, \quad j = 2, 3, \ldots, d. \tag{3.2}$$

Доведення. *Необхідність.* Якщо функція (2.3) моногенна в області Ω, тоді при $h = e_1$ рівність (3.1) перетворюється на рівність

$$\sum_{k=1}^{n} \sigma_k \, \frac{\partial U_k}{\partial x_1} \, I_k = e_1 \Phi'_\sigma(\zeta). \tag{3.3}$$

А при $h = e_j$ рівність (3.1) перетворюється на рівність

$$\sum_{k=1}^{n} \sigma_k \, \frac{\partial U_k}{\partial x_j} \, I_k = e_j \Phi'_\sigma(\zeta). \tag{3.4}$$

З рівностей (3.3), (3.4) випливають умови (3.2).

Достатність. Оскільки серед векторів $e_1, e_2, \ldots, e_d$ хоча б один вектор оборотний, то для визначеності припустимо, що оборотним елементом є e_s. Оскільки функція Φ $\mathbb{R}$-диференційовна, то існує похідна $\frac{\partial \Phi}{\partial x_s}$. Тоді існує елемент $e_s^{-1} \frac{\partial \Phi}{\partial x_s}$, який ми використаємо в ролі σ-похідної функції $\Phi : \Omega \to \mathbb{A}$, тобто

$$\Phi'_\sigma(\zeta) = e_s^{-1} \sum_{k=1}^{n} \sigma_k \, \frac{\partial U_k}{\partial x_s} \, I_k \, . \tag{3.5}$$

З рівності (3.5) отримуємо

$$\sum_{k=1}^{n} \sigma_k \, \frac{\partial U_k}{\partial x_s} \, I_k = e_s \Phi'_\sigma(\zeta). \tag{3.6}$$

Множачи рівність (3.6) на e_j зліва, $j = 1, 2, \ldots, d$, і враховуючи рівності (3.2), матимемо

$$e_j \sum_{k=1}^{n} \sigma_k \, \frac{\partial U_k}{\partial x_s} \, I_k = e_j e_s \Phi'_\sigma(\zeta) = e_s \sum_{k=1}^{n} \sigma_k \, \frac{\partial U_k}{\partial x_j} \, I_k \, .$$

Множачи останню рівність на e_s^{-1} зліва, будемо мати

$$\sum_{k=1}^{n} \sigma_k \, \frac{\partial U_k}{\partial x_j} \, I_k = e_j \Phi'_\sigma(\zeta), \qquad j = 1, 2, \ldots, d. \tag{3.7}$$

Тепер продовжимо доведення достатності.

Нехай $h = \sum\limits_{j=1}^{d} h_j e_j$, де $h_j \in \mathbb{R}$, і нехай додатне ε таке, що $\zeta + \varepsilon h \in \Omega$. Беручи до уваги рівності (3.5), (3.6), (3.7) і використовуючи позначення $\Delta U_k := U_k(x_1 + \varepsilon h_1, \ldots, x_d + \varepsilon h_d) - U_k(x_1, \ldots, x_d)$, маємо

$$\frac{\Delta_{\varepsilon,h,\sigma} \Phi(\zeta)}{\varepsilon} - h \Phi'_\sigma(\zeta) =$$

$$= \frac{\Delta_{\varepsilon,h,\sigma}\Phi(\zeta)}{\varepsilon} - h_1 e_1 \Phi'_\sigma(\zeta) - h_2 e_2 \Phi'_\sigma(\zeta) - \cdots - h_d e_d \Phi'_\sigma(\zeta) =$$

$$= \varepsilon^{-1} \sum_{k=1}^{n} \sigma_k \, \Delta U_k \, I_k - h_1 \sum_{k=1}^{n} \sigma_k \, \frac{\partial U_k}{\partial x_1} \, I_k - \cdots - h_d \sum_{k=1}^{n} \sigma_k \, \frac{\partial U_k}{\partial x_d} \, I_k =$$

$$= \varepsilon^{-1} \sum_{k=1}^{n} \sigma_k \left(\Delta U_k - \varepsilon h_1 \frac{\partial U_k}{\partial x_1} - \varepsilon h_2 \frac{\partial U_k}{\partial x_2} - \cdots - \varepsilon h_d \frac{\partial U_k}{\partial x_d} \right) I_k \, . \qquad (3.8)$$

Оскільки компоненти U_k при $k = 1, 2, \ldots, n$, диференційовні в області Ω, то справедливі співвідношення

$$\Delta U_k - \varepsilon h_1 \frac{\partial U_k}{\partial x_1} - \varepsilon h_2 \frac{\partial U_k}{\partial x_2} - \cdots - \varepsilon h_d \frac{\partial U_k}{\partial x_d} = o(\varepsilon),$$

$$\varepsilon \to 0, \qquad k = 1, 2, \ldots, n.$$

Переходячи в рівності (3.8) до границі при $\varepsilon \to 0$, отримуємо рівність (3.1), в якій $\Phi'_\sigma(\zeta)$ визначається рівністю (3.5). □

В наступній теоремі встановлюються деякі прості властивості σ-похідної.

Теорема 3.6.
(1) Якщо Φ'_σ і Φ'_ν існують, то $\Phi'_\sigma + \Phi'_\nu = \Phi'_{\sigma+\nu}$;
(2) Якщо Φ'_σ існує і λ — стала в $\mathbb{A}$, то $\Phi'_{\lambda\sigma} = \lambda \Phi'_\sigma$.

Доведення. З виразу (3.5) для σ-похідної випливають рівності

$$\Phi'_\sigma(\zeta) + \Phi'_\nu(\zeta) = e_s^{-1} \sum_{k=1}^{n} (\sigma_k + \nu_k) \frac{\partial U_k}{\partial x_s} \, I_k = \Phi'_{\sigma+\nu} \, .$$

$$\Phi'_{\lambda\sigma}(\zeta) = e_s^{-1} \sum_{k=1}^{n} \lambda \sigma_k \, \frac{\partial U_k}{\partial x_s} \, I_k = \lambda e_s^{-1} \sum_{k=1}^{n} \sigma_k \, \frac{\partial U_k}{\partial x_s} \, I_k = \lambda \Phi'_\sigma \, .$$

□

Далі розглянемо σ-моногенні функції в деяких алгебрах малої розмірності.

4. σ-моногенні функції в алгебрі $\mathbb{BC}$

Розглянемо двовимірну напівпросту комутативну асоціативну алгебру бікомплексних чисел $\mathbb{BC}$ з базисом $\{I_1, I_2\}$ таким, що

$$I_1^2 = I_1, \quad I_2^2 = I_2, \quad I_1 I_2 = I_2 I_1 = 0.$$

Теорема 4.1. *Нехай вектори* $e_1 := m_1 I_1 + m_2 I_2$, $e_2 := n_1 I_1 + n_2 I_2$ *такі, що* $\mathrm{Im}\,(n_1\overline{m}_1) \neq 0$, $\mathrm{Im}\,(n_2\overline{m}_2) \neq 0$ *і хоча б одне з чисел у кожній з пар* (m_1, n_1), (m_2, n_2) *належить* $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$. *Нехай також*

$$\sigma_1 := g_1(x,y)I_1 + g_2(x,y)I_2\,, \qquad \sigma_2 := f_1(x,y)I_1 + f_2(x,y)I_2$$

такі, що $g_1(x,y) \neq 0$ *і* $f_2(x,y) \neq 0$ *в області* $\Omega \subset E_2 \subset \mathbb{BC}$. *Тоді кожна* σ*-моногенна в області* Ω *функція* $\Phi : \Omega \to \mathbb{BC}$ *подається у вигляді*

$$\Phi(\zeta) = F_1(\xi_1)\, I_1 + F_2(\xi_2)\, I_2\,, \tag{4.1}$$

де $F_k : D_k \to \mathbb{C}$ *— відповідні аналітичні функції комплексної змінної* ξ_k *в областях* $D_k := \{\xi_k : xe_1 + ye_2 \in \Omega\}$, $k = 1, 2$.

Доведення. Нехай $\zeta := xe_1 + ye_2$, $x, y \in \mathbb{R}$ і $\Phi(\zeta) = U_1(x,y)I_1 + U_2(x,y)I_2$.

В цій алгебрі аналоги умов Коші–Рімана (3.2) мають вигляд

$$e_1\left(\sigma_1\frac{\partial U_1}{\partial y}I_1 + \sigma_2\frac{\partial U_2}{\partial y}I_2\right) = e_2\left(\sigma_1\frac{\partial U_1}{\partial x}I_1 + \sigma_2\frac{\partial U_2}{\partial x}I_2\right),$$

що еквівалентно рівності

$$e_1\left(g_1\frac{\partial U_1}{\partial y}I_1 + f_2\frac{\partial U_2}{\partial y}I_2\right) = e_2\left(g_1\frac{\partial U_1}{\partial x}I_1 + f_2\frac{\partial U_2}{\partial x}I_2\right).$$

Підставляючи замість e_1, e_2 їх вирази, отримаємо

$$m_1 g_1\frac{\partial U_1}{\partial y}I_1 + m_2 f_2\frac{\partial U_2}{\partial y}I_2 = n_1 g_1\frac{\partial U_1}{\partial x}I_1 + n_2 f_2\frac{\partial U_2}{\partial x}I_2\,. \tag{4.2}$$

Оскільки $g_1(x,y) \neq 0$ і $f_2(x,y) \neq 0$ в Ω, то рівняння (4.2) еквівалентне наступній системі рівнянь

$$m_1\frac{\partial U_1}{\partial y} = n_1\frac{\partial U_1}{\partial x}, \qquad m_2\frac{\partial U_2}{\partial y} = n_2\frac{\partial U_2}{\partial x}. \tag{4.3}$$

Покажемо, що при умові $\mathrm{Im}\,(n_1\overline{m}_1) \neq 0$ розв'язок першого рівняння системи (4.3) має наступний вигляд

$$U_1(x,y) = F_1(xm_1 + yn_1),$$

де F_1 — аналітична функція комплексної змінної $\xi_1 := xm_1 + yn_1$. Для цього виділимо спочатку дійсну і уявну частини виразу

$$\xi_1 = xm_1 + yn_1 = (x\mathrm{Re}\,m_1 + y\mathrm{Re}\,n_1) + i(x\mathrm{Im}\,m_1 + y\mathrm{Im}\,n_1) =: \tau + i\eta. \tag{4.4}$$

Наслідком рівності (4.4) є операторні рівності

$$\frac{\partial}{\partial x} = \mathrm{Re}\,m_1\,\frac{\partial}{\partial \tau} + \mathrm{Im}\,m_1\,\frac{\partial}{\partial \eta}\,, \quad \frac{\partial}{\partial y} = \mathrm{Re}\,n_1\,\frac{\partial}{\partial \tau} + \mathrm{Im}\,n_1\,\frac{\partial}{\partial \eta}\,.$$

Тоді в нових координатах перше рівняння системи (4.3) набуває вигляду

$$(\operatorname{Re} m_1 \operatorname{Im} n_1 - \operatorname{Re} n_1 \operatorname{Im} m_1)\left(\frac{\partial U_1}{\partial \eta} - i\,\frac{\partial U_1}{\partial \tau}\right) = 0. \tag{4.5}$$

Вираз у перших дужках рівний $\operatorname{Im}(n_1\overline{m}_1)$ і за умовою теореми він не дорівнює нулю. Також відмітимо, що вираз

$$\operatorname{Im}(n_1\overline{m}_1) = \operatorname{Re} m_1 \operatorname{Im} n_1 - \operatorname{Re} n_1 \operatorname{Im} m_1$$

є детермінантом матриці лінійного відображення $(\tau,\eta) \to (x,y)$, яке, очевидно, є взаємно однозначним. Це означає, що функція U_1 є функцією змінних τ,η. Крім того, з рівності (4.5) отримуємо рівняння

$$\frac{\partial U_1}{\partial \eta} = i\,\frac{\partial U_1}{\partial \tau}\,. \tag{4.6}$$

Оскільки за означенням σ-моногенної функції компонента U_1 неперервна в Ω, то внаслідок рівності (4.6) і теореми 6 з роботи Г. П. Толстова [29] функція U_1 має вигляд

$$U_1(x,y) = F_1(xm_1 + yn_1),$$

де F_1 — аналітична функція комплексної змінної $\xi_1 := xm_1 + yn_1$.

Аналогічно показується, що загальний розв'язок другого рівняння системи (4.3) має наступний вигляд

$$U_2(x,y) = F_2(xm_2 + yn_2),$$

де F_2 — аналітична функція комплексної змінної $\xi_2 := xm_2 + yn_2$. У цьому зв'язку див. роботи [9,16]. $\square$

Зауважимо, що представлення (4.1) співпадає з представленням (2.6) і не залежить від σ (див. [9]).

5. σ-МОНОГЕННІ ФУНКЦІЇ В БІГАРМОНІЧНІЙ АЛГЕБРІ $\mathbb{B}$

Розглянемо двовимірну комутативну асоціативну алгебру $\mathbb{B}$ як у прикладі 2.4.

5.1. **Аналоги умов Коші–Рімана в алгебрі $\mathbb{B}$.** Нехай $e_1 := m_1 + m_2\rho$, $e_2 := n_1 + n_2\rho$ і хоча б одне з чисел у кожній з пар (m_1, n_1), (m_2, n_2) належить $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$.

Нехай $\zeta := xe_1 + ye_2$, $x, y \in \mathbb{R}$ і $\Phi(\zeta) = U_1(x,y) + U_2(x,y)\rho$. Позначимо $\sigma := (\sigma_1, \sigma_2) \in \mathbb{B} \times \mathbb{B}$, де

$$\sigma_1 = g_1(x,y) + g_2(x,y)\rho\,, \qquad \sigma_2 = f_1(x,y) + f_2(x,y)\rho\,.$$

В цій алгебрі аналоги умов Коші–Рімана (3.2) набувають вигляду

$$e_1\left(\sigma_1\frac{\partial U_1}{\partial y} + \sigma_2\rho\frac{\partial U_2}{\partial y}\right) = e_2\left(\sigma_1\frac{\partial U_1}{\partial x} + \sigma_2\rho\frac{\partial U_2}{\partial x}\right),$$

що еквівалентно рівності

$$e_1\left(g_1\frac{\partial U_1}{\partial y}+g_2\rho\frac{\partial U_1}{\partial y}+f_1\rho\frac{\partial U_2}{\partial y}\right)=e_2\left(g_1\frac{\partial U_1}{\partial x}+g_2\rho\frac{\partial U_1}{\partial x}+f_1\rho\frac{\partial U_2}{\partial x}\right).$$

Підставляючи замість e_1, e_2 їх вирази, отримаємо

$$m_1g_1\frac{\partial U_1}{\partial y}+m_1g_2\rho\frac{\partial U_1}{\partial y}+m_1f_1\rho\frac{\partial U_2}{\partial y}+m_2g_1\rho\frac{\partial U_1}{\partial y}=$$
$$=n_1g_1\frac{\partial U_1}{\partial x}+n_1g_2\rho\frac{\partial U_1}{\partial x}+n_1f_1\rho\frac{\partial U_2}{\partial x}+n_2g_1\rho\frac{\partial U_1}{\partial x}.$$

При умовах $g_1(x,y)\neq 0$ або $f_2(x,y)\neq 0$ в Ω, останнє рівняння еквівалентне наступній системі рівнянь

$$m_1\frac{\partial U_1}{\partial y}=n_1\frac{\partial U_1}{\partial x}\,,\quad m_1f_1\frac{\partial U_2}{\partial y}+m_2g_1\frac{\partial U_1}{\partial y}=n_1f_1\frac{\partial U_2}{\partial x}+n_2g_1\frac{\partial U_1}{\partial x}\,. \tag{5.1}$$

Умови (5.1) є аналогами умов Коші–Рімана для σ-моногенної функції Φ в алгебрі $\mathbb{B}$. Якщо $g_1=f_1\neq 0$, то отримаємо умови Коші–Рімана для моногенної функції [6].

5.2. **Представлення σ-моногенних функцій у першому спеціальному випадку.** У цьому пункті ми отримаємо представлення σ-моногенних функцій в області Ω у випадку коли відношення $\frac{g_1(x,y)}{f_1(x,y)}$, при $f_1(x,y)\neq 0$ в Ω, є аналітичною функцією комплексної змінної $\xi_2:=xm_2+yn_2$, тобто, якщо

$$\frac{g_1(x,y)}{f_1(x,y)}=:w(\xi_2). \tag{5.2}$$

Для досягнення цієї мети знайдемо загальний розв'язок системи (5.1) за припущення (5.2).

Теорема 5.3. *Нехай вектори $e_1:=m_1+m_2\rho$, $e_2:=n_1+n_2\rho$ такі, що $\mathrm{Im}\,(n_1\overline{m}_1)\neq 0$ і хоча б одне з чисел у кожній з пар (m_1,n_1), (m_2,n_2) належить $\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$. Нехай Ω — однозв'язна область в $E_2\subset\mathbb{B}$. Припустимо також, що $\sigma:=(\sigma_1,\sigma_2)\in\mathbb{B}\times\mathbb{B}$,*

$$\sigma_1=g_1(x,y)+g_2(x,y)\rho\,,\qquad \sigma_2=f_1(x,y)+f_2(x,y)\rho$$

такі, що $g_1(x,y)\neq 0$ і $f_1(x,y)\neq 0$ в області Ω, і функція (5.2) аналітична в області $\mathbb{C}\supset D_2:=\{\xi_2=xm_2+yn_2: xe_1+ye_2\in\Omega\}$. Тоді кожна σ-моногенна функція $\Phi:\Omega\to\mathbb{B}$ подається у вигляді

$$\Phi(\zeta)=F_1(\xi_1)+\Big(F_2(\xi_1)+W(\xi_2)F_1'(\xi_1)\Big)\rho, \tag{5.3}$$

де F_1, F_2 — деякі аналітичні функції комплексної змінної ξ_1 в області $\mathbb{C}\supset D_1:=\{\xi_1=xm_1+yn_1: xe_1+ye_2\in\Omega\}$ і $W(\xi_2)$ — довільна первісна функції (5.2) в D_2.

Доведення. Як і в розділі 4, за припущення $\mathrm{Im}\,(n_1\overline{m}_1)\neq 0$ загальний розв'язок першого рівняння системи (5.1) має вигляд
$$U_1(x,y)=F_1(\xi_1), \tag{5.4}$$
де F_1 — аналітична функція комплексної зінної $\xi_1=xm_1+yn_1$.

Тоді друге рівняння системи (5.1) набуває вигляду
$$m_1f_1\frac{\partial U_2}{\partial y}-n_1f_1\frac{\partial U_2}{\partial x}=g_1KF_1'(\xi_1), \tag{5.5}$$
де $K:=n_2m_1-m_2n_1$. Оскільки $f_1\neq 0$ в Ω, то загальний розв'язок однорідного рівняння, яке породжене рівнянням (5.5), матиме вигляд
$$\widetilde{U}_2(x,y)=F_2(\xi_1),$$
де F_2 — аналітична функція комплексної змінної $\xi_1=xm_1+yn_1$ (див. доведення теореми 4.1).

За умови, що область Ω однозв'язна, покажемо, що функція
$$V_2(x,y)=W(\xi_2)F_1'(\xi_1),$$
де $W(\xi_2)$ — довільна первісна функції $w(\xi_2)$ в D_2, є частинним розв'язком неоднорідного рівняння (5.5). Беручи до уваги співвідношення
$$\frac{\partial W}{\partial y}=W'(\xi_2)n_2=w(\xi_2)n_2\,, \qquad \frac{\partial W}{\partial x}=w(\xi_2)m_2\,,$$
з (5.5) маємо
$$m_1\left(\frac{\partial W}{\partial y}F_1'(\xi_1)+W(\xi_2)F_1''(\xi_1)n_1\right)-$$
$$-\,n_1\left(\frac{\partial W}{\partial x}F_1'(\xi_1)+W(\xi_2)F_1''(\xi_1)m_1\right)=w(\xi_2)KF_1'(\xi_1)$$
або
$$m_1\big(n_2w(\xi_2)F_1'(\xi_1)+W(\xi_2)F_1''(\xi_1)n_1\big)-$$
$$-\,n_1\big(m_2w(\xi_2)F_1'(\xi_1)+W(\xi_2)F_1''(\xi_1)m_1\big)=w(\xi_2)KF_1'(\xi_1).$$
Отже, ми отримали тотожність
$$(n_2m_1-n_1m_2)w(\xi_2)F_1'(\xi_1)=w(\xi_2)KF_1'(\xi_1).$$
Таким чином, загальний розв'язок неоднорідного рівняння (5.5) має наступний вигляд $U_2(x,y)=\widetilde{U}_2(x,y)+V_2(x,y)$, тобто
$$U_2(x,y)=F_2(\xi_1)+W(\xi_2)F_1'(\xi_1). \tag{5.6}$$
$\square$

Зауваження 5.4. Якщо $\sigma = 1$, тобто $\sigma_1 = \sigma_2 = 1$, то $f_1(x,y) = g_1(x,y) = 1$ і $w(\xi_2) = \frac{g_1}{f_1} = 1$ є аналітичною функцією на всій комплексній площині $\mathbb{C}$. Відповідно, $W(\xi_2) = \int w(\xi_2)d\xi_2 = \xi_2$. Таким чином, при $\sigma = 1$, представлення (5.3) набуває вигляду (2.7).

Зауваження 5.5. Якщо $\sigma_1 = \sigma_2 \neq 1$, то представлення (5.3) також набуває вигляду (2.7).

5.6. **Представлення σ-моногенних функцій у другому спеціальному випадку.** У цьому пункті ми отримаємо представлення σ-моногенних функцій у випадку, коли функція

$$w(x,y) := \frac{g_1(x,y)}{f_1(x,y)} \tag{5.7}$$

задовольняє умову

$$m_1m_2 \int\limits_0^x \frac{\partial w}{\partial y}(t,y)dt + n_1n_2 \int\limits_0^y \frac{\partial w}{\partial x}(x,\tau)d\tau = 0. \tag{5.8}$$

Зауважимо, що умову (5.8) задовольняє, наприклад, функція

$$w(x,y) = m_1m_2x^2 - n_1n_2y^2.$$

В наступній теоремі ми розглядаємо зіркову область.

Означення 5.7. *Область $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ називається зірковою областю відносно точки (x_0,y_0), якщо для всіх $(x,y) \in \Omega$ відрізок, який з'єднує точки (x_0,y_0) і (x,y), належить області Ω.*

Не зменшуючи загальності, припустимо, що область Ω є зірковою відносно нуля.

Теорема 5.8. *Нехай вектори $e_1 := m_1 + m_2\rho$, $e_2 := n_1 + n_2\rho$ такі, що $\mathrm{Im}\,(n_1\overline{m}_1) \neq 0$ і хоча б одне з чисел у кожній з пар (m_1,n_1), (m_2,n_2) належить $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$. Нехай область Ω в $E_2 \subset \mathbb{B}$ є зірковою відносно нуля. Припустимо також, що $\sigma := (\sigma_1,\sigma_2) \in \mathbb{B} \times \mathbb{B}$,*

$$\sigma_1 = g_1(x,y) + g_2(x,y)\rho\,, \qquad \sigma_2 = f_1(x,y) + f_2(x,y)\rho$$

такі, що $g_1(x,y) \neq 0$ і $f_1(x,y) \neq 0$ в області Ω; функція (5.7) разом з частинними похідними $\frac{\partial w}{\partial x}$, $\frac{\partial w}{\partial y}$ неперервна в Ω і в цій області справедлива рівність (5.8). Тоді кожна σ-моногенна функція $\Phi : \Omega \to \mathbb{B}$ подається у вигляді

$$\Phi(\zeta) = F_1(\xi_1) +$$

$$+\left[F_2(\xi_1) + F_1'(\xi_1)\Big(m_2\int\limits_0^x w(t,y)dt + n_2\int\limits_0^y w(x,\tau)d\tau\Big)\right]\rho, \quad (5.9)$$

де F_1*,* F_2 *— деякі аналітичні функції комплексної змінної* ξ_1 *в області* $\mathbb{C} \supset D_1 := \{\xi_1 = xm_1 + yn_1 : xe_1 + ye_2 \in \Omega\}$*.*

Доведення. Наша задача зводиться до відшукання частинного розв'язку рівняння (5.5). Покажемо, що функція

$$V_2(x,y) = F_1'(\xi_1)\left(m_2\int\limits_0^x w(t,y)dt + n_2\int\limits_0^y w(x,\tau)d\tau\right)$$

є частинним розв'язком неоднорідного рівняння (5.5). Справді, з (5.5) маємо

$$m_1n_1F_1''(\xi_1)\left(m_2\int\limits_0^x w(t,y)dt + n_2\int\limits_0^y w(x,\tau)d\tau\right) +$$

$$+m_1F_1'(\xi_1)\left(n_2w(x,y) + m_2\int\limits_0^x \frac{\partial w}{\partial y}(t,y)dt\right) -$$

$$-n_1m_1F_1''(\xi_1)\left(m_2\int\limits_0^x w(t,y)dt + n_2\int\limits_0^y w(x,\tau)d\tau\right) +$$

$$+n_1F_1'(\xi_1)\left(m_2w(x,y) + n_2\int\limits_0^y \frac{\partial w}{\partial x}(x,\tau)d\tau\right) = Kw(x,y)F_1'(\xi_1)$$

або

$$Kw(x,y)F_1'(\xi_1) + F_1'(\xi_1)\left(m_1m_2\int\limits_0^x \frac{\partial w}{\partial y}(t,y)dt + n_1n_2\int\limits_0^y \frac{\partial w}{\partial x}(x,\tau)d\tau\right) =$$

$$= Kw(x,y)F_1'(\xi_1), \quad (5.10)$$

де, як і раніше, $K = n_2m_1 - m_2n_1$. З умови (5.8) випливає рівність (5.10). □

Зауваження 5.9. Якщо $\sigma_1 = \sigma_2$, то представлення (5.9) набуває вигляду (2.7). Справді, тоді $w(x,y) = 1$ і виконується умова (5.8). У цьому випадку

$$m_2 \int\limits_0^x w(t,y)dt + n_2 \int\limits_0^y w(x,\tau)d\tau = xm_2 + yn_2\,.$$

Таким чином, при $\sigma_1 = \sigma_2$ представлення (5.9) набуває вигляду (2.7).

6. σ-МОНОГЕННІ ФУНКЦІЇ В АЛГЕБРІ $\mathbb{A}_3$

Розглянемо тривимірну комутативну асоціативну алгебру $\mathbb{A}_3$ з двовимірним радикалом (див. приклад 2.5).

6.1. **Аналоги умов Коші–Рімана в алгебрі $\mathbb{A}_3$.** Нехай

$$e_1 := m_1 + m_2\rho + m_3\rho^2\,, e_2 := n_1 + n_2\rho + n_3\rho^2\,, e_3 := k_1 + k_2\rho + k_3\rho^2 \quad (6.1)$$

і хоча б одне з чисел у кожній з трійок (m_1, n_1, k_1), (m_2, n_2, k_2) і (m_3, n_3, k_3) належить $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$.

Нехай $\zeta := xe_1 + ye_2 + ze_3\,,\ x, y, z \in \mathbb{R}$ і

$$\Phi(\zeta) = U_1(x,y,z) + U_2(x,y,z)\rho + U_3(x,y,z)\rho^2\,.$$

Позначимо $\sigma := (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) \in \mathbb{A}_3 \times \mathbb{A}_3 \times \mathbb{A}_3$, де

$$\sigma_1 = g_1(x,y,z) + g_2(x,y,z)\rho + g_3(x,y,z)\rho^2\,,$$

$$\sigma_2 = f_1(x,y,z) + f_2(x,y,z)\rho + f_3(x,y,z)\rho^2\,,$$

$$\sigma_3 = p_1(x,y,z) + p_2(x,y,z)\rho + p_3(x,y,z)\rho^2\,.$$

В цій алгебрі умови Коші–Рімана (3.2) набувають вигляду

$$e_1\left(\sigma_1\frac{\partial U_1}{\partial y} + \sigma_2\rho\frac{\partial U_2}{\partial y} + \sigma_3\rho^2\frac{\partial U_3}{\partial y}\right) = e_2\left(\sigma_1\frac{\partial U_1}{\partial x} + \sigma_2\rho\frac{\partial U_2}{\partial x} + \sigma_3\rho^2\frac{\partial U_3}{\partial x}\right), \tag{6.2}$$

$$e_1\left(\sigma_1\frac{\partial U_1}{\partial z} + \sigma_2\rho\frac{\partial U_2}{\partial z} + \sigma_3\rho^2\frac{\partial U_3}{\partial z}\right) = e_3\left(\sigma_1\frac{\partial U_1}{\partial x} + \sigma_2\rho\frac{\partial U_2}{\partial x} + \sigma_3\rho^2\frac{\partial U_3}{\partial x}\right).$$

Підставляючи замість $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ їх вирази, з першого рівняння системи (6.2) отримуємо

$$e_1\left(g_1\frac{\partial U_1}{\partial y} + g_2\rho\frac{\partial U_1}{\partial y} + g_3\rho^2\frac{\partial U_1}{\partial y} + f_1\rho\frac{\partial U_2}{\partial y} + f_2\rho^2\frac{\partial U_2}{\partial y} + p_1\rho^2\frac{\partial U_3}{\partial y}\right) =$$

$$= e_2\left(g_1\frac{\partial U_1}{\partial x} + g_2\rho\frac{\partial U_1}{\partial x} + g_3\rho^2\frac{\partial U_1}{\partial x} + f_1\rho\frac{\partial U_2}{\partial x} + f_2\rho^2\frac{\partial U_2}{\partial x} + p_1\rho^2\frac{\partial U_3}{\partial x}\right).$$

Якщо замість e_1, e_2, e_3 підставити їх вирази в друге рівняння системи

(6.2), то ми отримаємо наступні аналоги умов Коші–Рімана в алгебрі $\mathbb{A}_3$

$$m_1g_1\frac{\partial U_1}{\partial y}=n_1g_1\frac{\partial U_1}{\partial x}\,,\quad m_1f_1\frac{\partial U_2}{\partial y}+m_2g_1\frac{\partial U_1}{\partial y}=n_1f_1\frac{\partial U_2}{\partial x}+n_2g_1\frac{\partial U_1}{\partial x}\,,$$

$$m_1f_2\frac{\partial U_2}{\partial y}+m_1p_1\frac{\partial U_3}{\partial y}+m_2g_2\frac{\partial U_1}{\partial y}+m_2f_1\frac{\partial U_2}{\partial y}+m_3g_1\frac{\partial U_1}{\partial y}=$$

$$=n_1f_2\frac{\partial U_2}{\partial x}+n_1p_1\frac{\partial U_3}{\partial x}+n_2g_2\frac{\partial U_1}{\partial x}+n_2f_1\frac{\partial U_2}{\partial x}+n_3g_1\frac{\partial U_1}{\partial x},\qquad(6.3)$$

$$m_1\frac{\partial U_1}{\partial z}=k_1\frac{\partial U_1}{\partial x}\,,\quad m_1f_1\frac{\partial U_2}{\partial z}+m_2g_1\frac{\partial U_1}{\partial z}=k_1f_1\frac{\partial U_2}{\partial x}+k_2g_1\frac{\partial U_1}{\partial x}\,,$$

$$m_1f_2\frac{\partial U_2}{\partial z}+m_1p_1\frac{\partial U_3}{\partial z}+m_2g_2\frac{\partial U_1}{\partial z}+m_2f_1\frac{\partial U_2}{\partial z}+m_3g_1\frac{\partial U_1}{\partial z}=$$

$$=k_1f_2\frac{\partial U_2}{\partial x}+k_1p_1\frac{\partial U_3}{\partial x}+k_2g_2\frac{\partial U_1}{\partial x}+k_2f_1\frac{\partial U_2}{\partial x}+k_3g_1\frac{\partial U_1}{\partial x}.$$

Умови (6.3) є аналогами умов Коші–Рімана для σ-моногенних функцій в алгебрі $\mathbb{A}_3$. При $\sigma_1=\sigma_2=\sigma_3=1$, ми отримуємо умови Коші–Рімана для моногенних функцій [16].

6.2. **Представлення σ-моногенних функцій в алгебрі $\mathbb{A}_3$ в спеціальному випадку.** У цьому пункті ми встановимо представлення σ-моногенних в області Ω функцій за наступних додаткових припущень на σ:

Припущення 6.3. *(i)* функції

$$w(x,y,z):=\frac{g_1(x,y,z)}{f_1(x,y,z)},\ f_1\neq0,\quad w_1(x,y,z):=\frac{f_2(x,y,z)}{p_1(x,y,z)},$$

$$w_2(x,y,z):=\frac{g_2(x,y,z)}{p_1(x,y,z)},\quad w_3(x,y,z):=\frac{f_1(x,y,z)}{p_1(x,y,z)},\ p_1\neq0$$

є аналітичними функціями комплесної змінної $\xi_2:=xm_2+yn_2+zk_2$ в області $D_2:=\{\xi_2\in\mathbb{C}:\zeta=xe_1+ye_2+ze_3\in\Omega\}$, тобто, $w=w(\xi_2)$, $w_1=w_1(\xi_2)$, $w_2=w_2(\xi_2)$, $w_3=w_3(\xi_2)$;

(ii) функція $w_4(x,y,z):=\frac{g_1(x,y,z)}{p_1(x,y,z)}=c$ є комплексною сталою.

Теорема 6.4. *Нехай вектори (6.1) задовольняють наступні умови:*
(i) виконується хоча б одна з умов: $\mathrm{Im}(n_1\overline{m}_1)\neq0$ *або* $\mathrm{Im}(k_1\overline{m}_1)\neq0$*;*
(ii) хоча б одне з чисел у кожній трійці (m_1,n_1,k_1), (m_2,n_2,k_2) *і* (m_3,n_3,k_3) *належить* $\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$.

Нехай також однозв'язна область $\Omega \subset E_3 \subset \mathbb{A}_3$ *є опуклою в напрямку прямої*

$$L_1: \quad \begin{cases} x\,\mathrm{Re}\, m_1 + y\,\mathrm{Re}\, n_1 + z\,\mathrm{Re}\, k_1 = 0, \\ x\,\mathrm{Im}\, m_1 + y\,\mathrm{Im}\, n_1 + z\,\mathrm{Im}\, k_1 = 0. \end{cases}$$

Припустимо також, що $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ *задовольняють припущення 6.3 і* $g_1(x,y,z) \neq 0$, $f_1(x,y,z) \neq 0$, $p_1(x,y,z) \neq 0$ *в* Ω. *Тоді кожна* σ*-моногенна функція* $\Phi : \Omega \to \mathbb{A}_3$ *подається у вигляді*

$$\Phi(\zeta) = F_1(\xi_1) + \Big(F_2(\xi_1) + W(\xi_2)F_1'(\xi_1)\Big)\rho,$$

$$+\Bigg[F_3(\xi_1) + F_1'(\xi_1)\Big(-\widetilde{W}_1(\xi_2) + W_2(\xi_2) + \xi_3\Big) +$$

$$+W_3(\xi_2)F_2'(\xi_1) + \widetilde{W}_3(\xi_2)F_1''(\xi_1)\Bigg]\rho^2, \tag{6.4}$$

де F_1, F_2, F_3 *— деякі аналітичні функції комплексної змінної* $\xi_1 := xm_1 + yn_1 + zk_1$ *в області* $D_1 = \{\xi_1 \in \mathbb{C} : \zeta \in \Omega\}$, $\xi_3 := xm_3 + yn_3 + zk_3$, *а* $W(\xi_2)$ *— довільна первісна функції* $w(\xi_2)$ *в* $D_2 \subset \mathbb{C}$;
$\widetilde{W}_1(\xi_2)$ *— довільна первісна функції* $w(\xi_2)w_1(\xi_2)$ *в* D_2;
$W_2(\xi_2)$ *— довільна первісна функції* $w_2(\xi_2)$ *в* D_2;
$W_3(\xi_2)$ *довільна первісна функції* $w_3(\xi_2)$ *в* D_2;
$\widetilde{W}_3(\xi_2)$ *довільна первісна функції* $W(\xi_2)w_3(\xi_2)$ *в* D_2.

Доведення. Знайдемо загальний розв'язок системи (6.3) за припущення 6.3. За умов на вектори e_1, e_2, e_3 з першого і четвертого рівнянь системи (6.3) знаходимо

$$U_1(x,y,z) = F_1(\xi_1), \tag{6.5}$$

де F_1 — довільна аналітична функція комплексної змінної $\xi_1 := xm_1 + yn_1 + zk_1$.

Підставляючи розв'язок (6.5) в друге і п'яте рівняння системи (6.3), отримаємо систему рівнянь

$$\begin{gathered} m_1 f_1 \frac{\partial U_2}{\partial y} - n_1 f_1 \frac{\partial U_2}{\partial x} = g_1 K F_1'(\xi_1), \\ m_1 f_1 \frac{\partial U_2}{\partial z} - k_1 f_1 \frac{\partial U_2}{\partial x} = g_1 M F_1'(\xi_1), \end{gathered} \tag{6.6}$$

де $K = n_2 m_1 - m_2 n_1$, $M := k_2 m_1 - m_2 k_1$. Подібно до пункту 5.2 і аналогічно до доведення теореми 2 з [16], загальний розв'язок неоднорідної системи (6.6) має вигляд

$$U_2(x,y,z) = F_2(\xi_1) + W(\xi_2)F_1'(\xi_1), \tag{6.7}$$

де, які раніше, $W(\xi_2)$ — довільна первісна функції $w(\xi_2)$. Крім того, розв'язок (6.7) є загальним розв'язком, якщо область Ω є опуклою в напрямку прямої L_1. Зауважимо, що пряма L_1 визначається комплексним рівнянням $\xi_1 = 0$.

Тепер підставимо вирази (6.5) і (6.7) в третє і шосте рівняння системи (6.3). При цьому отримуємо систему рівнянь

$$m_1p_1\frac{\partial U_3}{\partial y} - n_1p_1\frac{\partial U_3}{\partial x} = -f_2Kw(\xi_2)F_1'(\xi_1)+$$

$$+g_2KF_1'(\xi_1) + f_1KF_2'(\xi_1) + g_1K_2F_1'(\xi_1) + f_1KW(\xi_2)F_1''(\xi_1), \tag{6.8}$$

$$m_1p_1\frac{\partial U_3}{\partial z} - k_1p_1\frac{\partial U_3}{\partial x} = -f_2Mw(\xi_2)F_1'(\xi_1)+$$

$$+g_2MF_1'(\xi_1) + f_1MF_2'(\xi_1) + g_1M_2F_1'(\xi_1) + f_1MW(\xi_2)F_1''(\xi_1),$$

де $K_2 := n_3m_1 - m_3n_1$, $M_2 := k_3m_1 - m_3k_1$. Очевидно, що розв'язком однорідної системи, що відповідає системі (6.8), є функція $\widetilde{U}_3(x, y, z) = F_3(\xi_1)$, де F_3 — аналітична функція.

Покажемо, що за припущення 6.3 функція

$$V_3(x, y, z) := F_1'(\xi_1)\left(-\widetilde{W}_1(\xi_2) + W_2(\xi_2) + \xi_3\right) +$$

$$+W_3(\xi_2)F_2'(\xi_1) + \widetilde{W}_3(\xi_2)F_1''(\xi_2) \tag{6.9}$$

є частинним розв'язком неоднорідної системи (6.8). Справді, підставляючи функцію (6.9) в перше рівняння системи (6.8), матимемо

$$m_1\Big(w_1wn_2F_1' - \widetilde{W}_1n_1F_1'' + w_2n_2F_1' + W_2n_1F_1'' + w_3n_2F_2'+$$

$$+W_3n_1F_2'' + Ww_3n_2F_1'' + \widetilde{W}_3n_1F_1''' + n_3F_1' + \xi_3n_1F_1''\Big)-$$

$$-n_1\Big(w_1wm_2F_1' - \widetilde{W}_1m_1F_1'' + w_2m_2F_1' + W_2m_1F_1'' + w_3m_2F_2'+$$

$$+W_3m_1F_2'' + Ww_3m_2F_1'' + \widetilde{W}_3m_1F_1''' + m_3F_1' + \xi_3m_1F_1''\Big) =$$

$$= -w_1wKF_1' + w_2KF_1' + w_3KF_2' + Ww_3KF_1'' + K_2F_1' \,,$$

тобто, рівняння перетворилося на тотожність. Аналогічно показується, що за припущення 6.3 функція $V_3(x, y, z)$ задовольняє друге рівняння неоднорідної системи (6.8). Таким чином, загальним розв'язком системи (6.8) є сума $\widetilde{U}_3(x, y, z) + V_3(x, y, z)$. □

Зауваження 6.5. Якщо $\sigma = 1$, тобто $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = 1$, то представлення (6.4) набуває вигляду (2.8). Відносно компонент $U_1(x, y, z)$, $U_2(x, y, z)$ функції Φ див. зауваження 5.4. Розглянемо третю компоненту $U_3(x, y, z)$. Дійсно, у цьому випадку $w_1 = w_2 = 0$, тому $\widetilde{W}_1 = W_2 = 0$; $w_3 = 1$, і відповідно $W_3 = \xi_2$, $\widetilde{W}_3 = \frac{\xi_2^2}{2}$; $w_4 = 1$, тому $W_4 = \xi_3$. Таким чином, для $U_3(x, y, z)$ маємо:

$$U_3(x, y, z) = F_3(\xi_1) + \xi_2 F_2'(\xi_1) + \xi_3 F_1'(\xi_1) + \frac{\xi_2^2}{2} F_1''(\xi_1),$$

що і треба було показати.

Зауваження 6.6. Легко переконатися, що при $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 \neq 1$ представлення (6.4) набуває вигляду (2.8).

7. Застосування σ-моногенних функцій до представлення розв'язків деяких лінійних диференціальних рівнянь з частинними похідними

Розглянемо наступну задачу.

Задача 7.1. Знайти пару e_1, e_2 і знайти $\sigma \in \mathbb{B} \times \mathbb{B}$ такі, що кожна σ-моногенна функція в $\mathbb{B}$ задовольняє бігармонічне рівняння

$$\Delta^2 U(u, y) := \frac{\partial^4 U}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 U}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 U}{\partial y^4} = 0. \tag{7.1}$$

Розв'язок поставленої задачі шукатимемо у вигляді (5.3). Оскільки рівняння лінійне, то кожна компонента функції (5.3) має задовольняти рівняння (7.1). Перша компонента представлення (5.3) задовольняє (7.1), якщо

$$m_1^2 + n_1^2 = 0. \tag{7.2}$$

Тепер підставимо другу компоненту з представлення (5.3) в (7.1). Отримаємо рівність

$$F_2^{(5)}(m_1^2 + n_1^2)^2 + F_1'' W^{(4)}(m_2^2 + n_2^2)^2 + 4F_1''' W'''(m_2^2 + n_2^2)(m_1 m_2 + n_1 n_2) +$$
$$+ 4F_1^{(4)} W''(m_1 m_2 + n_1 n_2)^2 + 4F_1^{(5)} W'(m_1 m_2 + n_1 n_2)(m_1^2 + n_1^2) +$$
$$+ F_1^{(6)} W(m_1^2 + n_1^2)^2 = 0. \tag{7.3}$$

Нехай m_2, n_2 такі, що

$$m_2^2 + n_2^2 = 0. \tag{7.4}$$

Зауважимо, що при умовах (7.2), (7.4) вектори $e_1 = m_1 + m_2\rho$, $e_2 = n_1 + n_2\rho$ задовольняють характеристичне рівняння

$$(e_1^2 + e_2^2)^2 = 0.$$

Очевидно, що при умовах (7.2), (7.4) рівність (7.3) набуває вигляду

$$F_1^{(4)}W''(m_1m_2+n_1n_2)^2=0. \tag{7.5}$$

З рівностей (7.2), (7.4) отримуємо $n_1=\pm im_1$, $n_2=\pm im_2$, де знаки $+,-$ вибираються довільним чином. Якщо знаки вибрати однакові, то ми отримаємо $e_2=\pm e_1$, тобто, вектори e_1,e_2 лінійно залежні. Отже, надалі покладаємо

$$n_1=im_1, \qquad n_2=-im_2\,. \tag{7.6}$$

При умовах (7.6), рівність (7.5) набуває вигляду

$$F_1^{(4)}W''m_1^2m_2^2=0. \tag{7.7}$$

Оскільки $m_1\neq 0$, $m_2\neq 0$ і функція $F_1(\xi_1)$ довільна, то рівняння (7.7) рівносильне рівнянню $W''(\xi_2)=0$, звідки $W(\xi_2)=\xi_2$.

Таким чином, маємо $e_1=m_1+m_2\rho$, $e_2=im_1-im_2\rho$, $\xi_1=xm_1+iym_1$, $\xi_2=xm_2-iym_2$, де m_1,m_2 — довільні комплексні числа. Перепозначаючи $z:=\frac{\xi_1}{m_1}$, $\bar z:=\frac{\xi_2}{m_2}$, представлення (5.3) набуває вигляду

$$\Phi(\zeta)=F_1(z)+\Big(F_2(z)+\bar zF_1'(z)\Big)\rho.$$

Отже, кожна σ-моногенна функція задовольняє рівняння (7.1) для кожного $\sigma=(\sigma_1,\sigma_2)$ при $\sigma_1=g_1(x,y)$, $\sigma_2=f_1(x,y)$ таких, що $\frac{g_1}{f_1}=\xi_2$. Більше того, друга компонента співпадає з добре відомою формулою Гурса загального розв'язку бігармонічного рівняння (7.1).

Література

[1] A. K. Bakhtin. A generalization of some results in the theory of univalent functions on a multi-dimensional complex space (russian). *Reports of the NAS of Ukraine*, (3):7–11, 2011.

[2] A. K. Bakhtin. Analytic functions of vector argument and partially conformal mappings in multidimensional complex spaces (russian). *Reports of the NAS of Ukraine*, (2):13–18, 2012.

[3] L. Bers. Theory of pseudo-analytic functions. *Lecture notes, New York University*, 1953.

[4] L. Bers, A. Gelbart. On a class of differential equations in mechanics of continua. *Quarterly of Applied Mathematics*, 1:168–188, 1943.

[5] E. Cartan. Les groupes bilinéares et les systèmes de nombres complexes. *Annales de la faculté des sciences de Toulouse*, 12(1):1–64, 1898.

[6] S. V. Grishchuk, S. A. Plaksa. Monogenic functions in a biharmonic algebra. *Ukr. Math. J.*, 61(12):1865–1876, 2009.

[7] V. V. Kravchenko. Applied pseudoanalytic function theory. *Series: Frontiers in Mathematics, Basel: Birkhäuser*, 2008.

[8] E. R. Lorch. The theory of analytic function in normed abelin vector rings. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 54:414–425, 1943.

[9] M. E. Luna-Elizarraras, M. Shapiro, D. C. Struppa, A. Vajiac. Bicomplex holomorphic functions: the algebra, geometry and analysis of bicomplex numbers. *Springer*, 2015.

[10] H. Malonek. Generalizing the (f, g)-derivative in the sense of bers. *In: Clifford Algebras and Their Application in Mathematical Physics, Dordrecht: Kluwer Academic Publishers*, pages 247–257, 1996.

[11] I. P. Mel'nichenko. The representation of harmonic mappings by monogenic functions. *Ukr. Math. J.*, 27(5):499–505, 1975.

[12] E. Picard. Sur une généralization des équations de la théorie des functions d'une variable complex. *C.R. Acad. Sci. Paris*, 112:1399–140, 1891.

[13] E. Picard. Sur une système des équations aux dérivées partielles. *C.R. Acad. Sci. Paris*, 112:685–688, 1891.

[14] S. A. Plaksa, R. P. Pukhtaievych. Constructive description of monogenic functions in n-dimensional semi-simple algebra. *An. Şt. Univ. Ovidius Constanţa*, 22(1):221–235, 2014.

[15] S. A. Plaksa, V. S. Shpakivskyi. Cauchy theorem for a surface integral in commutative algebras. *Complex Variables and Elliptic Equations*, 59(1):110–119, 2014.

[16] S. A. Plaksa, V. S. Shpakovskii. Constructive description of monogenic functions in a harmonic algebra of the third rank. *Ukr. Math. J.*, 62(8):1251–1266, 2011.

[17] G. N. Polozhii. On p-analytic functions of a complex variable. *C. R. (Doklady) Acad. Sci. URSS*, 58:1275–1278(Russian), 1947.

[18] G. N. Polozhii. On the question of (p, q)-analytic functions of a complex variable and their applications. *Revue de Math. pures et appl. Acad. de la Rep. pop. Roumaine*, 2:331–361(Russian), 1957.

[19] G. N. Polozhii. The theory and application of p-analytic and and (p, q)-analytic functions. generalizations of the theory of analytic functions of a complex variable. 2nd ed. (russian). *Naukova Dumka, Kyiv*, 1973.

[20] D. Rochon. On a relation of bicomplex pseudoanalytic function theory to the complexified stationary schrödinger equation. *Complex Variables and Elliptic Equations*, 53(6):501–521, 2008.

[21] M. N. Roşculeţ. Functii monogene pe algebre comutative. *Acad. Rep. Soc. Romania, Bucuresti*, 1975.

[22] V. S. Shpakivskyi. Integral theorems for monogenic functions in commutative algebras. *Zb. Pr. Inst. Mat. NAN Ukr.*, 12(4):313–328, 2015.

[23] V. S. Shpakivskyi. Monogenic functions in finite-dimensional commutative associative algebras. *Zb. Pr. Inst. Mat. NAN Ukr.*, 12(3):251–268, 2015.

[24] V. S. Shpakivskyi. Constructive description of monogenic functions in a finite-dimensional commutative associative algebra. *Adv. Pure Appl. Math.*, 7(1):63–75, 2016.

[25] V. S. Shpakivskyi. Curvilinear integral theorems for monogenic functions in commutative associative algebras. *Advances in Applied Clifford Algebras*, 26(1):417–434, 2016.

[26] V. S. Shpakivskyi. Hypercomplex method for solving linear partial differential equations (in ukrainian). *Proc. of the Inst. Appl. Math. Mech. NAS Ukraine*, 32:147–168, 2018.

[27] V. S. Shpakivskyi. On monogenic functions on extensions of commutative algebra (ukrainian). *Proceedings of the International Geometry Center*, 11(3):1–18, 2018.

[28] V. S. Shpakivskyi. On monogenic functions defined in different commutative algebras. *J. Math. Sci. (USA)*, 239(1):92–109, 2019.

[29] G. P. Tolstov. On curvilinear and iterated integrals. *Tr. Mat. Inst. Akad. Nauk SSSR*, 35, 1950.

[30] I. N. Vekua. Generalized analytic functions. 2nd ed., pergamon press; addison-wesley publishing co., inc., reading, mass. 1988.

[31] N. Virchenko, O. Ovcharenko. The main properties of q-functions. *Research Bulletin of the Nationat Technical University of Ukraine Kyiv Pilitechnic Institute*, (4):32–38, 2017.

В. С. Шпаківський

Інститут математики НАН України

Email: `shpakivskyi86@gmail.com`

ORCID: `orcid.org/0000-0003-4256-8975`

ЗМІСТ

Наукове видання

Комплексний аналіз та його застосування

Збірник праць Інституту математики НАН України

2022, Т. 19, № 1

Complex analysis and its applications

Proceedings of the Institute of Mathematics of NAS of Ukraine

2022, V. 19, No. 1

Комп'ютерна верстка та підготовка оригінал-макету
Т. М. Осіпчук.

Друк: підприємець Голіней О. М.
м. Івано-Франківськ, вул. Галицька, 128
тел. +38(066) 481-66-01, +38(050) 540-30-64
email: gsm1502@ukr.net
папір офсетний, друк цифровий
формат 70x100/16, ум. друк. 15 арк.
Зам. № 28 від 18.08.2023, наклад 70 прим.

Бахтін Олександр Костянтинович

(1948 – 2021)

Відомий спеціаліст з геометричної теорії функцій комплексної змінної. Розробив нові підходи і методи для вивчення задач про екстремальне розбиття комплексної площини, завдяки яким отримано ефективні оцінки зверху добутків внутрішніх радіусів областей, що взаємно не перетинаються, як з фіксованими, так і з вільними полюсами відповідних квадратичних диференціалів.

Збірник містить роботи, що стосуються сучасних питань комплексного аналізу та його застосувань. Присвячений пам’яті професора Олександра Бахтіна.

ISSN 1815-2910