Національна академія наук України
Інститут математики НАН України

Збірник праць
Інституту математики НАН України

Сучасні проблеми математики та її застосувань

III

Київ - 2023

НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ НАУК
УКРАЇНИ

ІНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

Сучасні проблеми математики та її застосувань III

Київ – 2023

НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ НАУК УКРАЇНИ
ІНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

Збірник праць Інституту математики НАН України

Том 20, № 1

Сучасні проблеми математики та її застосувань III

Modern problems of mathematics and its applications III

УДК 51-7; 510; 512; 514; 517; 519.2; 519.6

Сучасні проблеми математики та її застосувань III

Відп. ред. *В. І. Герасименко*, *Ю. А. Дрозд*, *С. І. Максименко.*
Зб. праць Ін-ту математики НАН України. Т. 20, № 1.
Київ: Ін-т математики НАН України, 2023. – 272 с.

ISSN 1815–2910

Збірник праць містить лекції Ґравевських читань та праці з актуальних напрямів розвитку сучасної математики в Україні, присвячені 160-річчю професора Дмитра Олександровича Ґраве.

Для наукових співробітників, викладачів закладів вищої освіти, докторантів та аспірантів.

The collection of works contains lectures by Grave's readings and works of advanced trends in the development of modern mathematics in Ukraine, dedicated to the 160th anniversary of Professor Dmytro Oleksandrovych Grave.

For researchers, university professors, docrotants and graduate students.

Видавнича група збірника:

В. І. Герасименко, доктор фіз.-мат. наук, професор (відп. ред.)

Ю. А. Дрозд, член-кореспондент НАН України, доктор фіз.-мат. наук, професор (відп. ред.),

С. І. Максименко, член-кореспондент НАН України, доктор фіз.-мат. наук, професор (відп. ред.)

Рецензенти:

Самойленко. В. Г., член-кореспондент НАН України, доктор фіз.-мат. наук, професор

Солодкий. С. Г., доктор фіз.-мат. наук, старший науковий співробітник

Затверджено до друку Вченою радою Інституту математики НАН України, протокол № 5 від 20.06.2023 р.

Свідоцтво про державну реєстрацію – серія КВ №8459 від 19.02.2004 р.

ДМИТРО ОЛЕКСАНДРОВИЧ ҐРАВЕ

(6 вересня 1863, Кирилів - 19 грудня 1939, Київ)

ЗМІСТ ЧАСТИНИ I

ЗМІСТ ЧАСТИНИ II

ЗМІСТ ЧАСТИНИ III

Збірник праць Ін-ту математики НАН України (2023) т. 20, №1, 685–697

CLX років від дня народження академіка Д. О. Ґраве

В. І. Герасименко, С. І. Максименко

Abstract. On the occasion of the 160th anniversary of the birth of academician D. O. Grave, this foreword contains some biographical facts from the life and work of the outstanding scientist. In general, this volume of the Proceedings of the Institute of Mathematics, a periodical founded in 1938 by academician D. O. Grave, contains lectures of Grave's readings and works on topical directions of development of modern mathematics in Ukraine.

Анотація. З нагоди 160-річчя від дня народження академіка Д. О. Ґраве у цьому передньому слові наведено деякі біографічні факти з життя та творчості видатного Вченого. Загалом цей том Праць Інституту математики, періодичного видання, заснованого в 1938 р. академіком Д. О. Ґраве, містить лекції Ґравевських читань та праці з актуальних напрямів розвитку сучасної математики в Україні.

Еволюція Математики дивовижна, наповнена блискавичними та несподіваними поворотами в її історії, які назавжди змінювали напрями розвитку людства. До когорти Вчених, які відіграли значну роль в розвитку математики за останні 450 років, також належить Дмитро Олександрович Ґраве.

Дух творця безумовно зароджується в родині й, отже на усвідомлення мрій та своєї місії в житті безпосередній вплив мають батьки. Дмитро Ґраве народився 20 серпня 1863 року у місті Кирилові на Новгородщині у будинку родини губернського секретаря Олександра Івановича та його дружини Надії Іванівні (Макшеєвої), обоє православних. Рід Ґраве бере свій початок з Бельгії. У той час будинок, де мешкала родина, знаходився у передмісті на березі затоки Сіверського озера. Початкову освіту Дмитро отримав від матері, а пізніше почав відвідувати народну школу. Коли йому виповнилось сім років помер батько від поранення на дуелі. Ця трагедія змусила матір з Дмитром і двома доньками переїхати жити до родичів батька у Петербург.

Крім цих відомостей про той період життя Дмитра збереглися лише нечисленні свідчення, які дозволяють скласти деякі уявлення про

2020 Mathematics Subject Classification: 01A70; 01A74; 01A72; 01A90; 01A67

Ключові слова: 160-річчя від дня народження Д. О. Ґраве; Ґравевські читання; Математичний інститут УАН

DOI: http://dx.doi.org/10.3842/trim.v20n1.525

розвиток його духу. Мабуть, у вихованні дітей основна допомога походила від старшого брата батька – Володимира Івановича Ґраве, який на той час був видатним інженером шляхів сполучень. Цей вплив відомий завдяки теплим спогадам Д. О. Ґраве, в яких він аналізував творчість свого дядьки. Велика таїна народження Вченого...

У 1873 році Дмитро починає відвідувати приватну гімназію, яка на той час вважалася однією з найкращих в Петербурзі. Блискучі здібності юнака дозволили йому з легкістю засвоїти основи наук, які викладалися в гімназії, зокрема, латинську та давньогрецьку мови, класичну літературу і математику. У ці роки він отримав добру музичну освіту, чудово грав на скрипці та фортепіано. У старших класах гімназії він займаючись самоосвітою, відкрив для себе праці П. А. Гольбаха «Система природи» (вперше опублікована у 1770 році). Дмитро тоді зрозумів, що саме його приваблює: «дух», «світовий розум», небесні світила, вчення Кеплера, світогляд Ньютона...Відповідно до розуму впорядкований план всесвіту, розум розкриває перед людиною її призначення, незмінну мету її життя. І мабуть, це й визначило подальший напрям його інтересів та устремлінь. Велика таїна народження Вченого...У випускному атестаті за 1881 рік разом із золотою медаллю було зазначено: «...допитливість виявляв особливо у заняттях давніми мовами та науками фізико-математичними».

У цьому ж році Д. О. Ґраве продовжує здобувати освіту на фіз.-мат. факультеті Петербурзького університету, де, як він згадував, «*...одразу опинився в славнозвісній школі великого математика Чебишева*». Треба відзначити, що в цей період він захоплюється астрономією й працює в університетській обсерваторії разом з В. І. Вернадським. Вже тоді Д. О. Ґраве написав першу наукову працю: «Про ідеальну форму оптичного скла без сферичної аберації». В університеті серед інших вчених значущим для нього був професор О. М. Коркін, теплі дружні стосунки з яким залишилися на всі подальші роки. Велика таїна народження Вченого...

У 1885 році Дмитро Ґраве закінчує університет і був залишений на факультеті для підготовки до професорського звання. Через два роки, тобто в 1887 році, він під керівництвом професора Пафнутія Чебишова представив магістерську дисертацію «Про інтегрування частинних диференціальних рівнянь першого порядку» і здобув ступінь магістра чистої математики. У 1896 році, Д. Ґраве захищає докторську дисертацію «Про основні задачі математичної теорії побудови географічних карт» і стає доктором чистої математики.

Протягом минулих поколінь біографія Д. О. Ґраве була неодноразово викладена в різноманітній інтерпретації. Зазвичай біографії пишуться під впливом внутрішньої, тобто особистої цензури, та зовнішньої – традицій прийнятих тогочасною епохою та політичними обмеженнями. Наведемо джерела про життєвий шлях Д. О. Ґраве, які згідно з теперішніми уявленнями є найбільш об'єктивними:

– автобіографія написана самим вченим [1], яка, мабуть, писалась з думками про те, як його мали б сприймати наступні покоління;
– монографія [3] відомих учнів вченого опубліковану у той час, коли Д. О. Ґраве відійшов у засвіти, зокрема, в ній наведено перелік всіх праць вченого;
– книги за архівними матеріалами [2], яка опублікована вже в сучасній Україні;
– а також нарис авторів з нагоди 100-річчя Математичного інституту Української академії наук [4].

Отже, не відтворюючи добре відомі факти життєвого шляху вченого, нагадаємо лише про його основний історичний спадок.

У наш час про вченого найкраще згадувати по сяйву його творчості, яке не меркне вже упродовж чотирьох поколінь, і яке, як світло далеких зірок, захоплює нас і надихає. Зазвичай обдарована людина має таланти в різних вимірах. Так й Д. О. Ґраве був обдарованим не лише в царині Науки (математика, механіка, математична фізика), а і як архітектор наукових інституцій (наукова школа, Академія наук, наукові товариства, Інститут математики), та як Вчитель-провідник (професор університетів, один з засновників української вищої освіти).

Найбільш плідний період творчості Д. О. Ґраве пов'язаний з Києвом. В перші десятиліття XX ст. завдяки насамперед науковій школі Д. О. Ґраве Київ став колискою тогочасної математики, яка поширилась у минулому сторіччі що найменше на територію Східної Європи. Можна стверджувати, що вічне місто Київ сприяло у творчості та натхненні не лише поетам і художникам, а й вченим. Краса Дніпра (Славутича(Борисфена)) завжди привертала увагу та надихала письменників, літописців та мандрівників. Краса породжує красу й в інших вимірах людського життя, зокрема, в математиці, як любові до пізнання.

Як створюються наукові школи?

Ще під час навчання в університеті Дмитро Ґраве організував Наукове студентське математичне товариство. Вже тоді він зрозумів, що підготовка молодих вчених має відбуватись не в процесі навчання, а в під час творчої роботи. Десь з 1908 року розпочинає свою роботу науковий семінар під керівництвом професора Д. О. Ґраве в Києві, засідання якого відбуваються як в університеті, так й у нього вдома. Він зумів організувати наукову роботу зі студентами, які брали участь у семінарі, вже з перших років їх навчання в університеті.

За студентськими спогадами Б. М. Делоне професор Д. О. Ґраве на лекціях висловлював свої думки про заняття наукою: «*Справжні вчені зазвичай присвячують науці все своє життя, і згадавши Бруно та Галілея, він закінчував словами про те, що вчені часто готові навіть саме життя віддати за свої наукові переконання*». Ставлення Д. О. Ґраве до освіти, мабуть, можна пояснити усвідомленням ним відомого вже п'ять тисячоліть одного з трьох найбільших гріхів – псуванням молоді нікчемною освітою.

Серед вчених Д. О. Ґраве був тим, хто намагався пробудити в людях гідність – не чуже їм, а те, яке слід було шукати у себе, у своїй справжній сутності, – не у своєму походженні, не в прагненні до блаженства, не в тому, щоб перебувати на службі у всіма шанованій людині, а в турботі про даровану їм іскру людського духу, і свідчити про те, що вони у високому розумінні походять від природи. Удосконалення розуму – єдине джерело істини, і Д. О. Ґраве бачив у ньому не рідкісну, властиву тільки йому здатність, а те, що можуть відкрити у себе всі люди. Для Д. О. Ґраве математика була неперевершеним витвором людського духу.

Науковий семінар Д. О. Ґраве пройшов довгий шлях розвитку. У 20-ті роки на науковому семінарі обговорювались, наприклад, такі теми: «Класична гідродинаміка», «Механічна теорія ефіру», «Теорія електрики Максвелла», «Механіка Герца», «Теорія Айнштейна», «Квантова механіка», «Механіка молекулярної будови речовин».

Зрештою, у становленні першої великої математичної школи на теренах України вирішальну роль мала діяльність семінару професора Д. О. Ґраве.

Без вольностей Вченого, принаймні внутрішніх, не буває справжньої творчості. Прагнення до свободи – одне з найсильніших людських почуттів. Зі свободою людина пов'язує здійснення своїх планів і бажань, можливість з власної волі обирати життєві цілі та шляхи їх досягнення. Так всупереч консервативним традиціям в освіті професор Д. О. Ґраве запроваджував нові математичні курси, був у постійних пошуках нетрадиційних шляхів підготовки майбутніх вчених.

Прагнучи залишити при університеті для творчої роботи винятково велике число студентів, йому неодноразово доводилося бути наполегливим у боротьбі, обстоюючи інтереси своїх учнів, які не завжди задовольняли необхідним формальним вимогам. Наведемо деякі показові історії про долі його учнів.

Нагадаємо, що М. М. Боголюбов був одним з учнів Д. О. Ґраве, завдяки якому він став видатним вченим у галузі математичної та теоретичної фізики. Відомо, що в 1922 р. у віці тринадцяти років Микола Боголюбов стає учасником математичного семінару Д. О. Ґраве. У 1925 р. на прохання професора Д. О. Ґраве Мала Президія Укрголовнауки ухвалила: «Зважаючи на його феноменальні здібності до математики, вважати М. Боголюбова аспірантом науково-дослідної кафедри математики в Києві з червня 1925 року», а вже в 1928 році він захистив докторську дисертацію. До речі, цей історичний прецедент переконливо ілюструє значення наукової школи для розвитку математики.

Талант Олександра Островського у віці п'ятнадцяти років не залишився непоміченим професором Д. О. Ґраве, який згадував про таке. Йому треба було скласти екзамен на атестат зрілості екстерном при навчальному окрузі, проте в той рік екстернів взагалі не було, а я все ж особисто написав листа опікуну навчального округу з проханням допустити Островського до екзаменів, але той відмовив, і мені довелося порадити молодому вченом залишити країну. Я написав Ландау в Ґеттінґен і Хенселя в Марбург листи, в яких повідомив усі відомості про Островського. За два тижні отримав від обох відповіді. Обидва повідомляли, що Островський зарахований, тобто і в Ґеттінґенський, і в Марбурзький університети. І тут я порадив Островському вступити до Марбурзького університету, говорячи, що Ґеттінґен – це Світові Афіни у математиці, куди їдуть люди зі всього світу. «*Ви – талановита людина, – сказав я Островському, – і Вам не важливо мати гарних вчителів, тоді як Марбург – мальовниче провінційне містечко, життя там дешевше, а Хенсель людина добра, буде ставитися до Вас доброзичливо. В Ґеттінґен Ви можете поїхати після закінчення університету, для подальших занять. Островський поїхав до Марбурга, і я з ним там бачився перед війною. Війна розкидала нас, перервала наш зв'язок, щоправда, до мене доходили чутки, що жити йому було тяжко. Проте він швидко відбувся як світовий авторитет, його всюди цитували, але все ж професури не давали. Згодом він отримав місце ординарного професора у Базелі. Це була справжня нагорода за всі його попередні муки, оскільки у віці 35 років отримав кафедру славетного Й. Бернуллі*». Зокрема, вчений став відомим завдяки теоремі про нормування поля раціональних чисел, яка тепер носить його ім'я. Газета «Базельські новини» із приводу 80-літнього ювілею О. М. Островського писала: «*Наша вища школа в XVIII ст. втратила, віддавши знаменитого математика Леонарда Ейлера, тому, що в Базелі доля виявилася проти нього; але університету трапилася вдала нагода придбати Олександра Марковича Островського, який походить з Києва*». У свій час заснований ним фонд Островського, метою якого є популяризація математичних наук, кожні два роки присуджує премію О. М. Островського за найкращу математичну роботу за новітні видатні досягнення в чистій математиці.

Згадаємо, ще одного відомого учня Д. О. Ґраве на тлі подій переїзду столиці України з Харкова до Києва у 1934 року, а саме, народження київського університету. Як відомо Київський університет св. Володимира, в якому працював професором Д. О. Ґраве, було ліквідовано у 1920 році. Щоб відчути настрої того часу наведемо уривок з газетної хроніки. Київська газета «Пролетарська правда» (з 1943 р. «Київська правда») 28 грудня 1934 року писала: «*Важко передати ту теплоту і радість, що затопила величезну актову залу, ту саму, де Отто Юлійович захищав свого часу дипломну роботу.*

– Ми носимо ваше ім'я, Отто Юлійовичу – говорить у своєму вступному слові ректор університету тов. Сахновський. – Обіцяємо вам битися за те, щоб ваше ім'я носити з честю.

Старий учитель Отто Юлійовича - академік Д. О. Ґраве поділився з аудиторією своїми спогадами про О. Ю. Шмідта, коли той був студентом університету.

– Ще до закінчення університету, – каже академік Ґраве, – Отто Юлійович зробив математичний винахід по теорії груп. Цей винахід вже тоді зробив його відомим серед іноземних вчених.

…Особливо тепло говорить О. Ю. Шмідт про привітання своїх старих учителів – акад. Д. О. Ґраве, професора Букреєва.

…Цей університет носить тепер славне ім'я О. Ю. Шмідта.»

Нагадаємо, що перу О. Ю. Шмідта належить перша у світі монографія з теорії груп, яка побачила світ в Києві у 1916 році.

Зрозуміло, наукові школи є носіями найкращих традицій у розвитку науки і вони з часом набувають духовного значення.

Наукові школи не вмирають!

Реалізація світогляду закладеному в молоді роки в подальшій творчості вченого проявилася в натурфілософії професора Д. О. Ґраве. Вона за його словами полягала в наступному: «*…той внутрішній світ ідей, які ми будуємо, повинен бути не чим іншим, як сукупністю математичних теорій всіх явищ природи. Натуральну філософію я* *розумів у англійському сенсі слова, як механіку і математичну фізику...»*

Не будемо зупинятися на науковому набутку вченого оскільки про нього неперевершено написано його учнем М. Г. Чеботарьовим в збірнику пам'яті академіка Д. О. Ґраве [3]. Деякі його відомі праці з алгебри, математичної фізики, механіки та інших галузей математики увійшли до зібрання вибраних праць Д. О. Ґраве [5], опублікованого в наш час.

Книги є тим надбанням людства, яке не розчиняються в історії цивілізацій, і вони досі залишаються не перевершеним винаходом людства у передачі мудрості від одного поколіннями до іншого. Нижче наведено перелік монографій Д. О. Ґраве: [2, 3, 5–7, 14, 15, 20, 23–25, 30] серед них безсумнівний шедевр «Энциклопедія математики. Очеркъ ея современнаго положенія» [3].

Відомо, що навчальні курси та підручники користувалися заслуженою популярністю серед студентів. У той час вони відіграли значну роль у поширенні математичної знань, завдяки їм зросли цілі покоління не лише вчених, а й педагогів та інженерів. Ось доробок вченого в педагогічній царині: [1, 4, 9, 11, 12, 16–19, 21, 22, 26–29].

Особливе місце серед праць Д. О. Ґраве займають його науково-популярні нариси: [8, 10, 13].

Популярний нарис «Як влаштований Всесвіт» [8] було прочитано через сто років, як він побачив світ, учасниками міжнародної наукової конференції «Алгебраїчні і геометричні методи аналізу» присвяченої ювілею Д. О. Ґраве. У цій праці фактично було викладено мрії молодості вченого, його погляд на розвиток науки й, отже на еволюцію знань людства, прагнення заглянути в завтрашній день. Присутні учасники засідання завдяки цьому твору Д. О. Ґраве, мали можливість побачити і оцінити той шлях, який пройшла наука з того часу.

У 1935 р. на урочистостях з нагоди 50-річчя науково-педагогічної діяльності професора Д. О. Ґраве ювіляр зазначив: «*Я займаюся найрізноманітнішими теоріями математики та смію сказати: менш як сто років жити не бажаю. Чому? Ми входимо до золотого віку науки!*»

Книги написані Д. О. Ґраве, маючи більш ніж вікову історію, залишаються витворами педагогічної майстерності й в наш час перетворилися в оберіг математичної культури, а з символами в оберегах, як відомо, люди завжди пов'язували віру в добро, успіх, щастя.

На превеликий жаль, із задуманих 17 томів «Трактату з алгебраїчного аналізу» Дмитро Олександрович встиг опублікувати лише перших два томи [23, 30] ([24, 25]), третій том у видавництві АН УРСР було «загублено»...

Відомо, про мемуар «Нові основи філософії», який було подано до УАН та «утрачено». Термін «філософія» в мемуарі вживався в первинному сенсі цього слова, що в перекладі з давньогрецької означає любов до мудрості.

Не можна також не згадати в ці дні про заснування Д. О. Ґраве перших в Україні математичних періодичних видань: «Журнал математичного циклу Всеукраїнської Академії наук» (1931 р.), «Журнал Інституту математики Всеукраїнської Академії наук» (1934 р.), «Збірник праць Інституту математики АН УРСР» (1938 р.), завдяки яким поширюються здобуті знання і в теперішній час.

На зламі політичного устрою життя в Києві Д. О. Ґраве відіграв видатну роль як архітектор новітніх наукових і освітніх інституцій.

На початку 1920 року при секції природознавства Українського наукового товариства ім. Т. Г. Шевченка професором Д. О. Ґраве була створена математична підсекція. Її діяльність була спрямована на наукову роботу у формі доповідей на засіданнях та на виданні власного друкованого органу оскільки на той час в Україні не було математичних видань українською мовою. Навесні наступного року Українське наукове товариство було приєднано до УАН, але славні традиції закладені великими математиками при його створенні зберігаються і наш час в роботі Київського математичного товариства.

Д. О. Ґраве був одним з натхненників створення та організації Української Академії наук. Голова-Президент УАН у Київі академік В. І. Вернадський та професор Д. О. Ґраве – важливо було увільнити вченого від перевантаження обов'язками викладача навчального закладу, у тому разі, якщо він виявив здатність рухати науку вперед: «*Академія повинна складатися з об'єднання вчених людей, які отримують кошти від держави і віддаються науці і дослідницькій роботі, як справі свого життя, визнаної державою за державно важливу*».

У липні 1918 року Д. О. Ґраве за дорученням побратима В. І. Вернадського був залучений до підкомісії з організації фізико-математичного відділення УАН. «...УАН мала сприяти створенню дослідницьких інститутів в усіх галузях людських знань». Права Д. О. Ґраве, як дійсного члена УАН: лютий 1919 року -– дійсний член постійно комісії зі складання біографічного словника українських діячів, з падолиста 1918 року академік С. П. Тимошенко заснував Інститут технічної механіки, який з падолиста 1919 року до кінця 1921 року очолював Д. О. Ґраве. Протягом свого життя Д. О. Ґраве залишався жити і натхненно працював у Києві, попри соціальні потрясіння. За тогочасних обставин багато хто прагнув кращих місць проживання, але велетні духу не втікали від реальності, а докладали зусиль для впливу на розвиток подій у сприятливому для науки напрямі.

«*Утворення Української Академії наук має величезне національне значення, бо й досі є багато людей, які скептично і з насмішкою ставиться до українського руху та відродження, не вважають можливим розвиток української мови та науки. Для тих же, хто вірить, для кого відродження його, се – "святая святих", для тих утворення Академії наук має величезну вагу, є національною потребою*», Міністр народної освіти та мистецтва, співзасновник Академії наук М. Василенко.

У березні 2020 року виповнилось 100 років від часу заснування академіком Д. О. Ґраве Математичного інституту Української Академії наук (УАН). Про цю історичну подію та погляд на постать Вченого в тогочасних складних історичних обставинах представлено в І томі цієї колективної монографії [4].

Нагадаємо лише, що математична інституція у складі Української академії наук народилась за таких подій. У лютому 1920 року Загальні збори УАН постановили: обрати професора Д. О. Ґраве членом УАН на чергових Загальних зборах 8 березня 1920 року Професора Д. О. Ґраве обрали одноголосно на кафедру чистої математики з дорученням якнайшвидше організувати Математичний інститут УАН, який і «було засновано в той самий час без зволікання».

Треба наголосити, що математична інституція створена академіком Д. О. Ґраве гідно тримає випробування і в наш час, пройшовши непростий шлях – від невеликого колективу вчених-однодумців до всесвітньо відомої наукової установи.

Відома видатна роль професора Д. О. Ґраве в створенні природничо-математичного факультету Київського державного українського університету, який було урочисто відкрито 6 вересня 1918 року, в той рік 22 жовтня також святково було відкрито Кам'янець-Подільський державний український університет.

Урочисте відкриття Київського державного університету відбулось у неділю 6 жовтня. Після урочистого молебню гетьман Скоропадський оголошує жалувану грамоту, яку зустріли вигуки «Слава!» У своїй промові Скоропадський зазначив, що цього урочистого дня слід згадати гетьманів Сагайдачного, Хмельницького, Дорошенка, Виговського, які думали про розвиток освіти українського народу. «*Я обіцяю всіма силами підтримувати освітню справу і докладу всіх сил, щоб українські університети були справді найвищими осередками науки для блага нашого народу…Цього дня…закликаю вас стати на варті правдивої* *свободи, доброї долі нашої улюбленої України*». Від імені Української національної спілки слово було надано В. Винниченку. «*...Понині ми не мали своєї школи, а нація без школи - не нація, а етнографічний матеріал, яким ми були стільки століть...національний союз вітає вас із цим великим днем і кличе вас до боротьби за всі права нашого народу. Слава первоцвіту української науки – українському університету! Слава першій родині професорів та студентів цього університету! Слава українському народу, який став на захист своїх національних прав*».

Тогочасні суспільні процеси були тісно пов'язані з багатовіковою історією української культури. Варто також нагадати, що лише у той час науковцям надали право захищати дисертації українською мовою.

Значна вага також належить професору Д. О. Ґраве в організації Таврійського університету (університету-здравниці), який почав свою роботу у травні 1918 року в Криму.

Як відомо, з часом нереалізовані задуми та окремі історичні події перетворюються в легенди. До таких легенд в наш час можна віднести дослідження Д. О. Ґраве з проблеми доведення теореми Ферма та спроби організувати історичні дослідження та переклад середньовічних манускриптів арабських математиків. Плани стосовно освоєння космосу. У червні 1925 року в Києві Д. О. Ґраве разом з інженером О. Я. Федоровим (учень Д. Ґраве) була відкрита «Виставка Київського Товариства з дослідження світового простору», на якій у вітальному слові Д. О. Ґраве побажав успіху у розвитку нової галузі техніки, а саме у розвитку конструкцій міжпланетних апаратів. Професор Д. О. Ґраве – натурфілософ: *На засіданні Другого відділення Української академії наук від 13.05.1921 року було постановлено за моєю доповіддю якомога швидко влаштувати «Лабораторію експериментальних досліджень з натуральної філософії»...*

Наприкінці цього вступного слова згадується відомий вислів поета-академіка М. Т. Рильського: «*Хто не знає свого минулого, той не вартий майбутнього, хто не відає про славу своїх предків, той сам не вартий пошани*».

У наш час Київським математичним товариством за підтримки Національної академії наук України, Українського математичного товариства та Інституту математики НАН України засновано щорічну майстерню з математики – читання Дмитра Олександровича Ґраве, як одну з найпрестижніших лекцій з математики в Україні. Задум Ґравевських читань полягає в сприянні науковій спільноті усвідомити той внесок, який відіграє математика для сучасного мислення та цивілізації.

Цей том Збірника праць Інституту математики НАН України присвячено 160-річчю від дня народження професора Д. О. Ґраве. Його зміст складають лекції попередніх Ґравевських читань та праці з актуальних напрямів розвитку сучасної математики в Україні.

З метою вшанування пам'яті видатного вченого-математика, першого академіка-математика Української академії наук Дмитра Олександровича Ґраве, зважаючи на його надзвичайно великий і визнаний у світі внесок у розвиток математики й створення великої математичної школи в Україні, Президія НАН України постановила: «*Заснувати премію НАН України імені Д. О. Ґраве, яка присуджуватиметься за видатні наукові роботи в галузі математики по Відділенню математики НАН України*».

У наш час ім'я Д. О. Ґраве продовжує залишатися символом високої місії Вчених: «*Їх не повинна залишати віра в існування закладених в надрах їх розуму якостей, що дають можливість підноситися духом все вище і вище в нескінченність*». Творчість Д. О. Ґраве запалила тисячі сердець. Його нетлінні праці, дарують прийдешнім поколінням вчених дух свободи творчості.

Великому Вченому вічна слава!

Ці рядки написано в час боротьби за нашу свободу, дні з вірою у майбутнє. Слава Україні! Героям слава!

Література

[1] Д. А. Граве. Моя жизнь и научная деятельность (рукоп.) Бібл. Ін-та матем. НАН України, 1, Г-75, 40 с., 1935.

[2] В. М. Урбанский. *Дмитрий Граве и время.* Киев: Наук. думка, 1998.

[3] Н. Г. Чеботарев. Академик Дмитрий Александрович Граве (1863–1939). В: *Сборник посвященный памяти акад. Д. А. Граве.* Под ред.: О. Ю. Шмидт, Б. Н. Делоне, Н. Г. Чеботарев. М.–Л.: Госиздат тех.-теор. лит., 1940.

[4] В. І. Герасименко, Ю. А. Дрозд, С. І. Максименко. *100 років Математичного інституту УАН.* В: *Сучасні проблеми математики та її застосувань I.* Під ред.: В. І. Герасименко, Ю. А. Дрозд, С. І. Максименко. Київ: Ін-т математики НАН України, 2020. (Зб. праць Ін-ту математики НАН України. Т. 17, № 2, стор. 1-9).

[5] *Д. О. Ґраве. Вибрані праці.* Київ: Наук. думка, 1971.

Список книг Д. О. Ґраве

[1] Д. Граве. *Теорія конечныхъ группъ.* Кіевъ: Тип. Импер. ун-та св. Владиміра, 204 с., 1908.

[2] Д. Граве. *Математика страхового дѣла.* Кіевъ: Изд. книжного магазина Н. Я. Оглоблина, 87 с., 1912.

[3] Д. Граве. *Энциклопедія математики. Очеркъ ея современнаго положенія.* Кіевъ: изд. книжного магазина Н. Я. Оглоблина, 601 с., 1912.

[4] Д. Граве. *Элементарный курсъ теоріи чиселъ.* Кіевъ: Тип. Импер. ун-та св. Владиміра, 416 с., второе изд., перераб., 1913.

[5] Д. Граве. *Элементы высшей алгебры.* Кіевъ: Тип. Импер. ун-та св. Владиміра, 698 с., 1914.

[6] Д. Граве. *Начала алгебры.* Петроградъ: Изданіе К. Л. Риккера, 316 с., 1915.

[7] Д. Граве. *Теорія пенсіонныхъ кассъ.* Кіевъ: Тип. Св. Владиміра, 68 с., 1917.

[8] Д. Граве. *Как устроена вселенная. Популярный очерк.* Киев: Гос. изд. Украины, 58 с., 1923.

[9] Д. Граве. *Краткий курс математического анализа. Руководство для вузов и самообразования.* Киев: Гос. изд. Украины, 368 с., 1924.

[10] Д. Граве. *Математика для социального страхования: общедоступное изложение для неспециалистов.* Л.: Госиздат., 151 с., 1924.

[11] Д. А. Граве. *Курсъ аналитической геометріи.* С.-Петербургъ: Типографія Ю. Н. Эрлихъ, 652 с., 1893.

[12] Д. А. Граве. *Курсъ высшей алгебры, читанный проф. Граве.* Кіевъ: Тип. М. Д. Иванова, 312 с., 1903.

[13] Д. А. Граве. *Значение математики в естествознании.* Кіевъ: Тип. Импер. ун-та св. Владиміра, 17 с., 1908.

[14] Д. А. Граве. *Элементарный курсъ теории чисел.* Кіевъ: Тип. Импер. ун-та св. Владиміра, 315 с., 1909.

[15] Д. А. Граве. *Арифметическая теория алгебраических величин. Том I. Квадратичная областъ.* Кіевъ: Худож. литографія Я. К. Бенциановского, 372 с., 1910.

[16] Д. А. Граве. *Введеніе въ анализъ. Ирраціональныя числа и предѣлы.* Кіевъ: Тип. Импер. ун-та св. Владиміра, 155 с., 1910.

[17] Д. А. Граве. *Курсъ алгебраического анализа.* Кіевъ: Худож. литографія Я. К. Бенциановского, 512 с., 1910.

[18] Д. А. Граве. *Элементы теории эллиптических функций. Выпуск I.* Кіевъ: Тип. Импер. ун-та св. Владиміра, 175 с., 1910.

[19] Д. А. Граве. *Основы аналитической геометрии. Часть I. Геометрия на плоскости.* Кіевъ: кн. магазин В. А. Просяниченко, 492 с., 1911.

[20] Д. А. Граве. *Арифметическая теория алгебраических величин. Том II. Теория идеалов.* Кіевъ: Худож. литографія Я. К. Бенциановского, 132 с., 1912.

[21] Д. А. Граве. *Основы аналитической геометрии. Часть II. Геометрия в пространстве.* Кіевъ: Худож. литографія Я. К. Бенциановского, 224 с., 1913.

[22] Д. А. Граве. *Теоретическая механика на основе техники.* М.; Л.: Госиздат тех.-теор. лит., 406 с., 1932.

[23] Д. А. Граве. *Трактат з алгебрїчного аналізу, т. II. Історичний огляд.* Київ: Вид-во Ак. Наук УРСР, 339 с., 1938.

[24] Д. А. Граве. *Трактат по алгебраическому анализу, т. I. Начала науки.* Киев: Издат. Укр. Ак. Наук., 201 с., 1938.

[25] Д. А. Граве. *Трактат по алгебраическому анализу, т. II. Исторический обзор.* Киев: Издат. Укр. Ак. Наук., 411 с., 1939.

[26] Д. О. Ґраве. *Основи алґебри.* Київ: Всеукраїнський кооперативний вид. союз, 269 с., 1919.

[27] Д. О. Ґраве. *Теоретична механіка на основі техніки.* Харків: ХДУ, 394 с., 1930.

[28] Д. О. Ґраве. *Теоретична механіка на основі техніки.* 2-е вид., Харків: ХДУ, 364 с., 1932.

[29] Д. О. Ґраве. *Аналітична геометрія.* Київ: Держ. наук.-техн. вид-во України, 308 с., 1933.

[30] Д. О. Ґраве. *Трактат з алгебрїчного аналізу, т. І. Початки науки.* Київ: Вид-во Ак. Наук УРСР, 196 с., 1938.

В. І. Герасименко
Інститут математики НАН України, м. Київ
Email: gerasym@imath.kiev.ua
ORCID: 0000-0001-6100-1654

С. І. Максименко
Інститут математики НАН України, м. Київ
Email: maks@imath.kiev.ua
ORCID: 0000-0002-0062-5188

Збірник праць Ін-ту математики НАН України (2023) т. 20, №1, 698–711

Від семінару Ґраве до похідних категорій

Ю. А. Дрозд

Abstract. This article arose from my lecture at the First Grave Readings, in which I tried to trace the path that began with D. Grave's lectures and seminar at Kyiv University and led to research in the most modern branches of mathematics. Of course, I chose that one a branch of numerous directions developed by Grave's students and their scientific heirs, which is close to the Kyiv School of Theory of Representations and to my own research. The choice of material in the article is also completely subjective, and it does not pretend to be historical review. Rather, it is the memories of a participant in the events.

Анотація. Ця стаття виникла з моєї лекції на Перших Ґравевських читаннях, у якій я намагався прослідкувати шлях, що розпочався з лекцій і семінару Д. Ґраве в Київському університеті й привів до досліджень у найсучасніших галузях математики. Звичайно, я вибрав ту галузь з численних напрямків, розвинених учнями Ґраве та їх науковими спадкоємцями, яка близька до Київської школи теорії зображень і до моїх власних досліджень. Вибір матеріалу у статті також цілком суб'єктивний і вона не претендує на те, щоб бути історичним оглядом. Скоріше, це – спогади учасника подій.

Зміст

1. Початок

Ця стаття є спробою прослідкувати шлях, який пройшла одна гілка алгебричної школи, створеної Дмитром Ґраве, саме та гілка, яка

2020 Mathematics Subject Classification: 01A72,16G50,18G80
Ключові слова: group; function
DOI: http://dx.doi.org/10.3842/trim.v20n1.526

відродилася у Києві, колисці всієї цієї школи. Нагадаю, що ця школа бере початок у семінарі, який проходив у Київському університеті під керівництвом Д. Ґраве. Ось що пише про це сам Д. Ґраве у своїх «Автобіографічних записках» [1]:

«*Я вважав, що єдине правильне розуміння університету є те, що університет має бути лабораторією науки, в якій кожен професор має бути дослідником, а студент – починаючим ученим, і я вирішив у 1912–1914 роках здійснити мою ідею під виглядом семінару з алгебри і теорії чисел.*»

З семінару Ґраве вийшли такі відомі вчені, як Б. Делоне, М. Кравчук, А. Островський, М. Чеботарьов, О. Шмідт. Усі вони відзначились видатними внесками у сучасну алгебру і теорію чисел.

Слід зазначити, що перед цим Д. Ґраве провів велику роботу по підготовці підґрунтя майбутнього семінару. Починаючи з свого приїзду до Києва, він розпочав викладання сучасної алгебри. Вже у 1902–1904 роках він працює над лекціями з теорії груп, а 1908 року у Києві виходить його книга «Теория групп». У 1909 виходить «Элементарный курс теории чисел», а у 1910 та 1913 роках – двотомна «Арифметическая теория алгебраических величин» (зараз її назвали б «алгебричною теорією чисел»). Починаючи з 1911 року він регулярно публікує статті з алгебри та алгебричної теорії чисел. І останньою його великою працею став «Трактат з алгебричного аналізу». У 1938 році вийшли перші два томи. Другий з них майже повністю присвячений саме основам алгебричної теорії чисел, включаючи загальну теорію ідеалів та одиниць, алгоритм Вороного і теорію p-адичних чисел. Третій том, за планом Д. Ґраве, мав бути присвячений конкретному розгляду квадратичних полів і бінарних квадратичних форм, рядам Діріхле з теоремою про прості числа в арифметичній прогресії, символам Гільберта і геометричній теорії чисел, зокрема, роботам Г. Вороного й Б. Делоне. На жаль Дмитро Олександрович не встиг довести цю роботу до кінця.

Дослідження в галузі алгебричної теорії чисел стали справою життя Б. Делоне. Його студентська робота, удостоєна Великої Золотої медалі – «Связь между теорией идеалов и теорией Галуа», а перша опублікована робота – «Об определении алгебраической области при помощи конгруэнтностей» присвячена доведенню теореми Кронекера-Вебера про те, що довільне розширення поля раціональних чисел з абелевою групою Ґалуа вкладається у якесь поле поділу кола. Але найвидатнішими досягненнями Б. Делоне в цій галузі стали дослідження цілочисельних бінарних кубічних форм і, у зв'язку з ними, кубічних полів алгебричних чисел. Сам Борис Миколайович вважав ці роботи своїми найкращими, незважаючи на те, що надалі він вніс фундаментальний внесок у геометрію чисел та багатовимірну кристалографію. Підсумком цього циклу досліджень Б. Делоне та його учня Д. Фаддєєва стала монографія «Теория иррациональностей третьей степени» (1940 р.). Цікаво, шо у вступі, коментуючи одну з теорем, Б. Делоне згадує, що вона пов'язана з «припущенням, яке виникло з розгляду великої таблиці дискримінантів кубічних одиниць, обчисленої у 1918 році для мене за допомогою арифмометрів студентами Київського університету».

2. Цілочисельні зображення

Той напрямок, про який я буду надалі говорити, фактично походить від цієї монографії. Саме, у §15 там встановлено зв'язок між бінарними квадратичними формами

$$ax^3 + bx^2y + cxy^2 + dy^3,$$

де a, b, c, d – цілі числа, і *кубічними кільцями*, тобто кільцями цілих алгебричних чисел, які лежать у кубічних розширеннях поля раціональних чисел[1]. У 1960-ті роки Д. Фаддєєв повернувся до цього результату у зв'язку з *теорією цілочисельних зображень*. Цілочисельне зображення кільця (або групи) – це гомоморфізм у кільце цілочисельних матриць (відповідно, у групу обертовних цілочисельних матриць). Інтерес до цілочисельних зображень груп виник у зв'язку з роботами Є. Федорова і А. Шенфліса про *кристалографічні групи*, вивчення яких вимагає, зокрема, класифікації цілочисельних зображень скінченних груп. Класична теорема Жордана каже, що при фіксованій розмірності дана скінченна група має лише скінченну кількість неізоморфних (нееквівалентних) цілочисельних зображень. У 1938 році Г. Цассенгаус дав нове доведення цієї теореми [27], а його учень Ф. Дідеріксен описав зображення циклічної групи простого порядку [8]. У тій же роботі Ф. Дідеріксен доводив, що вже циклічна група порядку 4 має нескінченну кількість неізоморфних нерозкладних цілочисельних зображень (звичайно, необмежених розмірностей).

Утім, останнє твердження виявилось хибним, і у 1960 році учень Д. Фаддєєва – А. Ройтер – довів, що ця група має лише 9 нерозкладних цілочисельних зображень [47]. Перед цим З. Боревич і Д. Фаддєєв довели, виходячи з міркувань гомологічної алгебри, що нециклічна група завжди має нескінченно багато неізоморфних нерозкладних цілочисельних зображень [33]. У 1962–1964 роках у роботах С. Бермана

[1] Насправді, і тут, і нижче, де йдеться про квадратичні кільця, розглядається ширший клас кілець, а саме такі, які лежать у напівпростих алгебрах над полем раціональних чисел. Утім, основні результати від цього практично не залежать.

і П. Гудівка, А. Хеллера і І. Райнера та А. Джонса було встановлено, що скінченна група має лише скінченну кількість нерозкладних неізоморфних цілочисельних зображень тоді й лише тоді, коли кожна її силовська p-підгрупа є циклічною порядку p або p^2 [20, 21, 23, 30, 31].

На початку 1960-х років виник інтерес вже до цілочисельних зображень кілець, перш за все, кілець алгебричних чисел. У найпростішому варіанті це – задача опису цілочисельних матричних розв'язків алгебричних рівнянь. Перший крок у цьому напрямку зробили З. Боревич і Д. Фаддєєв. У 1960 році вони описали цілочисельні зображення *квадратичних кілець*, тобто кілець цілих алгебричних чисел, які лежать у квадратичних розширеннях поля раціональних чисел [34]. Виявилось, що всі ці зображення реалізуються в ідеалах кільця. Надалі цей результат узагальнили і його автори [35], і Г. Басс [4] (ці узагальнення виявились еквівалентними). Відчуваючи потребу у деяких загальних підґрунтях, Д. Фаддєєв опублікував велику роботу [49], у який виклав загальні фундаментальні поняття й факти теорії цілочисельних зображень кілець.

У тому самому випуску з'явилась і його стаття, присвячена кубічним кільцям [50]. У ній викладено зв'язок кубічних кілець та кубічних форм, а також встановлено важливий результат, що якщо I – ідеал кубічного кільця A, то для довільного простого p локалізація I_p ізоморфна або A_p, або A_p^*, де

$$A^* = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(A, \mathbb{Z})$$

– дуальний ідеал. Встановлено також, що завжди

$$I_p^2 \simeq A'_p$$

для деякого надкільця $A' \supset A$[2]. На школі 1964 р. в Ужгороді, де Д. Фаддєєв викладав ці результати, він запропонував розглянути задачу про зображення кубічних кілець, зокрема, знайти критерій того, що кубічне кільце має лише скінченну кількість неізоморфних нерозкладних цілочисельних зображень (як зараз кажуть, критерій *зображувальної скінченності*). Те, що, на відміну від квадратичних кілець, це не може бути завжди так, було більш-менш зрозуміло. У Києві саме на початку 1960-х років під керівництвом А. Ройтера сформувалася група молодих математиків, які розпочали активні дослідження з теорії цілочисельних зображень. До неї увішли В. Кириченко, С. Кругляк, Л. Назарова і я. У майбутньому саме з цієї групи вийшла Київська школа теорії зображень. У перебігу розпочатих досліджень мені вдалося знайти критерій зображувальної скінченності для кубічних кілець [37].

[2] Пізніше мені вдалося узагальнити ці результати в роботі [38].

Теорема 2.1. *Нехай* Λ *– кубічне кільце,* M *– його максимальне надкільце,* M/Λ *– пряма сума циклічних груп порядків* m *і* n *де* $m \mid n$*.* Λ *має скінченну кількість нерозкладних зображень тоді й лише тоді, коли* m *вільне від квадратів.*

Більш того, порівняно швидко А. Ройтер і я узагальнили цей результат і отримали критерій зображувальної скінченності для довільних комутативних кілець [44].

Теорема 2.2. *Нехай* M *– максимальне надкільце* Λ*,*

$$I = M/\Lambda, \qquad I' = \operatorname{rad} I.$$

Λ *має скінченну кількість нерозкладних зображень тоді й лише тоді, коли* I *має* 2 *твірних, а* I' *– циклічний* Λ*-модуль.*

Рівносильний критерій, хоча й трохи в інших термінах, отримав одночасно шведський математик Г. Якобінскі [22]. Паралельно були розроблені нові методи, що брали початок у згаданих вище роботах З. Боревіча і Д. Фаддєєва та Г. Басса, і створена теорія бассових і квазабассових кілець [41, 43]. Це дало змогу В. Кириченку і мені узагальнити критерій зображувальної скінченності на широкий клас некомутативних кілець [42]. Такі були здобутки Київської школи у теорії цілочисельних зображень на першому етапі її розвитку.

3. Ручні та дикі особливості кривих

На деякий час інтерес до теорії цілочисельних зображень, включаючи й Київську школу, дещо спав, і основні дослідження перемістилися до зображень скінченновимірних алгебр. Це було ініційовано блискучою роботою А. Ройтера, в якій він довів одну з класичних гіпотез Брауера-Тролла [48], а також роботами П. Ґабріеля [18] та Л. Назарової і А. Ройтера [45], з яких розпочалося дослідження зображень сагайдаків і частково впорядкованих множин. Відродився інтерес до теорії цілочисельних зображень значною мірою завдяки роботі Ґ.-М. Ґройеля і Г. Кноррера [19], в якій було встановлено несподівані зв'язки цієї теорії з *теорією особливостей*. Саме, у ній були розглянуті *особливості алгебричних кривих*, або, що те саме, комутативні алгебри A над кільцем формальних рядів $R = \mathbb{k}[[t]]$, і вирішувалось питання, коли така алгебра має лише скінченну кількість неізоморфних нерозкладних модулів Коена-Маколея. У даному випадку це – те саме, що зображення алгебри A над кільцем R. Звичайно, відповідь дано у роботі [44], де розглянуто загальну ситуацію одновимірних нетерових кілець, але автори не були з нею знайомі. Натомість, користуючись технікою, близькою до роботи Г. Якобінського [22], вони отримали критерій і, що особливо важливо, пов'язали його з класифікацією особливостей, розробленою В. Арнольдом [28]. Нагадаю, що В. Арнольд увів поняття *простої особливості* як такої, в достатньо малому околі якої є лише скінченна кількість нееквівалентних особливостей. Прості особливості виявились пов'язаними зі *схемами Динкіна* A_n, D_n, E_6, E_7, E_8, добре відомими з теорії груп Лі. Це – особливості плоских кривих, заданих рівняннями

$$\begin{aligned}
A_n &: \; x^2 = y^{n+1}, \\
D_n &: \; x^2 y = y^{n-1} \quad (n \geqslant 4), \\
E_6 &: \; x^3 = y^4, \\
E_7 &: \; x^3 = xy^3, \\
E_8 &: \; x^3 = y^5,
\end{aligned}$$

Результат Ґройеля і Кноррера був таким:

Теорема 3.1. *Особливість алгебричної кривої має скінченну кількість неізоморфних нерозкладних модулів Коена-Маколея тоді й лише тоді, коли вона* домінує *просту особливість (тобто є її надкільцем).*

На цей час у теорії зображень скінченновимірних алгебр з'ясувалося, що зображувально нескінченні алгебри розділяються на два істотно різні типи: *ручні* й *дикі.* Ручні алгебри – це такі, у яких нерозкладні зображення кожної даної розмірності утворюють скінченну кількість однопараметричних сімей. Дикі алгебри можуть бути охарактеризовані двома способами (які, втім, виявились рівносильними)[3]:

- (геометрично) як такі, для яких існують сім'ї неізоморфних нерозкладних зображень, що залежать від довільної кількості параметрів;
- (алгебрично) як такі, що класифікація їх зображень містить у собі класифікацію зображень довільної скінченнопородженої алгебри.

У роботі [39] я довів, що будь-яка скінченновимірна алгебра над алгебрично замкненим полем є або ручною, або дикою.

Поняття ручних і диких природно переносяться на інші класифікаційні задачі, зокрема, у теорію модулів Коена-Маколея. У 1990 р. під час семінару, організованого у Білефельді К. Рінгелем, Ґ.-М. Ґройель висунув деяку гіпотезу про зв'язок особливостей, ручних у цьому сенсі, з класифікацією Арнольда так званих *унімодальних особливостей.* Утім, на цей час у мене вже був контрприклад до його гіпотези, про що я йому й розповів. Ми вирішили детальніше вивчити цю проблему, і нам вдалося знайти критерій ручності для особливостей кривих і

[3] Формальні означення можна знайти в огляді [10].

встановити його зв'язок з класифікацією Арнольда. А саме, у цій класифікації особливу роль відіграють «*серійні однопараметричні особливості*» або *особливості типу* T_{pq}, тобто особливості плоских кривих, заданих рівнянннми

$$T_{pq} \ : \ x^p + y^q + \lambda x^2 y^2 = 0,$$

де

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} \leqslant \frac{1}{2},$$

тут $\lambda \in \Bbbk$ – деякий параметр. При $(p,q) \notin \{(4,4),(3,6)\}$ цей параметр ролі не відіграє: всі його значення, крім забороненого $\lambda = 0$, дають ізоморфні особливості. При $(p,q) \in \{(4,4),(3,3)\}$ це вже не так. Забороненими тут є значення $\lambda = \pm 2$ при $(p,q) = (4,4)$ і три значення, для яких $4\lambda^3 = -27$ при $(p,q) = (3,6)$, а різні значення λ дають неізоморфні особливості. У роботі [11] доведено таку теорему:

Теорема 3.2. *Особливість алгебричної кривої є ручною тоді й лише тоді, коли вона домінує якусь особливість типу* T_{pq}.

На жаль, на відміну від робіт [19, 22, 44], тут не було отримано опис модулів – істотним інструментом було використання деформацій, що дало можливість отримати критерій, але без явної конструкції модулів. Втім, повний опис і досі отриманий лише для особливостей типу T_{44} [9, 14, 15].

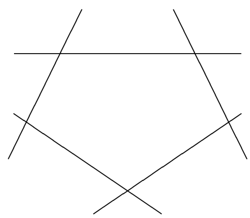
4. Векторні розшарування й особливості поверхонь

Наступним кроком мав стати розгляд *поверхневих особливостей*. На цей час було відомо, що зображувально скінченні поверхневі особливості – це так звані *фактор-особливості* (*quotient singularities*), тобто алгебри інваріантів $\Bbbk[[x,y]]^G$ при дії скінченної групи G на кільці формальних степеневих рядів від двох змінних [3, 17]. Для дослідження ручності підґрунтям стала робота К. Кана [24], в якій встановлено зв'язок модулів Коена-Маколея над поверхневою особливістю з *векторними розшаруваннями* над *виключною кривою* розв'язання цієї особливості. Остання є проєктивною кривою, тож природно стало питання про класифікацію векторних розшарувань над проєктивними кривими. Така класифікація була відома лише для проєктивної прямої $\mathbb{P}^1$, де вона найпростіша: нерозкладними є лише лінійні розшарування, а також для *еліптичних кривих* (неособливих кривих роду 1, або, що те саме, неособливих плоских кубік) [2]. У останньому випадку нерозкладні розшарування даного рангу й степеня утворюють сім'ю, параметризовану точками кривої. Отже, це – ручний випадок. З іншого боку, доволі нескладно встановити, що класифікація векторних розшарувань над кривою роду $g > 1$ вже є дикою. Про випадок кривих з особливостями (а такі найчастіше виникають як виключні криві розв'язань) не було відомо нічого.

Ми з Ґ.-М. Ґройелем встановили такий результат [12].

Теорема 4.1. *Зв'язна проєктивна крива є ручною відносно класифікації векторних розшарувань тоді й лише тоді, коли вона є або проєктивною прямою, або еліптичною кривою, або ланцюгом чи циклом проєктивних прямих з трансверсальними перетинами. Всі інші проєктивні криві є дикими відносно класифікації векторних розшарувань.*

Останній випадок означає, що всі незвідні компоненти кривої – це проєктивні прямі, всі їх перетини є трансверсальними і, при деякій нумерації прямих, кожна перетинає наступну і, у випадку циклу, остання перетинає першу. У випадку циклу з 5 компонентами це виглядає так:



Якшо така крива має одну компоненту, це – нодальна кубіка, якщо дві – це перетин прямої з колом. При цьому у випадку ланцюга (рід такої кривої дорівнює 0) всі нерозкладні розшарування є лінійними, а у випадку циклу (його рід дорівнює 1), при фіксованому рангу і фіксованих степенях на кожній компоненті, нерозкладні розшарування утворюють скінченну кількість сімей, кожна з яких параметризована точками проєктивної прямої. При цьому вдалося й дати повний опис відповідних векторних розшарувань. Як і у випадку особливостей кривих, цей опис зводився до так званих *в'язок ланцюгів*, досліджених у роботах Л. Назарової і А. Ройтера [46] та В. Бондаренка [32].

Разом з роботою Кана це дозволило вирішити питання про ручні й дикі поверхневі особливості для важливого класу так званих *мінімально еліптичних особливостей* [25]. Це горенштейнові поверхневі особливості роду 1. Серед них виділяються

- *прості еліптичні особливості* – такі, що виключна крива є еліптичною кривою;
- *каспідальні особливості* – такі, що виключна крива є циклом проєктивних прямих.

У роботі [13] встановлено такий результат.

Теорема 4.2. *Мінімально еліптична поверхнева особливість є ручною тоді й лише тоді, коли вона є або* простою еліптичною*, або* каспідальною*. В усіх інших випадках вона є дикою.*

Зокрема, якщо це – особливість поверхні у тривимірному просторі, то це – особливість типу $T_{p,q,r}$, тобто задається рівнянням

$$T_{p,q,r} \;:\; x^p + y^q + z^r + \lambda xyz = 0,$$

де

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} \leqslant 1, \quad p \leqslant q \leqslant r, \quad \lambda \notin \{0, 1\}.$$

Якщо $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} = 1$, це проста еліптична особливість, якщо нерівність строга – каспідальна особливість. У останньому випадку всі значення λ (включаючи $\lambda = 1$) визначають ізоморфні особливості.

Для ручних поверхневих особливостей також було дано класифікацію модулів (для простих еліптичних особливостей це зробив ще К. Кан у тій самій роботі [24]).

5. Похідні категорії

У роботі [12] ми з Ґ.-М. Ґройелем звернули увагу на те, що опис векторних розшарувань над циклами проєктивних прямих має багато спільного з описом зображень деяких скінченновимірних алгебр. У найпростішому випадку нодальної кубіки – це алгебра, задана сагайдаком зі співвідношеннями

$$\bullet \overset{a_1}{\underset{a_2}{\rightrightarrows}} \bullet \overset{b_1}{\underset{b_2}{\rightrightarrows}} \bullet \qquad b_1a_1 = b_2a_2 = 0. \tag{5.1}$$

Звичайно, ми знали про класичну роботу А. Бейлінсона [29], в якій було встановлено зв'язки між векторними розшаруваннями над проєктивним простором $\mathbb{P}^n$ та зображеннями деяких скінченновимірних алгебр, зокрема, між $\mathbb{P}^1$ та *сагайдаком Кронекера* $\bullet \rightrightarrows \bullet$. Але основним у цій роботі було доведення того, що еквівалентними є *похідні категорії* когерентних пучків над $\mathbb{P}^n$ та модулів над відповідною алгеброю. Така еквівалентність задається функтором $\mathrm{Hom}(\mathcal{T}, -)$, де

$$\mathcal{T} = \bigoplus_{k=0}^{n} \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(k)$$

– так званий *тілтінг-пучок.* У випадку нодальної кубіки й алгебри (5.1) така еквівалентність була напевно неможливою, оскільки глобальна гомологічна розмірність цієї алгебри скінченна (дорівнює 2), а глобальна гомологічна розмірність нодальної кубіки нескінченна.

Роз'яснення цієї загадки було дано у роботі І. Бурбана і моїй [5], яка дала початок циклу робіт, присвячених похідним категоріям. У цій роботі було побудоване нове *категорне розв'язання* особливостей нодальної кривої. На той час конструкція категорних розв'язань у різних виглядах вже була відома, але всі вони мали один недолік. Побудовані категорії залишалися деякими досить складними категорними конструкціями, з якими було досить важко ефективно працювати. Наше розв'язання будувалось у «внутрішніх рамках» алгебричної геометрії, точніше, *некомутативної алгебричної геометрії.* А саме, ми розглянули звичайне геометричне розв'язання нодальної кривої X – домінантне раціональне відображення

$$\pi : \mathbb{P}^1 \to X.$$

Воно є ізоморфізмом поза особливою точкою, а остання має два прообрази. Позначимо через $\mathcal{O}$ пучок регулярних функцій на X, через $\tilde{\mathcal{O}}$ прямий образ при відображенні π пучка регулярних функцій на $\mathbb{P}^1$ і розглянемо пучок ендоморфізмів

$$\mathcal{A} = \mathcal{E}nd_{\mathcal{O}}(\mathcal{O} \oplus \tilde{\mathcal{O}}).$$

Пара $\mathbb{X} = (X, \mathcal{A})$ є прикладом *некомутативної алгебричної кривої.* Для неї, як і для звичайних алгебричних кривих можна розглядати категорію когерентних пучків $\operatorname{Coh}\mathbb{X}$ та її похідну категорію $\mathcal{D}(\operatorname{Coh}\mathbb{X})$. Для кривої $\mathbb{X}$ гомологічна розмірність вже скінченна (дорівнює 2), тобто в цьому розумінні вона неособлива. З іншого боку, категорії $\operatorname{Coh} X$ та $\operatorname{Coh}\mathbb{X}$ пов'язані так званою *діаогамою прикріплення* (*recollement*)

$$\begin{tikzcd} \ker F \arrow[r, "I" description] & \operatorname{Coh}\mathbb{X} \arrow[l, bend right, "I^*"'] \arrow[l, bend left, "I^!"] \arrow[r, "F" description] & \operatorname{Coh} X \arrow[l, bend right, "F^*"'] \arrow[l, bend left, "F^!"] \end{tikzcd},$$

в якій функтор F є точним і сюр'єктивним, F^* та $F^!$ – це його лівий і правий спряжені, I – занурення, I^* та $I^!$ – це його лівий і правий спряжені, причому

$$FF^* \simeq FF^! \simeq \mathrm{Id}.$$

Отже, некомутативну криву $\mathbb{X}$ можна розглядати як розв'язання кривої X. Більш того, категорія $\ker F$ у цьому випадку еквівалента категорії модулів над $\Bbbk \times \Bbbk$, де $\Bbbk$ – основне поле. Отже, категорії $\operatorname{Coh} X$ та $\operatorname{Coh}\mathbb{X}$ мало відрізняються. Нарешті, у похідній категорії $\mathcal{D}(\operatorname{Coh}\mathbb{X})$ є *тілтінг-комплекс*

$$\mathcal{T}^+ = \tilde{\mathcal{T}} \oplus (\mathcal{O}/\mathfrak{m})[-1],$$

де $\mathfrak{m}$ – максимальний ідеал, що відповідає особливій точці. Згідно загальної теорії, тоді

$$\mathcal{D}(\operatorname{Coh}\mathbb{X}) \simeq \mathcal{D}(\Lambda\text{-mod}),$$

де Λ – дуальна алгебра до алгебри ендоморфізмів $\mathrm{End}(\mathcal{T}^+)$, яка якраз і є алгеброю (5.1).

Надалі ми з І. Бурбаном і В. Гавраном узагальнили цю конструкцію для довільних (у тому числі, й некомутативних) кривих [7]. Зокрема, для кожної некомутативної кривої $\mathbb{X}$ ми побудували криву $\tilde{\mathbb{X}}$, яка дає категорне розв'язання особливостей кривої $\mathbb{X}$, а у раціональному випадку також скінченновимірну алгебру Λ таку, що

$$\mathcal{D}(\mathrm{Coh}\,\tilde{\mathbb{X}}) \simeq \mathcal{D}(\Lambda\text{-mod}).$$

Одночасно ми почали вивчати будову похідних категорій, зокрема, питання про їх ручність чи дикість. Ще у 1990 році я встановив, які саме локальні кільця (можливо, некомутативні) є ручними відносно класифікації всіх скінченнопороджених модулів [40]. Серед звичайних особливостей ними виявилися лише «прості вузли» (трансверсальні перетини). Ми назвали такі кільця (некомутативні аналоги трансверсальних перетинів) «нодальними особливостями» і дали для них повний опис похідних категорій [6]. Для нодальних кривих (у тому числі й некомутативних), тобто таких, у яких всі особливості є нодальними, Д. Волошин і я знайшли критерій ручності відносно класифікації векторних розшарувань і в ручному випадку описали такі розшарування та похідну категорію категорії когерентних пучків [16, 36].

Слід зауважити, що, як виявилось, некомутативні нодальні криві відіграють істотну роль у так званій *теорії дзеркальної симетрії* (дивись, наприклад, роботу [26]).

Ось як з семінару, організованому в нашому університеті Д. Ґраве виросли дослідження, які врешті решт привели до нових результатів у такій «модерній» області.

Література

[1] Автобиографические записки Д. А. Граве (Публ. А. Н. Боголюбова). *Историко-математические исследования*, 34:219–246, 1993.

[2] M. F. Atiyah. Vector bundles over an elliptic curve. *Proc. London Math. Soc. (3)*, 7:414–452, 1957. doi:10.1112/plms/s3-7.1.414.

[3] M. Auslander. Rational singularities and almost split sequences. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 293(2):511–531, 1986. doi:10.2307/2000019.

[4] H. Bass. Torsion free and projective modules. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 102:319–327, 1962. URL: https://doi-org.ezp-prod1.hul.harvard.edu/10.2307/1993680, doi:10.2307/1993680.

[5] I. Burban and Y. Drozd. Coherent sheaves on rational curves with simple double points and transversal intersections. *Duke Math. J.*, 121(2):189–229, 2004. doi:10.1215/S0012-7094-04-12121-9.

[6] I. Burban and Y. Drozd. Derived categories of nodal algebras. *J. Algebra*, 272(1):46–94, 2004. doi:10.1016/j.jalgebra.2003.07.025.

[7] I. Burban, Y. Drozd, and V. Gavran. Minors and resolutions of non-commutative schemes. *Eur. J. Math.*, 3(2):311–341, 2017. doi:10.1007/s40879-017-0128-6.
[8] F. Diederichsen. Über de Ausreduktion ganzzahliger Gruppendarstellungen bei arithmetischer äquivalenz. 14:357–412, 1938.
[9] E. Dieterich. Lattices over curve singularities with large conductor. *Invent. Math.*, 114(2):399–433, 1993. doi:10.1007/BF01232675.
[10] Y. A. Drozd. Reduction algorithm and representations of boxes and algebras. *C. R. Math. Acad. Sci., Soc. R. Can.*, 23(4):97–125, 2001.
[11] Y. A. Drozd and G.-M. Greuel. Cohen-Macaulay module type. *Compositio Math.*, 89(3):315–338, 1993. URL: http://www.numdam.org/item?id=CM_1993__89_3_315_0.
[12] Y. A. Drozd and G.-M. Greuel. Tame and wild projective curves and classification of vector bundles. *J. Algebra*, 246(1):1–54, 2001. doi:10.1006/jabr.2001.8934.
[13] Y. A. Drozd, G.-M. Greuel, and I. Kashuba. On Cohen-Macaulay modules on surface singularities. *Moscow Math. J.*, 3(2):397–418, 742, 2003. doi:10.17323/1609-4514-2003-3-2-397-418.
[14] Y. A. Drozd and O. V. Tovpyha. On Cohen-Macaulay modules over the plane curve singularity of type T_{44}. *Arch. Math. (Basel)*, 108(6):569–579, 2017. doi:10.1007/s00013-017-1034-3.
[15] Y. A. Drozd and O. V. Tovpyha. Cohen-Macaulay modules over the plane curve singularity of type T_{44}, II. *Algebra Discrete Math.*, 28(1):75–93, 2019.
[16] Y. A. Drozd and D. E. Voloshyn. Vector bundles over noncommutative nodal curves. *Укр. матем. журн.*, 64(2):185–199, 2012. doi:10.1007/s11253-012-0639-8.
[17] H. Esnault. Reflexive modules on quotient surface singularities. *J. Reine Angew. Math.*, 362:63–71, 1985. doi:10.1515/crll.1985.362.63.
[18] Peter Gabriel. Unzerlegbare Darstellungen. I. *Manuscripta Math.*, 6:71–103; correction, ibid. 6 (1972), 309, 1972. doi:10.1007/BF01298413.
[19] G.-M. Greuel and H. Knörrer. Einfache Kurvensingularitäten und torsionsfreie Moduln. *Math. Ann.*, 270(3):417–425, 1985. URL: https://doi-org.ezp-prod1.hul.harvard.edu/10.1007/BF01473437, doi:10.1007/BF01473437.
[20] A. Heller and I. Reiner. Representations of cyclic groups in rings of integers. I. *Ann. of Math. (2)*, 76:73–92, 1962. URL: https://doi-org.ezp-prod1.hul.harvard.edu/10.2307/1970266, doi:10.2307/1970266.
[21] A. Heller and I. Reiner. Representations of cyclic groups in rings of integers. II. *Ann. of Math. (2)*, 77:318–328, 1963. URL: https://doi-org.ezp-prod1.hul.harvard.edu/10.2307/1970218, doi:10.2307/1970218.
[22] H. Jacobinski. Sur les ordres commutatifs avec un nombre fini de réseaux indecomposables. *Acta Math.*, 118:1–31, 1967. doi:10.1007/BF02392474.
[23] A. Jones. Groups with a finite number of indecomposable integral representations. *Michigan Math. J.*, 10:257–261, 1963. URL: http://projecteuclid.org.ezp-prod1.hul.harvard.edu/euclid.mmj/1028998908.
[24] C. P. Kahn. Reflexive modules on minimally elliptic singularities. *Math. Ann.*, 285(1):141–160, 1989. doi:10.1007/BF01442678.
[25] H. B. Laufer. On minimally elliptic singularities. *Amer. J. Math.*, 99(6):1257–1295, 1977. doi:10.2307/2374025.
[26] YankıLekili and Alexander Polishchuk. Auslander orders over nodal stacky curves and partially wrapped Fukaya categories. *J. Topol.*, 11(3):615–644, 2018. doi:10.1112/topo.12064.

[27] H. Zassenhaus. Neuer Beweis der Endlichkeit der Klassenzahl bei unimodularer äquivalenz endlicher ganzzahliger Substitutionsgruppen. *Abh. Math. Semin. Univ. Hamb.*, 12:276–288, 1938. doi:10.1007/BF02948949.
[28] В. И. Арнольд. Критические точки гладких функций и их нормальные формы. *Успехи мат. наук*, 30(5(185)):3–65, 1975.
[29] А. А. Бейлинсон. Когерентные пучки на $\mathbf{P}^n$ и проблемы линейной алгебры. *Функц. анализ и его прил.*, 12(3):68–69, 1978.
[30] С. Д. Берман and П. М. Гудивок. Целочисленные представления конечных групп. *Докл. Акад. наук СССР*, 145:1199–1201, 1962.
[31] С. Д. Берман and П. М. Гудивок. Неразложимые представления конечных групп над кольцами целых p-адических чисел. *Изв. Акад. наук СССР. Сер. мат.*, 28:875–910, 1964.
[32] В. М. Бондаренко. Связки полуцепных множеств и их представления. Инст. мат. Акад. наук Укр. ССР, Киев. Препринт № 60, 1988.
[33] З. И. Боревич and Д. К. Фаддеев. Теория гомологий в группах. II. Проективные резольвенты конечных групп. *Вестн. Ленингр. унив. Мат.*, 14(7):72–87, 1959.
[34] З. И. Боревич and Д. К. Фаддеев. Целочисленные представления квадратичных колец. *Вестн. Ленингр. унив. Мат., мех., астрон.*, 15(4):52–64, 1960.
[35] З. И. Боревич and Д. К. Фаддеев. Представления порядков с циклическим индексом. *Труды Мат. инст. Стеклова*, 80:51–65, 1965.
[36] Д. Є. Волошин and Ю. А. Дрозд. Похідні категорії вузлових кривих. *Укр. матем. журн.*, 64(8):1033–1040, 2013. doi:10.1007/s11253-013-0708-7.
[37] Ю. А. Дрозд. Представления кубических Z-колец. *Докл. Акад. наук СССР*, 174:16–18, 1967.
[38] Ю. А. Дрозд. Идеалы коммутативных колец. *Мат. Сб., Нов. Сер.*, 101:334–348, 1976.
[39] Ю. А. Дрозд. Ручные и дикие матричные задачи. In *Представления и квадратичные формы*, pages 39–74. Инст. мат. Акад. наук Укр. ССР, Киев, 1979.
[40] Ю. А. Дрозд. Конечные модули над чисто нетеровыми алгебрами. *Труды Мат. инст. Стеклова*, 183:97–108, 1990.
[41] Ю. А. Дрозд and Кириченко В. В. О квазибассовых порядках. *Изв. Акад. наук СССР. Сер. мат.*, 36:328–370, 1972.
[42] Ю. А. Дрозд and Кириченко В. В. Примарные порядки с конечным числом неразложимых представлений. *Изв. Акад. наук СССР. Сер. мат.*, 37:715–736, 1973.
[43] Ю. А. Дрозд, Кириченко В. В., and А. В. Ройтер. О наследственных и бассовых порядках. *Изв. Акад. наук СССР. Сер. мат.*, 31:1415–1436, 1967.
[44] Ю. А. Дрозд and А. В. Ройтер. Коммутативные кольца с конечным числом целочисленных неразложимых представлений. *Изв. Акад. наук СССР. Сер. мат.*, 31:783–798, 1967. doi:10.1070/IM1967v001n04ABEH000588.
[45] Л. А. Назарова and А. В. Ройтер. Представления частично упорядоченных множеств. *Зап. научн. сем. ЛОМИ*, 28:5–31, 1972.
[46] Л. А. Назарова and А. В. Ройтер. Об одной проблеме И. М. Гельфанда. *Функц. анализ и его прил.*, 7(4):54–69, 1973.
[47] А. В. Ройтер. О представлениях циклической группы четвертого порядка целочисленными матрицами. *Вестн. Ленингр. унив. Мат., мех., астрон.*, 15(4):65–74, 1960.
[48] А. В. Ройтер. Неограниченность размерностей неразложимых представлений алгебры, имеющей бесконечно много неразложимых представлений. *Изв. Акад. наук СССР. Сер. мат.*, 32:1275–1282, 1968.

[49] Д. К. Фаддеев. Введение в мультипликативную теорию модулей целочисленных представлений. *Труды Мат. инст. Стеклова*, 80:145–182, 1965.

[50] Д. К. Фаддеев. К теории кубических Z-колец. *Труды Мат. инст. Стеклова*, 80:183–187, 1965.

Ю. А. Дрозд

Інститут математики НАН України, м. Київ, Україна,
Університет Гарварда, м. Кембридж, Массачусеттс

Email: y.a.drozd@gmail.com

ORCID: 0000-0002-4766-8791

Збірник праць Ін-ту математики НАН України (2023) т. 20, №1, 712–728

Зародження і розвиток ідей теорії стохастичних диференціальних рівнянь в українській школі математики

М. І. Портенко

Abstract. It is universally recognized that the theory of stochastic differential equations was created in the Japanese mathematical school during the forties of the last century, and it is much less-known that the idea of a stochastic differential equation arose independently in the Ukrainian school of mathematics about the same time. This paper is devoted to a description of the initial stages in forming the school of the theory of stochastic differential equations and its subsequent development in Ukraine.

Анотація. Як зародилось поняття стохастичного диференціального рівняння в рамках української математичної школи та як проходило становлення теорії таких рівнянь в Україні – це основні питання, що їх висвітлено в статті.

Вступ

Одним з найзначніших досягнень математики середини минулого сторіччя слід вважати зародження та розвиток ідей теорії стохастичних диференціальних рівнянь, що зрештою призвело до утворення нового розділу сучасної математики під назвою «Стохастичний аналіз». Окреслилися зв'язки нової науки з такими класичними розділами математики, як математичний аналіз, диференціальні рівняння, динамічні системи тощо. Визначилися сфери застосування: фізика, біологія, теорія оптимального керування системами з розподіленими параметрами, фінансова математика та ін.

Цікаво, що і до процесу зародження теорії стохастичних диференціальних рівнянь, і до її подальшого розвитку причетними виявилися науковці української школи математики. В цій статті якраз йтиметься про ті початкові етапи становлення стохастичного аналізу в Україні.

2020 Mathematics Subject Classification: 60H10, 01A60

Ключові слова: стохастичні диференціальні рівняння; дифузійні процеси; рівняння Колмогорова

DOI: http://dx.doi.org/10.3842/trim.v20n1.527

Автор не ставив собі за мету дослідження цього процесу у всіх деталях. Натомість підкреслюється роль деяких сильних сторін тогочасної української математичної школи, які, власне, і призвели до зародження ідеї стохастичного диференціального рівняння та стали потужним фактором подальшого розвитку теорії таких рівнянь. Крім того, наводяться деякі яскраві результати з теорії стохастичних диференціальних рівнянь, отримані представниками української школи теорії ймовірностей. Їх добірка відображає смаки автора цієї статті і аж ніяк не претендує на бодай якусь повноту.

Основою цієї статті стали матеріали доповіді автора на засіданні Київського математичного товариства 6 вересня 2022 року. Це засідання відбувалося в рамках так званих Гравевських читань, що традиційно проводяться в день народження Д. О. Ґраве, який став лідером Київської школи математики на початку XX сторіччя і був ним до своєї смерті в 1939 році. Отже, мені, як доповідачеві на цих читаннях, слід було провести лінію від Д. О. Ґраве до Й. І. Гіхмана, оскільки саме у його публікації 1947 року з'явилося поняття стохастичного диференціального рівняння. Таку лінію провести нескладно: Й. І. Гіхман, закінчивши Київський університет в 1939 році, одразу поступив на навчання в аспірантурі при цьому університеті, і керівником йому було призначено М. М. Боголюбова, який зі своїх юних літ був активним учасником семінару під керівництвом Д. О. Ґраве. Відштовхуючись від робіт саме свого учителя (спільних з М. М. Криловим) кінця 1930-х років, Й. І. Гіхман зробив вирішальний крок до поняття стохастичного диференціального рівняння. В низці своїх публікацій початку 1950-х років Й. І. Гіхман розвинув свої первісні ідеї.

В подальшому розвитку теорії стохастичних диференціальних рівнянь надзвичайно важливим був той факт, що такий титан науки як А. В. Скороход долучився (не без впливу Й. І. Гіхмана) до дослідження в цій галузі математики, починаючи з 1957 року. І вже в кінці 1961 року у видавництві Київського університету вийшла з друку його книга «Исследования по теории случайных процессов», присвячена (значною мірою) теорії стохастичних диференціальних рівнянь. Низку нових ідей та результатів в цій теорії було запропоновано автором книги. Після цього спільна робота Й. І. Гіхмана та А. В. Скорохода в теорії стохастичних диференціальних рівнянь увінчалася публікацією книги «Стохастические дифференциальные уравнения» в 1968-у році у видавництві «Наукова думка» в Києві. З'явилася ціла когорта учнів цих двох видатних математиків. Так зародилась в Україні школа теорії стохастичних диференціальних рівнянь. Саме про ті далекі тепер події ця стаття.

Слід сказати, що на початку 1940-х років японський математик К. Іто (K. Itô) побудував теорію стохастичного інтегрування, яка дозволила йому створити теорію стохастичних диференціальних рівнянь. Як і у Й. І. Гіхмана, основи теорії були сформовані на самому початку 1950-х років. На відміну від К. Іто, Й. І. Гіхман не володів поняттям стохастичного інтеграла, хоч його підхід до поняття стохастичного диференціального рівняння був цілком строгим[1]. Підхід К. Іто виявився вдалим, і тепер теорію стохастичних диференціальних рівнянь викладають, грунтуючись саме на понятті стохастичного інтеграла.

Ще одне ім'я варто згадати тут. Як показують деякі матеріали, подібні ідеї були і у франко-німецького математика В. Дебліна (W. Döblin). Однак його коротке життя трагічно обірвалося вже в перші роки 2-ї світової війни, а зміст його листа до академії наук Франції, в якому згадані ідеї викладені, оприлюднено порівняно недавно. Тому автор не буде тут торкатися цієї сторони справи.

Закінчу цей вступний розділ статті двома коротенькими історіями, що мають стосунок до двох постатей в математиці, причетних до створення теорії стохастичних диференціальних рівнянь.

Наприкінці літа 1975 року в м. Ташкенті відбувався Радянсько-Японський симпозіум з теорії ймовірностей. К. Іто не брав участі в тому симпозіумі. В один з вечорів у неформальній обстановці троє молодих тоді математиків з Києва – В. В. Булдигін, А. Ф. Турбін та я – мали нагоду поспілкуватися з молодим тоді японським математиком М. Фукушімою (M. Fukushima). На наше запитання: «Кого він вважає математиком №1 в Японії?» відповідь була однозначною і без жодних вагань: «К. Іто!». Ми продовжили: «А хто на другому місці?». Він зробив паузу, ніби щось зважуючи, і зрештою сказав: «Немає нікого!». Так було і з місцями 3 та 4. «А на п'ятому місці – багато різних!». Таким був його вердикт.

Друга історія асоціюється із запитанням, чи знав К. Іто про Й. І. Гіхмана і про його підхід до поняття стохастичного диференціального рівняння. Моя відповідь: «Безумовно, так!». І ось доведення цього твердження.

Це було в м. Тбілісі влітку 1982 року, де тоді проходив черговий Радянсько-Японський симпозіум з теорії ймовірностей (до речі, наступний був у Києві в 1991 році, він завершився за тиждень до «ГКЧП»).

[1]Намагання уникати складних пояснень під час доповіді 6 вересня 2022 року привело тоді автора до цілком неадекватного опису того, чим є стохастичне диференціальне рівняння у Й. І. Гіхмана. Визнаючи цю мою провину і перепрошуючи за неї перед моїми слухачами, постараюся у цій статті усунути ту прикру недбалість, що трапилася у доповіді.

Цього разу К. Іто був у складі японської делегації. Одного дня в певний час всі учасники симпозіуму мали зібратися в вестибюлі готелю, де мешкали, мабуть, перед екскурсією, чи бенкетом. Сталося так, що я стояв поруч з К. Іто. Ми встигли обмінятися парою фраз перед тим, як до нас підійшов Ілля Гіхман – син Йосипа Ілліча. Він також був учасником симпозіуму і був зовсім ще молодим чоловіком (трохи більше 30-ти років). У нього на бейджику був напис: I. I. Gikhman. Правила хорошого тону зобов'язували мене представити його професору, і я це зробив. Професор нахилився до Іллі, щоб прочитати на бейджику ім'я молодого математика. Коли він випростався, на його обличчі був вираз найвищого ступеня подиву. Він не міг повірити в те, що його, так би мовити, конкурент з України у справі створення теорії стохастичних диференціальних рівнянь є такою молодою людиною (різниця у віці між К. Іто та Й. І. Гіхманом складала 3 роки, перший був старшим). Ми з Іллею поспішили заспокоїти професора, пояснивши ситуацію. Цим і завершується доведення.

Подяка. Щиро дякую професорові М. М. Осипчуку з Прикарпатського національного університету імені Василя Стефаника за допомогу при підготовці цієї статті до друку.

1. Дифузійні процеси в сенсі А. Колмогорова

Як відомо, процес Маркова $(x(t))_{t\geqslant 0}$ в евклідовому просторі $\mathbb{R}^d$ характеризується існуванням функції $P(s,x,t,\Gamma)$ аргументів $s \geqslant 0$, $x \in \mathbb{R}^d$, $t > s$ та $\Gamma \in \mathcal{B}$ (через $\mathcal{B}$ позначається σ-алгебра всіх борельових підмножин $\mathbb{R}^d$), значеннями якої є числа з проміжку $[0,1]$ дійсної осі і яка має такі властивості:

а) вона є $\mathcal{B}$-вимірною функцією аргумента $x \in \mathbb{R}^d$ при фіксованих $s < t$ та $\Gamma \in \mathcal{B}$;

б) вона є ймовірнісною мірою по $\Gamma \in \mathcal{B}$ при фіксованих $s < t$, $x \in \mathbb{R}^d$;

в) при всіх $s < \tau < t$, $x \in \mathbb{R}^d$ та $\Gamma \in \mathcal{B}$ виконується рівність

$$P(s,x,t,\Gamma) = \int_{\mathbb{R}^d} P(\tau,y,t,\Gamma)P(s,x,\tau,\mathrm{d}y);$$

г) при всіх $s < t$ та $\Gamma \in \mathcal{B}$ виконується (майже напевно) рівність

$$\mathbb{P}\left(\{x(t) \in \Gamma\} \mid \mathcal{M}_s\right) = P(s,x(s),t,\Gamma),$$

де ліворуч записана умовна ймовірність події $\{x(t) \in \Gamma\}$, коли фіксована σ-алгебра $\mathcal{M}_s$, що є найменшою σ-алгеброю подій, яка містить всі події вигляду $\{x(r) \in \Lambda\}$ при $r \in [0,s]$ та $\Lambda \in \mathcal{B}$.

Умова г) означає, що при складанні прогнозу майбутньої поведінки процесу (тобто, в момент часу t), якщо до уваги береться повна інформація про його поведінку в минулому (тобто, до теперішнього моменту часу s, $s \leqslant t$), вся інформація про $x(r)$ при $r < s$ виявляється зайвою: важливою є лише та, що стосується $x(s)$. Саме ця властивість покладена в основу визначення процесу Маркова.

Отже, якщо є процес Маркова $(x(t))_{t\geqslant 0}$ в фазовому просторі $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B})$, то існує функція $P(s,x,t,\Gamma)$, $0 \leqslant s < t$, $x \in \mathbb{R}^d$, $\Gamma \in \mathcal{B}$, яка задовольняє умови а)-г). Навпаки, якщо маємо функцію $P(s,x,t,\Gamma)$, що задовольняє умови а)-в), і додатково задана ймовірнісна міра $(\mu(\Gamma))_{\Gamma\in\mathcal{B}}$, то існує процес Маркова $(x(t))_{t\geqslant 0}$ в $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B})$, для якого $\mathbb{P}\left(\{x(0) \in \Gamma\}\right) = \mu(\Gamma)$ при всіх $\Gamma \in \mathcal{B}$ і також виконується умова г).

Таким чином, всякий розв'язок рівняння в умові в) (він має задовольняти умови а) та б), бо лише за цих умов і можна писати те рівняння) визначає процес Маркова в $\mathbb{R}^d$ і навіть не один (вони будуть різнитися лише початковими розподілами). В цьому розумінні рівняння в) є джерелом всіх процесів Маркова в $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B})$. Воно носить назву рівняння Колмогорова-Чепмена. Всякий розв'язок цього рівняння, що є ймовірнісною мірою по четвертій змінній, зветься ймовірністю переходу. Її інтерпретація очевидна: $P(s,x,t,\Gamma)$ при $s < t$ задає умовну ймовірність події $\{x(t) \in \Gamma\}$ за умови $x(s) = x$.

Виражаючи досить загальний принцип еволюції систем, що описуються процесами Маркова, рівняння Колмогорова-Чепмена є нелінійним. А. Н. Колмогоров на межі 20-х та 30-х років минулого сторіччя запропонував метод лінеаризації таких рівнянь, що ґрунтується на тих чи інших припущеннях щодо локальної поведінки процесу на малих проміжках часу (див. [6]). Він виділив декілька класів процесів Маркова, один з яких згодом дістав назву дифузійних процесів. Сформулюємо ті умови на ймовірність переходу в $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B})$, які визначають дифузійний процес. Через $B_r(x)$ позначається відкрита куля в $\mathbb{R}^d$ з центром в точці $x \in \mathbb{R}^d$ радіуса $r > 0$, а через $B_r(x)^c$ її доповнення до $\mathbb{R}^d$.

Нехай ймовірність переходу $P(s,x,t,\Gamma)$, $0 \leqslant s \leqslant t$, $x \in \mathbb{R}^d$, $\Gamma \in \mathcal{B}$, задовольняє наступні умови:

1) при всіх $s \geqslant 0$, $x \in \mathbb{R}^d$ та $\varepsilon > 0$ виконується співвідношення

$$\lim_{\Delta s\downarrow 0} \frac{1}{\Delta s} \int_{B_\varepsilon(x)^c} P(s,x,s+\Delta s,\mathrm{d}y) = 0;$$

2) при всіх $s \geqslant 0$, $x \in \mathbb{R}^d$ та деякому $\varepsilon > 0$ існує границя

$$\lim_{\Delta s\downarrow 0} \frac{1}{\Delta s} \int_{B_\varepsilon(x)} (y-x) P(s,x,s+\Delta s,\mathrm{d}y);$$

3) при всіх $s \geqslant 0$, $x \in \mathbb{R}^d$, $\theta \in \mathbb{R}^d$ та деякому $\varepsilon > 0$ існує границя

$$\lim_{\Delta s \downarrow 0} \frac{1}{\Delta s} \int_{B_\varepsilon(x)} (y - x, \theta)^2 P(s, x, s + \Delta s, \mathrm{d}y).$$

Неважко бачити, що за умови 1) існування границь в 2) та 3) при деякому $\varepsilon > 0$ означає їх існування при будь-якому $\varepsilon > 0$ і незалежність тих границь від $\varepsilon > 0$. Тому границя в 2) визначає $\mathbb{R}^d$-значну функцію $(a(s,x))_{s \geqslant 0, x \in \mathbb{R}^d}$, яка зветься вектором переносу. Границя в 3) визначає операторну функцію $(b(s,x))_{s \geqslant 0, x \in \mathbb{R}^d}$, яка зветься оператором дифузії і з допомогою якої та границя записується у вигляді квадратичної форми $(b(s,x)\theta, \theta)$. В одновимірному випадку ці функції називаються коефіцієнтом переносу та коефіцієнтом дифузії, відповідно. Це і є локальні характеристики процесу, які описують рух на макроскопічному та мікроскопічному рівнях.

Наступний результат належить А. Н. Колмогорову. Припустимо, що задана ймовірність переходу в $\mathbb{R}^d$, яка задовольняє умови 1)-3) з неперервними локальними характеристиками, а задана функція $(\varphi(x))_{x \in \mathbb{R}^d}$ з дійсними значеннями є неперервною обмеженою і такою, що функція ($t > 0$ фіксоване)

$$u(s,x) = \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(y) P(s, x, t, \mathrm{d}y), \quad (s,x) \in [0,t) \times \mathbb{R}^d, \tag{1.1}$$

двічі неперервно диференційовна по $x \in \mathbb{R}^d$. Тоді вона диференційовна і по змінній $s \in [0,t)$ та задовольняє рівняння

$$u'_s(s,x) + \big(a(s,x), u'_x(s,x)\big) + \tfrac{1}{2}\mathrm{Tr}\,\big(b(s,x)u''_{xx}(s,x)\big) = 0 \tag{1.2}$$

в області $(s,x) \in [0,t) \times \mathbb{R}^d$, а також «початкову» умову

$$u(t-, x) = \varphi(x), \quad x \in \mathbb{R}^d. \tag{1.3}$$

У разі, якщо ймовірність переходу задовольняє умови 1)-3) і має щільність відносно лебегової міри в $\mathbb{R}^d$, тобто,

$$P(s,x,t,\Gamma) = \int_\Gamma G(s,x,t,y)\,\mathrm{d}y, \quad 0 \leqslant s < t,\ x \in \mathbb{R}^d,\ \Gamma \in \mathcal{B},$$

А. Н. Колмогоров за певних умов вивів рівняння для функції $G(s,x,t,y)$, $t \in (s, +\infty)$, $y \in \mathbb{R}^d$ при фіксованих $s \geqslant 0$ та $x \in \mathbb{R}^d$. Це рівняння є формально спряженим до рівняння (1.2). Воно відоме в літературі, ближчій до фізики, під назвою рівняння Фоккера-Планка. Ймовірнісники називають його прямим рівнянням Колмогорова, на відміну від рівняння (1.2), яке є оберненим.

У частинному випадку, коли $a(s,x) \equiv 0$, а $b(s,x) \equiv I$ (через I позначається тотожній оператор в $\mathbb{R}^d$), рівняння (1.2) перетворюється на рівняння теплопровідності

$$u_s'(s,x) + \tfrac{1}{2}\Delta u(s,x) = 0 \tag{1.4}$$

при $(s,x) \in [0,t) \times \mathbb{R}^d$ ($t > 0$ фіксоване), де оператор Лапласа Δ діє на функцію $(u(s,x))_{(s,x)\in[0,t)\times\mathbb{R}^d}$ по змінній $x \in \mathbb{R}^d$, тобто,

$$\Delta u(s,x) = \mathrm{Tr}\,(u''_{xx}(s,x)).$$

Розв'язком задачі Коші в цьому випадку буде функція

$$u(s,x) = \int_{\mathbb{R}^d} g(s,x,t,y)\varphi(y)\,\mathrm{d}y, \quad (s,x) \in [0,t) \times \mathbb{R}^d,$$

де

$$g(s,x,t,y) = (2\pi(t-s))^{-d/2} \exp\left\{-|y-x|^2/2(t-s)\right\}$$

при $s < t$, $x \in \mathbb{R}^d$ та $y \in \mathbb{R}^d$. Працюючи саме з цією функцією g, Н. Вінер сто років тому побудував міру в просторі неперервних функцій, яка є розподілом в тому просторі дифузійного процесу з локальними характеристиками $a(s,x) \equiv 0$ та $b(s,x) \equiv I$ (див. [8]). Цей процес тепер називають *вінеровим*, або ж *процесом броунівського руху.*

Слід сказати, що згадана вище стаття А. Н. Колмогорова мала великий вплив на тогочасних математиків, які проводили свої дослідження в області теорії випадкових процесів. Вона вказувала на шлях, йдучи яким можна було сподіватись на побудову широкого класу дифузійних процесів. Головним на цьому шляху був аналіз задачі Коші (1.2)-(1.3). Якщо за певних умов на коефіцієнти рівняння (1.2) виявиться, що ця задача має розв'язок для широкого класу «початкових» функцій (настільки широкого, що кожний заряд на $\mathcal{B}$ однозначно визначається інтегралами від функцій цього класу по цьому заряду) і якщо при цьому розв'язок є невід'ємною функцією за умови, що $\varphi(x) \geqslant 0$ при всіх $x \in \mathbb{R}^d$, тоді цей розв'язок запишеться у формі (1.1) з деякою ймовірністю переходу, щодо якої залишиться лише перевірити, чи вона задовольняє умови 1)-3). Якщо так, то цим і завершується побудова дифузійного процесу в сенсі Колмогорова з наперед заданими локальними характеристиками руху: вектором переносу $(a(s,x))_{s\geqslant 0, x\in\mathbb{R}^d}$ та оператором дифузії $(b(s,x))_{s\geqslant 0, x\in\mathbb{R}^d}$.

Першим цей шлях пройшов В. Феллер [5], який в одновимірному випадку, використавши метод параметрикс, а також принцип максимуму для рівнянь типу (1.2), зумів побудувати дифузійний процес в $\mathbb{R}^1$ з наперед заданими локальними характеристиками.

Метод параметрикс побудови фундаментальних розв'язків рівнянь типу (1.2), започаткований на початку минулого сторіччя, до його середини завдяки математикам різних країн і різних поколінь було розвинуто настільки, що можна було гарантувати існування фундаментальних розв'язків рівнянь (1.2) за наступних умов на задані функції $(a(s,x))_{(s,x)\in[0,T]\times\mathbb{R}^d}$ та $(b(s,x))_{(s,x)\in[0,T]\times\mathbb{R}^d}$ ($T>0$ фіксоване):

α) при всіх $\theta\in\mathbb{R}^d$ виконується умова

$$c_1|\theta|^2 \leqslant (b(s,x)\theta,\theta) \leqslant c_2|\theta|^2$$

зі сталими $c_1>0$ та $c_2\geqslant c_1$, якими б не були $(s,x)\in[0,T]\times\mathbb{R}^d$;

β) функція $(b(s,x))_{(s,x)\in[0,T]\times\mathbb{R}^d}$ задовольняє умову Гельдера

$$\|b(s,x)-b(t,y)\| \leqslant K\left(|t-s|^{\alpha/2}+|x-y|^{\alpha}\right)$$

зі сталими $\alpha\in(0,1]$ та $K>0$ при всіх $0\leqslant s<t\leqslant T$ та $x\in\mathbb{R}^d$, $y\in\mathbb{R}^d$ (тут використано операторну норму);

γ) функція $(a(s,x))_{(s,x)\in[0,T]\times\mathbb{R}^d}$ є неперервною обмеженою і задовольняє умову

$$|a(s,x)-a(s,y)| \leqslant K|x-y|^{\alpha}$$

з тими ж сталими K та α при всіх $s\in[0,T]$, $x\in\mathbb{R}^d$ та $y\in\mathbb{R}^d$.

Принцип максимуму для рівнянь (1.2) дозволяє гарантувати невід'ємність фундаментального розв'язку, а також забезпечує єдиність розв'язку задачі Коші (1.2)-(1.3) в певних класах. Це в свою чергу приводило до існування дифузійного процесу з наперед заданими локальними характеристиками руху.

Таким чином, вже на середину минулого сторіччя в теорії дифузійних процесів панівними були виключно аналітичні методи побудови таких процесів та дослідження їх властивостей.

Цікаво, що до рівняння Фоккера-Планка прийшов також С. Бернштейн, який до 1934 року працював у Харкові, перебравшись в тому році до Москви. В своїй статті [2] він запропонував розглянути певну різницеву схему, в яку було залучено задані поля $(a(s,x))_{(s,x)\in[0,T]\times\mathbb{R}^d}$ та $(\sigma(s,x))_{(s,x)\in[0,T]\times\mathbb{R}^d}$, векторне та операторне, відповідно. Нехай задана деяка послідовність $\left(t_k^{(n)}\right)_{k=0,1,\ldots,k_n}$, $n=1,2,\ldots$ розбиттів проміжка $[s,t]\subset[0,T]$, для якої

$$\lim_{n\to\infty}\max_{0\leqslant k<k_n}(t_{k+1}^{(n)}-t_k^{(n)})=0.$$

Покладаємо для деякого $x\in\mathbb{R}^d$, $\xi_{s,x}^{(n)}(s)=x$, а при $\tau\in(t_k^{(n)},t_{k+1}^{(n)}]$, де $k=0,1,\ldots,k_n-1$,

$$\xi_{s,x}^{(n)}(\tau) = \xi_{s,x}^{(n)}(t_k^{(n)}) + a\left(t_k^{(n)}, \xi_{s,x}^{(n)}(t_k^{(n)})\right)\left(\tau - t_k^{(n)}\right) + \\ + \sigma\left(t_k^{(n)}, \xi_{s,x}^{(n)}(t_k^{(n)})\right)\zeta_k^{(n)}\sqrt{\tau - t_k^{(n)}},$$

де $\left(\zeta_k^{(n)}\right)_{k=0,1,\ldots,k_n}$, $n = 1, 2, \ldots,$ – послідовність серій незалежних в кожній серії нормальних випадкових векторів в $\mathbb{R}^d$ з нульовим середнім та одиничною коваріаційною матрицею.

За певних умов на задані поля, С. Бернштейн довів, що розподіл величини $\xi_{s,x}^{(n)}(t)$ збігається, коли $n \to \infty$, до граничного розподілу, який є абсолютно неперервним відносно лебегової міри в $\mathbb{R}^d$. Щільність того розподілу задовольняє рівняння Фоккера-Планка з коефіцієнтами $a(s,x)$ та $b(s,x) = \sigma(s,x)\sigma^*(s,x)$, $(s,x) \in [0,T] \times \mathbb{R}^d$.

Дуже важливою обставиною в цій розповіді є той факт, що в 1939 році до цього ж рівняння прийшов молодий київський математик (йому тоді було 30 років) М. М. Боголюбов разом зі своїм учителем М. М. Криловим. В своїй тогорішній публікації з промовистою назвою «Про рівняння Фоккера-Планка, що виводиться в теорії пертурбацій методом, заснованим на спектральних властивостях пертурбаційного гамільтоніана», вони також доводили, що певна динамічна система під впливом швидко змінних факторів, які переходять в «білий шум», в границі описується рівнянням Фоккера-Планка (див. [15]).

Як вже згадувалось, Й. І. Гіхман закінчив навчання в Київському університеті в 1939 році і, ставши в тому ж році аспірантом М. М. Боголюбова, змушений був підключатись до тих розмірковувань, якими в той час переймався його учитель. До війни Й. І. Гіхман встиг опублікувати дві статті, які були в руслі вже цитованої роботи Крилова-Боголюбова.

Й. І. Гіхман був учасником війни від її початку і до кінця. Цікаво, що свою кандидатську дисертацію він захистив під час війни (точніше, в лютому 1942 року) в Ташкенті. Його військова частина проходила там переформування, і він мав нагоду скористуватися тією сприятливою обставиною, що в Ташкенті на той час вже була сформована сильна ймовірнісна школа.

2. Стохастичні диференціальні рівняння

2.1. Зародження ідеї. Повернувшись після війни до Києва, Й. І. Гіхман почав розмірковувати над тим, як будувати випадкові процеси типу тих, що звуться дифузійними. Підхід А. Н. Колмогорова – це намагання будувати розв'язки рівняння Колмогорова-Чепмена з допомогою лінеаризації того рівняння. Цей підхід дає змогу конструювати скінченно-вимірні розподіли процесу, а отже, і сам процес з допомогою теореми Колмогорова про узгодженість тих розподілів.

Тепер важко сказати, як саме прийшла до Й. І. Гіхмана надзвичайно смілива думка про те, що можна спробувати будувати не якісь ймовірнісні характеристики шуканого процесу, а безпосередньо його траєкторії як розв'язки певного диференціального рівняння. Здається, що саме тут могла відіграти свою роль та обставина, що учителем Й. І. Гіхмана був такий корифей школи математичної фізики, як М. М. Боголюбов.

Ідея Й. І. Гіхмана полягала в тому, що має бути заданим векторне поле випадкових процесів $(\alpha(t,x))_{(t,x)\in[0,T]\times\mathbb{R}^d}$, яке має задавати локальну поведінку шуканого процесу $(x(t))_{t\in[0,T]}$ в тому розумінні, що при $0 \leqslant t < t+\Delta t \leqslant T$ мусить виконуватись приблизна рівність

$$x(t+\Delta t) - x(t) \cong \alpha(t+\Delta t, x(t)) - \alpha(t, x(t)).$$

Ця рівність має бути тим точнішою, чим меншим є значення $\Delta t > 0$. Крім того, треба вибрати початковий момент часу $s \in [0,T)$, задати початкову умову $x(s) = \xi$ (ξ – довільна точка $\mathbb{R}^d$) і тоді можна сформулювати проблему.

Знайти умови на задане поле випадкових процесів $(\alpha(t,x))_{(t,x)\in[0,T]\times\mathbb{R}^d}$, за яких існує такий випадковий процес $(x(t))_{t\in[s,T]}$ в $\mathbb{R}^d$, що задовольняє наступні умови:

$A_1)$ $x(s) = \xi$;

$A_2)$ при всіх $t \in [s,T)$ виконуються рівності

$$\lim_{\Delta t\downarrow 0} \frac{1}{\Delta t}\mathbb{E}\left|x(t+\Delta t) - x(t) - (\alpha(t+\Delta t, x(t)) - \alpha(t,x(t)))\right|^2 = 0,$$

$$\lim_{\Delta t\downarrow 0} \tfrac{1}{\Delta t^2}\mathbb{E}\big|\mathbb{E}\big[(x(t+\Delta t) - x(t) - (\alpha(t+\Delta t, x(t)) - \alpha(t,x(t)))) \mid \mathcal{M}_t^s\big]\big|^2 = 0,$$

де $(\mathcal{M}_t^s)_{s\leqslant t}$ спільна історія (фільтрація), породжена усіма випадковими векторами $\alpha(\tau,x)$ при $\tau \in [s,t]$ та $x \in \mathbb{R}^d$.

Зауважимо, що друга границя в умові $A_2)$ означає, що випадкові фактори приросту $\alpha(t+\Delta t, x(t)) - \alpha(t,x(t))$, які могли би мати порядок $\sqrt{\Delta t}$, мусять «зникати», коли береться умовне середнє того приросту при фіксованому $\mathcal{M}_t^s$. Трохи згодом Й. І. Гіхман дійшов висновку, що задане поле випадкових процесів має бути, так би мовити, двопараметричним: $\alpha(t,x,h)$, $(t,x) \in [0,T]\times\mathbb{R}^d$, $h > 0$; при фіксованих (t,x) це має бути випадковий процес по змінній h, причому $\alpha(t,x,0+) = 0$. Прикладом такого поля може бути

$$\alpha(t,x,h) = a(t,x)h + \sigma(t,x)[w(t+h) - w(t)], \tag{2.1}$$

де $(a(t,x))_{(t,x)\in[0,T]\times\mathbb{R}^d}$ та $(\sigma(t,x))_{(t,x)\in[0,T]\times\mathbb{R}^d}$ задані поля, відповідно векторне і операторне, а $(w(t))_{t\geqslant 0}$ заданий вінерів процес в $\mathbb{R}^d$, тобто, найпростіший дифузійний процес, що описує рух мікроскопічної частинки в нерухомому ізотропному середовищі типу рідини чи газу. В цьому випадку друга умова в $A_2)$ зводиться до такої

$$\mathbb{E}\big|\mathbb{E}\big[(x(t+\Delta t)-x(t)-a(t,x(t))\Delta t-\sigma(x(t))[w(t+\Delta t)-w(t)]) \mid \mathcal{M}_t^s\big]\big|^2 = \\ = \mathbb{E}\big|\mathbb{E}\big[(x(t+\Delta t)-x(t)-a(t,x(t))\Delta t) \mid \mathcal{M}_t^s\big]\big|^2 = o\big(\Delta t^2\big),$$

за умови, що випадковий вектор $w(t+\Delta t)-w(t)$ не залежить від подій із σ-алгебри $\mathcal{M}_t^s$.

Загальний результат Й. І. Гіхмана, сформульований в [9], звучить так: за певних умов на поле $\alpha(t,x)$, $(t,x) \in [0,T] \times \mathbb{R}^d$, типу умови Ліпшиця по просторовій змінній, накладеної на умовні середні приростів поля, існує єдиний $(\mathcal{M}_t^s)$-узгоджений випадковий процес $(x_{s,\xi}(t))_{t\in[s,T]}$, який задовольняє умови $A_1)$-$A_2)$.

В частинному випадку поля (2.1) справа зводилась до простих умов Ліпшиця зі сталою $K>0$ на функцію σ

$$\|\sigma(t,x)-\sigma(t,y)\| \leqslant K|x-y|, \quad t\in[0,T],\ x\in\mathbb{R}^d,\ y\in\mathbb{R}^d,$$

та функцію a

$$(a(t,x)-a(t,y),x-y) \leqslant K|x-y|^2, \quad t\in[0,T],\ x\in\mathbb{R}^d,\ y\in\mathbb{R}^d$$

(ця форма умови Ліпшиця враховує напрямок поля a; саме таку умову використовував С. Бернштейн в [2]). В цьому випадку Й. І. Гіхман довів, що рівняння

$$\mathrm{d}x(t) = a(t,x(t))\,\mathrm{d}t + \sigma(t,x(t))\,\mathrm{d}w(t), \quad t\in[s,T],$$

при умові $x(s)=\xi$ ($\xi\in\mathbb{R}^d$ невипадковий вектор) має єдиний роз'язок, який є процесом Маркова. Позначимо цей роз'язок через

$$(x_{s,\xi}(t))_{t\in[s,T]}.$$

Й. І. Гіхман не зупинився на теоремі існування і єдиності роз'язку. За умови, що функції a та σ є тричі неперервно диференційовними по просторовій змінній, він довів, що функція $u(s,\xi) = \mathbb{E}\varphi(x_{s,\xi}(t))$, $(s,\xi)\in[0,t)\times\mathbb{R}^d$, (при заданій гладкій $(\varphi(x))_{x\in\mathbb{R}^d}$) є двічі неперервно диференційовною по змінній ξ, а отже, за теоремою Колмогорова вона диференційовна і по s, і задовольняє обернене рівняння Колмогорова

$$u'_s(s,\xi) + \big(a(s,\xi),u'_\xi(s,\xi)\big) + \tfrac{1}{2}\mathrm{Tr}\left(b\,(s,\xi)\,u''_{\xi\xi}(s,\xi)\right) = 0,$$

в якому $b(s,\xi) = \sigma\,(s,\xi)\,\sigma^*\,(s,\xi)$.

Це був надзвичайно сильний результат: те, що в теорії Колмогорова було, так би мовити, «темним» припущенням, у Й. І. Гіхмана стверджувалось. Цим відкривалося проникнення чисто ймовірнісних методів у таку класичну область математики, як диференціальні рівняння з частинними похідними параболічного типу. Справді, будується певний випадковий процес, а з його допомогою знаходиться розв'язок задачі Коші для відповідного рівняння Колмогорова. Це докорінно відрізнялось від того інструментарію, яким володіли спеціалісти з рівнянь такого типу.

В серії публікацій початку 1950 років (див. [10, 11]) Й. І. Гіхман розвинув ідеї статті [9]. Слід також сказати, що його заслугою перед теорією стохастичних диференціальних рівнянь є той факт, що під його впливом до серйозних занять в цій новій галузі математики долучився, починаючи з 1957 року, молодий тоді математик А. В. Скороход, який щойно повернувся до Києва після навчання в аспірантурі при Московському університеті протягом 1953-56 років.

2.2. **Перша книга А. В. Скорохода.** Наприкінці 1961 року вийшла з друку монографія А. В. Скорохода [20], яка була його докторською дисертацією. Значною мірою вона була присвячена теорії стохастичних диференціальних рівнянь. Слід сказати, що А. В. Скороход під час навчання в аспірантурі в Москві встиг ознайомитися з підходом К. Іто до теорії стохастичних диференціальних рівнянь. Щодо підходу Й. І. Гіхмана до цієї теорії, він його осягнув уже в Києві під час розмов між ними, які за свідченням А. В. Скорохода стали регулярними після його повернення з Москви.

Тим більше вражає відвага і сміливість думки А. В. Скорохода, який запропонував цілком новий погляд на стохастичне диференціальне рівняння. Якщо у Й. І. Гіхмана і К. Іто розв'язок такого рівняння був певним функціоналом від заданого вінерового процесу, то А. В. Скороход використав принцип компактності мір (в просторі неперервних функцій), що відповідають випадковим процесам, і зумів побудувати розв'язки стохастичного диференціального рівняння за умови, що коефіцієнти є лише неперервними функціями. Саме цей революційний крок А. В. Скорохода призвів до понять слабкого та сильного розв'язків.

З цим пов'язаний захоплюючий період в історії розвитку теорії стохастичних диференціальних рівнянь. Повчальною в цьому сенсі є стаття [16] московських математиків А. К. Звонкіна та Н. В. Крилова: їх результат дає критерій існування сильного розв'язку даного стохастичного диференціального рівняння в термінах його коефіцієнтів. Хоч скористуватись тим критерієм в конкретних ситуаціях непросто, проте сам факт, що питання про наявність (чи відсутність) сильного розв'язку визначається повністю коефіцієнтами, а не вдалим (чи невдалим) вибором ймовірнісного простору, важив немало.

Другим важливим результатом книги можна назвати теорему порівняння розв'язків пари стохастичних диференціальних рівнянь, у яких збігаються коефіцієнти дифузії (в одновимірному випадку), а їх коефіцієнти переносу були пов'язані певною нерівністю. Доводилось, що якщо й початкові положення розв'язків цих рівнянь пов'язані тією ж нерівністю, то нею пов'язані ці розв'язки в будь-який момент часу після початкового. З цього факту автор книги зумів ефектно вивести єдиність розв'язку стохастичного диференціального рівняння за умов суттєво слабших, ніж умова Ліпшиця по просторовій змінній.

До книги не увійшли піонерські роботи А. В. Скорохода кінця 1950-х – початку 1960-х років, присвячені теорії стохастичних диференціальних рівнянь в обмеженій області. Ці його дослідження стимулювали цікавість до проблеми в різних ймовірнісних центрах світу. Ця цікавість підтримується і донині, про що свідчить хоча б доповідь професора А. Ю. Пилипенка «Про узагальнення проблеми відбиття Скорохода», зроблена на засіданні семінару «Числення Маллявена» при Інституті математики НАН України, що відбулося 7 березня 2023 року.

2.3. **Перша книга з теорії стохастичних диференціальних рівнянь.** В 1968 році в київському видавництві «Наукова думка» вийшла з друку монографія Й. І. Гіхмана та А .В. Скорохода [13] присвячена повністю теорії стохастичних диференціальних рівнянь. В деяких книгах, опублікованих раніше, можна знайти фрагменти цієї теорії, наприклад, [3, 12, 20].

Книга [13] складається з двох частин. В першій з них в одновимірному випадку розглядається рівняння

$$\mathrm{d}x(t) = a(t, x(t))\,\mathrm{d}t + \sigma(t, x(t))\,\mathrm{d}w(t),$$

в якому a та σ – задані при $(t, x) \in [0, T] \times \mathbb{R}^1$ функції з дійсними значеннями, а $(w(t))_{t\geqslant 0}$ – одновимірний вінерів процес. Викладена в цій книзі теорія таких рівнянь є надзвичайно багатою. Крім теорем існування та єдиності розв'язку, сформульовано низку тверджень про асимптотичну поведінку розв'язків, коли $t \to \infty$, детально описується взаємодія між теорією рівнянь цього типу та теорією дифузійних процесів у розумінні Колмогорова, а отже, і з теорією диференціальних рівнянь з частинними похідними. Особливу увагу приділено теорії стохастичних диференціальних рівнянь на скінченному просторовому проміжку (процеси з граничними точками).

В другій частині книги в багатовимірній ситуації розглянуто рівняння складнішого типу, зокрема, такі, коли до правої частини додаються ще стохастичні диференціали по центрованій і нецентрованій пуассоновій мірі. Сформульовано низку теорем існування та єдиності розв'язку таких рівнянь, досліджено їх асимптотичну поведінку, коли $t \to \infty$ (теореми про стійкість розв'язків, про їх обмеженість тощо). З теперішньої точки зору деякі місця цієї другої частини книги заслуговують на критику. Очевидно, що і в ті часи, коли книга з'явилася, авторам доводилось вислуховувати критичні зауваження. Тому в 1982 р. автори публікують нову версію книги в якій намагаються врахувати тодішні досягнення світової школи теорії ймовірностей, особливо французької школи. Однак на той час така книга, здається, вже втратила актуальність.

2.4. **Розширений стохастичний інтеграл.** Як вже зазначалось, в основі теорії стохастичних диференціальних рівнянь лежить поняття стохастичного інтеграла Іто, в якому вирішальну роль відіграє та обставина, що значення функції, яка інтегрується, в моменти часу $\tau \leqslant s$ не залежать від приростів вінерового процесу по якому будується інтеграл, після моменту часу s (не залежать в ймовірнісному сенсі).

В 1975 році А. В. Скороход в статті [21] ввів поняття розширеного стохастичного інтеграла по гауссовій центрованій мірі від випадкових функцій з досить широкого класу. Це поняття виявилось надзвичайно цікавим з багатьох точок зору, зокрема, воно використовується під назвою «інтеграл Скорохода» в деяких теоріях сучасної фізики. Еволюція цього поняття протягом 30-и років після його введення в науковий обіг описана в статті [4] А. А. Дороговцева (одного з учнів А. В. Скорохода), який нині завідує відділом теорії випадкових процесів Інституту математики і є визнаним експертом в стохастичному аналізі.

2.5. **Ю. Л. Далецький та його учні.** Юрію Львовичу належать такі слова: «Неможливо не знати теорії ймовірностей, перебуваючи в одній компанії з Й. І. Гіхманом та А. В. Скороходом». Ці слова можуть сприйматися як жарт, проте це – саме той жарт, в якому лише частка жарту. Насправді автор цих слів був одним з перших математиків не ймовірнісного профілю, хто зрозумів всю важливість того нового, що з'явилось в роботах Й. І. Гіхмана та А. В. Скорохода, а саме, теорії стохастичних диференціальних рівнянь. І, до його честі, він зумів підхопити нові ідеї. Його результати з теорії стохастичних диференціальних рівнянь на гільбертових та банахових просторах дозволили йому та його учням по-новому підійти до дослідження еволюційних рівнянь в таких просторах. Що ж стосується теорії стохастичних диференціальних рівнянь на многовидах (як скінченої, так і нескінченної кількості вимірів), то тут Юрій Львович був одним з піонерів, а його результати, отримані спільно з учнями, стали тепер класичними в цій галузі (див. монографію [14]).

2.6. **Дві точки зору на стохастичне диференціальне рівняння.** Розглянемо стохастичне диференціальне рівняння

$$\mathrm{d}x(t) = a(t, x(t))\,\mathrm{d}t + \sigma(t, x(t))\,\mathrm{d}w(t), \tag{2.2}$$

в якому $(w(t))_{t\geqslant 0}$ – заданий вінерів процес в $\mathbb{R}^d$, а задані на множині $(t, x) \in [0, T] \times \mathbb{R}^d$ векторне поле $a(t, x)$ та операторне поле $\sigma(t, x)$ задовольняють умови існування і єдиності розв'язку (локальна умова Ліпшиця по просторовій змінний і обмеження на можливе зростання коефіцієнтів, коли $|x| \to +\infty$: це зростання має не перевищувати зростання функції $K(1 + |x|)$ зі сталою $K > 0$).

Рівняння (2.2) можна розглядати як результат збурення рівняння

$$\mathrm{d}x(t) = a(t, x(t))\,\mathrm{d}t \tag{2.3}$$

випадковим фактором, що породжується вінеровим процесом $(w(t))_{t\geqslant 0}$. Якщо (2.3) визначає динамічну систему, то рівняння (2.2) описує її поведінку під дією згаданих випадкових факторів.

Іншим поглядом на рівняння (2.2) є той, згідно з яким воно є результатом збурення рівняння

$$\mathrm{d}x(t) = \sigma(t, x(t))\mathrm{d}w(t) \tag{2.4}$$

векторним полем $(a(t, x))_{t\geqslant 0, x\in\mathbb{R}^d}$. Виявляється, що рівняння (2.4) можна збурювати такими полями $(a(t, x))_{t\geqslant 0, x\in\mathbb{R}^d}$, для яких рівняння (2.3) не породжує жодної динамічної системи. Наприклад, таким полем може бути

$$a(t, x) = q(x)\delta_S(x)N(t, x),\ t \geqslant 0,\ x \in \mathbb{R}^d,$$

де S – задана досить гладенька гіперповерхня в $\mathbb{R}^d$, $(\delta_S(x))_{x\in\mathbb{R}^d}$ – узагальнена функція, яка діє на тестову функцію $(\varphi(x))_{x\in\mathbb{R}^d}$ згідно з правилом

$$\langle \delta_S, \varphi \rangle = \int_S \varphi(x)\,\mathrm{d}S$$

(поверхневий інтеграл), $(q(x))_{x\in\mathbb{R}^d}$ – задана неперервна функція зі значеннями в проміжку $[-1, 1]$, а $(N(t, x))_{t\geqslant 0, x\in S}$ – конормаль до гіперповерхні S, тобто, $N(t, x) = b(t, x)\nu(x)$ для $t \geqslant 0$ та $x \in S$ (тут $\nu(x)$ – нормаль до S в точці x, а $b(t, x) = \sigma(t, x)\sigma^*(t, x)$).

Ясна річ, що такий процес не може бути дифузійним в сенсі Колмогорова, проте він є таким в деякому узагальненому сенсі. Узагальнені дифузійні процеси є предметом розгляду монографії [19], а також низки публікацій моїх колишніх учнів, а тепер – колег – О. В. Арясової, Б. І. Копитка, М. М. Осипчука.

2.7. Граничні теореми. В рамках української школи теорії стохастичних диференціальних рівнянь популярними є задачі наступного типу.

Припустимо, що рівняння (2.2) має єдиний розв'язок, але для рівняння (2.3) не виконується теорема єдиності розв'язку, а отже, рівняння (2.3) визначає не одну динамічну систему. Припустимо також, що оператор $\sigma(s,x)$, $s \in [0,T]$, $x \in \mathbb{R}^d$, в рівнянні (2.2) множиться на $\varepsilon > 0$, і ми цікавимось граничною поведінкою відповідного розв'язку, коли $\varepsilon \to 0$. Низку надзвичайно цікавих тверджень такого типу одержано в роботах С. Я. Махна та його учнів, а також в роботах О. М. Кулика та А. Ю. Пилипенка разом з колегами (див. [1,7,18]).

2.8. Приклад Г. Л. Кулініча. Одним з учнів А. В. Скорохода був Г. Л. Кулініч. Він закінчив свій життєвий шлях 10 лютого 2022 року. Як знак пам'яті про цього прекрасного математика і вірного друга, наведу тут один з його яскравих результатів [17], що є справжньою перлиною теорії стохастичних диференціальних рівнянь. Цим і закінчу цю мою статтю.

Розглянемо послідовність одновимірних стохастичних диференціальних рівнянь

$$\mathrm{d}x_n(t) = a_n(x_n(t))\,\mathrm{d}t + \mathrm{d}w(t), \tag{2.5}$$

де $(w(t))_{t\geqslant 0}$ – одновимірний вінерів процес, а функція $(a_n(x))_{x\in\mathbb{R}^1}$ для $n = 1, 2, \ldots$ визначається рівністю $a_n(x) = n\cos(nx)$, $x \in \mathbb{R}^1$. Виявляється, і це – результат Григорія Логвиновича майже 50-літньої давності, що послідовність випадкових процесів $(x_n(t))_{t\geqslant 0}$ слабко збігається, коли $n \to \infty$, до процесу $(x(t))_{t\geqslant 0}$, який можна записати в такій формі

$$\mathrm{d}x(t) = k^{-1}\mathrm{d}w(t), \tag{2.6}$$

де $k = \sum_{j=0}^{\infty}(j!)^{-2}$. Отже, як бачимо, граничний перехід від (2.5) до (2.6) приводить до того, що в границі коефіцієнт переносу зникає, а коефіцієнт дифузії зменшується. Цікаво, як реагує інтуїція читача на запитання, чому коефіцієнт дифузії мусить саме зменшуватись.

Література

[1] Pilipenko A. and F. N. Proske. On perturbation of an ODE with non-Lipschitz coefficients by a small self similar noise. *Statistics and Probability Letters*, 132:62–73, 2018.

[2] S. Bernstein. Principles de la théorie des équations différentielles stochastiques. *Trudy Fiz. - Mat. Inst. Steklov.*, 5:94–124, 1934.

[3] J. L. Doob. *Stochastic processes.* New York, John Wiley and sons, London, Chapman and Hall, 1953.

[4] A. A. Dorogovtsev. The evolution of the Skorokhod integral. In *Anatoliy V. Skorokhod, Selected Works*, pages 321–328. Springer Verlag, 2016.

[5] W. Feller. Zur Theorie der stochastischen Processe Existenz und Eindeutigkeitssätze. *Math. Ann.*, 113:113–160, 1936/37.
[6] A. N. Kolmogorov. Über die analytischen Methoden in der Wahrscheinlichkeitsrechnung. *Math. Ann.*, 104:415–458, 1930/31.
[7] A. Kulik and I. Pavlyukevich. Limit theorem for non-linear Langevin equations driven by Lévy noise. *Annales de l'Institut Henri Poincaré*, 55(3):1278–1315, 2019.
[8] N. Wiener. Differential space. *J. Math. and Phys.*, 2:131–174, 1922/23.
[9] И. И. Гихман. Об одной схеме образования случайных процессов. *Докл. АН СССР*, LVIII(6):961–964, 1947.
[10] И. И. Гихман. О некоторых дифференциальных уравнениях со случайными процессами. *Укр. матем. журн.*, 2:45–69, 1950.
[11] И. И. Гихман. К теории дифференциальных уравнений случайных процессов. *Укр. матем. журн.*, (2(3)):37–63(317–339), 1950(1951).
[12] И. И. Гихман and А. В. Скороход. *Введение в теорию случайных процессов.* Москва, Наука, 1965.
[13] И. И. Гихман and А. В. Скороход. *Стохастические дифференциальные уравнения.* Киев, Наукова думка, 1968.
[14] Ю. Л. Далецкий and Я. И. Белопольская. *Стохастические уравнения и дифференциальная геометрия.* Київ, Вища школа, 1989.
[15] М. М. Крилов and М. М. Боголюбов. Про рівняння Фоккера-Планка, що виводиться в теорії пертурбацій методом, заснованим на спекральних властивостях пертурбаційного гамільтоніана. *Записки кафедри математичної фізики*, 4:5–80, 1939.
[16] А. К. Звонкин и Н. В. Крылов. О сильных решениях стохастических дифференциальных уравнений. *Труды школы-семинара по теории случайных процессов (Друскининкай, 1974)*, II:9–88, 1975.
[17] Г. Л. Кулініч. Предельные теоремы для одномерных стохастических дифференциальных уравнений с нерегулярной зависимостью коэффициентов от параметра. *Теория вероятностей и матем. статистика*, 15:99–114, 1976.
[18] С. Я. Махно and И. Г. Крыкун. Явление Пеано для уравнений Ито. *Український математичний вісник*, 10(1):87–109, 2013.
[19] Н. И. Портенко. *Обобщённые диффузионные процессы.* Київ, Наукова думка, 1982.
[20] А. В. Скороход. *Исследования по теории случайных процессов.* Киев, Изд-во Киевск. ун-та, 1961.
[21] А. В. Скороход. Об одном обобщении стохастического интеграла. *Теория вероятн. и её примен.*, 20(2):223–238, 1975.

М. І. Портенко
Інститут математики НАН України, м. Київ
Email: portenko@imath.kiev.ua
ORCID: 0000-0003-1425-0628

Збірник праць Ін-ту математики НАН України (2023) т. 20, №1, 729–804

Advances in theory of evolution equations of many colliding particles

V. I. Gerasimenko, I. V. Gapyak

Abstract. The review presents rigorous results of the theory of fundamental equations of evolution of many-particle systems with collisions and also considers their connection with nonlinear kinetic equations describing the collective behavior of particles in scaling approximations.

Анотація. В огляді подано строгі результати теорії фундаментальних еволюційних рівнянь систем багатьох частинок із зіткненнями, а також розглянуто їх зв'язок із нелінійними кінетичними рівняннями, які описують колективну поведінку частинок у скейлінгових наближеннях.

Contents

2020 Mathematics Subject Classification: 35C10; 35Q20; 82C05; 82D05; 70F45

Keywords: hierarchy of evolution equations; kinetic equation; cumulant; semigroup of operators; colliding particles

DOI: http://dx.doi.org/10.3842/trim.v20n1.528

1. Preface

This review presents the modern theory of evolution equations for systems of many particles with collisions. The traditional approach to describing the evolution of both finitely and infinitely many classical particles is based on the description of the evolution of all possible states by means of the reduced distribution functions governed by the BBGKY hierarchy (Bogolyubov–Born–Green–Kirkwood–Yvon), which for finitely many particles is an equivalent to the Liouville equation for the probability distribution function [14, 82, 83].

As is known, in the basis of the description of many-particle systems, there are notions of the state and the observable. The functional of the mean value of observables defines a duality between observables and states, and as a consequence, there exist two approaches to the description of evolution. Thus, an equivalent approach to the description of evolution is to describe the evolution by means of observables governed by the so-called dual BBGKY hierarchy for reduced observables [10, 51].

In certain situations [14], the collective behavior of many-particle systems can be adequately described by the kinetic equations. The conventional philosophy of the description of kinetic evolution consists of the following: if the initial state is specified by a one-particle reduced distribution function, then the evolution of the state can be effectively described by means of a one-particle reduced distribution function governed by the nonlinear kinetic equation in a suitable scaling limit. A well-known historical example of a kinetic equation is the Boltzmann equation, which describes the process of particle collisions in rarefied gases [13].

Nowadays, a number of papers have appeared that discuss possible approaches to the rigorous description of the evolution of many colliding particles [25, 29, 52, 88, 89, 92, 94]. In particular, this is related to the problem of the rigorous derivation of the Boltzmann kinetic equation from the underlying hierarchies of fundamental evolution equations. The conventional method of deriving the Boltzmann equation consists of constructing the Boltzmann–Grad scaling asymptotics of the BBGKY hierarchy solution represented by series expansions within the framework of perturbation theory. The most advanced and rigorous results to date have been obtained for systems of colliding particles, which is why the motivation for writing this work is to discuss the theory of evolution equations for such many-particle systems [4, 52, 98].

In what follows, we mainly consider three challenges are left open until recently [52].

One of them is related to the construction of solutions to the Cauchy problem for hierarchies of fundamental evolution equations for systems of many particles with collisions, using the example of hard spheres with elastic collisions. It is established that the cluster expansions of groups of operators for the Liouville equations for observables and a state of many hard spheres underlie the classification of possible non-perturbative solution representations of the Cauchy problem for the dual BBGKY hierarchy and the BBGKY hierarchy, respectively. As a consequence, these solutions are represented in the form of series expansions whose generating operators are the cumulants of the groups of operators for the Liouville equations. In a particular case, the non-perturbative solutions of these hierarchies are represented in the form of the perturbation (iteration) series as a result of applying analogs of the Duhamel equation to their generating operators. The paper also formulated the Liouville hierarchy of evolution equations for correlation functions of the state and established that the dynamics of correlations underlie the description of the evolution of an infinitely many hard spheres that are governed by the BBGKY hierarchy for the reduced distribution functions or the hierarchy of nonlinear evolution equations for the reduced correlation functions [53].

Another challenge considered below is an approach to the description of the kinetic evolution within the framework of the evolution of the observables of many colliding particles [51]. The problem of a rigorous description of the kinetic evolution of hard sphere observables is considered by giving the example of the Boltzmann–Grad asymptotics of the non-perturbative solution of the dual BBGKY hierarchy. One of the advances of this approach is the opportunity to construct kinetic equations, taking into account the correlations of particles in the initial state and also the description of the process of propagation of initial correlations in scaling approximations.

In addition, this paper discusses the approach to describing the evolution of a state by means of the state of a typical particle of a system of many hard spheres, or, in other words, we consider the origin of the description of the evolution of the state of hard spheres by the Enskog-type kinetic equation [47]. One of the applications of the method is related to the challenge of the rigorous derivation of kinetic equations of the non-Markovian type based on the dynamics of correlations, which allow us to describe the memory effects in complex systems.

Thus, this review presents rigorous results in the theory of fundamental evolution equations for many-particle systems with collisions, as well as nonlinear kinetic equations describing their collective behavior in scaling approximations.

1.1. **A chronological overview of the theory of evolution equations for many colliding particles.** The theory of kinetic equations begins with the work of L. Boltzmann [9], where an evolution equation for collision dynamics was formulated based on phenomenological models of kinetic phenomena. Later, to generalize the Boltzmann equation for the case of dense gases or fluids, D. Enskog [26] formulated a kinetic equation for a system of many hard spheres, now known as the Enskog equation.

The idea that equations formulated on the basis of phenomenological models of phenomena, such as hydrodynamics equations or kinetic equations, should be derived from fundamental evolutionary equations for systems of many particles, namely the Liouville equations, apparently goes back to the works of D. Hilbert [76] and H. Poincaré [85]. At the Second International Congress of Mathematicians, held in Paris at the beginning of the 20th century, D. Hilbert formulated this idea in his list of open questions as follows: "Boltzmann's work on the principles of mechanics suggests the problem of developing mathematically the limiting processes that lead from the atomistic view to the laws of motion of continua".

The approach to describe the evolution of the state of many-particle systems in a way equivalent to the Liouville equation for the probability distribution function based on the hierarchy of evolution equations for reduced distribution functions, known in our time as the BBGKY hierarchy, was most consistently formulated in the work of M. M. Bogolyubov [6], and independently by M. Born and H. S. Green [11], J. G. Kirkwood [77], J. Yvon [100].

In his famous monograph "Problems of the Dynamical Theory in Statistical Physics" [6], which was actually the manuscript of a 1945 report at the Institute of Mathematics in Kyiv, M. M. Bogolyubov also formulated a consistent approach to the problem of deriving kinetic equations from the dynamics of many particles. Using the methods of perturbation theory, an approach was developed to construct a generalization of the Boltzmann equation, known as the Bogolyubov kinetic equation, as well as justify the Vlasov and Landau kinetic equations for the first time. Thanks to this work, the irreversibility mechanism of the evolution of systems of many particles, whose dynamics are described as reversible in time by the fundamental equations of motion, became clear. A little later, in the Proceedings of the Institute of Mathematics, M. M. Bogolyubov published a paper on the derivation of the equations of hydrodynamics from the BBGKY hierarchy [5]. These works became widely known as a result of G. E. Uhlenbeck's lectures [16]. Bogolyubov's ideas became the cradle of modern kinetic theory, as M. H. Ernst noted in his review [27]. The Bogolyubov method of deriving the Boltzmann kinetic equation directly from the BBGKY hierarchy is presented in modern terminology in the book [14].

Since these lines are written in the work dedicated to the 160th anniversary of the birth of Dmytro Oleksandrovych Grave, the first academician of the Ukraine Academy of Sciences in mathematics and the founder of the Institute of Mathematics in 1920, it should be reminded that M. M. Bogolyubov was one of the students of D. O. Grave, thanks to whom he became an outstanding scientist in the field of mathematical physics. It is known that in 1922 at the age of thirteen, M. Bogolyubov became a participant in Grave's famous mathematician seminar. In 1925, at the request of professor D. O. Grave, the Small Presidium of Ukrgolovnauka made a decision: "In view of his phenomenal abilities in mathematics, to consider M. Bogolyubov as a post-graduate student of the research department of mathematics in Kyiv from June, 1925", and already in 1928 he defended his doctoral thesis. By the way, this historical precedent convincingly illustrates the significance of a scientific school for the development of mathematics.

Rigorous methods for the description of the equilibrium state by the Gibbs distribution functions [71], i.e., by solutions of the steady BBGKY hierarchy, originate from the works of M. M. Bogolyubov and D. Ya. Petrina within the framework of a canonical ensemble [7] and D. Ruelle within the framework of a grand canonical ensemble [90] and were investigated in numerous works as a new direction of the progress of modern mathematical physics in the 70-80s. In our time, mention above work of M. M. Bogolyubov, D. Ya. Petrina and B. I. Khatset was included in the special issue of the Ukrainian Journal of Physics dedicated to the 90th Academy of Sciences of Ukraine, which was was republished the most significant works of Ukrainian physicists over the entire period of the Academy's existence, in other words, works that contributed to the golden fund of world physical science (Golden Pages of Ukrainian Physics [8]).

Note that the mathematical description of the Gibbs equilibrium states for infinitely many particles forms the principal part of modern statistical mechanics. The main rigorous results about the equilibrium Gibbs states were presented in the book [64].

The mathematical theory of the BBGKY hierarchy originates from the works of D. Ya. Petrina and V. I. Gerasimenko [56–58, 81, 82] in the early 80s. The dual BBGKY hierarchy for reduced functions of observables was introduced by V. I. Gerasimenko in the middle of the 1980s, and the theory of these evolution equations began to develop in the last two decades (see [52] and references therein).

Mathematical methods for deriving nonlinear kinetic equations from the BBGKY hierarchy began to develop intensively in the early 1980s [12, 79]. One of the achievements of this period was the formal derivation of the Boltzmann equation from the dynamics of an infinite number of hard spheres in the Boltzmann–Grad limit.

In the approach to the problem of deriving kinetic equations from particle dynamics, which was formulated by H. Grad [73] and has now become generally accepted, the philosophy of the description of kinetic evolution looks like this: if the initial state is specified by a one-particle distribution function, then the evolution of the state of many particles can be effectively described by means of a one-particle distribution function governed by a nonlinear kinetic equation in a certain scaling approximation.

The Boltzmann–Grad asymptotics of a solution of the BBGKY hierarchy, represented as an iteration series for infinitely many hard spheres, was first constructed by C. Cercignani [12] and O. E. Lanford [79] and rigorously justified in a series of papers [59–61, 83] by D. Ya. Petrina and V. I. Gerasimenko (some details are given in sections 2.2 and 3.1). Incidentally, it should be noted that the results of the papers [57, 59] were discussed with Academician M. M. Bogolyubov at that time and were submitted by him for publication.

Rigorous results of the theory of evolution equations for hard spheres and the derivation of the Boltzmann equation from the BBGKY hierarchy in the Boltzmann–Grad limit were summarized in monographs C. Cercignani, V. I. Gerasimenko and D. Ya. Petrina [14], C. Cercignani, R. Illner and M. Pulvirenti [15], H. Spohn [95] at the end of the 90th.

The last two decades of progress in solving the problem of rigorous derivation of kinetic equations from the collisional dynamics of particles are represented in numerous recent works [4, 20, 25, 28, 29, 87–89, 92, 94]. The challenges of this area of contemporary mathematical physics are also discussed in the latest review [52]. With respect to the modern progress in the theory of evolution equations of quantum many-particle systems, we refer to the overview [38].

In these notes, recent advances in the theory of evolutionary equations for many colliding particles will be considered; more precisely, we focus on the dynamics of many hard spheres with elastic collisions.

1.2. **Evolution equations of finitely many hard spheres.** The description of many-particle systems is based on the concepts of an observable and a state. The mean value functional (expectation values) of observables defines the duality between observables and a state, and as a result, there are two approaches to describing evolution. The evolution of the system of finitely many colliding particles considered below is governed by such fundamental evolution equations as the Liouville equation for observables or its dual equation for a state.

Within the framework of a non-fixed, i.e., arbitrary but finite average number of identical particles (non-equilibrium grand canonical ensemble), the observables and the state of a hard sphere system are described by the sequences of functions

$$A(t) = (A_0, A_1(t, x_1), \ldots, A_n(t, x_1, \ldots, x_n), \ldots)$$

at instant $t \in \mathbb{R}$ and by the sequence

$$D(0) = (D_0, D_1^0(x_1), \ldots, D_n^0(x_1, \ldots, x_n), \ldots)$$

of the probability distribution functions at the initial moment, respectively. These functions are defined on the phase spaces of the corresponding number of particles, i.e., $x_i \equiv (q_i, p_i) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ is phase coordinates that characterize a center of the i hard sphere with a diameter of $\sigma > 0$ in the space $\mathbb{R}^3$ and its momentum and are symmetrical with respect to arbitrary permutations of their arguments. For configurations of a system of identical particles of a unit mass interacting as hard spheres the following inequalities are satisfied: $|q_i - q_j| \geqslant \sigma$, $i \neq j \geqslant 1$, i.e., the set

$$\mathbb{W}_n \equiv \big\{(q_1, \ldots, q_n) \in \mathbb{R}^{3n} \mid |q_i - q_j| < \sigma$$

for at least one pair $(i, j) : i \neq j \in (1, \ldots, n)\big\}$, $n > 1$, is the set of forbidden configurations.

A mean value functional of the observable of a hard sphere system is represented by the series expansion [83]:

$$\langle A\rangle(t) = (I, D(0))^{-1}(A(t), D(0)), \tag{1.1}$$

where the following abbreviated notation

$$(A(t), D(0)) \equiv \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \int\limits_{(\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3)^n} A_n(t, x_1, \ldots, x_n) D_n^0(x_1, \ldots, x_n) dx_1 \cdots dx_n$$

was used and the coefficient $(I, D(0))$ is a normalizing factor (grand canonical partition function).

We remark that in the particular case of a system of $N < \infty$ hard spheres the observables and a state are described by the one-component sequences:

$$A^{(N)}(t) = (0, \ldots, 0, A_N(t), 0, \ldots)$$

and

$$D^{(N)}(0) = (0, \ldots, 0, D_N^0, 0, \ldots),$$

respectively, and therefore, functional (1.1) has the following representation

$$\langle A^{(N)}\rangle(t) = (I, D^{(N)}(0))^{-1}(A^{(N)}(t), D^{(N)}(0)) \equiv$$
$$\equiv (I, D^{(N)}(0))^{-1}\frac{1}{N!}\int\limits_{(\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3)^N} A_N(t, x_1, \ldots, x_N)D^0_N(x_1, \ldots, x_N)dx_1\cdots dx_N,$$

where

$$(I, D^{(N)}(0)) = \frac{1}{N!}\int\limits_{(\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3)^N} D^0_N(x_1, \ldots, x_N)dx_1\cdots dx_N$$

is the normalizing factor (canonical partition function), and it is usually assumed that the normalization condition $(I, D^{(N)}(0)) = 1$ holds.

Let $\mathcal{C}_\gamma$ be the space of sequences $b = (b_0, b_1, \ldots, b_n, \ldots)$ of bounded continuous functions $b_n = b_n(x_1, \ldots, x_n)$ that are symmetric with respect to permutations of the arguments $x_1, \ldots, x_n$, equal to zero on the set of forbidden configurations $\mathbb{W}_n$ and equipped with the norm:

$$\|b\|_{\mathcal{C}_\gamma} = \max_{n\geqslant 0}\frac{\gamma^n}{n!}\|b\|_{\mathcal{C}_n} = \max_{n\geqslant 0}\frac{\gamma^n}{n!}\sup_{x_1,\ldots,x_n}|b_n(x_1, \ldots, x_n)|,$$

where $0 < \gamma < 1$. We also introduce the space $L^1_\alpha = \oplus_{n=0}^\infty \alpha^n L^1_n$ of sequences $f = (f_0, f_1, \ldots, f_n, \ldots)$ of integrable functions $f_n = f_n(x_1, \ldots, x_n)$ that are symmetric with respect to permutations of the arguments $x_1, \ldots, x_n$, equal to zero on the set $\mathbb{W}_n$ and equipped with the norm:

$$\|f\|_{L^1_\alpha} = \sum_{n=0}^\infty \alpha^n \int\limits_{(\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3)^n} |f_n(x_1, \ldots, x_n)|dx_1\cdots dx_n,$$

where $\alpha > 1$ is a real number. If $A(t) \in \mathcal{C}_\gamma$ and $D(0) \in L^1_\alpha$ mean value functional (1.1) exists and determines the duality between observables and states.

The evolution of the observables

$$A(t) = (A_0, A_1(t, x_1), \ldots, A_n(t, x_1, \ldots, x_n), \ldots)$$

is described by the Cauchy problem for the sequence of the weak formulation of the Liouville equations for hard spheres with elastic collisions [14]. On the space $\mathcal{C}_\gamma$ a non-perturbative solution $A(t) = S(t)A(0)$ of the Liouville equation of many hard spheres is determined by the following group of operators [83]:

$$(S(t)b)_n(x_1,\ldots,x_n) = S_n(t,1,\ldots,n)b_n(x_1,\ldots,x_n) \doteq$$
$$\doteq \begin{cases} b_n(X_1(t,x_1,\ldots,x_n),\ldots,X_n(t,x_1,\ldots,x_n)), \\ \qquad\qquad\qquad \text{if}(x_1,\ldots,x_n)\in(\mathbb{R}^{3n}\times(\mathbb{R}^{3n}\backslash\mathbb{W}_n)), \\ 0, \qquad\qquad\quad \text{if}(q_1,\ldots,q_n)\in\mathbb{W}_n, \end{cases} \tag{1.2}$$

where for arbitrary $t\in\mathbb{R}$ the function $X_i(t)$ is a phase trajectory of ith particle constructed in book [14] and the set $\mathbb{M}_n^0$ of the zero Lebesgue measure, which consists of the phase space points that are specified such initial data that during the evolution generate multiple collisions, i.e., collisions of more than two particles, more than one two-particle collision at the same instant, and an infinite number of collisions within a finite time interval.

On the space $\mathcal{C}_\gamma$ one-parameter mapping (1.2) is an isometric $*$-weak continuous group of operators, i.e., it is a C_0^*-group [19]. The infinitesimal generator $\mathcal{L}=\oplus_{n=0}^{\infty}\mathcal{L}_n$ of the group of operators (1.2) has the structure:

$$\mathcal{L}_n=\sum_{j=1}^{n}\mathcal{L}(j)+\sum_{j_1<j_2=1}^{n}\mathcal{L}_{\mathrm{int}}(j_1,j_2),$$

where the operator $\mathcal{L}(j)$ defined on the set $C_{n,0}$ of continuously differentiable functions with compact supports is the Liouville operator of free evolution of the j hard sphere and for $t\geqslant 0$ the operators $\mathcal{L}(j)$ and $\mathcal{L}_{\mathrm{int}}(j_1,j_2)$ are defined by the formulas [22, 83]:

$$\begin{aligned} &\mathcal{L}(j)\doteq\langle p_j,\frac{\partial}{\partial q_j}\rangle, \\ &\mathcal{L}_{\mathrm{int}}(j_1,j_2)b_n\doteq\sigma^2\int_{\mathbb{S}_+^2}d\eta\langle\eta,(p_{j_1}-p_{j_2})\rangle\delta(q_{j_1}-q_{j_2}+\sigma\eta)\times \\ &\qquad\times\big(b_n(x_1,\ldots,q_{j_1},p_{j_1}^*,\ldots,q_{j_2},p_{j_2}^*,\ldots,x_n)-b_n(x_1,\ldots,x_n)\big), \end{aligned} \tag{1.3}$$

respectively. In formulas (1.3) the symbol $\langle\cdot,\cdot\rangle$ denotes a scalar product, δ is the Dirac measure, $\mathbb{S}_+^2\doteq\{\eta\in\mathbb{R}^3\mid|\eta|=1,\langle\eta,(p_{j_1}-p_{j_2})\rangle>0\}$ and the post-collision momenta: $p_{j_1}^*,p_{j_2}^*$ are defined by the equalities

$$\begin{aligned} p_{j_1}^*&\doteq p_{j_1}-\eta\langle\eta,(p_{j_1}-p_{j_2})\rangle, \\ p_{j_2}^*&\doteq p_{j_2}+\eta\langle\eta,(p_{j_1}-p_{j_2})\rangle. \end{aligned} \tag{1.4}$$

For $t<0$ operator (1.3) is defined by the corresponding expression [14].

It should be noted that the structure of generator (1.3) is determined, on the one hand, by the singular interaction potential of hard spheres and, on the other, by the fact that the group of operators (1.2) is defined for pairwise collisions outside the set $\mathbb{M}_n^0$ of the zero Lebesgue measure defined above in (1.2).

As mentioned above, the evolution of observables for many hard spheres, i.e., the sequences of functions $A_n(t) = S_n(t)A_n^0$, $n \geqslant 1$, is governed by the Cauchy problem for the sequence of the weak formulation of the Liouville equations with these generators [51]:

$$\frac{\partial}{\partial t}A_n(t) = \Big(\sum_{j=1}^{n}\mathcal{L}(j) \ + \sum_{j_1<j_2=1}^{n}\mathcal{L}_{\mathrm{int}}(j_1,j_2)\Big)A_n(t),$$
$$A_n(t)|_{t=0} = A_n^0, \quad n \geqslant 1. \tag{1.5}$$

For mean value functional (1.1) the following representation holds

$$(A(t), D(0)) = (A(0), D(t)),$$

where the sequence $D(t) = (1, D_1(t, x_1), \dots, D_n(t, x_1, \dots, x_n), \dots)$ of distribution functions is defined as follows:

$$D(t) = S^*(t)D(0),$$

and the mapping $S^*(t)$ is an adjoint operator to operator (1.2) in the sense of mean value functional (1.1). We emphasize that this equality is a consequence of a fundamental property of Hamiltonian systems, namely, the validity of the Liouville theorem for phase trajectories [14], i.e., isometry of the groups of operators (1.2).

On the space $L^1_\alpha = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \alpha^n L^1_n$ of sequences of integrable functions, the group of operators $S^*(t) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} S^*_n(t)$ is an adjoint to the group of operators (1.2) in the sense of functional (1.1) and is defined as follows [83]:

$$S^*(t) = S(-t). \tag{1.6}$$

On the space L^1_α, one-parameter mapping (1.6) is an isometric strong continuous group of operators, i.e., it is a C_0-group [19]. The infinitesimal generator $\mathcal{L}^* = \oplus_{n=0}^{\infty}\mathcal{L}^*_n$ of this group of operators has the structure:

$$\mathcal{L}^*_n \doteq \sum_{j=1}^{n}\mathcal{L}^*(j) \ + \sum_{j_1<j_2=1}^{n}\mathcal{L}^*_{\mathrm{int}}(j_1,j_2),$$

and for $t > 0$ the operators $\mathcal{L}^*(j)$ and $\mathcal{L}^*_{\mathrm{int}}(j_1, j_2)$ are defined by the formulas:

$$\begin{aligned}
&\mathcal{L}^*(j) f_n \doteq -\langle p_j, \frac{\partial}{\partial q_j}\rangle f_n, \\
&\mathcal{L}^*_{\mathrm{int}}(j_1, j_2) f_n \doteq \sigma^2 \int\limits_{\mathbb{S}^2_+} d\eta \langle \eta, (p_{j_1} - p_{j_2})\rangle \times \\
&\qquad \times \big(f_n(x_1, \ldots, p^*_{j_1}, q_{j_1}, \ldots, p^*_{j_2}, q_{j_2}, \ldots, x_n)\delta(q_{j_1} - q_{j_2} + \sigma\eta) - \\
&\qquad\qquad - f_n(x_1, \ldots, x_n)\delta(q_{j_1} - q_{j_2} - \sigma\eta)\big),
\end{aligned} \tag{1.7}$$

respectively, the pre-collision momenta $p^*_{j_1}, p^*_{j_2}$ are defined by relations (1.4) and notations accepted in formula (1.3) are used. For $t < 0$ these operators are defined by the corresponding expressions [64].

We note that the evolution of the state, i.e., the sequence of probability distribution functions $D_n(t) = S^*_n(t) D^0_n$, $n \geqslant 1$, describes by the Cauchy problem for the sequence of the weak formulation of the Liouville equations for many hard spheres with these generators [83]:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial t} D_n(t) = \big(\sum_{j=1}^{n} \mathcal{L}^*(j) \ + \sum_{j_1 < j_2 = 1}^{n} \mathcal{L}^*_{\mathrm{int}}(j_1, j_2)\big) D_n(t), \\
&D_n(t)|_{t=0} = D^0_n, \quad n \geqslant 1.
\end{aligned} \tag{1.8}$$

Thus, the evolution of finitely many colliding particles is governed by the fundamental evolution equations, such as the Liouville equation for observables (1.5) or its dual equation for a state (1.8).

To formulate another representation of the mean value functional (1.1) in terms of sequences of so-called reduced observables and reduced distribution functions, on sequences of bounded continuous functions we introduce an analog of the creation operator

$$(\mathfrak{a}^+ b)_s(x_1, \ldots, x_s) \doteq \sum_{j=1}^{s} b_{s-1}((x_1, \ldots, x_s)\backslash(x_j)), \tag{1.9}$$

and on sequences of integrable functions, we introduce an adjoint operator to operator (1.9) in the sense of mean value functional (1.1) which is an analogue of the annihilation operator

$$(\mathfrak{a} f)_n(x_1, \ldots, x_n) \ = \int\limits_{\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3} f_{n+1}(x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}) dx_{n+1}. \tag{1.10}$$

Then as a consequence of the validity of equalities:

$$(b, f) = (e^{\mathfrak{a}^+} e^{-\mathfrak{a}^+} b, f) = (e^{-\mathfrak{a}^+} b, e^{\mathfrak{a}} f),$$

for mean value functional (1.1) the following representation holds:

$$\langle A\rangle(t)=(I,D(0))^{-1}(A(t),D(0))=(B(t),F(0)), \tag{1.11}$$

where a sequence of the reduced observables is defined by the formula

$$B(t)=e^{-\mathfrak{a}^{+}}S(t)A(0), \tag{1.12}$$

and a sequence of so-called reduced distribution functions is defined as follows (known as the non-equilibrium grand canonical ensemble [82])

$$F(0)=(I,D(0))^{-1}e^{\mathfrak{a}}D(0),$$

respectively.

Thus, according to the definition of the operator $e^{-\mathfrak{a}^{+}}$, the sequence of reduced observables (1.12) in component-wise form is represented by the expansions:

$$\begin{aligned} &B_s(t,x_1,\ldots,x_s)=\\ &=\sum_{n=0}^{s}\frac{(-1)^n}{n!}\sum_{j_1\neq\ldots\neq j_n=1}^{s}(S(t)A(0))_{s-n}\big((x_1,\ldots,x_s)\backslash(x_{j_1},\ldots,x_{j_n})\big),\\ &\qquad s\geqslant 1,\end{aligned} \tag{1.13}$$

The mean value functional (1.11) also has the following representation:

$$(B(t),F(0))=(B(0),F(t)). \tag{1.14}$$

The sequence $F(t)=(1,F_1(t,x_1),\ldots,F_n(t,x_1,\ldots,x_n),\ldots)$ of reduced distribution functions is defined as follows (known as the non-equilibrium grand canonical ensemble [82])

$$F(t)=(I,D(0))^{-1}e^{\mathfrak{a}}S^{*}(t)D(0), \tag{1.15}$$

where the mapping $S^{*}(t)$ is an adjoint operator (1.6) to operator (1.2). According to the definition of the operator $e^{\mathfrak{a}}$, the sequence of reduced distribution functions (1.15) in component-wise form is represented by the series:

$$\begin{aligned} &F_s(t,x_1,\ldots,x_s)=(I,D(0))^{-1}\times\\ &\times\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\int\limits_{(\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3)^n}(S^{*}(t)D(0))_{s+n}(x_1,\ldots,x_{s+n})dx_{s+1}\cdots dx_{s+n},\ s\geqslant 1,\end{aligned}$$

where the coefficient $(I,D(0))$ is the normalizing factor as above.

We emphasize that a widely used approach to the description of the evolution of many hard spheres is based on the evolution of a state determined by the BBGKY hierarchy for reduced distribution functions [14]. An equivalent approach to describing evolution is based on reduced observables (1.12) governed by the dual hierarchy of evolution equations [52].

2. Hierarchies of evolution equations for colliding particles

As is well known, hierarchies of evolution equations for sequences of reduced functions of observables and, accordingly, of a state for a finitely many hard spheres are equivalent to the Liouville equations. Their advantages consist in the possibility of rigorously describing the evolution of infinitely many hard spheres whose collective behavior exhibits thermodynamic (statistical) features, namely, the existence of an equilibrium state in such a system as well as the kinetic or hydrodynamic behavior in corresponding scaling approximations [14, 21, 64].

An alternative approach to the description of the evolution of the state of a hard-sphere system is based on functions determined by the cluster expansions of the probability distribution functions. The cumulants of probability distribution functions are interpreted as correlation functions and are governed by the Liouville hierarchy. The following outlines the approach to the description of the evolution of a state by means of both reduced distribution functions and reduced correlation functions, which is based on the dynamics of correlations [53]. It should be emphasized that on a microscopic scale, the macroscopic characteristics of fluctuations of observables are directly determined by the reduced correlation functions.

2.1. Hierarchy of evolution equations for reduced observables.

The motivation for describing the evolution of many-particle systems in terms of reduced observables is related to possible equivalent representations of the mean value functional (mathematical expectation) of observables, namely as (1.11) compared to the traditionally used form (1.14).

The evolution of sequence (1.12) of reduced observables of many hard spheres is determined by the Cauchy problem of the following abstract hierarchy of evolution equations [10, 51]:

$$\frac{d}{dt}B(t) = \mathcal{L}B(t) + \big[\mathcal{L}, \mathfrak{a}^{+}\big]B(t), \tag{2.1}$$

$$B(t)\big|_{t=0} = B(0), \tag{2.2}$$

where the operator $\mathcal{L}$ is generator (1.3) of the group of operators (1.2) for hard spheres, the symbol $\big[\cdot,\cdot\big]$ denotes the commutator of operators, which in equation (2.1) has the following component-wise form:

$$\big(\big[\mathcal{L}, \mathfrak{a}^{+}\big]b\big)_s(x_1,\ldots,x_s) = \\ = \sum_{j_1\neq j_2=1}^{s}\mathcal{L}_{\mathrm{int}}(j_1,j_2)b_{s-1}(t,(x_1,\ldots,x_s)\backslash x_{j_1}), \quad s\geqslant 1.$$

In a component-wise form the hierarchy of evolution equations (2.1)) for hard-sphere fluids, in fact, is a sequence of recurrence evolution equations (in literature it is known as the dual BBGKY hierarchy [52]). We adduce the simplest examples of recurrent evolution equations (2.1):

$$\frac{\partial}{\partial t}B_1(t,x_1)=\mathcal{L}(1)B_1(t,x_1),$$
$$\frac{\partial}{\partial t}B_2(t,x_1,x_2)=\Big(\sum_{i=1}^{2}\mathcal{L}(j)+\mathcal{L}_{\mathrm{int}}(1,2)\Big)B_2(t,x_1,x_2)+ \\ +\mathcal{L}_{\mathrm{int}}(1,2)\big(B_1(t,x_1)+B_1(t,x_2)\big),$$

where the generators of these equations are defined by formula (1.3).

The non-perturbative solution of the Cauchy problem of the dual BBGKY hierarchy (2.1),(2.2) for hard spheres is a sequence of reduced observables represented by the following expansions [65, 66]:

$$\begin{aligned}B_s(t,x_1,\ldots,x_s)&=\big(e^{\mathfrak{a}^+}\mathfrak{A}(t)B(0)\big)_s(x_1,\ldots,x_s)=\\&=\sum_{n=0}^{s}\frac{1}{n!}\sum_{j_1\neq\cdots\neq j_n=1}^{s}\mathfrak{A}_{1+n}\big(t,\{(1,\ldots,s)\backslash(j_1,\ldots,j_n)\},j_1,\ldots,j_n\big)\times\\&\times B^0_{s-n}(x_1,\ldots,x_{j_1-1},x_{j_1+1},\ldots,x_{j_n-1},x_{j_n+1},\ldots,x_s),\ s\geqslant 1,\end{aligned}\tag{2.3}$$

where the mappings $\mathfrak{A}_{1+n}(t)$, $n\geqslant 0$, are the generating operators which are represented as cumulant expansions with respect of groups of operators (1.2). The simplest examples of reduced observables (2.3) are given by the following expansions:

$$B_1(t,x_1)=\mathfrak{A}_1(t,1)B^0_1(x_1),$$
$$B_2(t,x_1,x_2)=\mathfrak{A}_1(t,\{1,2\})B^0_2(x_1,x_2)+\mathfrak{A}_2(t,1,2)(B^0_1(x_1)+B^0_1(x_2)).$$

To determine the generating operators of expansions of reduced observables (2.3), we will introduce the notion of dual cluster expansions of groups of operators (1.2) in terms of operators interpreted as their cumulants. For this end on sequences of one-parametric mappings

$$\mathfrak{u}(t)=(0,\mathfrak{u}_1(t),\ldots,\mathfrak{u}_n(t),\ldots)$$

we define the following $\star$-product [90]

$$(\mathfrak{u}(t)\star\tilde{\mathfrak{u}}(t))_s(1,\ldots,s)\ =\sum_{Y\subset(1,\ldots,s)}\mathfrak{u}_{|Y|}(t,Y)\,\tilde{\mathfrak{u}}_{s-|Y|}(t,(1,\ldots,s)\backslash Y),\tag{2.4}$$

where $\sum_{Y\subset(1,\ldots,s)}$ is the sum over all subsets Y of the set $(1,\ldots,s)$.

Using the definition of the $\star$-product (2.4), the dual cluster expansions of groups of operators (1.2) are represented by the mapping $\mathbb{E}\mathrm{xp}_\star$ in the form

$$S(t)=\mathbb{E}\mathrm{xp}_\star\,\mathfrak{A}(t)=\mathbb{I}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}\mathfrak{A}(t)^{\star n},$$

where $S(t) = (0, S_1(t,1), \dots, S_n(t,1,\dots,n), \dots)$ and $\mathbb{I} = (1, 0, \dots, 0, \dots)$. In component-wise form the dual cluster expansions are represented by the following recursive relations:

$$S_s(t,(1,\dots,s)\backslash(j_1,\dots,j_n),j_1,\dots,j_n) = \\ = \sum_{\mathrm{P}:\,(\{(1,\dots,s)\backslash(j_1,\dots,j_n)\},\,j_1,\dots,j_n)=\bigcup_i X_i} \prod_{X_i\subset \mathrm{P}} \mathfrak{A}_{|X_i|}(t,X_i), \;\; n \geqslant 0, \quad (2.5)$$

where the set consisting of one element of indices $(1,\dots,s)\backslash(j_1,\dots,j_n)$ we denoted by the symbol $\{(1,\dots,s)\backslash(j_1,\dots,j_n)\}$ and the symbol $\sum_{\mathrm{P}}$ means the sum over all possible partitions P of the set

$$(\{(1,\dots,s)\backslash(j_1,\dots,j_n)\}, j_1,\dots,j_n)$$

into $|\mathrm{P}|$ nonempty mutually disjoint subsets $X_i \subset (1,\dots,s)$.

The solution of recursive relations (2.5) are represented by the inverse mapping $\mathbb{L}\mathrm{n}_*$ in the form of the cumulant expansion

$$\mathfrak{A}(t) = \mathbb{L}\mathrm{n}_\star(\mathbb{I} + S(t)) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} S(t)^{\star n}.$$

Then the $(1+n)th$-order dual cumulant of groups of operators (1.2) is defined by the following expansion:

$$\mathfrak{A}_{1+n}(t,\{(1,\dots,s)\backslash(j_1,\dots,j_n)\},j_1,\dots,j_n) \doteq \\ \doteq \sum_{\mathrm{P}:\,(\{(1,\dots,s)\backslash(j_1,\dots,j_n)\},j_1,\dots,j_n)=\bigcup_i X_i} (-1)^{|\mathrm{P}|-1}(|\mathrm{P}|-1)! \prod_{X_i\subset\mathrm{P}} S_{|\theta(X_i)|}(t,\theta(X_i)), \quad (2.6)$$

where the above notation is used and the declusterization mapping θ is defined by the formula:

$$\theta(\{(1,\dots,s)\backslash(j_1,\dots,j_n)\}) = (1,\dots,s)\backslash(j_1,\dots,j_n).$$

The dual cumulants (2.6) of the first two orders have the form:

$$\mathfrak{A}_1(t,\{1,\dots,s\}) = S_s(t,1,\dots,s),$$
$$\mathfrak{A}_{1+1}(t,\{(1,\dots,s)\backslash(j)\},j) = \\ = S_s(t,1,\dots,s) - S_{s-1}(t,(1,\dots,s)\backslash(j))S_1(t,j).$$

If $b_s \in \mathcal{C}_s$, then for $(1+n)th$-order cumulant (2.6) of groups of operators (1.2) the estimate is valid

$$\big\|\mathfrak{A}_{1+n}(t)b_s\big\|_{\mathcal{C}_s} \leqslant \sum_{\mathrm{P}:\,(\{(1,\dots,s)\backslash(j_1,\dots,j_n)\},j_1,\dots,j_n)=\bigcup_i X_i} (|\mathrm{P}|-1)!\big\|b_s\big\|_{\mathcal{C}_s} \leqslant \\ \leqslant \sum_{k=1}^{n+1} \mathrm{s}(n+1,k)(k-1)!\big\|b_s\big\|_{\mathcal{C}_s} \leqslant n!e^{n+2}\big\|b_s\big\|_{\mathcal{C}_s}, \quad (2.7)$$

where $\mathrm{s}(n+1,k)$ are the Stirling numbers of the second kind. Then according to this estimate (2.7) for the generating operators of expansions (2.3) provided that $\gamma < e^{-1}$ the inequality valid

$$\|B(t)\|_{C_\gamma} \leqslant e^2(1-\gamma e)^{-1}\|B(0)\|_{C_\gamma}. \tag{2.8}$$

In fact, the following criterion holds.

Criterion. *A solution of the Cauchy problem of the dual BBGKY hierarchy* (2.1),(2.2) *is represented by expansions* (2.3) *if and only if the generating operators of expansions* (2.3) *are solutions of cluster expansions* (2.5) *of the groups of operators* (1.2) *of the Liouville equations for hard spheres.*

The necessity condition means that cluster expansions (2.5) hold for groups of operators (1.2). These recurrence relations are derived from definition (1.13) of reduced observables, provided that they are represented as expansions (2.3) for the solution of the Cauchy problem of the dual BBGKY hierarchy (2.1),(2.2).

The sufficient condition means that the infinitesimal generator of one-parameter mapping (2.3) coincides with the generator of the sequence of recurrence evolution equations (2.1). Indeed, in the space C_γ the following existence theorem is true [51].

Theorem. *A non-perturbative solution of the Cauchy problem* (2.1),(2.2) *is represented by expansions* (2.3) *in which the generating operators are cumulants of the corresponding order* (2.6) *of groups of operators* (1.2)*:*

$$\begin{aligned} B_s(t,x_1,\ldots,x_s) = &\sum_{n=0}^{s}\frac{1}{n!}\sum_{j_1\neq\cdots\neq j_n=1}^{s}\ \sum_{\mathrm{P}:\,(\{(1,\ldots,s)\setminus(j_1,\ldots,j_n)\},j_1,\ldots,j_n)=\bigcup_i X_i}\\ &\Big((-1)^{|\mathrm{P}|-1}(|\mathrm{P}|-1)!\prod_{X_i\subset \mathrm{P}} S_{|\theta(X_i)|}(t,\theta(X_i))\times\\ &\times B^0_{s-n}(x_1,\ldots,x_{j_1-1},x_{j_1+1},\ldots,x_{j_n-1},x_{j_n+1},\ldots,x_s)\Big),\ s\geqslant 1. \end{aligned} \tag{2.9}$$

Under the condition $\gamma < e^{-1}$ for initial data $B(0)\in C^0_\gamma$ of finite sequences of infinitely differentiable functions with compact supports sequence (2.9) *is a unique global classical solution, and for arbitrary initial data $B(0)\in C_\gamma$ is a unique global generalized solution.*

We note that the one component sequences $B^{(1)}(0) = (0, b_1(x_1), 0, \ldots)$ of reduced observables correspond to the additive-type observable, and the sequences

$$B^{(k)}(0) = (0,\ldots,b_k(x_1,\ldots,x_k),0,\ldots)$$

of reduced observables correspond to the k-ary-type observables [10].

If initial data (2.2) is specified by the additive-type reduced observable, then the structure of solution expansion (2.9) is simplified and attains the form

$$B_s^{(1)}(t,x_1,\ldots,x_s)=\mathfrak{A}_s(t,1,\ldots,s)\sum_{j=1}^{s}b_1(x_j),\quad s\geqslant 1, \tag{2.10}$$

where the generating operator $\mathfrak{A}_s(t)$ is the sth-order cumulant (2.6) of the groups of operators (1.2).

An example of the additive-type observables is a number of particles, i.e., the sequence $N^{(1)}(0)=(0,1,0,\ldots)$, then

$$N_s^{(1)}(t)=\mathfrak{A}_s(t,1,\ldots,s)s\ =\sum_{\mathrm{P}:\,(1,\ldots,s)=\bigcup_i X_i}(-1)^{|\mathrm{P}|-1}(|\mathrm{P}|-1)!\sum_{j=1}^{s}1=$$

$$=\sum_{k=1}^{s}(-1)^{k-1}\mathrm{s}(s,k)(k-1)!s=s\delta_{s,1}=N_s^{(1)}(0),$$

where $\mathrm{s}(s,k)$ are the Stirling numbers of the second kind and $\delta_{s,1}$ is a Kronecker symbol. Consequently, the observable of a number of hard spheres is an integral of motion and, in particular, the average number of particles is preserving in time.

In the case of initial k-ary-type, $k\geqslant 2$, reduced observables solution expansion (2.9) takes the form

$$\begin{aligned}&B_s^{(k)}(t)=0,\quad 1\leqslant s<k,\\&B_s^{(k)}(t,x_1,\ldots,x_s)=\frac{1}{(s-k)!}\times\\&\quad\times\sum_{j_1\neq\cdots\neq j_{s-k}=1}^{s}\mathfrak{A}_{1+s-k}\big(t,\{(1,\ldots,s)\setminus(j_1,\ldots,j_{s-k})\},j_1,\ldots,j_{s-k}\big)\times\\&\qquad\times b_k(x_1,\ldots,x_{j_1-1},x_{j_1+1},\ldots,x_{j_{s-k}-1},x_{j_{s-k}+1},\ldots,x_s),\\&\qquad\qquad s\geqslant k,\end{aligned}\tag{2.11}$$

where the generating operator $\mathfrak{A}_{1+s-k}(t)$ is the $(1+s-k)th$-order cumulant (2.6) of the groups of operators (1.2).

We emphasize that cluster expansions (2.5) of the groups of operators (1.2) underlie of the classification of possible solution representations of the Cauchy problem (2.1),(2.2) of the dual BBGKY hierarchy. Indeed, using cluster expansions (2.5) of the groups of operators (1.2), other solution representations can be constructed.

For example, let us express the cumulants $\mathfrak{A}_{1+n}(t)$, $n\geqslant 2$, of groups of operators (1.2) with respect to the $1st$-order and $2nd$-order cumulants. The equalities are true:

$$\mathfrak{A}_{1+n}(t,\{(1,\ldots,s)\backslash(j_1,\ldots,j_n)\},j_1,\ldots,j_n)=$$
$$=\sum_{\varnothing\neq Y\subset(j_1,\ldots,j_n)}\mathfrak{A}_2(t,\{(1,\ldots,s)\backslash(j_1,\ldots,j_n)\},\{Y\})\times$$
$$\times\sum_{\mathrm{P}:\,(j_1,\ldots,j_n)\backslash Y=\bigcup_i X_i}(-1)^{|\mathrm{P}|}\,|\mathrm{P}|!\prod_{i=1}^{|\mathrm{P}|}\mathfrak{A}_1(t,\{X_i\}),\quad n\geqslant 2,$$

where $\sum\limits_{\varnothing\neq Y\subset(j_1,\ldots,j_n)}$ is a sum over all nonempty subsets $Y\subset(j_1,\ldots,j_n)$. Then, taking into account the identity

$$\sum_{\mathrm{P}:\,(j_1,\ldots,j_n)\backslash Y=\bigcup_i X_i}(-1)^{|\mathrm{P}|}|\mathrm{P}|!\prod_{i=1}^{|\mathrm{P}|}\mathfrak{A}_1(t,\{X_i\})B^0_{s-n}((x_1,\ldots,x_s)\backslash(x_{j_1},\ldots,x_{j_n}))=$$
$$=\sum_{\mathrm{P}:\,(j_1,\ldots,j_n)\backslash Y=\bigcup_i X_i}(-1)^{|\mathrm{P}|}\,|\mathrm{P}|!\,B^0_{s-n}((x_1,\ldots,x_s)\backslash(x_{j_1},\ldots,x_{j_n})),\tag{2.12}$$

and the equalities

$$\sum_{\mathrm{P}:\,(j_1,\ldots,j_n)\backslash Y=\bigcup_i X_i}(-1)^{|\mathrm{P}|}\,|\mathrm{P}|!=(-1)^{|(j_1,\ldots,j_n)\backslash Y|},\ Y\subset(j_1,\ldots,j_n),\tag{2.13}$$

for solution expansions (2.3) of the dual BBGKY hierarchy we derive the following representation:

$$B_s(t,x_1,\ldots,x_s)=\mathfrak{A}_1(t,\{1,\ldots,s\})B^0_s(x_1,\ldots,x_s)+$$
$$+\sum_{n=1}^{s}\frac{1}{n!}\sum_{j_1\neq\cdots\neq j_n=1}^{s}\ \sum_{\substack{Y\subset(1,\ldots,s)\backslash(j_1,\ldots,j_n),\\ Y\neq\varnothing}}(-1)^{|(j_1,\ldots,j_n)\backslash Y|}\,\mathfrak{A}_2(t,\{j_1,\ldots,j_n\},\{Y\})\times$$
$$\times B^0_{s-n}((x_1,\ldots,x_s)\backslash(x_{j_1},\ldots,x_{j_n})),\ s\geqslant 1,$$

where notations accepted above are used.

Taking into account that initial reduced observables depend only from the certain phase space arguments, we deduce the reduced representation of expansions (2.9):

$$
\begin{aligned}
B(t) &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\,\frac{n!}{k!(n-k)!}\,(\mathfrak{a}^{+})^{n-k}S(t)(\mathfrak{a}^{+})^{k}B(0) = \\
&= S(t)B(0)+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}\big[\ldots\big[S(t),\underbrace{\mathfrak{a}^{+}\big],\ldots,\mathfrak{a}^{+}}_{\text{n-times}}\big]B(0) = \\
&= e^{-\mathfrak{a}^{+}}S(t)e^{\mathfrak{a}^{+}}B(0).
\end{aligned}
\tag{2.14}
$$

Therefore, in component-wise form the generating operators of these expansions represented as expansions (2.3) are the following reduced cumulants of groups of operators (1.2):

$$
\begin{aligned}
&U_{1+n}(t,\{1,\ldots,s-n\},s-n+1,\ldots,s) = \\
&\qquad = \sum_{k=0}^{n}(-1)^{k}\frac{n!}{k!(n-k)!}S_{s-k}(t,1,\ldots,s-k).
\end{aligned}
\tag{2.15}
$$

Indeed, solutions of the recursive relations (2.5) with respect to first-order cumulants can be represented as expansions in terms of cumulants acting on variables on which the initial reduced observables depend, and in terms of cumulants not acting on these variables

$$
\begin{aligned}
&\mathfrak{A}_{1+n}(t,\{(1,\ldots,s)\backslash(j_1,\ldots,j_n)\},j_1,\ldots,j_n) = \\
&\quad = \sum_{Y\subset(j_1,\ldots,j_n)}\mathfrak{A}_{1}(t,\{(1,\ldots,s)\backslash((j_1,\ldots,j_n)\cup Y)\})\times \\
&\qquad\qquad \times\sum_{\mathrm{P}:\,(j_1,\ldots,j_n)\backslash Y=\bigcup_i X_i}(-1)^{|\mathrm{P}|}\,|\mathrm{P}|!\,\prod_{i=1}^{|\mathrm{P}|}\mathfrak{A}_{1}(t,\{X_i\}),
\end{aligned}
$$

where $\sum_{Y\subset(j_1,\ldots,j_n)}$ is the sum over all possible subsets $Y\subset(j_1,\ldots,j_n)$. Then taking into account the identity (2.13) and the equalities (2.12) we derive expansions (2.14) over reduced cumulants (2.15).

We note that traditionally the solution of the BBGKY hierarchy for states of many hard spheres is represented by perturbation series [14,29,83]. The expansions (2.14) can also be represented as expansions (iterations) of perturbation theory [10]:

$$
\begin{aligned}
B(t) = \sum_{n=0}^{\infty}\int_0^{t}dt_1\cdots\int_0^{t_{n-1}}dt_n\,S(t-t_1)\big[\mathcal{L},\mathfrak{a}^{+}\big]\times \\
\times\,S(t_1-t_2)\cdots S(t_{n-1}-t_n)\big[\mathcal{L},\mathfrak{a}^{+}\big]S(t_n)B(0).
\end{aligned}
$$

Indeed, as a result of applying of analogs of the Duhamel equation to generating operators (2.6) of expansions (2.3) we derive in component-wise form, for examples,

$$U_1(t,\{1,\ldots,s\}) = S_s(t,1,\ldots,s),$$
$$U_2(t,\{(1,\ldots,s)\backslash(j_1)\},j_1) =$$
$$= \int\limits_0^t dt_1\, S_s(t-t_1,1,\ldots,s)\sum_{\substack{j_2=1,\\ j_2\neq j_1}}^{s}\mathcal{L}_{\mathrm{int}}(j_1,j_2)S_{s-1}(t_1,(1,\ldots,s)\backslash j_1).$$

Recall that the mean value functional (1.11) exists if $B(0)\in C_\gamma$ and $F(0)\in L^1_\alpha$. In the case of the observable of a number of hard spheres $N^{(1)}(t)=(0,1,0,\ldots)$, this means that

$$\big|(N^{(1)}(t),F(0))\big| \;=\; \Big|\int\limits_{\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3} F_1^0(x_1)dx_1\Big| \;\leqslant\; \big\|F_1^0\big\|_{L^1_1} \;<\; \infty. \tag{2.16}$$

Consequently, the states of a finite number of hard spheres are described by sequences of functions from the space L^1_α. To describe an infinite number of hard spheres, it is necessary to consider reduced distribution functions from appropriate function spaces, for example, from the space of sequences of bounded functions with respect of the configuration variables [58, 79, 83].

2.2. **The BBGKY hierarchy for reduced distribution functions.** As mentioned already, the evolution of systems of many particles is traditionally described as the evolution of the state of a system based on the representation of the mean value functional for observables (1.14). In this case, the sequence of reduced distribution functions is determined by the hierarchy of evolution equations, known as the BBGKY hierarchy, whose generator is the operator adjoint to the generator of the hierarchy of evolution equations for reduced observables (2.1) in the sense of mean value functional (1.11).

The evolution of sequence (1.15) of reduced distribution functions from the space L^1_α is governed by the Cauchy problem of the BBGKY hierarchy for many hard spheres [6, 14, 83]:

$$\frac{d}{dt}F(t) = \mathcal{L}^*F(t) + \big[\mathfrak{a},\mathcal{L}^*\big]F(t), \tag{2.17}$$

$$F(t)\big|_{t=0} = F(0), \tag{2.18}$$

where the symbol $\big[\cdot,\cdot\big]$ denotes the commutator of operator (1.10) and of the Liouville operator (1.7), which is the generator of the isometric group of operators (1.6). Thus, in evolution equation (2.17), the second term has the following component-wise form:

$$\begin{aligned}&\big([\mathfrak{a},\mathcal{L}^*]f\big)_s(x_1,\ldots,x_s)=\\&\qquad=\sum_{i=1}^{s}\int\limits_{\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3}dx_{s+1}\,\mathcal{L}^*_{\mathrm{int}}(i,s+1)f_{s+1}(t,x_1,\ldots,x_{s+1}),\quad s\geqslant 1.\end{aligned}$$

For $t>0$ in a one-dimensional space, i.e., for gas of hard rods, this term of a generator has the form [82]:

$$\begin{aligned}&\sum_{i=1}^{s}\int\limits_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}}dx_{s+1}\mathcal{L}^*_{\mathrm{int}}(i,s+1)f_{s+1}(t)=\\&\quad=\sum_{i=1}^{s}\int\limits_{0}^{\infty}dP\,P\Big(f_{s+1}(t,x_1,\ldots,q_i,p_i-P,\ldots,x_s,q_i-\sigma,p_i)-\\&\qquad\qquad-f_{s+1}(t,x_1,\ldots,x_s,q_i-\sigma,p_i+P)+\\&\qquad\qquad+f_{s+1}(t,x_1,\ldots,q_i,p_i+P,\ldots,x_s,q_i+\sigma,p_i)-\\&\qquad\qquad-f_{s+1}(t,x_1,\ldots,x_s,q_i+\sigma,p_i-P)\Big),\end{aligned}\tag{2.19}$$

and for $t<0$ this collision integral has the corresponding form [83].

It should be noted that for the system of a fixed, finite number of hard spheres, the BBGKY hierarchy is an equation system for a finite sequence of reduced distribution functions. Such an equation system is equivalent to the Liouville equation for the distribution function, which describes all possible states of finitely many hard spheres. For a system of an infinite number of hard spheres, the BBGKY hierarchy is an infinite chain of evolution equations, which can be derived as the thermodynamic limit of the BBGKY hierarchy of a fixed finite number of hard spheres [14]. We note that since a sequence of functions can be determined based on a generating functional, the corresponding hierarchy of evolution equations can also be formulated as the evolution equation for such a generating functional [44].

A non-perturbative solution of the Cauchy problem of the BBGKY hierarchy (2.17),(2.18) is a sequence of reduced distribution functions represented by the following expansions [52, 67]:

$$\begin{aligned}&F_s(t,x_1,\ldots,x_s)=(e^{\mathfrak{a}}\mathfrak{A}^*(t)F(0))_s(x_1,\ldots,x_s)=\\&\quad=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\int\limits_{(\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3)^n}\mathfrak{A}^*_{1+n}(t,\{1,\ldots,s\},s+1,\ldots,s+n)\times\\&\qquad\qquad\times F^0_{s+n}(x_1,\ldots,x_{s+n})dx_{s+1}\cdots dx_{s+n},\ \ s\geqslant 1,\end{aligned}\tag{2.20}$$

where the mappings $\mathfrak{A}^*_{1+n}(t)$, $n \geqslant 0$, are the generating operators which are represented by the cumulant expansions with respect to the group

$$S^*(t) = \mathop{\oplus}_{n=0}^{\infty} S^*_n(t)$$

of operators (1.6).

Using the definition of the $\star$-product (2.4), the cluster expansions of the groups of operators (1.6) are represented by the mapping $\mathbb{E}\mathrm{xp}_\star$ in the form

$$S^*(t) = \mathbb{E}\mathrm{xp}_\star\, \mathfrak{A}^*(t).$$

In component-wise form cluster expansions are represented by the following recursive relations:

$$\begin{aligned} &S^*_{s+n}(t, 1, \ldots, s, s+1, \ldots, s+n) = \\ &= \sum_{\mathrm{P}:\,(\{1,\ldots,s\},s+1,\ldots,s+n)=\bigcup_i X_i} \prod_{X_i \subset \mathrm{P}} \mathfrak{A}^*_{|X_i|}(t, X_i), \quad n \geqslant 0, \end{aligned} \tag{2.21}$$

where the set consisting of one element of indices $(1, \ldots, s)$ we denoted by the symbol $\{(1, \ldots, s)\}$ and the symbol $\sum_{\mathrm{P}}$ means the sum over all possible partitions P of the set

$$(\{1, \ldots, s\}, s+1, \ldots, s+n)$$

into $|\mathrm{P}|$ nonempty mutually disjoint subsets X_i.

The solution of recursive relations (2.21) are represented by the inverse mapping $\mathbb{L}\mathrm{n}_\star$ in the form of the cumulant expansion

$$\mathfrak{A}^*(t) = \mathbb{L}\mathrm{n}_\star(\mathbb{I} + S^*(t)).$$

Then the $(1+n)th$-order cumulant of the group $S^*(t) = \mathop{\oplus}_{n=0}^{\infty} S^*_n(t)$ of operators (1.6) is defined by the following expansion:

$$\begin{aligned} &\mathfrak{A}^*_{1+n}(t, \{1, \ldots, s\}, s+1, \ldots, s+n) \doteq \\ &\doteq \sum_{\mathrm{P}:\,(\{1,\ldots,s\},s+1,\ldots,s+n)=\bigcup_i X_i} (-1)^{|\mathrm{P}|-1}(|\mathrm{P}|-1)! \prod_{X_i \subset \mathrm{P}} S^*_{|\theta(X_i)|}(t, \theta(X_i)), \end{aligned} \tag{2.22}$$

where the declusterization mapping θ is defined by the formula:

$$\theta(\{1, \ldots, s\}) = (1, \ldots, s)$$

and the above notation is used. The simplest examples of cumulants (2.22) of the groups of operators (1.6) have the form:

$$\mathfrak{A}_1^*(t,\{1,\ldots,s\}) \doteq S_s^*(t,1,\ldots,s),$$

$$\mathfrak{A}_{1+1}^*(t,\{1,\ldots,s\},s+1) \doteq S_{s+1}^*(t,1,\ldots,s+1) - S_s^*(t,1,\ldots,s)S_1^*(t,s+1),$$

$$\begin{aligned}\mathfrak{A}_{1+2}^*(t,\{1,\ldots,s\},s+1,s+2) &\doteq S_{s+2}^*(t,1,\ldots,s+2)-\\ &- S_{s+1}^*(t,1,\ldots,s+1)S_1^*(t,s+2) - S_{s+1}^*(t,1,\ldots,s,s+2)S_1^*(t,s+1)-\\ &- S_s^*(t,1,\ldots,s)S_2^*(t,s+1,s+2) + 2!S_s^*(t,1,\ldots,s)S_1^*(t,s+1)S_1^*(t,s+2).\end{aligned}$$

If $f_s \in L_s^1$, then taking into account that $\big\|S_n^*(t)\big\|_{L_n^1} = 1$, for the $(1+n)th$-order cumulant (2.22) the following estimate is valid:

$$\begin{aligned}\big\|\mathfrak{A}_{1+n}^*(t)f_{s+n}\big\|_{L_{s+n}^1} &\leqslant \sum_{\mathrm{P}:\,(\{1,\ldots,s\},s+1,\ldots,s+n)=\bigcup_i X_i}(|\mathrm{P}|-1)!\big\|f_{s+n}\big\|_{L_{s+n}^1} \leqslant \\ &\leqslant \sum_{k=1}^{n+1}\mathrm{s}(n+1,k)(k-1)!\big\|f_{s+n}\big\|_{L_{s+n}^1} \leqslant\; n!e^{n+2}\big\|f_{s+n}\big\|_{L_{s+n}^1},\end{aligned} \tag{2.23}$$

where $\mathrm{s}(n+1,k)$ are the Stirling numbers of the second kind.

Then, according to this estimate (2.23) for the generating operators of expansions (2.20), provided that $\alpha > e$ series (2.20) converges on the norm of the space L_α^1, and the inequality holds

$$\|F(t)\|_{L_\alpha^1} \leqslant c_\alpha \|F(0)\|_{L_\alpha^1},$$

where $c_\alpha = e^2(1-\frac{e}{\alpha})^{-1}$. The parameter α can be interpreted as the value inverse to the average number of hard spheres.

In fact, the following criterion holds.

Criterion. *A solution of the Cauchy problem of the BBGKY hierarchy* (2.17), (2.18) *is represented by expansions* (2.20) *if and only if the generating operators of expansions* (2.20) *are solutions of cluster expansions* (2.21) *of the groups of operators* (1.6).

The necessity condition means that cluster expansions (2.21) are take place for groups of operators (1.6). These recurrence relations are derived from definition (1.15) of reduced distribution functions, provided that they are represented as expansions (2.20) for the solution of the Cauchy problem of the BBGKY hierarchy (2.17),(2.18).

The sufficient condition means that the infinitesimal generator of one-parameter mapping (2.20) coincides with the generator of the BBGKY hierarchy (2.17). Indeed, in the space L_α^1 the following existence theorem is true [65].

Theorem. *If $\alpha > e$, a non-perturbative solution of the Cauchy problem of the BBGKY hierarchy* (2.17),(2.18) *is represented by series expansions* (2.20) *in which the generating operators are cumulants of the corresponding order* (2.22) *of groups of operators* (1.6)*:*

$$\begin{aligned}&F_s(t,x_1,\ldots,x_s)=\\&=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\int\limits_{(\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3)^n}\sum_{\mathrm{P}:\,(\{1,\ldots,s\},s+1,\ldots,s+n)=\bigcup_i X_i}(-1)^{|\mathrm{P}|-1}(|\mathrm{P}|-1)!\times\\&\quad\times\prod_{X_i\subset\mathrm{P}}S^*_{|\theta(X_i)|}(t,\theta(X_i))F^0_{s+n}(x_1,\ldots,x_{s+n})dx_{s+1}\cdots dx_{s+n},\ s\geqslant 1.\end{aligned}\tag{2.24}$$

For initial data $F(0)\in L^1_0$ of finite sequences of infinitely differentiable functions with compact supports sequence (2.24) *is a unique global classical solution and for arbitrary initial data $F(0)\in L^1_\alpha$ is a unique global generalized solution.*

We observe that cluster expansions (2.21) of the groups of operators (1.6) underlie the classification of possible solution representations (2.20) of the Cauchy problem of the BBGKY hierarchy (2.17),(2.18). In a particular case, non-perturbative solution (2.24) of the BBGKY hierarchy for many hard spheres can be represented in the form of the perturbation (iteration) series as a result of applying analogs of the Duhamel equation to cumulants (2.22) of groups of operators.

Indeed, let us put groups of operators in the expression of cumulant (2.22) into a new order with respect to the groups of operators which act on the variables $(x_1,\ldots,x_s)$

$$\begin{aligned}&\mathfrak{A}^*_{1+n}(t,\{1,\ldots,s\},s+1,\ldots,s+n)=\\&\qquad=\sum_{Y\subset(s+1,\ldots,s+n)}S^*_{s+|Y|}(t,(1,\ldots,s)\cup Y)\times\\&\qquad\qquad\times\sum_{\mathrm{P}:(s+1,\ldots,s+n)\setminus Y=\bigcup_i Y_i}(-1)^{|\mathrm{P}|}|\mathrm{P}|!\prod_{Y_i\subset\mathrm{P}}S^*_{|Y_i|}(t,Y_i).\end{aligned}\tag{2.25}$$

If $Y_i\subset(s+1,\ldots,s+n)$, then for the integrable functions F^0_{s+n} and the unitary group of operators $S^*(t)=\oplus_{n=0}^{\infty}S^*_n(t)$ the equality is valid

$$\begin{aligned}&\int\limits_{(\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3)^n}dx_{s+1}\cdots dx_{s+n}\prod_{Y_i\subset\mathrm{P}}S^*_{|Y_i|}(t;Y_i)F^0_{s+n}(x_1,\ldots,x_{s+n})=\\&\qquad=\int\limits_{(\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3)^n}dx_{s+1}\cdots dx_{s+n}F^0_{s+n}(x_1,\ldots,x_{s+n}).\end{aligned}$$

Then, taking into account the validity for arbitrary $Y \subset (s+1,\ldots,s+n)$ the following equality:

$$\sum_{\mathrm{P}:(s+1,\ldots,s+n)\setminus Y=\bigcup_i Y_i}(-1)^{|\mathrm{P}|}|\mathrm{P}|! \;=\; (-1)^{|(s+1,\ldots,s+n)\setminus Y|},$$

according to expression (2.25) for series expansions (2.24) of the BBGKY hierarchy, we obtain

$$\begin{aligned}
&F_s(t,x_1,\ldots,x_s) = \\
&\quad = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\int\limits_{(\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3)^n} U^*_{1+n}(t,\{1,\ldots,s\},s+1,\ldots,s+n)\times \\
&\qquad\qquad \times F^0_{s+n}(x_1,\ldots,x_{s+n})dx_{s+1}\cdots dx_{s+n},\;\; s\geqslant 1,
\end{aligned}\tag{2.26}$$

where $U^*_{1+n}(t)$ is the $(1+n)th$-order reduced cumulant of the groups of operators (1.6)

$$\begin{aligned}
&U^*_{1+n}(t,\{1,\ldots,s\},s+1,\ldots,s+n) = \\
&\qquad = \sum_{Y\subset(s+1,\ldots,s+n)}(-1)^{|(s+1,\ldots,s+n)\setminus Y|}\, S^*_{|(1,\ldots,s)\cup Y|}(t,(1,\ldots,s)\cup Y).
\end{aligned}$$

Using the symmetry property of initial reduced distribution functions, for integrand functions in every term of series (2.26) the following equalities are valid

$$\begin{aligned}
&\sum_{Y\subset(s+1,\ldots,s+n)}(-1)^{|(s+1,\ldots,s+n)\setminus Y)|}\, S^*_{|(1,\ldots,s)\cup Y|}(t,(1,\ldots,s)\cup Y)F^0_{s+n} = \\
&\quad = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\sum_{i_1<\ldots<i_{n-k}=s+1}^{s+n} S^*_{s+n-k}(t,1,\ldots,s,i_1,\ldots,i_{n-k})F^0_{s+n} = \\
&\quad = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{n!}{k!(n-k)!}S^*_{s+n-k}(t,1,\ldots,s+n-k)F^0_{s+n}(x_1,\ldots,x_{s+n}).
\end{aligned}$$

Thus, the $(1+n)th$-order reduced cumulant represents by the following expansion [80]:

$$\begin{aligned}
&U^*_{1+n}(t,\{1,\ldots,s\},s+1,\ldots,s+n) = \\
&\qquad = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{n!}{k!(n-k)!}S^*_{s+n-k}(t,1,\ldots,s+n-k),
\end{aligned}$$

and consequently, we derive the representation for series expansions of a solution of the BBGKY hierarchy [82] which is can be written down in terms of an analogue of the annihilation operator (1.10):

$$\begin{aligned} F(t) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{n!}{k!(n-k)!} \mathfrak{a}^{n-k} S^*(t) \mathfrak{a}^k F(0) = \\ &= S^*(t)F(0) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \big[\underbrace{\mathfrak{a}, \ldots, \big[\mathfrak{a}}_{\text{n-times}}, S^*(t)\big] \ldots \big] F(0) = \\ &= e^{\mathfrak{a}} S^*(t) e^{-\mathfrak{a}} F(0). \end{aligned} \tag{2.27}$$

Finally, in view of the validity of the equality

$$S^*(t-\tau)\big[\mathfrak{a}, \mathcal{L}^*\big] S^*(\tau)F(0) = \frac{d}{d\tau} S^*(t-\tau)\mathfrak{a} S^*(\tau)F(0),$$

expansion (2.27) is represented in the form of perturbation (iteration) series of the BBGKY hierarchy (2.17) for many hard spheres

$$\begin{aligned} F(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^t dt_1 \ldots \int_0^{t_{n-1}} dt_n S^*(t-t_1)\big[\mathfrak{a}, \mathcal{L}^*\big] S^*(t_1-t_2) \ldots \times \\ \times S^*(t_{n-1}-t_n)\big[\mathfrak{a}, \mathcal{L}^*\big] S^*(t_n) F(0), \end{aligned}$$

or in component-wise form [6, 58, 79]:

$$\begin{aligned} F_s(t, x_1, \ldots, x_s) = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^t dt_1 \cdots \int_0^{t_{n-1}} dt_n \int_{(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3)^n} dx_{s+1} \cdots dx_{s+n}\, S_s^*(t-t_1) \times \\ \times \sum_{j_1=1}^{s} \mathcal{L}^*_{\mathrm{int}}(j_1, s+1) S^*_{s+1}(t_1-t_2) \cdots S^*_{s+n-1}(t_{n-1}-t_n) \times \\ \times \sum_{j_n=1}^{s+n-1} \mathcal{L}^*_{\mathrm{int}}(j_n, s+n) S^*_{s+n}(t_n) F^0_{s+n}(x_1, \ldots, x_{s+n}), \;\; s \geqslant 1. \end{aligned} \tag{2.28}$$

Let us make some comments concerning the existence of solutions to the Cauchy problem of the BBGKY hierarchy for initial data from various function spaces.

In the spaces of sequences of integrable functions, the existence and uniqueness of a global in time non-perturbative solution was proved in the papers [67, 82] (see also book [14]). It should be noted that the first few terms of the (2.24) series were established in papers [17, 18, 74, 75] as an analog of cluster expansions of the reduced equilibrium distribution functions.

The BBGKY hierarchy describes both the non-equilibrium and equilibrium states. Non-equilibrium states are described by the solution of the initial value problem for this hierarchy, and, correspondingly, equilibrium states are solutions of the steady BBGKY hierarchy. The existence of equilibrium solutions to the steady BBGKY hierarchy has been reviewed in books [14, 64].

As is known, to describe the evolution of a state of infinitely many particles, the suitable functional space is the space of sequences of functions bounded with respect to the configuration variables and decreasing with respect to the momentum ones; in particular, the equilibrium distribution functions belong to this space. For the solution extension from the space of sequences of integrable functions to this space, the method of the thermodynamic limit was developed [14, 57, 58].

For one-dimensional many-particle systems with short-range potential, using the method of interaction region developed by Petrina [81] for solution representation (2.26), the existence theorem for the BBGKY hierarchy was proved for the first time in this functional space. By a similar method for the initial reduced distribution functions from such a space, the existence of a mean value functional for solution (2.9) of the dual BBGKY hierarchy (2.1) was established in the paper [91].

As mentioned above, for a solution representation of the Cauchy problem of the BBGKY hierarchy for hard spheres is widely used in the representation as a series of perturbation theory (2.28) (an iteration series over the evolution of the state of selected groups of particles) [6, 15, 58, 79, 95]. In this form, the solution is applied to construct its Boltzmann–Grad asymptotics, which is governed by the Boltzmann kinetic equation (see section 3.1). The justification of a solution represented as an iteration series for hard spheres is based on giving a rigorous mathematical meaning to every term of the iteration series and on the proof of its convergence. The main difficulty in this problem is that the phase trajectories of particles for a system with a singular interaction potential are defined almost everywhere in the phase space, and initial distribution functions in the iteration series are concentrated on lower-dimensional manifolds. It is necessary to ensure that the trajectories are defined on these manifolds. This problem was completely solved in the papers [61, 83].

In the case of infinitely many hard spheres a local in time solution [58] of the Cauchy problem of the BBGKY hierarchy is represented by iteration series for arbitrary initial data from the space of sequences of functions bounded with respect to configuration variables and for initial data close to the equilibrium state it is a global in time solution [83]. For such initial data in a one-dimensional space for hard sphere system the existence of global in time solution was proved in the paper [34].

In addition, we remark that the correlation decay property, known as the Bogolyubov correlation weakening principle [6], for the solution of the BBGKY hierarchy for hard spheres was proved in [68].

2.3. **The Liouville hierarchy for correlation functions.** An alternative approach to the description of a state of finitely many hard spheres consists in the employment of functions determined by the cluster expansions of the probability distribution functions. The solutions to such cluster expansions are cumulants (semi-invariants) of probability distribution functions and are interpreted, from a physical point of view, as correlations of a state or correlation functions. The evolution of correlation functions is governed by the so-called Liouville hierarchy [31]. Historically, there have been several approaches to describing correlations in many-particle systems. Among them, we mention the well-known approach to the dynamics of correlations by I. Prigogine [86] and R. Balescu [1] and its applications in plasma theory.

Further, it will be established that the constructed dynamics of correlation underlie the description of the dynamics of infinitely many hard spheres governed by the BBGKY hierarchy for reduced distribution functions or the hierarchy of nonlinear evolution equations for reduced correlation functions, i.e., of the cumulants of reduced distribution functions.

We introduce a sequence of correlation functions $g(t) = (1, g_1(t, x_1), \ldots, g_s(t, x_1, \ldots, x_s), \ldots)$ by means of cluster expansions of the probability distribution functions $D(t) = (1, D_1(t, x_1), \ldots, D_n(t, x_1, \ldots, x_n), \ldots)$, defined on the set of allowed configurations $\mathbb{R}^{3n} \setminus \mathbb{W}_n$ as follows:

$$D_n(t, x_1, \ldots, x_n) = g_n(t, x_1, \ldots, x_n) + \\ + \sum_{\substack{\mathrm{P}:(x_1,\ldots,x_n)=\bigcup_i X_i, \\ |\mathrm{P}|>1}} \prod_{X_i \subset \mathrm{P}} g_{|X_i|}(t, X_i), \quad n \geqslant 1, \tag{2.29}$$

where $\sum_{\mathrm{P}:(x_1,\ldots,x_n)=\bigcup_i X_i,\, |\mathrm{P}|>1}$ is the sum over all possible partitions P of the set of the arguments $(x_1, \ldots, x_n)$ into $|\mathrm{P}| > 1$ nonempty mutually disjoint subsets $X_i \subset (x_1, \ldots, x_n)$.

On the set $\mathbb{R}^{3n} \setminus \mathbb{W}_n$ solutions of recursion relations (2.29) are given by the following expansions:

$$g_s(t, x_1, \ldots, x_s) = D_s(t, x_1, \ldots, x_s) + \\ + \sum_{\substack{\mathrm{P}:(x_1,\ldots,x_s)=\bigcup_i X_i, \\ |\mathrm{P}|>1}} (-1)^{|\mathrm{P}|-1}(|\mathrm{P}| - 1)! \prod_{X_i \subset \mathrm{P}} D_{|X_i|}(t, X_i), \ s \geqslant 1. \tag{2.30}$$

The structure of expansions (2.30) is such that the correlation functions can be treated as cumulants (semi-invariants) of the probability distribution functions [24]. Such an interpretation of these functions is due to the fact that the probability distribution function of statistically independent hard spheres on allowed configurations is described by the product of single-particle correlation functions (probability distribution functions of each particle):

$$g_s(t,x_1,\ldots,x_s)=\prod_{i=1}^{s}g_1(t,x_i)\mathcal{X}_{\mathbb{R}^{3s}\setminus\mathbb{W}_s}\delta_{s,1},\ \ s\geqslant 1.$$

The evolution of the sequence of correlation functions (2.30) of many hard spheres is determined by the Cauchy problem of the weak formulation of the Liouville hierarchy of the following evolution equations [53]:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}g_s(t,x_1,\ldots,x_s)&=\mathcal{L}^*_s(1,\ldots,s)g_s(t,x_1,\ldots,x_s)+\\&+\sum_{\mathrm{P}:\,(x_1,\ldots,x_s)=X_1\bigcup X_2}\ \sum_{i_1\in\widehat{X}_1}\sum_{i_2\in\widehat{X}_2}\mathcal{L}^*_{\mathrm{int}}(i_1,i_2)g_{|X_1|}(t,X_1)g_{|X_2|}(t,X_2),\end{aligned}\tag{2.31}$$

$$g_s(t,x_1,\ldots,x_s)\big|_{t=0}=g^0_s(x_1,\ldots,x_s),\quad s\geqslant 1,\tag{2.32}$$

where $\sum_{\mathrm{P}:\,(x_1,\ldots,x_s)=X_1\bigcup X_2}$ is the sum over all possible partitions P of the set $(x_1,\ldots,x_s)$ into two nonempty mutually disjoint subsets X_1 and X_2, the symbol $\widehat{X}_i$ means the set of indexes of the set X_i of phase space coordinates and the operator $\mathcal{L}^*_s$ is defined on the subspace $L^1_0\subset L^1$ by formulas (1.7). It should be noted that the Liouville hierarchy (2.31) is the evolution recurrence equations set.

For $t\geqslant 0$ we give a few examples of recurrence equations set (2.31) for a system of hard spheres:

$$\begin{aligned}&\frac{\partial}{\partial t}g_1(t,x_1)=-\langle p_1,\frac{\partial}{\partial q_1}\rangle g_1(t,x_1),\\&\frac{\partial}{\partial t}g_2(t,x_1,x_2)=-\sum_{j=1}^{2}\langle p_j,\frac{\partial}{\partial q_j}\rangle g_2(t,x_1,x_2)+\\&\qquad+\sigma^2\int_{\mathbb{S}^2_+}d\eta\langle\eta,(p_1-p_2)\rangle\Big(g_2(t,q_1,p^*_1,q_2,p^*_2)\delta(q_1-q_2+\sigma\eta)-\\&\qquad\qquad-g_2(t,x_1,x_2)\delta(q_1-q_2-\sigma\eta)\Big)+\\&\qquad+\sigma^2\int_{\mathbb{S}^2_+}d\eta\langle\eta,(p_1-p_2)\rangle\Big(g_1(t,q_1,p^*_1)g_1(t,q_2,p^*_2)\delta(q_1-q_2+\sigma\eta)-\\&\qquad\qquad-g_1(t,x_1)g_1(t,x_2)\delta(q_1-q_2-\sigma\eta)\Big),\end{aligned}$$

where it was used notations accepted above in definition (1.7).

Thus, in terms of correlation functions (2.30), the evolution of the states of a finite number of hard spheres is described by an equivalent method compared to probability distribution functions, namely, within the framework of the dynamics of correlations.

We note that because the Liouville hierarchy (2.31) is the recurrence evolution equations set, we can construct a solution of the Cauchy problem (2.31),(2.32), integrating each equation of the hierarchy as the inhomogeneous Liouville equation. For example, as a result of the integration of the first two equations of the Liouville hierarchy (2.31), we obtain the following equalities:

$$
\begin{aligned}
&g_1(t,x_1) = S_1(-t,1)g_1^0(x_1),\\
&g_2(t,1,2) = S_2(-t,1,2)g_2^0(x_1,x_2)+\\
&\quad = \int\limits_0^t dt_1 S_2(t_1-t,1,2)\mathcal{L}^*_{\mathrm{int}}(1,2)S_1(-t_1,1)S_1(-t_1,2)g_1^0(x_1)g_1^0(x_2).
\end{aligned}
$$

Then for the corresponding term on the right-hand side of the second equality, an analog of the Duhamel equation holds

$$
\begin{aligned}
&\int\limits_0^t dt_1 S_2(t_1-t,1,2)\mathcal{L}^*_{\mathrm{int}}(1,2)S_1(-t_1,1)S_1(-t_1,2) =\\
&\qquad = -\int\limits_0^t dt_1 \frac{d}{dt_1}\big(S_2(t_1-t,1,2)S_1(-t_1,1)S_1(-t_1,2)\big) =\\
&\qquad\qquad = S_2(-t,1,2) - S_1(-t,1)S_1(-t,2) = \mathfrak{A}_2^*(t,1,2),
\end{aligned}
$$

where $\mathfrak{A}_2^*(t)$ is the second-order cumulant (2.22) of groups of operators (1.6). As a result of similar transformations for $s > 2$, the solution of the Cauchy problem (2.31),(2.32), constructed using an iterative procedure, can be represented as expansions in cumulants of groups of operators (1.6).

If the initial state is specified by the sequence

$$
g(0) = (1, g_1^0(x_1), \ldots, g_n^0(x_1,\ldots,x_n), \ldots),
$$

of correlation functions $g_n^0 \in L^1_n$, $n \geqslant 1$, then the evolution of all possible states, i.e., the sequence

$$
g(t) = (1, g_1(t,x_1), \ldots, g_s(t,x_1,\ldots,x_s), \ldots)
$$

of the correlation functions $g_s(t)$, $s \geqslant 1$, is represented by the following expansions [53]:

$$g_s(t, x_1, \ldots, x_s) = \\ = \sum_{\mathrm{P}:\,(x_1,\ldots,x_s)=\bigcup_j X_j} \mathfrak{A}^*_{|\mathrm{P}|}(t, \{\widehat{X}_1\}, \ldots, \{\widehat{X}_{|\mathrm{P}|}\}) \prod_{X_j \subset \mathrm{P}} g^0_{|X_j|}(X_j), \;\; s \geqslant 1, \tag{2.33}$$

where the symbol $\sum_{\mathrm{P}:\,(x_1,\ldots,x_s)=\bigcup_j X_j}$ denotes the sum over all possible partitions P of the set $(x_1, \ldots, x_s)$ into $|\mathrm{P}|$ nonempty mutually disjoint subsets X_j, the symbol $\widehat{X}$ means the set of indexes of the set X of phase space coordinates and the set $(\{\widehat{X}_1\}, \ldots, \{\widehat{X}_{|\mathrm{P}|}\})$ consists of elements that are subsets $\widehat{X}_j \subset (1, \ldots, s)$, i.e., $|(\{\widehat{X}_1\}, \ldots, \{\widehat{X}_{|\mathrm{P}|}\})| = |\mathrm{P}|$. The generating operator $\mathfrak{A}^*_{|\mathrm{P}|}(t)$ of expansions (2.33) is the $|\mathrm{P}|th$-order cumulant of the groups of operators (1.6) which is defined by the expansion

$$\mathfrak{A}^*_{|\mathrm{P}|}(t, \{\widehat{X}_1\}, \ldots, \{\widehat{X}_{|\mathrm{P}|}\}) \doteq \\ \doteq \sum_{\mathrm{P}':\,(\{\widehat{X}_1\},\ldots,\{\widehat{X}_{|\mathrm{P}|}\})=\bigcup_k Z_k} (-1)^{|\mathrm{P}'|-1}(|\mathrm{P}'|-1)! \prod_{Z_k \subset \mathrm{P}'} S^*_{|\theta(Z_k)|}(t, \theta(Z_k)), \tag{2.34}$$

where the symbol θ is the declusterization mapping: $\theta(\{\widehat{X}_i\}) \doteq (\widehat{X}_i)$. The simplest examples of correlation functions (2.33) are given as follows:

$$g_1(t, x_1) = \mathfrak{A}^*_1(t, 1) g^0_1(x_1),$$
$$g_2(t, x_1, x_2) = \mathfrak{A}^*_1(t, \{1, 2\}) g^0_2(x_1, x_2) + \mathfrak{A}^*_2(t, 1, 2) g^0_1(x_1) g^0_1(x_2).$$

The structure of expansions (2.33) is established as a result of the permutation of the terms of cumulant expansions (2.30) for correlation functions and cluster expansions (2.29) for initial probability distribution functions. Thus, the cumulant origin of correlation functions induces the cumulant structure of their dynamics (2.33).

In particular, in the absence of correlations between hard spheres at the initial moment (initial state satisfying the chaos condition [14, 95]) the sequence of the initial correlation functions on allowed configurations has the form $g^{(c)}(0) = (0, g^0_1(x_1), 0, \ldots, 0, \ldots)$. In terms of a sequence of the probability distribution functions, the chaos condition means that initial data is specified in the form

$$D^{(c)}(0) = \Big(1, D^0_1(x_1), D^0_1(x_1) D^0_1(x_2) \mathcal{X}_{\mathbb{R}^6 \setminus \mathbb{W}_2}, \ldots, \prod_{i=1}^{n} D^0_1(x_i) \mathcal{X}_{\mathbb{R}^{3n} \setminus \mathbb{W}_n}, \ldots\Big),$$

where the function $\mathcal{X}_{\mathbb{R}^{3n} \setminus \mathbb{W}_n}$ is the Heaviside step function of allowed configurations of n hard spheres. In this case for $(x_1, \ldots, x_s) \in \mathbb{R}^{3s} \times (\mathbb{R}^{3s} \setminus \mathbb{W}_s)$

expansions (2.33) are represented as follows:

$$g_s(t,x_1,\ldots,x_s)=\mathfrak{A}^*_s(t,1,\ldots,s)\prod_{i=1}^{s}g_1^0(x_i)\mathcal{X}_{\mathbb{R}^{3s}\setminus\mathbb{W}_s},\quad s\geqslant 1,\tag{2.35}$$

where the generating operator $\mathfrak{A}^*_s(t)$ of this expansion is the sth-order cumulant of groups of operators (1.6) defined by the expansion

$$\mathfrak{A}^*_s(t,1,\ldots,s)\ =\sum_{\mathrm{P}:\,(1,\ldots,s)=\bigcup_i X_i}(-1)^{|\mathrm{P}|-1}(|\mathrm{P}|-1)!\prod_{X_i\subset\mathrm{P}}S^*_{|X_i|}(t,X_i),\tag{2.36}$$

with notations accepted in formula (2.33). From the structure of series (2.35) it is clear that in case of the absence of correlations at the initial instant the correlations generated by the dynamics of a system of hard spheres are completely determined by cumulants (2.36) of the groups of operators (1.6).

We note that in the case of initial data $g^{(c)}(0)$ expansions (2.35) can be rewritten in another representation that explains their physical meaning. Indeed, for $n=1$ we have

$$g_1(t,x_1)=\mathfrak{A}^*_1(t,1)g_1^0(x_1)=g_1^0(p_1,q_1-p_1t).$$

Then, according to formula (2.35) and the definition of the first-order cumulant $\mathfrak{A}^*_1(t)=S_1(-t)$, and its inverse group of operators $S_1^{-1}(-t)=S_1(t)$, we express the correlation functions $g_s(t)$, $s\geqslant 2$, in terms of the one-particle correlation function $g_1(t)$. Therefore, for $s\geqslant 2$ expansions (2.35) are represented in the following form:

$$g_s(t,x_1,\ldots,x_s)=\widehat{\mathfrak{A}}^*_s(t,1,\ldots,s)\prod_{i=1}^{s}g_1(t,x_i),\quad s\geqslant 2,$$

where $\widehat{\mathfrak{A}}^*_s(t,1,\ldots,s)$ is the s-order cumulant (2.36) of the scattering operators

$$\widehat{S}_n(t,1,\ldots,n)\doteq S_n(-t,1,\ldots,n)\mathcal{X}_{\mathbb{R}^{3n}\setminus\mathbb{W}_n}\prod_{i=1}^{n}S_1(t,i),\quad n\geqslant 1.$$

On the subspace $L^1_{n,0}$ a generator of the scattering operator $\widehat{S}_n(t,1,\ldots,n)$ is determined by the operator:

$$\frac{d}{dt}\widehat{S}_n(t,1,\ldots,n)\mid_{t=0}\ =\sum_{j_1<j_2=1}^{n}\mathcal{L}^*_{\mathrm{int}}(j_1,j_2),$$

where for $t\geqslant 0$ the operator $\mathcal{L}^*_{\mathrm{int}}(j_1,j_2)$ is defined by formula (1.7).

If $g_n^0 \in L_n^1$, $n \geqslant 1$, one-parameter mapping (2.33) generates strong continuous group of nonlinear operators

$$\mathcal{G}(t; 1, \ldots, s \mid g(0)) \doteq g_s(t, x_1, \ldots, x_s), \tag{2.37}$$

and it is bounded, and the following estimate holds:

$$\big\|\mathcal{G}(t; 1, \ldots, s \mid g)\big\|_{L_s^1} \leqslant s! c^s,$$

where

$$c \equiv \max\Big(1, \max_{\mathrm{P}:\,(1,\ldots,s)=\bigcup_i X_i} \|g_{|X_i|}\|_{L^1_{|X_i|}}\Big).$$

For $g_n \in L^1_{n,0}$, $n \geqslant 1$, the infinitesimal generator of this group of nonlinear operators has the following structure

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(1, \ldots, s \mid g) &\doteq \mathcal{L}_s^*(1, \ldots, s) g_s(x_1, \ldots, x_s) + \\ &+ \sum_{\mathrm{P}:\,(x_1,\ldots,x_s)=X_1 \bigcup X_2} \sum_{i_1 \in \widehat{X}_1} \sum_{i_2 \in \widehat{X}_2} \mathcal{L}_{\mathrm{int}}^*(i_1, i_2) g_{|X_1|}(X_1) g_{|X_2|}(X_2),\end{aligned} \tag{2.38}$$

where we used the notation adopted above in expansions (2.33).

The following statement is true [53].

Theorem. *If $t \in \mathbb{R}$, a unique solution of the Cauchy problem of the Liouville hierarchy (2.31),(2.32) is represented by a sequence of expansions (2.33). For $g_n^0 \in L^1_{n,0} \subset L^1_n$, $n \geqslant 1$, a sequence of functions (2.33) is a classical solution and for arbitrary initial data $g_n^0 \in L_n^1$, $n \geqslant 1$, one has a generalized solution.*

The proof of the theorem is similar to the proof of the existence theorem for the BBGKY hierarchy in the space of sequences of integrable functions [14, 67]. Indeed, if the initial data is $g_n^0 \in L^1_{n,0}$, $n \geqslant 1$, then the infinitesimal generator of the group of nonlinear operators (2.37) coincides with the operator (2.38) and hence the Cauchy problem (2.31),(2.32) has a classical (strong) solution (2.33).

We remark that a steady solution of the Liouville hierarchy (2.31) is a sequence of the Ursell functions on the allowed configurations of hard spheres, i.e., it is the sequence $g^{(eq)} = (0, e^{-\beta\frac{p_1^2}{2}}, 0, \ldots,)$, where β is a parameter inversely proportional to temperature [64].

Finally, we emphasize that the dynamics of correlations, that is, the fundamental equations (2.31) describing the evolution of correlations of states of hard spheres, can be used as a basis for describing the evolution of the state of both a finite and an infinite number of hard spheres instead of the Liouville equations (1.8).

In what follows, we outline an approach to describing the evolution of a state using reduced distribution functions based on the dynamics of correlations in a system of many hard spheres governed by the Liouville hierarchy for correlation functions (2.31).

Remind that reduced distribution functions are defined by means of sequence (1.15) of the probability distribution functions:

$$\begin{aligned} &F_s(t,x_1,\ldots,x_s) \doteq (I,D(t))^{-1}\times \\ &\times\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\int\limits_{(\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3)^n} dx_{s+1}\cdots dx_{s+n}\, D_{s+n}(t,x_1,\ldots,x_{s+n}),\;\; s\geqslant 1, \end{aligned} \tag{2.39}$$

where the normalizing factor

$$(I,D(t))\doteq\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\int\limits_{(\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3)^n} dx_1\cdots dx_n D_n(t,x_1,\ldots,x_n)$$

is a grand canonical partition function. The possibility of redefining of the reduced distribution functions naturally arises as a result of dividing the series in expression (2.39) by the series of the normalization factor.

A definition of reduced distribution functions equivalent to definition (2.39) is formulated on the basis of correlation functions (2.33) of a system of hard spheres by means of the following series expansion [53]:

$$\begin{aligned} F_s(t,x_1,\ldots,x_s)\doteq &\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\int\limits_{(\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3)^n} dx_{s+1}\cdots dx_{s+n}\times \\ &\times g_{1+n}(t,\{x_1,\ldots,x_s\},x_{s+1},\ldots,x_{s+n}),\;\; s\geqslant 1, \end{aligned} \tag{2.40}$$

where on the set of allowed configurations $\mathbb{R}^{3(s+n)}\setminus\mathbb{W}_{s+n}$ the correlation functions of clusters of hard spheres $g_{1+n}(t), n\geqslant 0$, are determined by the expansions:

$$\begin{aligned} &g_{1+n}(t,\{x_1,\ldots,x_s\},x_{s+1},\ldots,x_{s+n}) = \\ &=\sum_{\substack{\mathrm{P}:(\{x_1,\ldots,x_s\},\\ x_{s+1},\ldots,x_{s+n})=\bigcup_i X_i}}\mathfrak{A}^{*}_{|\mathrm{P}|}\big(t,\{\theta(\widehat{X}_1)\},\ldots,\{\theta(\widehat{X}_{|\mathrm{P}|})\}\big)\prod_{X_i\subset\mathrm{P}} g^0_{|X_i|}(X_i),\;\; n\geqslant 0. \end{aligned} \tag{2.41}$$

We remind that in expansions (2.41) the generating operator $\mathfrak{A}^{*}_{|\mathrm{P}|}(t)$ is the $|\mathrm{P}|th$-order cumulant (2.34) of the groups of operators (1.6), and the symbol $\sum_{\mathrm{P}:(\{x_1,\ldots,x_s\},x_{s+1},\ldots,x_{s+n})=\bigcup_i X_i}$ means the sum over all possible partitions P of the set $(\{x_1,\ldots,x_s\},x_{s+1},\ldots,x_{s+n})$ into nonempty mutually disjoint subsets X_i.

On allowed configurations the correlation functions of particle clusters in series (2.40), i.e., the functions $g_{1+n}(t,\{x_1,\ldots,x_s\},\,x_{s+1},\ldots,x_{s+n})$, $n\geqslant 0$, are defined as solutions of generalized cluster expansions of a sequence of solutions of the Liouville equations:

$$\begin{aligned}
&D_{s+n}(t,x_1,\ldots,x_{s+n})=\\
&\qquad=\sum_{\substack{\mathrm{P}:(\{x_1,\ldots,x_s\},\\ x_{s+1},\ldots,x_{s+n})=\bigcup_i X_i}}\ \prod_{X_i\subset\mathrm{P}} g_{|X_i|}(t,X_i),\quad s\geqslant 1,\, n\geqslant 0,
\end{aligned}\tag{2.42}$$

namely,

$$\begin{aligned}
&g_{1+n}(t,\{x_1,\ldots,x_s\},x_{s+1},\ldots,x_{s+n})=\\
&\quad=\sum_{\substack{\mathrm{P}:(\{x_1,\ldots,x_s\},\\ x_{s+1},\ldots,x_{s+n})=\bigcup_i X_i}}(-1)^{|\mathrm{P}|-1}(|\mathrm{P}|-1)!\prod_{X_i\subset\mathrm{P}} D_{|\theta(X_i)|}(t,\theta(X_i)),\quad s\geqslant 1,\, n\geqslant 0,
\end{aligned}$$

where θ is the declusterization mapping defined in formula (2.34), the probability distribution function $D_{|\theta(X_i)|}(t,\theta(X_i))$ is a solution of the Liouville equation.

The correlation functions of particle clusters satisfy the Liouville hierarchy of evolution equations with the following generator

$$\begin{aligned}
&\mathcal{L}(\{1,\ldots,s\},s+1,\ldots,s+n\mid \mathfrak{d}_{\{Y\}}g(t))\doteq\\
&\quad\doteq\mathcal{L}^*_{s+n}(1,\ldots,s+n)g_{1+n}(t,X)+\\
&\quad+\sum_{\mathrm{P}:\,X=X_1\bigcup X_2}\ \sum_{i_1\in\theta(\hat{X}_1)}\ \sum_{i_2\in\theta(\hat{X}_2)}\mathcal{L}^*_{\mathrm{int}}(i_1,i_2)g_{|X_1|}(t,X_1)g_{|X_2|}(t,X_2),\ n\geqslant 0,
\end{aligned}\tag{2.43}$$

where $X\equiv(\{Y\},x_{s+1},\ldots,x_{s+n})\equiv(\{x_1,\ldots,x_s\},x_{s+1},\ldots,x_{s+n})$, the sequence of solutions of generalized cluster expansions (2.42) is denoted by means of the mapping

$$(\mathfrak{d}_{\{Y\}}g)_n(x_1,\ldots,x_n)\doteq g_{1+n}(\{x_1,\ldots,x_s\},x_{s+1},\ldots,x_{s+n}),\quad n\geqslant 0,$$

and we also used the notations adopted above in expansion (2.33).

We note that on the allowed configurations the correlation functions of hard-sphere clusters can be expressed through correlation functions of hard spheres (2.33) by the following relations:

$$\begin{aligned}
&g_{1+n}(t,\{x_1,\ldots,x_s\},x_{s+1},\ldots,x_{s+n})=\\
&\quad=\sum_{\substack{\mathrm{P}:(\{x_1,\ldots,x_s\},\\ x_{s+1},\ldots,x_{s+n})=\bigcup_i X_i}}(-1)^{|\mathrm{P}|-1}(|\mathrm{P}|-1)!\times\\
&\qquad\qquad\times\prod_{X_i\subset\mathrm{P}}\ \sum_{\mathrm{P}':\,\theta(X_i)=\bigcup\limits_{j_i} Z_{j_i}}\ \prod_{Z_{j_i}\subset\mathrm{P}'} g_{|Z_{j_i}|}(t,Z_{j_i}),\ n\geqslant 0.
\end{aligned}\tag{2.44}$$

In particular case $n = 0$, i.e., the correlation function of a cluster of the s hard spheres, these relations take the form

$$g_{1+0}(t, \{x_1, \ldots, x_s\}) = \sum_{\mathrm{P}:\, \theta(\{x_1,\ldots,x_s\}) = \bigcup_i X_i} \prod_{X_i \subset \mathrm{P}} g_{|X_i|}(t, X_i).$$

As a consequence of these relations, for the initial state satisfying the chaos condition, from (2.41) the following generalization of expansions (2.35) holds:

$$\begin{aligned} & g_{s+n}(t, \{x_1, \ldots, x_s\}, x_{s+1}, \ldots, x_{s+n}) = \\ & \quad = \mathfrak{A}_{1+n}(t, \{1, \ldots, s\}, s+1, \ldots, s+n) \times \\ & \quad\quad \times \prod_{i=1}^{s+n} g_1^0(x_i) \mathcal{X}_{\mathbb{R}^{3(s+n)} \setminus \mathbb{W}_{s+n}}, \quad s \geqslant 1,\ n \geqslant 0. \end{aligned} \tag{2.45}$$

As we noted above, the possibility of the description of the evolution of a state based on the dynamics of correlations (2.40) occurs naturally in consequence of dividing the series of expressions (2.39) by the series of the normalizing factor. To provide evidence of this statement, we will introduce the necessary notions and prove the validity of some auxiliary equalities.

On sequences of functions $f, \widetilde{f} \in L^1 \oplus_{n=0}^{\infty} L^1_n$ we define the following $*$-product [90]

$$(f * \widetilde{f})_s(x_1, \ldots, x_s) = \sum_{Z \subset (x_1, \ldots, x_s)} f_{|Z|}(Z)\, \widetilde{f}_{s-|Z|}((x_1, \ldots, x_s) \setminus Z), \tag{2.46}$$

where $\sum_{Z \subset (x_1, \ldots, x_s)}$ is the sum over all subsets Z of the set $(x_1, \ldots, x_s)$. Using the definition of the $*$-product (2.46), we introduce the mapping $\mathbb{E}\mathrm{xp}_*$ and the inverse mapping $\mathbb{L}\mathrm{n}_*$ on sequences

$$h = (0, h_1(x_1), \ldots, h_n(x_1, \ldots, x_n), \ldots)$$

of functions $h_n \in L^1_n$ by the expansions:

$$\begin{aligned} (\mathbb{E}\mathrm{xp}_*\, h)_s(x_1, \ldots, x_s) &= \Big(\mathbb{I} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{h^{*n}}{n!}\Big)_s (x_1, \ldots, x_s) = \\ &= \delta_{s,0} + \sum_{\mathrm{P}:\, (x_1,\ldots,x_s) = \bigcup_i X_i} \prod_{X_i \subset \mathrm{P}} h_{|X_i|}(X_i), \end{aligned} \tag{2.47}$$

where we used the notations accepted in formula (2.29), $\mathbb{I} = (1, 0, \ldots, 0, \ldots)$ and $\delta_{s,0}$ is the Kronecker symbol, and respectively,

$$\begin{aligned}(\mathbb{L}\mathrm{n}_*(\mathbb{I} + h))_s(x_1, \ldots, x_s) &= \Big(\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\,\frac{h^{*n}}{n}\Big)_s(x_1, \ldots, x_s) = \\ &= \sum_{\mathrm{P}:\,(x_1,\ldots,x_s)=\bigcup_i X_i}(-1)^{|\mathrm{P}|-1}(|\mathrm{P}|-1)!\prod_{X_i\subset\mathrm{P}} h_{|X_i|}(X_i).\end{aligned} \tag{2.48}$$

Therefore in terms of sequences of functions recursion relations (2.29) are rewritten in the form

$$D(t) = \mathbb{E}\mathrm{xp}_*\, g(t),$$

where $D(t) = \mathbb{I} + (0, D_1(t, x_1), \ldots, D_n(t, x_1, \ldots, x_n), \ldots)$. As a result, we get

$$g(t) = \mathbb{L}\mathrm{n}_*\, D(t).$$

Thus, according to definition (2.46) of the $*$-product and mapping (2.48), in the component-wise form solutions of recursion relations (2.29) are represented by expansions (2.30).

For arbitrary $f = (f_0, f_1, \ldots, f_n, \ldots) \in L^1$ and the set $Y \equiv (x_1, \ldots, x_s)$ we define the linear mapping $\mathfrak{d}_Y : f \to \mathfrak{d}_Y f$, by the formula

$$(\mathfrak{d}_Y f)_n(x_1, \ldots, x_n) \doteq f_{s+n}(x_1, \ldots, x_s, x_{s+1}, \ldots, x_{s+n}),\ n \geqslant 0. \tag{2.49}$$

For the set $\{Y\}$ consisting of the one element $Y = (x_1, \ldots, x_s)$, we have, respectively

$$(\mathfrak{d}_{\{Y\}} f)_n(x_1, \ldots, x_n) \doteq f_{1+n}(\{x_1, \ldots, x_s\}, x_{s+1}, \ldots, x_{s+n}),\ n \geqslant 0. \tag{2.50}$$

On sequences $\mathfrak{d}_Y f$ and $\mathfrak{d}_{Y'}\widetilde{f}$ we introduce the $*$-product

$$(\mathfrak{d}_Y f * \mathfrak{d}_{Y'}\widetilde{f})_{|X|}(X) \doteq \sum_{Z\subset X} f_{|Z|+|Y|}(Y, Z)\,\widetilde{f}_{|X\backslash Z|+|Y'|}(Y', X\backslash Z),$$

where X, Y, Y' are the sets, which characterize clusters of hard spheres, and $\sum_{Z\subset X}$ is the sum over all subsets Z of the set X. In particular case $Y = \varnothing$, $Y' = \varnothing$, this definition reduces to definition of $*$-product (2.46).

Let us establish some properties of introduced mappings (2.47) and (2.50).

If $f_n \in L^1_n$, $n \geqslant 1$ for the sequences $f = (0, f_1, \ldots, f_n, \ldots)$, according to definitions of mappings (2.47) and (2.50), the following equality holds

$$\mathfrak{d}_{\{Y\}}\mathbb{E}\mathrm{xp}_* f = \mathbb{E}\mathrm{xp}_* f * \mathfrak{d}_{\{Y\}} f, \tag{2.51}$$

and for mapping (2.49), respectively

$$\mathfrak{d}_Y\mathbb{E}\mathrm{xp}_* f = \mathbb{E}\mathrm{xp}_* f \quad * \sum_{\mathrm{P}:\,Y=\bigcup_i X_i}\mathfrak{d}_{X_1} f * \ldots * \mathfrak{d}_{X_{|\mathrm{P}|}} f,$$

where $\sum_{\mathrm{P}:\,Y=\bigcup_i X_i}$ denotes the sum over all possible partitions P of the set $Y \equiv (x_1, \dots, x_s)$ into $|\mathrm{P}|$ nonempty mutually disjoint subsets $X_i \subset Y$.

Hence, in terms of mappings (2.49) and (2.50) generalized cluster expansions (2.42) take the form

$$\mathfrak{d}_Y D(t) = \mathfrak{d}_{\{Y\}} \mathbb{E}\mathrm{xp}_* \, g(t). \tag{2.52}$$

On sequences of functions $f \in L^1 = \oplus_{n=0}^{\infty} L^1_n$ we also define the analogue of the annihilation operator

$$(\mathfrak{a} f)_n(x_1, \dots, x_n) \ = \int\limits_{\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3} dx_{n+1} f_{n+1}(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}). \tag{2.53}$$

Then for sequences $f, \widetilde{f} \in L^1$, the following equality holds

$$(e^{\mathfrak{a}} f * \widetilde{f})_0 = (e^{\mathfrak{a}} f)_0 (e^{\mathfrak{a}} \widetilde{f})_0, \tag{2.54}$$

where such a notation was used

$$(e^{\mathfrak{a}} f)_0 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \int\limits_{(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3)^n} dx_1 \cdots dx_n \, f_n(x_1, \dots, x_n). \tag{2.55}$$

Now let us prove the equivalence of definition (2.39) of the reduced distribution functions and their definition (2.40) within the framework of the dynamics of correlations.

In terms of mapping (2.49) and notation (2.55) the definition of reduced distribution functions (2.39) is written as follows

$$F_s(t, x_1, \dots, x_s) = (e^{\mathfrak{a}} D(t))_0^{-1} (e^{\mathfrak{a}} \mathfrak{d}_Y D(t))_0.$$

Using generalized cluster expansions (2.52), and as a consequence of equalities (2.51) and (2.54), we find

$$\begin{aligned} (e^{\mathfrak{a}} \mathfrak{d}_Y D(t))_0 &= (e^{\mathfrak{a}} \mathfrak{d}_{\{Y\}} \mathbb{E}\mathrm{xp}_* \, g(t))_0 = \\ & (e^{\mathfrak{a}} \mathbb{E}\mathrm{xp}_* g(t) * \mathfrak{d}_{\{Y\}} g(t))_0 = (e^{\mathfrak{a}} \mathbb{E}\mathrm{xp}_* g(t))_0 (e^{\mathfrak{a}} \mathfrak{d}_{\{Y\}} g(t))_0. \end{aligned}$$

Taking into account that, according to the particular case $Y = \varnothing$, of cluster expansions (2.42), the equality holds

$$(e^{\mathfrak{a}} \mathbb{E}\mathrm{xp}_* g(t))_0 = (e^{\mathfrak{a}} D(t))_0,$$

as a result, we establish the following representation for the reduced distribution functions

$$F_s(t, x_1, \dots, x_s) = (e^{\mathfrak{a}} \mathfrak{d}_{\{Y\}} g(t))_0.$$

Therefore, in componentwise-form we obtain relation (2.40).

Since the correlation functions $g_{1+n}(t)$, $n \geqslant 0$, are governed by the corresponding Liouville hierarchy for the cluster of hard spheres and hard spheres, the reduced distribution functions (2.40) are governed by the BBGKY hierarchy for hard spheres

$$\frac{\partial}{\partial t}F(t) = e^{\mathfrak{a}}\mathcal{L}(\{\cdot\}, \cdot \mid e^{-\mathfrak{a}}F(t)), \tag{2.56}$$

where the operator $\mathcal{L}(\{\cdot\}, \cdot \mid f)$ is generator (2.43) of the Liouville hierarchy for a cluster of hard spheres and hard spheres. For a generator of this hierarchy of evolution equations takes place the following representation:

$$e^{\mathfrak{a}}\mathcal{L}(\{\cdot\}, \cdot \mid e^{-\mathfrak{a}}F(t)) = e^{\mathfrak{a}}\mathcal{L}^* e^{-\mathfrak{a}}F(t),$$

where the operator $\mathcal{L}^* = \oplus_{n=0}^{\infty}\mathcal{L}_n^*$ is a direct sum of the Liouville operators and the operator $\mathfrak{a}$ is defined by formula (2.53). Due to the fact that pairwise collisions occur during the evolution, a generator of this hierarchy is reduced to the operator of such a structure [14]

$$e^{\mathfrak{a}}\mathcal{L}^* e^{-\mathfrak{a}} = \mathcal{L}^* + [\mathfrak{a}, \mathcal{L}^*],$$

where as above the bracket $[\cdot, \cdot]$ is the commutator of operators.

We note that for the first time the BBGKY hierarchy for many hard spheres (2.56) was mathematically justified in paper [83] (see also [14]).

In consequence of definition (2.40) and the cumulant structure of representation of a solution (2.33) for the Liouville hierarchy (2.31), if initial state specified by the sequence of reduced distribution functions

$$F(0) = \big(1, F_1^0(x_1), \ldots, F_n^0(x_1, \ldots, x_n), \ldots\big),$$

then the evolution of all possible states, i.e., a sequence of the reduced distribution functions $F_s(t)$, $s \geqslant 1$, is determined by the series expansions (2.24).

We remark that the representation (2.24) is directly established for the initial states satisfying the chaos condition due to the validity in this case of the representation (2.45) for the correlation functions of the hard-sphere cluster and of the hard spheres.

Consequently, as follows from the above, the cumulant structure of generating operators of expansions for correlation functions (2.33) or (2.41) induces the cumulant structure (2.22) of generating operators of series expansions for reduced distribution functions (2.24) or in other words, the evolution of the state of a system of an infinite number of hard spheres is governed by the dynamics of correlations on a microscopic scale.

Thus, we have established relation (2.40) between the reduced distribution functions and correlation functions governed by the Liouville hierarchy.

2.4. **The hierarchy of nonlinear evolution equations for reduced correlation functions.** As is known, on a microscopic scale, the macroscopic characteristics of fluctuations of observables are directly determined by means of the reduced correlation functions. Assuming as a basis an alternative approach to the description of the evolution of states of a hard-sphere system within the framework of correlation functions (2.33), then the reduced correlation functions are defined by means of a solution of the Cauchy problem of the Liouville hierarchy (2.31),(2.32) as follows [53]:

$$\begin{aligned} &G_s(t,x_1,\ldots,x_s) \doteq \\ &\doteq \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\int\limits_{(\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3)^n} dx_{s+1}\cdots dx_{s+n}\, g_{s+n}(t,x_1,\ldots,x_{s+n}),\ s\geqslant 1, \end{aligned} \tag{2.57}$$

where the generating function $g_{s+n}(t,x_1,\ldots,x_{s+n})$ is defined by expansion (2.33), or in terms of mapping (2.49) and notation (2.55) this definition takes the form

$$G_s(t,x_1,\ldots,x_s)=(e^{\mathfrak{a}}\mathfrak{d}_Y g(t))_0,$$

or in terms of sequences of functions this expression has the form

$$G(t)=e^{\mathfrak{a}}g(t).$$

We emphasize that nth term of expansions (2.57) of the reduced correlation functions are determined by the $(s{+}n)th$-particle correlation function (2.33) in contrast with the expansions of reduced distribution functions (2.40) which are determined by the $(1+n)th$-particle correlation function of clusters of hard spheres (2.41).

Such a representation for reduced correlation functions (2.57) can be derived as a result of the fact that the reduced correlation functions are cumulants of reduced distribution functions (2.40). Indeed, traditionally reduced correlation functions are introduced by means of the cluster expansions of the reduced distribution functions similar to the cluster expansions of the probability distribution functions (2.29) and on the set of allowed configurations $\mathbb{R}^{3n}\backslash\mathbb{W}_n$ they have the form:

$$F_s(t,x_1,\ldots,x_s)=\sum_{\mathrm{P}:(x_1,\ldots,x_s)=\bigcup_i X_i}\ \prod_{X_i\subset\mathrm{P}} G_{|X_i|}(t,X_i),\ s\geqslant 1, \tag{2.58}$$

where as above the symbol $\sum_{\mathrm{P}:(x_1,\ldots,x_s)=\bigcup_i X_i}$ is the sum over all possible partitions P of the set $(x_1,\ldots,x_s)$ into $|\mathrm{P}|$ nonempty mutually disjoint subsets $X_i\subset(x_1,\ldots,x_s)$. As a consequence of this, the solution of recurrence relations (2.58) are represented through reduced distribution functions as follows:

$$\begin{aligned} &G_s(t,x_1,\ldots,x_s)= \\ &=\sum_{\mathrm{P}:(x_1,\ldots,x_s)=\bigcup_i X_i}(-1)^{|\mathrm{P}|-1}(|\mathrm{P}|-1)!\prod_{X_i\subset\mathrm{P}}F_{|X_i|}(t,X_i),\ s\geqslant 1. \end{aligned} \tag{2.59}$$

Functions (2.59) are interpreted as the functions which describe the correlations of hard-sphere states. The structure of expansions (2.59) is such that the reduced correlation functions are cumulants (semi-invariants) of the reduced distribution functions (2.24).

Thus, taking into account representation (2.40) of the reduced distribution functions, in consequence of the validity of relations (2.44) we derive representation (2.57) of the reduced correlation functions through correlation functions

$$G_s(t,x_1,\ldots,x_s) = \\ = \sum_{\mathrm{P}:(x_1,\ldots,x_s)=\bigcup_i X_i} (-1)^{|\mathrm{P}|-1}(|\mathrm{P}|-1)! \prod_{X_i\subset \mathrm{P}} (e^{\mathfrak{a}}\mathfrak{d}_{\{X_i\}} g(t)) = (e^{\mathfrak{a}}\mathfrak{d}_Y g(t))_0.$$

Since the correlation functions $g_{s+n}(t)$, $n \geqslant 0$, are governed by the Liouville hierarchy for hard spheres (2.31), the reduced correlation functions defined as (2.57) are governed by the hierarchy of nonlinear equations for hard spheres (the nonlinear BBGKY hierarchy) [53]:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial t}G_s(t,x_1,\ldots,x_s) = \mathcal{L}^*_s G_s(t,x_1,\ldots,x_s)+\\
&\quad+\sum_{\mathrm{P}:\,(x_1,\ldots,x_s)=X_1\bigcup X_2}\ \sum_{i_1\in\widehat{X}_1}\ \sum_{i_2\in\widehat{X}_2}\mathcal{L}^*_{\mathrm{int}}(i_1,i_2)G_{|X_1|}(t,X_1)G_{|X_2|}(t,X_2))+\\
&\quad+\int\limits_{\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3} dx_{s+1}\Big(\sum_{i=1}^{s}\mathcal{L}^*_{\mathrm{int}}(i,s+1)G_{s+1}(t,x_1,\ldots,x_{s+1})+\\
&\quad+\sum_{\mathrm{P}:\,(x_1,\ldots,x_{s+1})=X_1\bigcup X_2}\ \sum_{\substack{i\in\widehat{X}_1\\ s+1\in\widehat{X}_2}}\mathcal{L}^*_{\mathrm{int}}(i,s+1)G_{|X_1|}(t,X_1)G_{|X_2|}(t,X_2)\Big),
\end{aligned} \tag{2.60}$$

$$G_s(t,x_1,\ldots,x_s)\big|_{t=0} = G^0_s(x_1,\ldots,x_s), \quad s\geqslant 1, \tag{2.61}$$

where the symbol $\sum_{\mathrm{P}:(x_1,\ldots,x_{s+1})=X_1\bigcup X_2}$ means the sum over all possible partitions of the set $(x_1,\ldots,x_{s+1})$ into two mutually disjoint subsets X_1 and X_2, the sum over the index i which takes values from the subset $\widehat{X}_1$ provided that the index $s+1$ belongs to the subset $\widehat{X}_2$ is denoted by $\sum_{i\in\widehat{X}_1,s+1\in\widehat{X}_2}$ and notations accepted in the Liouville hierarchy (2.31) are used.

A generator of this hierarchy of nonlinear evolution equations has the following structure:

$$\frac{\partial}{\partial t}G(t) = e^{\mathfrak{a}}\mathcal{L}(\cdot\mid e^{-\mathfrak{a}}G(t)),$$

where the operator $\mathcal{L}(\cdot\mid f) = \oplus_{n=0}^{\infty}\mathcal{L}(1,\ldots,n\mid f)$ is a direct sum of generators (2.38) of the Liouville hierarchy (2.31). Here are some component-wise examples of hierarchy (2.60):

$$\frac{\partial}{\partial t}G_1(t,x_1)=\mathcal{L}^*_1(1)G_1(t,x_1)+$$
$$+\int\limits_{\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3} dx_2\mathcal{L}^*_{\mathrm{int}}(1,2)\big(G_2(t,x_1,x_2)+G_1(t,x_1)G_1(t,x_2)\big),$$
$$\frac{\partial}{\partial t}G_2(t,x_1,x_2)=\mathcal{L}^*_2(1,2)G_2(t,x_1,x_2)+\mathcal{L}^*_{\mathrm{int}}(1,2)G_1(t,x_1)G_1(t,x_2)+$$
$$+\int\limits_{\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3} dx_3\Big(\sum_{i=1}^{2}\mathcal{L}^*_{\mathrm{int}}(i,3)\big(G_3(t,x_1,x_2,x_3)+G_2(t,x_1,x_2)G_1(t,x_3)\big)+$$
$$+\mathcal{L}^*_{\mathrm{int}}(2,3)G_2(t,x_1,x_3)G_1(t,x_2)+\mathcal{L}^*_{\mathrm{int}}(1,3)G_2(t,x_2,x_3)G_1(t,x_1)\Big),$$

where it was used notations accepted above in definition (1.7).

If $G(0)=(1,G^0_1(x_1),\ldots,G^0_s(x_1,\ldots,x_s),\ldots)$ is a sequence of reduced correlation functions at initial instant, then by means of mappings (2.37) the evolution of all possible states, i.e., the sequence of the reduced correlation functions $G_s(t)$, $s\geqslant 1$, is determined by the following series expansions:

$$G_s(t,x_1,\ldots,x_s)=$$
$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\int\limits_{(\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3)^n} dx_{s+1}\cdots dx_{s+n}\times \tag{2.62}$$
$$\times\,\mathfrak{A}_{1+n}\big(t;\{1,\ldots,s\},s+1,\ldots,s+n\mid G(0)\big),\ \ s\geqslant 1,$$

where the generating operator $\mathfrak{A}_{1+n}(t;\{1,\ldots,s\},s+1,\ldots,s+n\mid G(0))$ of this series is the $(1+n)th$-order cumulant of groups of nonlinear operators (2.33):

$$\mathfrak{A}_{1+n}(t;\{1,\ldots,s\},s+1,\ldots,s+n\mid G(0))\doteq$$
$$\doteq\sum_{\mathrm{P}:\,(\{1,\ldots,s\},s+1,\ldots,s+n)=\bigcup_k X_k}(-1)^{|\mathrm{P}|-1}(|\mathrm{P}|-1)!\times \tag{2.63}$$
$$\times\,\mathcal{G}\big(t;\theta(X_1)\mid\ldots\mathcal{G}(t;\theta(X_{|\mathrm{P}|})\mid G(0))\ldots\big),\ n\geqslant 0,$$

and where the composition of mappings (2.33) of the corresponding noninteracting groups of particles was denoted by

$$\mathcal{G}(t;\theta(X_1)\mid\ldots\mathcal{G}(t;\theta(X_{|\mathrm{P}|})\mid G(0))\ldots),$$

for example,

$$\mathcal{G}\big(t;1\mid\mathcal{G}(t;2\mid G(0))\big)=\mathfrak{A}_1(t,1)\mathfrak{A}_1(t,2)G^0_2(x_1,x_2),$$
$$\mathcal{G}\big(t;1,2\mid\mathcal{G}(t;3\mid G(0))\big)=\mathfrak{A}_1(t,\{1,2\})\mathfrak{A}_1(t,3)G^0_3(x_1,x_2,x_3)+$$

$$+\mathfrak{A}_2(t,1,2)\mathfrak{A}_1(t,3)\big(G_1^0(x_1)G_2^0(x_2,x_3)+G_1^0(x_2)G_2^0(x_1,x_3)\big).$$

We will adduce examples of expansions (2.63). The first order cumulant of the groups of nonlinear operators (2.33) is the group of these nonlinear operators

$$\mathfrak{A}_1(t;\{1,\ldots,s\}\mid G(0))=\mathcal{G}(t;1,\ldots,s\mid G(0)).$$

In case of $s=2$ the second order cumulant of nonlinear operators (2.33) has the structure

$$\begin{aligned}
&\mathfrak{A}_{1+1}(t;\{1,2\},3\mid G(0))=\\
&\quad=\mathcal{G}(t;1,2,3\mid G(0))-\mathcal{G}\big(t;1,2\mid \mathcal{G}(t;3\mid G(0))\big)=\\
&\quad=\mathfrak{A}^*_{1+1}(t,\{1,2\},3)G_3^0(1,2,3)+\\
&\qquad+\big(\mathfrak{A}^*_{1+1}(t,\{1,2\},3)-\mathfrak{A}_2(t,2,3)\mathfrak{A}^*_1(t,1)\big)G_1^0(x_1)G_2^0(x_2,x_3)+\\
&\qquad+\big(\mathfrak{A}_{1+1}(t,\{1,2\},3)-\mathfrak{A}^*_2(t,1,3)\mathfrak{A}^*_1(t,2)\big)G_1^0(x_2)G_2^0(x_1,x_3)+\\
&\qquad+\mathfrak{A}^*_{1+1}(t,\{1,2\},3)G_1^0(x_3)G_2^0(x_1,x_2)+\mathfrak{A}^*_3(t,1,2,3)G_1^0(x_1)G_1^0(x_2)G_1^0(x_3),
\end{aligned}$$

where the operator

$$\mathfrak{A}^*_3(t,1,2,3)=\mathfrak{A}^*_{1+1}(t,\{1,2\},3)-\mathfrak{A}^*_2(t,2,3)\mathfrak{A}^*_1(t,1)-\mathfrak{A}^*_2(t,1,3)\mathfrak{A}^*_1(t,2)$$

is the third-order cumulant (2.36) of groups of operators (1.6) of a system of hard spheres.

The following statement is true [53].

Theorem. *Let $G(0)\in\oplus_{n=0}^{\infty}L_n^1$, then for arbitrary $t\in\mathbb{R}$ provided that $\max\limits_{n\geqslant 1}\|G_n^0\|_{L_n^1}<(2e^3)^{-1}$, the sequence of reduced correlation functions* (2.62) *is a unique solution of the Cauchy problem of nonlinear hierarchy* (2.60), (2.61) *for hard spheres.*

In the particular case of the initial state specified by the sequence of reduced correlation functions $G^{(c)}=(0,G_1^0,0,\ldots,0,\ldots)$ on the allowed configurations, that is, in the absence of correlations between hard spheres at the initial moment of time [14], according to definition (2.63) of the generating operators, reduced correlation functions (2.62) are represented by the following series expansions:

$$\begin{aligned}
G_s(t,x_1,\ldots,x_s)&=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\int\limits_{(\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3)^n}dx_{s+1}\cdots dx_{s+n}\times\\
&\times\mathfrak{A}^*_{s+n}(t;1,\ldots,s+n)\prod_{i=1}^{s+n}G_1^0(x_i)\mathcal{X}_{\mathbb{R}^{3(s+n)}\setminus\mathbb{W}_{s+n}},\quad s\geqslant 1,
\end{aligned}\tag{2.64}$$

where the generating operator $\mathfrak{A}^*_{s+n}(t)$ is the $(s+n)th$-order cumulant (2.36) of the groups of operators (1.6).

We emphasize that in the absence of correlations of states of hard spheres on allowed configurations at the initial moment of time, the generators of expansions into a series of reduced correlation functions (2.64) and reduced distribution functions (2.24) differ only in the order of cumulants of groups of operators of hard spheres. Therefore, by means of such reduced distribution functions or reduced correlation functions, the process of creating correlations in a system of hard spheres is described.

We note that the reduced correlation functions give an equivalent approach to the description of the evolution of states of many hard spheres, along with the reduced distribution functions. Indeed, the macroscopic characteristics of fluctuations of observables are directly determined by the reduced correlation functions on the microscopic scale [6] for example, the functional of the dispersion of an additive-type observable, i.e., the sequence $A^{(1)} = (0, a_1(x_1), \ldots, \sum\limits_{i_1=1}^{n} a_1(x_{i_1}), \ldots)$, is represented by the formula

$$\langle (A^{(1)} - \langle A^{(1)}\rangle)^2\rangle(t) = \int\limits_{\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3} dx_1\, (a_1^2(x_1) - \langle A^{(1)}\rangle^2(t))G_1(t,x_1) + \\ + \int\limits_{(\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3)^2} dx_1 dx_2\, a_1(x_1)a_1(x_2)G_2(t,x_1,x_2),$$

where

$$\langle A^{(1)}\rangle(t) = \int\limits_{\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3} dx_1\, a_1(x_1)G_1(t,x_1)$$

is the mean value functional of an additive-type observable.

3. Nonlinear kinetic equations for many hard spheres

The conventional philosophy of the description of kinetic evolution is that if the initial state is specified by a one-particle (reduced) distribution function, then at an arbitrary time the evolution of the state in an appropriate scaling limit can be effectively described by means of a one-particle distribution function that is governed by the nonlinear kinetic equation. Below, we give an answer to the question about the description of the kinetic evolution of colliding particles, not on the basis of a common interpretation but within the framework of the evolution of the observables of many hard spheres.

The problem of a rigorous description of the kinetic evolution by means of hard sphere observables will be considered by giving the example of the

Boltzmann–Grad asymptotics of a non-perturbative solution of the Cauchy problem of the dual BBGKY hierarchy [51].

3.1. **On the Boltzmann–Grad scaling approximation.** The present notion of the Boltzmann–Grad approximation was first introduced in Grad's paper [73]. From a physical point of view, this approximation means that we deal with a low-density gas in a situation where the diameter of a hard sphere, or, in other words, the radius of the short-range interaction potential, is sufficiently less in comparison with the average length of a free path of hard spheres.

In a dimensionless form, the generator of the BBGKY hierarchy for hard spheres contains a scaling parameter: the ratio of the diameter of hard spheres to their mean free path [35]. The finite value of the mean free path of hard spheres means that in this approximation the average number of particles tends to infinity; in other words, according to the definition of (2.16), the state must be described by functions from the appropriate function spaces, for example, from the space to which the sequences of reduced equilibrium distribution functions belong [64, 90]. In this case, the initial state is described by the reduced distribution functions from the space L^{∞}_{ξ} of sequences of functions bounded with respect to the configuration variables and decreasing with respect to the momentum ones, equipped with the norm

$$\|f\|_{L^{\infty}_{\xi}} = \sup_{n\geqslant 0} \xi^{-n} \sup_{x_1,\dots,x_n} |f_n(x_1,\dots,x_n)| \exp\Big(\beta \sum_{i=1}^{n} \frac{p_i^2}{2}\Big),$$

where $\xi > 0$ and $\beta > 0$ are parameters.

For such initial data, the Boltzmann–Grad asymptotics of a solution of the Cauchy problem of the BBGKY hierarchy for hard spheres are described by the so-called Boltzmann hierarchy [79]. As a consequence, for factorized initial data, i.e., for the initial state without correlations, which describes molecular chaos [14], the equation determining the evolution of an initial state is a closed equation for a one-particle distribution function, that is to say Boltzmann's kinetic equation [13].

The detailed analysis of the problem of the construction of such asymptotics for a solution of the Cauchy problem of the BBGKY hierarchy shows that the basic difficulty consists in proving the term-by-term convergence of the iteration series that represents this solution to the corresponding limit, that is, to the series representing the solution of the Cauchy problem of the Boltzmann hierarchy. This difficulty is related to the fact that the integrands in each term of the iteration series do not converge to the limit uniformly across the whole domain of integration. We note that in early works on the justification of the Boltzmann–Grad limit, attention was not properly paid to this property, and a precise mathematical meaning was not given to the individual terms of the iteration series representing a solution of the BBGKY hierarchy. In the papers [61, 83] a complete discussion of these problems was presented.

From a mathematical point of view, the existence of the Boltzmann–Grad asymptotics of a perturbative solution of the BBGKY hierarchy for hard spheres was discussed in Cercignani's paper [12] and later in Lanford's work [79]. A rigorous mathematical proof of the Boltzmann–Grad limit theorem has been given in a series of papers [57–59,61,83] by D. Ya. Petrina and V. I. Gerasimenko. The Boltzmann–Grad limit theorem for equilibrium states was proved in the paper [60].

Recently, there has been unflagging interest in the problem of deriving kinetic equations from the dynamics of many colliding particles as an asymptotic behavior of the BBGKY hierarchy in the scaling limits. In particular, progress in the rigorous solution of this problem on the basis of perturbation theory was achieved in the Boltzmann–Grad limit in the works [2–4, 20, 25, 28, 29, 87–89]; also see links therein.

3.2. **The Boltzmann–Grad limit of reduced observables.** To determine the scaling parameter, we rewrite the dual BBGKY hierarchy in dimensionless form. Then generator (1.3) of the hierarchy takes the form:

$$\begin{aligned}
&\mathcal{L}(j)b_n \doteq \langle p_j, \frac{\partial}{\partial q_j}\rangle b_n,\\
&\mathcal{L}_{\mathrm{int}}(j_1,j_2)b_n \doteq \epsilon^2 \int\limits_{\mathbb{S}^2_+} d\eta\langle\eta,(p_{j_1}-p_{j_2})\rangle\delta(q_{j_1}-q_{j_2}+\epsilon\eta)\times \qquad (3.1)\\
&\qquad\times\big(b_n(x_1,\ldots,q_{j_1},p^*_{j_1},\ldots,q_{j_2},p^*_{j_2},\ldots,x_n)-b_n(x_1,\ldots,x_n)\big),
\end{aligned}$$

where the coefficient $\epsilon > 0$ is a scaling parameter, which is the ratio of the diameter $\sigma > 0$ to the mean free path of hard spheres. For $t \leqslant 0$, a generator of the dimensionless dual BBGKY hierarchy is determined by the corresponding expression [51].

Then the Boltzmann–Grad asymptotic behavior of dimensionless reduced observables (2.3) is described by the following statement [51].

Theorem. *Assume that for the initial data $B^{\epsilon,0}_n \in \mathcal{C}_n$, $n \geqslant 1$, there is a limit $b^0_n \in \mathcal{C}_n$ in the sense of $*$-weak convergence of space $\mathcal{C}_n$*

$$\mathrm{w}^*\!-\lim_{\epsilon\rightarrow 0}\big(\epsilon^{-2n}B^{\epsilon,0}_n - b^0_n\big) = 0. \qquad (3.2)$$

Then, for an arbitrary finite time interval, the Boltzmann–Grad limit of dimensionless reduced observables (2.3) *exists in the same sense*

$$\mathrm{w}^*\!-\lim_{\epsilon\rightarrow 0}\big(\epsilon^{-2s}B_s(t)-b_s(t)\big)=0, \tag{3.3}$$

and it is determined by the expansions:

$$\begin{aligned}
&b_s(t,x_1,\ldots,x_s)=\sum_{n=0}^{s-1}\int\limits_0^t dt_1\cdots\int\limits_0^{t_{n-1}}dt_n\prod_{j\in(1,\ldots,s)}S_1(t-t_1,j)\times\\
&\quad\times\sum_{i_1\neq j_1=1}^{s}\mathcal{L}^0_{\mathrm{int}}(i_1,j_1)\prod_{j\in(1,\ldots,s)\setminus(j_1)}S_1(t_1-t_2,j)\cdots\prod_{j\in(1,\ldots,s)\setminus(j_1,\ldots,j_{n-1})}S_1(t_{n-1}-t_n,j)\times\\
&\quad\times\sum_{\substack{i_n\neq j_n=1,\\ i_n,j_n\neq(j_1,\ldots,j_{n-1})}}^{s}\mathcal{L}^0_{\mathrm{int}}(i_n,j_n)\prod_{j\in(1,\ldots,s)\setminus(j_1,\ldots,j_n)}S_1(t_n,j)b^0_{s-n}((x_1,\ldots,x_s)\setminus(x_{j_1},\ldots,x_{j_n})),\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad s\geqslant 1,
\end{aligned} \tag{3.4}$$

where for the collision operator of point particles, the notation $\mathcal{L}^0_{\mathrm{int}}(j_1,j_2)$ *is used*

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}^0_{\mathrm{int}}(j_1,j_2)b_n\doteq&\int_{\mathbb{S}^2_+}d\eta\langle\eta,(p_{j_1}-p_{j_2})\rangle\delta(q_{j_1}-q_{j_2})\times\\
&\times\big(b_n(x_1,\ldots,q_{j_1},p^*_{j_1},\ldots,q_{j_2},p^*_{j_2},\ldots,x_n)-b_n(x_1,\ldots,x_n)\big).
\end{aligned} \tag{3.5}$$

Let us make several comments on this theorem.

Consider the existence of the Boltzmann–Grad limit for a special case of reduced observables, namely additive-type reduced observables. Let us say that for the initial additive-type dimensionless reduced observable $B^{(1)}(0)=(0,b^\epsilon_1,0,\ldots)$ the following condition is satisfied:

$$\mathrm{w}^*\!-\lim_{\epsilon\rightarrow 0}\big(\epsilon^{-2}b^\epsilon_1-b^0_1\big)=0,$$

then, according to statement (3.3), for additive-type reduced observables (2.10) we derive

$$\mathrm{w}^*\!-\lim_{\epsilon\rightarrow 0}\big(\epsilon^{-2s}B^{(1)}_s(t)-b^{(1)}_s(t)\big)=0,$$

where the limit reduced observable $b_s^{(1)}(t)$ is determined as a special case of expansion (3.4):

$$
\begin{aligned}
b_s^{(1)}(t,x_1,\ldots,x_s) &= \int_0^t dt_1 \cdots \int_0^{t_{s-2}} dt_{s-1} \prod_{j\in(1,\ldots,s)} S_1(t-t_1,j)\times \\
&\times \sum_{i_1\neq j_1=1}^{s} \mathcal{L}^0_{\mathrm{int}}(i_1,j_1) \prod_{j\in(1,\ldots,s)\setminus(j_1)} S_1(t_1-t_2,j)\cdots \prod_{j\in(1,\ldots,s)\setminus(j_1,\ldots,j_{s-2})} S_1(t_{s-2}-t_{s-1},j)\times \\
&\times \sum_{\substack{i_{s-1}\neq j_{s-1}=1,\\ i_{s-1},j_{s-1}\neq(j_1,\ldots,j_{s-2})}}^{s} \mathcal{L}^0_{\mathrm{int}}(i_{s-1},j_{s-1}) \prod_{j\in(1,\ldots,s)\setminus(j_1,\ldots,j_{s-1})} S_1(t_{s-1},j) b_1^0((x_1,\ldots,x_s)\setminus(x_{j_1},\ldots,x_{j_{s-1}})), \\
& \qquad s\geqslant 1.
\end{aligned}
\tag{3.6}
$$

We make several examples of expansions (3.6) of the limit additive-type reduced observables:

$$
\begin{aligned}
b_1^{(1)}(t,x_1) &= S_1(t,1)\, b_1^0(x_1), \\
b_2^{(1)}(t,x_1,x_2) &= \int_0^t dt_1 \prod_{i=1}^{2} S_1(t-t_1,i)\, \mathcal{L}^0_{\mathrm{int}}(1,2) \sum_{j=1}^{2} S_1(t_1,j)\, b_1^0(x_j).
\end{aligned}
$$

Also suppose that the following condition is valid for the initial k-ary-type reduced observable $B^{(k)}(0)=(0,\ldots,b_k^\epsilon,0,\ldots)$:

$$
\mathrm{w}^*\!-\lim_{\epsilon\to 0}\big(\epsilon^{-2}b_k^\epsilon - b_k^0\big)=0,
$$

then, according to statement (3.3), for k-ary-type dimensionless reduced observables (2.11), we derive

$$
\mathrm{w}^*\!-\lim_{\epsilon\to 0}\big(\epsilon^{-2s}B_s^{(k)}(t) - b_s^{(k)}(t)\big)=0,
$$

where the limit reduced observable $b_s^{(k)}(t)$ is determined as a special case of expansion (3.4):

$$
\begin{aligned}
b_s^{(k)}(t,x_1,\ldots,x_s) &= \int_0^t dt_1 \cdots \int_0^{t_{s-k-1}} dt_{s-k} \prod_{j\in(1,\ldots,s)} S_1(t-t_1,j) \sum_{i_1\neq j_1=1}^{s} \mathcal{L}^0_{\mathrm{int}}(i_1,j_1)\times \\
&\times \prod_{j\in(1,\ldots,s)\setminus(j_1)} S_1(t_1-t_2,j)\cdots \prod_{j\in(1,\ldots,s)\setminus(j_1,\ldots,j_{s-k-1})} S_1(t_{s-k-1}-t_{s-k},j) \sum_{\substack{i_{s-k}\neq j_{s-k}=1,\\ i_{s-k},j_{s-k}\neq(j_1,\ldots,j_{s-k-1})}}^{s} \mathcal{L}^0_{\mathrm{int}}(i_{s-k},j_{s-k})\times \\
&\times \prod_{j\in(1,\ldots,s)\setminus(j_1,\ldots,j_{s-k})} S_1(t_{s-k},j) b_k^0((x_1,\ldots,x_s)\setminus(x_{j_1},\ldots,x_{j_{s-k}})),\ 1\leqslant s\leqslant k.
\end{aligned}
\tag{3.7}
$$

If $b^0 \in \mathcal{C}_\gamma$, then the sequence $b(t) = (b_0, b_1(t), \ldots, b_s(t), \ldots)$ of limit reduced observables (3.4) is a generalized global solution of the Cauchy problem of the dual Boltzmann hierarchy with hard sphere collisions [51]:

$$\frac{\partial}{\partial t} b_s(t) = \sum_{j=1}^{s} \mathcal{L}(j)\, b_s(t) + \sum_{j_1 \neq j_2 = 1}^{s} \mathcal{L}^0_{\mathrm{int}}(j_1, j_2)\, b_{s-1}(t, (x_1, \ldots, x_s) \backslash (x_{j_1})), \quad (3.8)$$

$$b_s(t, x_1, \ldots, x_s)\mid_{t=0} = b^0_s(x_1, \ldots, x_s), \quad s \geqslant 1, \quad (3.9)$$

where it was used notations accepted in (3.4).

This fact is proved similar to the case of an iteration series of the dual BBGKY hierarchy [10].

It should be noted that equations set (3.8) has the structure of recurrence evolution equations. We make a few examples of the dual Boltzmann hierarchy with hard sphere collisions (3.8):

$$\frac{\partial}{\partial t} b_1(t, x_1) = \langle p_1, \frac{\partial}{\partial q_1} \rangle b_1(t, x_1),$$

$$\frac{\partial}{\partial t} b_2(t, x_1, x_2) = \sum_{j=1}^{2} \langle p_j, \frac{\partial}{\partial q_j} \rangle b_2(t, x_1, x_2) +$$

$$+ \int_{\mathbb{S}^2_+} d\eta \langle \eta, (p_1 - p_2) \rangle \big(b_1(q_1, p^*_1) - b_1(x_1) + b_1(q_2, p^*_2) - b_1(x_2) \big) \delta(q_1 - q_2).$$

Thus, in the Boltzmann–Grad scaling asymptotics, the kinetic evolution of hard sphere observables is described in terms of limit reduced observables (3.4) governed by the dual Boltzmann hierarchy (3.8) with hard sphere collisions.

3.3. **The Boltzmann kinetic equation.** We now establish the relationship between the constructed Boltzmann–Grad asymptotics of the reduced observables and the description of the kinetic evolution of states in terms of the one-particle reduced distribution function described by the Boltzmann kinetic equation.

In the case of the absence of correlations between particles at initial time, i.e., initial states satisfying a chaos condition [14], in dimensionless form, the sequence of initial reduced distribution functions for a system of hard spheres has the form

$$F^{(c)} \equiv \Big(1, F^{\epsilon,0}_1(x_1), \ldots, \prod_{i=1}^{s} F^{\epsilon,0}_1(x_i) \mathcal{X}_{\mathbb{R}^{3s} \backslash \mathbb{W}_s}, \ldots \Big), \quad (3.10)$$

where $\mathcal{X}_{\mathbb{R}^{3s}\setminus\mathbb{W}_s}$ is the Heaviside step function of the allowed configurations. This assumption about initial state is intrinsic for the kinetic theory, because in this case all possible states of gases are described by means of a one-particle distribution function.

Let $F_1^{0,\epsilon} \in L^\infty_\xi(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3)$, i.e., the following inequality holds:

$$|F_1^{0,\epsilon}(x_i)| \leqslant \xi \exp(-\beta \frac{p_i^2}{2}),$$

where $\xi > 0, \beta \geqslant 0$ are parameters.

We assume that the Boltzmann–Grad limit of the initial one-particle (reduced) distribution function $F_1^{0,\epsilon} \in L^\infty_\xi(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3)$ exists in the sense of a weak convergence of the space $L^\infty_\xi(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3)$, namely,

$$\mathrm{w-}\lim_{\epsilon\to 0}(\epsilon^2 F_1^{0,\epsilon} - f_1^0) = 0, \tag{3.11}$$

then the Boltzmann–Grad limit of the initial state (3.10) satisfies a chaos property too, i.e.,

$$f^{(c)} \equiv \big(1, f_1^0(x_1), \ldots, \prod_{i=1}^{s} f_1^0(x_i), \ldots\big).$$

We note that assumption (3.11) with respect to the Boltzmann–Grad limit of initial states holds true for the equilibrium state [60].

If $b(t) \in \mathcal{C}_\gamma$ and $|f_1^0(x_i)| \leqslant \xi \exp(-\beta \frac{p_i^2}{2})$, then the Boltzmann–Grad limit of mean value functional $\big(B(t), F^{(c)}\big)$ exists under the condition that [83]:

$$t < t_0 \equiv \big(\mathrm{const}(\xi,\beta)\|f_1^0\|_{L^\infty_\xi(\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3)}\big)^{-1},$$

and it is determined by the following series expansion:

$$\big(b(t), f^{(c)}\big) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{1}{s!} \int\limits_{(\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3)^s} dx_1 \cdots dx_s\, b_s(t, x_1, \ldots, x_s) \prod_{i=1}^{s} f_1^0(x_i).$$

For the limit of additive-type reduced observables (3.6) the following equality holds [51]:

$$\begin{aligned}\big(b^{(1)}(t), f^{(c)}\big) &= \sum_{s=0}^{\infty} \frac{1}{s!} \int\limits_{(\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3)^s} dx_1 \cdots dx_s\, b_s^{(1)}(t, x_1, \ldots, x_s) \prod_{i=1}^{s} f_1^0(x_i) = \\ &= \int\limits_{\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3} dx_1\, b_1^0(x_1) f_1(t, x_1),\end{aligned} \tag{3.12}$$

where function $b_s^{(1)}(t)$ is given by expansion (3.6) and the distribution function $f_1(t,x_1)$ is represented by the series

$$
\begin{aligned}
f_1(t,x_1) = &\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^t dt_1 \cdots \int_0^{t_{n-1}} dt_n \int_{(\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3)^n} dx_2\cdots dx_{n+1}\, S_1^*(t-t_1,1)\times \\
&\times \mathcal{L}_{\mathrm{int}}^{0,*}(1,2)\prod_{j_1=1}^{2} S_1^*(t_1-t_2,j_1)\cdots\prod_{i_n=1}^{n} S_1^*(t_{n-1}-t_n,i_n)\times \\
&\times \sum_{k_n=1}^{n}\mathcal{L}_{\mathrm{int}}^{0,*}(k_n,n+1)\prod_{j_n=1}^{n+1} S_1^*(t_n,j_n)\prod_{i=1}^{n+1} f_1^0(x_i),
\end{aligned}
\tag{3.13}
$$

and the following operator was introduced:

$$
\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3} dx_{n+1}\mathcal{L}_{\mathrm{int}}^{0,*}(i,n+1)f_{n+1}(x_1,\ldots,x_{n+1}) \equiv \\
&\equiv \int_{\mathbb{R}^3\times\mathbb{S}^2_+} dp_{n+1}d\eta\,\langle\eta,(p_i-p_{n+1})\rangle\times \\
&\qquad\times\big(f_{n+1}(x_1,\ldots,q_i,p_i^*,\ldots,x_s,q_i,p_{n+1}^*)- \\
&\qquad -f_{n+1}(x_1,\ldots,x_s,q_i,p_{n+1})\big).
\end{aligned}
\tag{3.14}
$$

A one-particle distribution function represented as a series (3.13) is a solution of the Cauchy problem of the Boltzmann kinetic equation:

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial t}f_1(t,x_1) = -\langle p_1,\frac{\partial}{\partial q_1}\rangle f_1(t,x_1)+ \\
&\quad+\int_{\mathbb{R}^3\times\mathbb{S}^2_+} dp_2\,d\eta\,\langle\eta,(p_1-p_2)\rangle\times \\
&\qquad\times\big(f_1(t,q_1,p_1^*)f_1(t,q_1,p_2^*)-f_1(t,x_1)f_1(t,q_1,p_2)\big),
\end{aligned}
\tag{3.15}
$$

$$
f_1(t,x_1)_{|t=0} = f_1^0(x_1). \tag{3.16}
$$

Thus, we establish that the dual Boltzmann hierarchy (3.8) for additive-type reduced observables and initial state (3.11) describe the evolution of hard sphere systems just as the Boltzmann kinetic equation (3.15).

We remark that in a one-dimensional space, the collision integral of the Boltzmann equation with elastic hard sphere collisions identically equals zero. In a one-dimensional space, the Boltzmann–Grad limit is not trivial in the case of hard sphere dynamics with inelastic collisions. In the paper [43] for one-dimensional granular gas, the process of the creation and propagation of correlations in the Boltzmann–Grad scaling limit was also described (see also section 5.1).

Correspondingly, if the initial state of hard spheres is given by a sequence of reduced distribution functions (3.10), then in the Boltzmann–Grad limit, the property of the propagation of initial chaos holds [51]. It is a result of the validity of the following equality for the limit k-ary reduced observables, i.e., for the sequences $b^{(k)}(0) = (0, \dots, b_k^0(x_1, \dots, x_k), 0, \dots)$,

$$\begin{aligned}\big(b^{(k)}(t), f^{(c)}\big) &= \sum_{s=0}^{\infty} \frac{1}{s!} \int\limits_{(\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3)^s} dx_1 \cdots dx_s\, b_s^{(k)}(t, x_1, \dots, x_s) \prod_{i=1}^{s} f_1^0(x_i) = \\ &= \frac{1}{k!} \int\limits_{(\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3)^k} dx_1 \cdots dx_k\, b_k^0(x_1, \dots, x_k) \prod_{i=1}^{k} f_1(t, x_i), \;\; k \geqslant 2,\end{aligned} \tag{3.17}$$

where the limit one-particle reduced distribution function $f_1(t)$ is defined by expansion (3.13) and therefore it is governed by the Cauchy problem of the Boltzmann kinetic equation (3.15),(3.16).

Thus, in the Boltzmann–Grad scaling limit, an equivalent approach to the description of the kinetic evolution of hard spheres in terms of the Cauchy problem of the Boltzmann kinetic equation (3.15),(3.16) is given by the Cauchy problem of the dual Boltzmann hierarchy with hard sphere collisions (3.8),(3.9) for the additive-type reduced observables. In the case of non-additive-type reduced observables, a solution of the dual Boltzmann hierarchy with hard sphere collisions (3.8) is equivalent to the property of the propagation of initial chaos in the sense of equality (3.17).

3.4. **The Boltzmann kinetic equation with initial correlations.** We now consider the case of the more general initial state of a hard sphere system specified by the one-particle reduced distribution function $F_1^{0,\epsilon} \in L^\infty_\xi(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3)$ in the presence of correlations, i.e., the initial state that is specified by the following sequence of reduced distribution functions:

$$F^{(cc)} = \Big(1, F_1^{0,\epsilon}(x_1), g_2^\epsilon \prod_{i=1}^{2} F_1^{0,\epsilon}(x_i), \dots, g_n^\epsilon \prod_{i=1}^{n} F_1^{0,\epsilon}(x_i), \dots\Big), \tag{3.18}$$

where the functions $g_n^\epsilon \equiv g_n^\epsilon(x_1, \dots, x_n) \in C_n(\mathbb{R}^{3n} \times (\mathbb{R}^{3n} \backslash \mathbb{W}_n))$, $n \geqslant 2$, specify the initial correlations. Since many-particle systems in condensed states are characterized by correlations, sequence (3.18) describes the initial state of the kinetic evolution of hard sphere fluids.

We assume that the Boltzmann–Grad limit of the initial one-particle reduced distribution function $F_1^{0,\epsilon} \in L^\infty_\xi(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3)$ exists in the sense as above, i.e., in the sense of a weak convergence the equality holds:

$$\lim_{\epsilon \to 0} (\epsilon^2 F_1^{0,\epsilon} - f_1^0) = 0,$$

and in the case of correlation functions, suppose that:

$$\lim_{\epsilon\to 0}(g_n^\epsilon - g_n) = 0,\ n \geqslant 2.$$

Then in the Boltzmann–Grad limit, initial state (3.18) is specified by the following sequence of the limit reduced distribution functions:

$$f^{(cc)} = \Big(1, f_1^0(x_1), g_2\prod_{i=1}^{2} f_1^0(x_i), \ldots, g_n\prod_{i=1}^{n} f_1^0(x_i), \ldots\Big). \tag{3.19}$$

We now consider relationships between the constructed Boltzmann–Grad asymptotic behavior of reduced observables and the nonlinear Boltzmann-type kinetic equation in the case of initial state specified by sequence (3.19).

For the limit additive-type reduced observables (3.6) and initial states (3.19) the following equality is true:

$$\begin{aligned}
&\big(b^{(1)}(t), f^{(cc)}\big) = \\
&\quad = \sum_{s=0}^{\infty}\frac{1}{s!}\int\limits_{(\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3)^s} dx_1\cdots dx_s\, b_s^{(1)}(t, x_1, \ldots, x_s) g_s(x_1, \ldots, x_s)\prod_{i=1}^{s} f_1^0(x_i) = \\
&\quad = \int\limits_{\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3} dx_1\, b_1^0(x_1) f_1(t, x_1),
\end{aligned}$$

where the functions $b_s^{(1)}(t)$ are represented by expansions (3.6) and the limit reduced distribution function $f_1(t)$ is represented by the following series expansion:

$$\begin{aligned}
&f_1(t, x_1) = \sum_{n=0}^{\infty}\int\limits_0^t dt_1\cdots\int\limits_0^{t_{n-1}} dt_n\int\limits_{(\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3)^n} dx_2\cdots dx_{n+1} S_1^*(t-t_1, 1)\times \\
&\times \mathcal{L}_{\mathrm{int}}^{0,*}(1,2) S_1^*(t_1 - t_2, j_1)\cdots\prod_{i_n=1}^{n} S_1^*(t_n - t_n, i_n)\times \\
&\times\sum_{k_n=1}^{n}\mathcal{L}_{\mathrm{int}}^{0,*}(k_n, n+1)\prod_{j_n=1}^{n+1} S_1^*(t_n, j_n) g_{1+n}(x_1, \ldots, x_{n+1})\prod_{i=1}^{n+1} f_1^0(x_i).
\end{aligned} \tag{3.20}$$

Series (3.20) is uniformly convergent for a finite time interval under the condition as above.

The function $f_1(t)$ represented by series (3.20) is a weak solution of the Cauchy problem of the Boltzmann kinetic equation with initial correlations [30, 55]:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}f_1(t,x_1)=&-\langle p_1,\frac{\partial}{\partial q_1}\rangle f_1(t,x_1)+\int\limits_{\mathbb{R}^3\times\mathbb{S}^2_+}dp_2\,d\eta\,\langle\eta,(p_1-p_2)\rangle\times\\&\times\big(g_2(q_1-p_1^*t,p_1^*,q_2-p_2^*t,p_2^*)f_1(t,q_1,p_1^*)f_1(t,q_1,p_2^*)-\\&-g_2(q_1-p_1t,p_1,q_2-p_2t,p_2)f_1(t,x_1)f_1(t,q_1,p_2)\big),\end{aligned}\tag{3.21}$$

$$f_1(t,x_1)\big|_{t=0}=f_1^0(x_1).\tag{3.22}$$

This fact is proved similarly to the case of a perturbative solution of the BBGKY hierarchy for hard spheres represented by the iteration series [14, 58].

Thus, in the case of initial states specified by a one-particle reduced distribution function (3.19) we establish that the dual Boltzmann hierarchy with hard sphere collisions (3.8) for additive-type reduced observables describes the evolution of a hard sphere system just as the Boltzmann kinetic equation with initial correlations (3.21).

The property of the propagation of initial correlations is a consequence of the validity of the following equality for the mean value functional of the limit k-ary reduced observables in the case of $k\geqslant 2$

$$\begin{aligned}&\big(b^{(k)}(t),f^{(cc)}\big)=\\&=\sum_{s=0}^{\infty}\frac{1}{s!}\int\limits_{(\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3)^s}dx_1\cdots dx_s\,b_s^{(k)}(t,x_1,\ldots,x_s)g_s(x_1,\ldots,x_s)\prod_{j=1}^{s}f_1^0(x_j)=\\&=\frac{1}{k!}\int\limits_{(\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3)^k}dx_1\cdots dx_k\,b_k^0(x_1,\ldots,x_k)\times\\&\qquad\times\prod_{i_1=1}^{k}S_1^*(t,i_1)g_k(x_1,\ldots,x_k)\prod_{i_2=1}^{k}(S_1^*)^{-1}(t,i_2)\prod_{j=1}^{k}f_1(t,x_j),\end{aligned}\tag{3.23}$$

where the one-particle reduced distribution function $f_1(t,x_j)$ is solution (3.20) of the Cauchy problem of the Boltzmann kinetic equation with initial correlations (3.21), (3.22), and the inverse group to the group of operators $S_1^*(t)$ we denote by

$$(S_1^*)^{-1}(t)=S_1^*(-t)=S_1(t).$$

This fact is proved similarly to the proof of a property on the propagation of initial chaos (3.17).

We note that, according to equality (3.23), in the Boltzmann–Grad limit, the reduced correlation functions are defined as cluster expansions of reduced distribution functions, namely,

$$f_s(t,x_1,\ldots,x_s) = \sum_{\mathrm{P}:(x_1,\ldots,x_s)=\bigcup_i X_i} \prod_{X_i\subset \mathrm{P}} g_{|X_i|}(t,X_i), \;\; s\geqslant 1,$$

and they have the explicit form:

$$\begin{aligned} &g_1(t,x_1)=f_1(t,x_1),\\ &g_s(t,x_1,\ldots,x_s)=\\ &\qquad=\tilde{g}_s(q_1-p_1t,p_1,\ldots,q_s-p_st,p_s)\prod_{j=1}^{s}f_1(t,x_j), \;\; s\geqslant 2, \end{aligned} \tag{3.24}$$

where for initial correlation functions (3.19) it is used the following notations:

$$\tilde{g}_s(x_1,\ldots,x_s) = \sum_{\mathrm{P}:(x_1,\ldots,x_s)=\bigcup_i X_i} \prod_{X_i\subset \mathrm{P}} g_{|X_i|}(X_i),$$

the symbol $\sum_{\mathrm{P}}$ means the sum over possible partitions P of the set of arguments $(x_1,\ldots,x_s)$ on $|\mathrm{P}|$ nonempty subsets X_i, and the one-particle reduced distribution function $f_1(t)$ is a solution of the Cauchy problem of the Boltzmann kinetic equation with initial correlations (3.21),(3.22).

Thus, in the case of the limit k-ary reduced observables, a solution of the dual Boltzmann hierarchy with hard sphere collisions (3.8) is equivalent to a property of the propagation of initial correlations for the k-particle reduced distribution function in the sense of equality (3.23) or in other words, the Boltzmann–Grad scaling dynamics does not create new correlations.

4. Origin of kinetic equations

One of the challenges of kinetic theory, as mentioned above, is understanding the nature of the possibility of describing the evolution of the state of a system of many hard spheres by means of the state of a typical hard sphere. More precisely, we further focus on the problem of the origin of the description of the evolution of the state of hard spheres by the Enskog-type kinetic equation.

In the circumstances where the initial state is specified by a one-particle reduced distribution function, for the mean value functional of observables at an arbitrary instant, the representation is also valid in terms of a one-particle reduced distribution function, the evolution of which is governed by a non-Markovian nonlinear evolution equation. In other words, for such initial data, the Cauchy problem of the BBGKY hierarchy for hard spheres is equivalent to the nonlinear Enskog-type kinetic equation and a sequence of reduced functionals determined by the solution of this evolution equation.

4.1. **The generalised Enskog kinetic equation.** In the case of initial state (3.10) the dual picture of the evolution to the picture described by employing observables governed by the dual BBGKY hierarchy (2.1) for hard spheres is the picture of the evolution of a state described by means of the non-Markovian Enskog kinetic equation and by a sequence of explicitly defined functionals of the solution of such a kinetic equation that describe the evolution of all possible correlations in a system of hard spheres [46,47].

In view of the fact that the initial state is completely specified by a one-particle reduced distribution function on allowed configurations (3.10), for mean value functional (1.11) the following representation holds [46]:

$$\big(B(t),F^{(c)}\big)=\big(B(0),F(t\mid F_1(t))\big), \tag{4.1}$$

where $F^{(c)}$ is the sequence of initial reduced distribution functions (3.10), and the sequence $F(t\mid F_1(t))=\big(1,F_1(t),F_2(t\mid F_1(t)),\ldots,F_s(t\mid F_1(t)),\ldots\big)$ is a sequence of the reduced functionals of the state $F_s(t,x_1,\ldots,x_s\mid F_1(t))$, $s\geqslant 2$, represented by the series expansions over the products of the one-particle distribution function $F_1(t)$, namely

$$\begin{aligned}F_s(t,x_1,\ldots,x_s\mid F_1(t))&\doteq\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\int\limits_{(\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3)^n}dx_{s+1}\cdots dx_{s+n}\times\\&\times\mathfrak{V}_{1+n}(t,\{1,\ldots,s\},s+1,\ldots,s+n)\prod_{i=1}^{s+n}F_1(t,x_i),\;\;s\geqslant 2.\end{aligned}\tag{4.2}$$

where the generating operators of series (4.2) are the $(1+n)th$-order operators $\mathfrak{V}_{1+n}(t)$, $n\geqslant 0$, determined by the following expansions [47]:

$$\begin{aligned}&\mathfrak{V}_{1+n}\big(t,\{1,\ldots,s\},s+1,\ldots,s+n\big)=\\&=n!\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\sum_{n_1=1}^{n}\cdots\sum_{n_k=1}^{n-n_1-\cdots-n_{k-1}}\frac{1}{(n-n_1-\cdots-n_k)!}\times\\&\quad\times\widehat{\mathfrak{A}}_{1+n-n_1-\cdots-n_k}(t,\{1,\ldots,s\},s+1,\ldots,s+n-n_1-\cdots-n_k)\times\\&\quad\times\prod_{j=1}^{k}\sum_{\substack{\mathrm{D}_j:Z_j=\bigcup_{l_j}X_{l_j}\\|\mathrm{D}_j|\leqslant s+n-n_1-\cdots-n_j}}\frac{1}{|\mathrm{D}_j|!}\times\\&\qquad\qquad\times\sum_{i_1\neq\ldots\neq i_{|\mathrm{D}_j|}=1}^{s+n-n_1-\ldots-n_j}\;\prod_{X_{l_j}\subset\mathrm{D}_j}\frac{1}{|X_{l_j}|!}\widehat{\mathfrak{A}}_{1+|X_{l_j}|}(t,i_{l_j},X_{l_j}),\end{aligned}\tag{4.3}$$

In expansion (4.3) the symbol $\sum_{\mathrm{D}_j:Z_j=\bigcup_{l_j}X_{l_j}}$ means the sum over all possible dissections of the linearly ordered set

$$Z_j \equiv (s+n-n_1-\ldots-n_j+1,\ldots,s+n-n_1-\ldots-n_{j-1})$$

on no more than $s+n-n_1-\ldots-n_j$ linearly ordered subsets, and the $(1+n)th$-order scattering cumulant we denoted by the operator:

$$\begin{aligned}&\widehat{\mathfrak{A}}_{1+n}(t,\{1,\ldots,s\},s+1,\ldots,s+n)\doteq\\&\doteq\mathfrak{A}^*_{1+n}(t,\{1,\ldots,s\},s+1,\ldots,s+n)\mathcal{X}_{\mathbb{R}^{3(s+n)}\setminus\mathbb{W}_{s+n}}\prod_{i=1}^{s+n}\mathfrak{A}^*_1(t,i)^{-1},\end{aligned}\tag{4.4}$$

where the operator $\mathfrak{A}^*_{1+n}(t)$ is the $(1+n)th$-order cumulant of the groups of operators (1.6) of hard spheres.

We provide some examples of expressions for the generating operators of series (4.2) for reduced functionals of the state:

$$\begin{aligned}&\mathfrak{V}_1(t,\{1,\ldots,s\})=\widehat{\mathfrak{A}}_1(t,\{1,\ldots,s\})\doteq\\&\qquad\qquad\doteq S^*_s(t,1,\ldots,s)\mathcal{X}_{\mathbb{R}^{3(s)}\setminus\mathbb{W}_s}\prod_{i=1}^{s}S^*_1(t,i)^{-1},\\&\mathfrak{V}_2(t,\{1,\ldots,s\},s+1)=\widehat{\mathfrak{A}}_2(t,\{1,\ldots,s\},s+1)-\\&\qquad\qquad-\widehat{\mathfrak{A}}_1(t,\{1,\ldots,s\})\sum_{i_1=1}^{s}\widehat{\mathfrak{A}}_2(t,i_1,s+1).\end{aligned}$$

The method of constructing reduced state functionals (4.2) is based on the application of the variation of cluster expansions, the so-called kinetic cluster expansions, to generating operators (2.22) of series representing solutions of hierarchies of evolution equations [47].

The one-particle distribution function $F_1(t)$ in dimensionless form, i.e., the first element of the sequence $F(t\mid F_1(t))$, is determined by series (2.20), namely

$$\begin{aligned}F_1(t,x_1)=&\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\int\limits_{(\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3)^n}dx_2\cdots dx_{n+1}\times\\&\times\mathfrak{A}^*_{1+n}(t,1,\ldots,n+1)\prod_{i=1}^{n+1}F_1^{\epsilon,0}(x_i)\mathcal{X}_{\mathbb{R}^{3(1+n)}\setminus\mathbb{W}_{1+n}},\end{aligned}\tag{4.5}$$

where the generating operator $\mathfrak{A}^*_{1+n}(t)$ is the $(1+n)$th-order cumulant of the groups of operators (1.6).

Let us note that in particular case of initial data (2.2) specified by the additive-type reduced observables, according to solution expansion (2.10), equality (4.1) takes the form

$$\big(B^{(1)}(t),F(0)\big)=\int\limits_{\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3}dx_1\,b_1^{\epsilon}(x_1)F_1(t,x_1), \tag{4.6}$$

where the one-particle distribution function $F_1(t)$ is determined by series (4.5). In the case of initial data (2.2) specified by the s-ary reduced observable $s\geqslant 2$, equality (4.1) has the form

$$\big(B^{(s)}(t),F(0)\big)=\frac{1}{s!}\int\limits_{(\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3)^s}dx_1\cdots dx_s\,b_s^{\epsilon}(x_1,\ldots,x_s)F_s(t,x_1,\ldots,x_s\mid F_1(t)),$$

where the reduced functionals of the state $F_s(t,x_1,\ldots,x_s\mid F_1(t))$ are determined by series (4.2).

Thus, for the initial state specified by a one-particle distribution function, the evolution of all possible states of a system of many hard spheres can be described by means of the state of a typical particle without any scaling approximations. We emphasize that reduced functionals of the state(4.2) describe all possible correlations created during the evolution of many hard spheres in terms of the state of a typical hard sphere.

For $t\geqslant 0$ the one-particle distribution function (4.5) is a solution of the following Cauchy problem of the non-Markovian generalized Enskog kinetic equation [47, 53]:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}F_1(t,q_1,p_1)=-\langle p_1,\frac{\partial}{\partial q_1}\rangle F_1(t,q_1,p_1)+\epsilon^2\int\limits_{\mathbb{R}^3\times\mathbb{S}^2_+}dp_2d\eta\langle\eta,(p_1-p_2)\rangle\times\\ \times\big(F_2(t,q_1,p_1^*,q_1-\epsilon\eta,p_2^*\mid F_1(t))-F_2(t,q_1,p_1,q_1+\epsilon\eta,p_2\mid F_1(t))\big),\end{aligned} \tag{4.7}$$

$$F_1(t)\big|_{t=0}=F_1^{\epsilon,0}, \tag{4.8}$$

where the collision integral is determined by the reduced functional of the state (4.2) in the case of $s=2$ and the expressions p_1^* and p_2^* are the pre-collision momenta of hard spheres (1.4). The series on the right-hand side of this equation converges under the condition: $\|F_1(t)\|_{L^1(\mathbb{R}\times\mathbb{R})}<e^{-8}$.

Hence in the case of the additive-type reduced observables the generalized Enskog kinetic equation (4.7) is dual to the dual BBGKY hierarchy of hard spheres (2.1) with respect to bilinear form (1.11).

We observe that the structure of the collision integral of the generalized Enskog equation (4.7) is such that the first term of its expansion is the collision integral of the Boltzman–Enskog kinetic equation, and the next terms describe all possible correlations that are created by the dynamics of hard spheres and by the propagation of initial correlations connected with the forbidden configurations, indeed

$$\frac{\partial}{\partial t}F_1(t,x_1) = -\langle p_1, \frac{\partial}{\partial q_1}\rangle F_1(t,x_1) + \mathcal{I}_{GEE},$$

where the collision integral is determined by the following series expansion:

$$\mathcal{I}_{GEE} \doteq \epsilon^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \int\limits_{\mathbb{R}^3\times\mathbb{S}^2_+} dp_2 d\eta \int\limits_{(\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3)^n} dx_3 \cdots dx_{n+2} \langle \eta, (p_1 - p_2)\rangle \times$$
$$\times \big(\mathfrak{V}_{1+n}(t, \{1^*, 2^*_-\}, 3, \ldots, n+2) F_1(t, q_1, p^*_1) F_1(t, q_1 - \epsilon\eta, p^*_2) \prod_{i=3}^{n+2} F_1(t, x_i) -$$
$$- \mathfrak{V}_{1+n}(t, \{1, 2_+\}, 3, \ldots, n+2) F_1(t, x_1) F_1(t, q_1 + \epsilon\eta, p_2) \prod_{i=3}^{n+2} F_1(t, x_i)\big),$$

and the notations adopted for the conventional notation of the Enskog collision integral were used: indices $(1^\sharp, 2^\sharp_\pm)$ denote that the evolution operator $\mathfrak{V}_{1+n}(t)$ acts on the corresponding phase points $(q_1, p^\sharp_1)$ and $(q_1 \pm \epsilon\eta, p^\sharp_2)$, and the $(n+1)$th-order evolution operator $\mathfrak{V}_{1+n}(t)$, $n \geqslant 0$, is determined by expansion (4.3) in the case of $s = 2$.

We note that in the work [47] for the initial-value problem (4.7),(4.8) the existence theorem was proved in the space of integrable functions. The accordance of the generalized Enskog equation (4.7) and of the Markovian Enskog-type kinetic equation was also established there. By the point, we remark that in the paper [97] the explicit soliton-like solutions of kinetic equation (4.7) were found.

Thus, if the initial state is specified by a one-particle distribution function on allowed configurations, then the evolution of many hard spheres governed by the dual BBGKY hierarchy (2.1) for reduced observables can be completely described by the generalized Enskog kinetic equation (4.7) and by a sequence of reduced functionals of the state (4.2).

We remark also that in the case of the initial state that involves correlations (3.18) considered approach permits to take into consideration the initial correlations in the kinetic equations [30, 52].

Further, we sketch out the Boltzmann–Grad scaling behavior of the non-Markovian Enskog kinetic equation (4.7) and reduced state functional (4.2).

Taking into account the validity of assumption (3.11) for the initial one-particle distribution function (3.10), in that case for a finite time interval, the Boltzmann–Grad limit of dimensionless solution (4.5) of the Cauchy problem of the non-Markovian Enskog kinetic equation (4.7),(4.8) exists in the same sense, namely

$$\lim_{\epsilon\to 0}\big(\epsilon^2 F_1(t,x_1)-f_1(t,x_1)\big)=0,$$

where the limit one-particle distribution function $f_1(t)$ is a weak solution of the Cauchy problem of the Boltzmann kinetic equation (3.15),(3.16).

Taking into consideration the fact of the existence of the Boltzmann–Grad scaling limit of a solution of the non-Markovian Enskog kinetic equation (4.7), for reduced functionals of the state (4.2) the following statement holds [47]:

$$\lim_{\epsilon\to 0}\big(\epsilon^{2s} F_s\big(t,x_1,\ldots,x_s\mid F_1(t)\big)-\prod_{j=1}^{s} f_1(t,x_j)\big)=0,$$

where the limit one-particle distribution function $f_1(t)$ is governed by the Boltzmann kinetic equation with hard sphere collisions (3.15). Because all possible correlations of many hard spheres with elastic collisions are described by reduced functionals of the state (4.2), as noted above, this property means the propagation of the initial chaos in the Boltzmann–Grad limit.

The proof of these statements is based on the properties of cumulants of asymptotically perturbed groups of operators (1.6) and the explicit structure (4.3) of the generating operators of series expansions (4.2) for reduced functional of state and of series (4.5).

4.2. **Dynamics of correlations governed by kinetic equations.** Let the initial state be specified by a one-particle reduced correlation function, namely, the initial state specified by a sequence of reduced correlation functions satisfying the chaos property stated above, i.e., by the sequence

$$G^{(c)}=(G_0,G_1^0,0,\ldots,0,\ldots).$$

We note that such an assumption about initial states is intrinsic to the contemporary kinetic theory of many-particle systems [14, 15].

Since the initial data $G^{(c)}$ is completely specified only by a one-particle correlation function, the Cauchy problem (2.60),(2.61) of the nonlinear hierarchy for hard spheres is not a completely well-defined Cauchy problem because the initial data is not independent for every unknown function determined of the hierarchy of mentioned evolution equations. As a consequence, it becomes possible to reformulate such a Cauchy problem as a new Cauchy problem for a one-particle correlation function with independent initial data and explicitly defined functionals of the solution of this Cauchy problem for the kinetic equation.

We formulate such a restated Cauchy problem and the sequence of the suitable functionals. In the case under consideration, the reduced correlation functionals $G_s(t \mid G_1(t))$, $s \geqslant 2$, are represented with respect to the one-particle correlation function (2.64), i.e.,

$$G_1(t, x_1) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \int\limits_{(\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3)^n} dx_2 \cdots dx_{1+n}\, \mathfrak{A}^*_{1+n}(t, 1, \ldots, n+1) \times \\ \times \prod_{i=1}^{n+1} G^0_1(x_i) \mathcal{X}_{\mathbb{R}^{3(n+1)}\setminus\mathbb{W}_{n+1}}, \tag{4.9}$$

as the following series expansions:

$$G_s\big(t, x_1, \ldots, x_s \mid G_1(t)\big) = \\ = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \int\limits_{(\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3)^n} dx_{s+1} \cdots dx_{s+n} \times \\ \times \mathfrak{V}_{s+n}\big(t, 1, \ldots, s+n\big) \prod_{i=1}^{s+n} G_1(t, x_i), \ \ s \geqslant 2. \tag{4.10}$$

The generating operator $\mathfrak{V}_{s+n}(t)$, $n \geqslant 0$, of the $(s+n)th$-order of this series is determined by the following expansion:

$$\mathfrak{V}_{s+n}\big(t, 1, \ldots, s, s+1, \ldots, s+n\big) = \\ = n! \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \sum_{n_1=1}^{n} \cdots \sum_{n_k=1}^{n-n_1-\ldots-n_{k-1}} \frac{1}{(n-n_1-\ldots-n_k)!} \times \\ \times \hat{\mathfrak{A}}_{s+n-n_1-\ldots-n_k}(t, 1, \ldots, s+n-n_1-\ldots-n_k) \times \\ \times \prod_{j=1}^{k} \sum_{\substack{\mathrm{D}_j: Z_j = \bigcup_{l_j} X_{l_j}, \\ |\mathrm{D}_j| \leqslant s+n-n_1-\cdots-n_j}} \frac{1}{|\mathrm{D}_j|!} \times \\ \times \sum_{i_1 \neq \ldots \neq i_{|\mathrm{D}_j|}=1}^{s+n-n_1-\ldots-n_j} \prod_{X_{l_j} \subset \mathrm{D}_j} \frac{1}{|X_{l_j}|!} \hat{\mathfrak{A}}_{1+|X_{l_j}|}(t, i_{l_j}, X_{l_j}), \tag{4.11}$$

where $\sum_{\mathrm{D}_j: Z_j = \bigcup_{l_j} X_{l_j}}$ is the sum over all possible dissections of the linearly ordered set

$$Z_j \equiv (s+n-n_1-\ldots-n_j+1, \ldots, s+n-n_1-\ldots-n_{j-1})$$

on no more than $s+n-n_1-\ldots-n_j$ linearly ordered subsets, the $(s+n)th$-order scattering cumulant is defined by the formula

$$\hat{\mathfrak{A}}_{s+n}(t, 1, \ldots, s+n) \doteq \mathfrak{A}^*_{s+n}(t, 1, \ldots, s+n) \mathcal{X}_{\mathbb{R}^{3(s+n)}\setminus\mathbb{W}_{s+n}} \prod_{i=1}^{s+n} (\mathfrak{A}^*_1)^{-1}(t, i),$$

and notations accepted above were used.

We adduce simplest examples of generating operators (4.11):

$$\mathfrak{V}_s(t,1,\ldots,s)=\mathfrak{A}_s(t,1,\ldots,s)\mathcal{X}_{\mathbb{R}^{3s}\setminus\mathbb{W}_s}\prod_{i=1}^{s}(\mathfrak{A}_1^*)^{-1}(t,i),$$

$$\begin{aligned}\mathfrak{V}_{s+1}(t,1,\ldots,s,s{+}1)&=\mathfrak{A}_{s+1}(t,1,\ldots,s{+}1)\mathcal{X}_{\mathbb{R}^{3(s+1)}\setminus\mathbb{W}_{s+1}}\prod_{i=1}^{s+1}(\mathfrak{A}_1^*)^{-1}(t,i)-\\&-\mathfrak{A}_s(t,1,\ldots,s)\mathcal{X}_{\mathbb{R}^{3s}\setminus\mathbb{W}_s}\prod_{i=1}^{s}(\mathfrak{A}_1^*)^{-1}(t,i)\times\\&\times\sum_{j=1}^{s}\mathfrak{A}_2(t,j,s+1)\mathcal{X}_{\mathbb{R}^{6}\setminus\mathbb{W}_2}(\mathfrak{A}_1^*)^{-1}(t,j)(\mathfrak{A}_1^*)^{-1}(t,s+1).\end{aligned}$$

If $\|G_1(t)\|_{L^1(\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3)}<e^{-(3s+2)}$, for arbitrary $t\in\mathbb{R}$ series (4.10) converges in the norm of the space L^1_s [47].

We note that in the case of initial state specified by a one-particle correlation function the reduced correlation functionals (4.10) describe all possible correlations generated by the dynamics of many hard spheres in terms of a one-particle correlation function.

Thus, according to the representation (2.64) of reduced correlation functions, the cumulant structure of their generating operators induces a generalized cumulant structure of the generating operators for series (4.10) of reduced correlation functionals.

In this case, the method of constructing reduced correlation functionals (4.10) is based on the application of the variation of cluster expansions, the so-called kinetic cluster expansions [47], to generating operators (2.36) of series representing reduced correlation functions (2.64).

Indeed, taking into account relations of kinetic cluster expansions for scattering cumulants (4.4):

$$\begin{aligned}\widehat{\mathfrak{A}}_{s+n}(t,1,\ldots,s+n)&=\sum_{n_1=0}^{n}\frac{n!}{(n-n_1)!}\mathfrak{V}_{s+n-n_1}\big(t,1,\ldots,s+n-n_1\big)\times\\&\times\sum_{\substack{\mathrm{D}:Z=\bigcup_l X_l,\\|\mathrm{D}|\leqslant s+n-n_1}}\frac{1}{|\mathrm{D}|!}\sum_{i_1\neq\ldots\neq i_{|\mathrm{D}|}=1}^{s+n-n_1}\prod_{X_l\subset\mathrm{D}}\frac{1}{|X_l|!}\,\widehat{\mathfrak{A}}_{1+|X_l|}(t,i_l,X_l),\end{aligned}$$

where $\sum_{\mathrm{D}:Z=\bigcup_l X_l,\,|\mathrm{D}|\leqslant s+n-n_1}$ is the sum over all possible dissections D of the linearly ordered set

$$Z\equiv(s+n-n_1+1,\ldots,s+n)$$

on no more than $s+n-n_1$ linearly ordered subsets, we derive the expansions of the reduced correlation functionals

$$G_s(t,x_1,\ldots,x_s \mid G_1(t)),\ s \geqslant 2,$$

on the basis of solution expansions (2.64) of the hierarchy of nonlinear evolution equations (2.60).

Note that the structure of kinetic cluster expansions of scattering cumulants of the groups of operators is similar to the structure of virial expansions of equilibrium distribution functions, i.e., as a power series in the density.

If initial data $G_1^0 \in L_1^1$, then for arbitrary $t \in \mathbb{R}$ one-particle correlation function (4.9) is a weak solution of the Cauchy problem of the non-Markovian Enskog kinetic equation [53]:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}G_1(t,x_1) = \mathcal{L}^*(1)G_1(t,x_1) + \int\limits_{\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3} dx_2\,\mathcal{L}^*_{\mathrm{int}}(1,2)G_1(t,x_1)G_1(t,x_2)+ \\ + \int\limits_{\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3} dx_2\,\mathcal{L}^*_{\mathrm{int}}(1,2)G_2\big(t,x_1,x_2 \mid G_1(t)\big),\end{aligned} \tag{4.12}$$

$$G_1(t,x_1)\big|_{t=0} = G_1^0(x_1), \tag{4.13}$$

where the first part of the collision integral in equation (4.12) has the Boltzmann–Enskog structure, and the second part of the collision integral is determined in terms of the two-particle correlation functional represented by series expansion (4.10) which describes all possible correlations that are created by hard-sphere dynamics and by the propagation of initial correlations related to the forbidden configurations.

In the paper [47], similar statements were proved for the state evolution of a hard-sphere system described in terms of reduced distribution functions governed by the BBGKY hierarchy. We emphasize that the nth term of expansions (4.10) of the reduced correlation functionals are determined by the $(s+n)th$-order generating operator (4.3) in contradistinction to the expansions of reduced distribution functionals of the state constructed in [47] which are determined by the $(1+n)th$-order generating operator (4.3).

Thus, for the initial state specified by a one-particle correlation function, the evolution of all possible states of the system of hard spheres can be described without any approximations within the framework of a one-particle correlation function governed by the non-Markovian Enskog-type kinetic equation (4.12), and by a sequence of explicitly defined functionals (4.10) of its solution.

5. Conclusion

In conclusion, the challenges of the evolution of many hard spheres with inelastic collisions will be reviewed, as will some applications of the methods outlined above to complex systems of various natures.

5.1. **On the dynamics of inelastic collisions.**

According to contemporary concept [96, 99] on a microscopic scale, the characteristic properties of granular media are determined by dissipative collisional dynamics and can be described as the evolution of a system of many hard spheres with inelastic collisions.

Since the characteristic features of the collective behavior of inelastically colliding particles in one-dimensional space reflect the main properties of granular gases, an approach to the rigorous derivation of the Boltzmann-type equation for one-dimensional granular gases will be presented below. We note that, in contrast to the system of hard rods with inelastic collisions, in one-dimensional space the evolution of hard rods with elastic collisions is trivial in the Boltzmann–Grad scaling limit; it is known as so-called free molecular motion or the Knudsen flow [14].

In the case of a one-dimensional granular gas for $t \geqslant 0$ in dimensionless form the Cauchy problem of the non-Markovian generalized Enskog kinetic equation (4.7),(4.8) takes the form [37, 42, 43]:

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial t}F_1(t,q_1,p_1) = -p_1\frac{\partial}{\partial q_1}F_1(t,q_1,p_1)+\\
&+\int_0^\infty dP\,P\Big(\frac{1}{(1-2\varepsilon)^2}\,F_2(t,q_1,p_1^\diamond(p_1,P),q_1-\epsilon,p_2^\diamond(p_1,P)\mid F_1(t))-\\
&\qquad\qquad -F_2(t,q_1,p_1,q_1-\epsilon,p_1+P\mid F_1(t))\Big)+\\
&+\int_0^\infty dP\,P\Big(\frac{1}{(1-2\varepsilon)^2}\,F_2(t,q_1,\tilde{p}_1^\diamond(p_1,P),q_1+\epsilon,\tilde{p}_2^\diamond(p_1,P)\mid F_1(t))-\\
&\qquad\qquad -F_2(t,q_1,p_1,q_1+\epsilon,p_1-P\mid F_1(t))\Big),
\end{aligned}
\tag{5.1}
$$

$$
F_1(t)|_{t=0} = F_1^{\epsilon,0}, \tag{5.2}
$$

where $\varepsilon = \frac{1-e}{2} \in [0, \frac{1}{2})$ and $e \in (0, 1]$ is a restitution coefficient, $\epsilon > 0$ is a scaling parameter (the ratio of a hard sphere diameter (the length) $\sigma > 0$ to the mean free path), the collision integral is determined by reduced functional (4.2) of the state $F_1(t)$ in the case of $s = 2$ and the expressions:

$$
\begin{aligned}
p_1^\diamond(p_1,P) &= p_1 - P + \frac{\varepsilon}{2\varepsilon-1}\,P,\\
p_2^\diamond(p_1,P) &= p_1 - \frac{\varepsilon}{2\varepsilon-1}\,P
\end{aligned}
$$

and the expressions

$$\tilde{p}_1^{\diamond}(p_1,P)=p_1+P-\frac{\varepsilon}{2\varepsilon-1}\,P,$$
$$\tilde{p}_2^{\diamond}(p_1,P)=p_1+\frac{\varepsilon}{2\varepsilon-1}\,P,$$

are transformed pre-collision momenta of inelastically colliding particles in a one-dimensional space.

The solution of the Cauchy problem (5.1),(5.2) is represented by the following series:

$$F_1^{\epsilon}(t,x_1)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\int\limits_{\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n}dx_2\cdots dx_{n+1}\,\mathfrak{A}^{*}_{1+n}(t)\prod_{i=1}^{n+1}F_1^{\epsilon,0}(x_i)\mathcal{X}_{\mathbb{R}^{(1+n)}\setminus\mathbb{W}_{1+n}},\quad(5.3)$$

where the generating operator $\mathfrak{A}^{*}_{1+n}(t)$ is the $(1{+}n)$th-order cumulant (2.22) of the semigroups of operators (1.6) of inelastically colliding hard rods in a one-dimensional space. Let the initial one-particle distribution function satisfy the following condition: $|F_1^{\epsilon,0}(x_1)|\leqslant Ce^{-\frac{\beta}{2}p_1^2}$, where $\beta>0$ is a parameter and $C<\infty$ is some constant. Then every term of series (5.3) exists; for a finite time interval it is the uniformly convergent series with respect to x_1 from an arbitrary compact, and function (5.3) is a weak solution of the Cauchy problem (5.1),(5.2) of the non-Markovian Enskog-type equation with inelastic collisions.

We assume that, in the sense of weak convergence, there exists a limit

$$\mathrm{w-}\lim_{\epsilon\rightarrow 0}\big(F_1^{\epsilon,0}(x_1)-f_1^0(x_1)\big)=0.$$

Then, for a finite time interval, the Boltzmann–Grad limit of solution (5.3) of the Cauchy problem of the non-Markovian Enskog-type equation for a one-dimensional granular gas (5.1) exists in the sense of a weak convergence

$$\mathrm{w-}\lim_{\epsilon\rightarrow 0}\big(F_1^{\epsilon}(t,x_1)-f_1(t,x_1)\big)=0,\quad(5.4)$$

where the limit of one-particle distribution function (5.3) is determined by the following series uniformly convergent on an arbitrary compact set

$$f_1(t,x_1)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\int\limits_{\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n}dx_2\cdots dx_{n+1}\,\mathfrak{A}^{0}_{1+n}(t)\prod_{i=1}^{n+1}f_1^0(x_i),\quad(5.5)$$

and the generating operator $\mathfrak{A}^0_{1+n}(t)\equiv\mathfrak{A}^0_{1+n}(t,1,\ldots,n{+}1)$ is the $(n{+}1)th$-order cumulant of semigroups (1.6) of point particles with inelastic collisions. For $t\geqslant 0$ an infinitesimal generator of this semigroup of operators is determined by the operator:

$$(\mathcal{L}_n^{*,0} f_n)(x_1,\ldots,x_n) = -\sum_{j=1}^{n} p_j \frac{\partial}{\partial q_j} f_n(x_1,\ldots,x_n)+$$
$$+\sum_{j_1<j_2=1}^{n} |p_{j_2}-p_{j_1}|\delta(q_{j_1}-q_{j_2})\times$$
$$\times\Big(\frac{1}{(1-2\varepsilon)^2} f_n(x_1,\ldots,x_{j_1}^{\diamond},\ldots,x_{j_2}^{\diamond},\ldots,x_n) - f_n(x_1,\ldots,x_n)\Big),$$

where $x_j^{\diamond}\equiv(q_j,p_j^{\diamond})$ and the pre-collision momenta $p_{j_1}^{\diamond}$, $p_{j_2}^{\diamond}$ of inelastically colliding particles are determined by the following expressions:

$$p_{j_1}^{\diamond} = p_{j_2} + \frac{\varepsilon}{2\varepsilon-1}\,(p_{j_1}-p_{j_2}),$$
$$p_{j_2}^{\diamond} = p_{j_1} - \frac{\varepsilon}{2\varepsilon-1}\,(p_{j_1}-p_{j_2}).$$

For $t\geqslant 0$ the limit one-particle distribution function represented by series (5.5) is a weak solution of the Cauchy problem of the Boltzmann-type kinetic equation of point particles with inelastic collisions [43]

$$\frac{\partial}{\partial t} f_1(t,q,p) = -p\,\frac{\partial}{\partial q} f_1(t,q,p) + \int\limits_{-\infty}^{+\infty} dp_1\,|p-p_1|\times$$
$$\times\Big(\frac{1}{(1-2\varepsilon)^2} f_1(t,q,p^{\diamond}) f_1(t,q,p_1^{\diamond}) - f_1(t,q,p)\,f_1(t,q,p_1)\Big) + \sum_{n=1}^{\infty}\mathcal{I}_0^{(n)}. \tag{5.6}$$

In kinetic equation (5.6) the remainder $\sum_{n=1}^{\infty}\mathcal{I}_0^{(n)}$ of the collision integral is determined by the following expressions:

$$\mathcal{I}_0^{(n)} \equiv \frac{1}{n!}\int\limits_0^{\infty} dP\,P \int\limits_{\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n} dq_3dp_3\cdots dq_{n+2}dp_{n+2}\mathfrak{V}_{1+n}(t)\times$$
$$\times\Big(\frac{1}{(1-2\varepsilon)^2} f_1(t,q,p_1^{\diamond}(p,P)) f_1(t,q,p_2^{\diamond}(p,P)) - f_1(t,q,p) f_1(t,q,p+P)\Big)\times$$
$$\times\prod_{i=3}^{n+2} f_1(t,q_i,p_i)+$$
$$+\int\limits_0^{\infty} dP\,P \int\limits_{\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n} dq_3dp_3\cdots dq_{n+2}dp_{n+2}\mathfrak{V}_{1+n}(t)\times$$
$$\times\Big(\frac{1}{(1-2\varepsilon)^2} f_1(t,q,\tilde{p}_1^{\diamond}(p,P)) f_1(t,q,\tilde{p}_2^{\diamond}(p,P)) - f_1(t,q,p) f_1(t,q,p-P)\Big)\times$$
$$\times\prod_{i=3}^{n+2} F_1(t,q_i,p_i),$$

where the generating operators

$$\mathfrak{V}_{1+n}(t) \equiv \mathfrak{V}_{1+n}(t, \{1,2\}, 3, \ldots, n+2),\ n \geqslant 0,$$

of the series for a collision integral are represented by expansions (4.3) with respect to the cumulants of semigroups of scattering operators of point hard rods with inelastic collisions in a one-dimensional space

$$\widehat{S}^0_n(t,1,\ldots,n) \doteq S^{*,0}_n(t,1,\ldots,s)\prod_{i=1}^{n}(S^{*,0}_1)^{-1}(t,i).$$

In fact, series expansions for the collision integral of the non-Markovian Enskog equation for a granular gas (5.6) or solution (5.3) are represented as the power series over the density, so that the terms $\mathcal{I}_0^{(n)}$, $n \geqslant 1$, of the collision integral in kinetic equation (5.6) are corrections with respect to the density to the Boltzmann collision integral of one-dimensional granular gases formulated in the paper [96].

Since the scattering operator of point hard rods is an identity operator in the approximation of elastic collisions, namely, in the limit $\varepsilon \to 0$, the collision integral of the Boltzmann kinetic equation (5.6) in a one-dimensional space is identical to zero. In the quasi-elastic approximation [96] the limit one-particle distribution function (5.5)

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \varepsilon f_1(t,q,p) = f^0(t,q,p),$$

satisfies the nonlinear friction kinetic equation for one-dimensional granular gases [96]:

$$\frac{\partial}{\partial t} f^0(t,q,p) = -p\frac{\partial}{\partial q} f^0(t,q,p)+ \\ + \frac{\partial}{\partial p}\int_{-\infty}^{\infty} dp_1\, |p_1 - p|\, (p_1 - p)\, f^0(t,q,p_1) f^0(t,q,p).$$

Taking into consideration the result (5.4) on the Boltzmann–Grad asymptotic behavior of the non-Markovian Enskog equation (5.1), for reduced functionals of the state (4.2) in a one-dimensional space, the following statement is true [43]:

$$\mathrm{w-}\lim_{\epsilon\to 0}\big(F_s\big(t, x_1, ..., x_s \mid F_1^{\epsilon}(t)\big) - f_s\big(t, x_1, ..., x_s \mid f_1(t)\big)\big) = 0,\ \ s \geqslant 2, \quad (5.7)$$

where in equality (5.7) the limit reduced functionals of the limit one-particle distribution function (5.5) are determined by the series expansions with a structure similar to series (4.2) and the generating operators represented by expansions (4.3) over the cumulants of semigroups of scattering operators of point hard rods with inelastic collisions in a one-dimensional space.

As mentioned above, in the case of a system of hard rods with elastic collisions, the limit reduced functionals of the state are the product of the limit one-particle distribution functions, describing the free motion of point particles.

Thus, the Boltzmann–Grad asymptotic behavior of solution (5.3) of the non-Markovian Enskog equation (5.1) is governed by the Boltzmann kinetic equation (5.6) for a one-dimensional granular gas.

We emphasize that the Boltzmann-type equation (5.6) describes the memory effects in a one-dimensional granular gas. In addition, the limit of reduced functionals of the state $f_s\big(t, x_1, \ldots, x_s \mid f_1(t)\big)$, $s \geqslant 2$, which are defined above, describe the process of the propagation of initial chaos in a one-dimensional granular gas, or, in other words, the process of creatiing correlations in a system of hard rods with inelastic collisions.

It should be noted that the Boltzmann–Grad asymptotic behavior of the non-Markovian Enskog equation with inelastic collisions in a multidimensional space is analogous to the Boltzmann–Grad asymptotic behavior of a hard sphere system with the elastic collisions [43], i.e., it is governed by the Boltzmann equation for a granular gas [98, 99], and the asymptotic behavior of the reduced functionals of the state (4.2) is described by the product of one-particle distribution functions of its solution, i.e., describes the propagation of initial chaos.

5.2. **Some bibliographic notes on collisional dynamics.** Above, it was studied systems of identical colliding particles, which are described by means of functions of observables and distribution functions, which are symmetrical with respect to arbitrary permutations of their arguments. In papers [32,33,67,70,82], the theory of the hierarchies of evolution equations for systems of many colliding particles described by non-symmetric functions was developed. An example of such a system is a one-dimensional system of particles interacting with their nearest neighbors, so-called non-symmetric systems of particles [32].

As is known, many-entity systems of active soft condensed matter are dynamic systems exhibiting a collective behavior that differs from the statistical behavior of ordinary gases. To describe the nature of entities (or self-propelled particles), in the paper [78], collision dynamics based on Markov jump processes, which should reflect the internal properties of living creatures, were proposed. In works [36, 45] an approach was developed to describe the collective behavior of complex systems of mathematical biology within the framework of the evolution of observables of many colliding stochastic processes, and the dual Vlasov hierarchy was constructed in the mean field approximation. This representation of the kinetic evolution seems, in fact, to be the direct mathematically fully consistent formulation modeling the kinetic evolution of biological systems, since the notion of the state is more subtle and is an implicit characteristic of populations of living creatures. In the paper [36] the processes of creation of correlations generated by the dynamics of active soft matter and propagation of initial correlations have also been described by means of the non-Markovian generalized kinetic equation with initial correlations, and, in particular, in the mean-field scaling approximation, the Vlasov-type kinetic equation for many colliding stochastic processes was constructed.

The study of systems of colliding particles in interaction with the environment, the so-called open systems, involves a number of unsolved fundamental problems. One of them is related to the challenge of the origin of stochastic behavior in dynamical systems of many particles. In papers [48–50], based on the approaches to the derivation of kinetic equations outlined above, a generalization of the Fokker–Planck equation for open systems of colliding particles was justified.

In previous decades, a lot of work has been performed on discrete-velocity models of the Boltzmann equation, which are of significant conceptual interest for the kinetic theory of gases and, at the same time, represent a fascinating mathematical subject [84]. In connection with this topic of research, we note the works [39–41, 54], in which the discrete-velocity model was studied, related to the problem of deriving a model of the Enskog discrete-velocity kinetic equation.

An overview of some modern applications of kinetic equations to the description of non-equilibrium processes in complex systems of various natures is presented in the monograph [23].

5.3. **Outlook.** The purpose of this review was to analyze the development and current advances of the theory of evolution equations for systems of many colliding particles, in particular, kinetic equations and their relations to the fundamental equations that describe the laws of nature.

The problem of constructing a solution to the Cauchy problem for hierarchies of evolution equations of observables (2.1) and the state (2.17) of a system of hard spheres with elastic collisions for initial data belonging to some functional spaces is considered. As was established, solutions of hierarchies of evolution equations are determined by groups of operators, which are represented by expansions over the groups of particles whose evolution is described by cumulants of the corresponding order of the groups of operators of the Liouville equations. Due to the fact that the cumulants of the groups of operators are determined by cluster expansions of the groups of operators of the Liouville equations, in the corresponding function spaces there are different representations for solutions to the hierarchies of evolution equations. These cluster expansions of the groups of operators underlie the classification of possible solution representations to the Cauchy problem for the hierarchies of evolution equations of many colliding particles.

To describe the evolution of the state of a many-particle system, there is an alternative approach that is based on the dynamics of correlations. In this approach, a state of finitely many hard spheres is described with the employment of functions determined by the cluster expansions of the probability distribution functions that are governed by the so-called Liouville hierarchy (2.31). It was above established that the constructed dynamics of correlation underlie the description of the dynamics of infinitely many hard spheres governed by the BBGKY hierarchy for reduced distribution functions (2.17) or the hierarchy of nonlinear evolution equations for reduced correlation functions (2.60), i.e., of the cumulants of reduced distribution functions. We emphasize the importance of the mathematical description of the processes of the creation and propagation of correlations, in particular, for numerous applications [2, 3, 86].

To describe the evolution of many hard spheres within the framework of the evolution of states for an initial state close to "kinetic," i.e., a state described in terms of the state of a typical particle, there is another possibility: by means of the so-called non-Markovian Enskog kinetic equation (4.7). In other words, the origin of the collective behavior of a hard-sphere system on a microscopic scale was examined above. As already mentioned, one of the advantages of such an approach to the derivation of kinetic equations from underlying collisional dynamics is the opportunity to construct the kinetic equations with initial correlations, which makes it possible to describe the creation of correlations and propagation of initial correlations. Another advantage of this approach is related to the rigorous derivation of the Boltzmann equation (3.15) with higher-order corrections to the canonical term of the collision integral.

Thus, the concept of cumulants of the groups of operators of Liouville equations underlies non-perturbative expansions of solutions to hierarchies of fundamental evolution equations that describe the evolution of observables and a state of many colliding particles, as well as underlies the kinetic description of their collective behavior. We note that for quantum many-particle systems the concept of cumulants of groups of operators is considered in review [38].

In the paper, possible approaches to the rigorous derivation [35] and justification [62, 63] of the kinetic equations for many colliding particles were considered. One of them is an approach to the description of the kinetic evolution within the framework of the evolution of the observables of many colliding particles [51]. The advances of the method based on the dual Boltzmann hierarchy (3.8) are the opportunity to construct kinetic equations (3.21), taking into account the correlations of particles of the initial state, and the description of the process of propagation of initial correlations in scaling approximations (3.24).

The paper [69] considered the challenge of deriving hydrodynamic equations from the dual BBGKY hierarchy for reduced observed microscopic phase densities. We notice that the rigorous derivation of hydrodynamic equations from the dynamics of many colliding particles is still an open problem. Regarding the classical problem of rigorous derivation of the hydrodynamic equations from the Boltzmann kinetic equation in scaling limits, we refer to the books [72, 93].

Acknowledgements. Glory to Ukraïne!

References

[1] R. Balescu. Dynamical correlation patterns: a new representation of the Liouville equation. *Physica*, 56(1):l–24, 1971. doi:10.1016/0031-8914(71)90002-4.

[2] T. Bodineau, I. Gallagher, L. Saint-Raymond, and S. Simonella. Fluctuation theory in the Boltzmann–Grad limit. *J. Stat. Phys.*, 180:873–895, 2020. doi:10.1007/s10955-020-02549-5.

[3] T. Bodineau, I. Gallagher, L. Saint-Raymond, and S. Simonella. Cluster expansion for a dilute hard sphere gas dynamics. *J. Math. Phys.*, 63:073301, 2022. doi:10.1063/5.0091199.

[4] T. Bodineau, I. Gallagher, L. Saint-Raymond, and S. Simonella. On the dynamics of dilute gases. *Eur. Math. Soc. Mag.*, 2023. doi:10.4171/MAG/124.

[5] M. M. Bogolyubov. Equations of hydrodynamics in statistical mechanics. *Proc. Inst. Math. AN USSR*, 10:41–59, 1948 (in Ukrainian).

[6] N. N. Bogolyubov. *Problems of the dynamical theory in statistical physics*. Gostechizdat, M., 1946. URL: https://books.google.com.ua/books?id=GUE6AQAAIAAJ.

[7] N. N. Bogolyubov, D. Ya. Petrina, and B. I. Khatset. Mathematical description of the equilibrium state of classical systems on the basis of the canonical ensemble formalism. *Theor. Math. Phys.*, 1:194–212, 1969. doi:10.1007/BF01028046.

[8] N. N. Bogolyubov, D. Ya. Petrina, and B. I. Khatset. Mathematical description of the equilibrium state of classical systems on the basis of the canonical ensemble formalism. *Ukrainian J. Phys.*, 53:168–184, 2008.

[9] L. E. Boltzmann. Weitere studien über das wärmegleichgewicht unter gasmolekülen. *Sitzungsber. Akad. Wiss.*, 66:275—370, 1872.

[10] G. Borgioli and V. I. Gerasimenko. The dual BBGKY hierarchy for the evolution of observables. *Riv. Mat. Univ. Parma*, 4:251–267, 2001.

[11] M. Born and H. S. Green. A general kinetic theory of liquids. I. The molecular distribution functions. *Proc. Royal Soci. of London. Ser. A*, 188(1012):10–18, 1946. doi:10.1098/rspa.1946.0093.

[12] C. Cercignani. On the Boltzmann equation for rigid spheres. *Transport Theory and Statistical Physics*, 2(3):211–225, 1972. doi:10.1080/00411457208232538.

[13] C. Cercignani. *The Boltzmann Equation and Its Applications*. Springer, NY, 1987. doi:10.1007/978-1-4612-1039-9.

[14] C. Cercignani, V. I. Gerasimenko, and D. Ya. Petrina. *Many-particle Dynamics and Kinetic Equations*. Springer, (Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1st ed. 1997), 2012. doi:10.1007/978-94-011-5558-8.

[15] C. Cercignani, R. Illner, and M. Pulvirenti. *The mathematical theory of dilute gases*. Springer-Verlag, New York, 1994. doi:10.1007/978-1-4419-8524-8.

[16] S. T. Choh and G. E. Uhlenbeck. *The kinetic theory of phenomena in dense gases*. University of Michigan, 1958.

[17] E. G. D. Cohen. Cluster expansions and the hierarchy: I. Non-equilibrium distribution functions. *Physica*, 28:1045–1059, 1962. doi:10.1016/0031-8914(62)90009-5.

[18] E. G. D. Cohen. Bogolyubov and kinetic theory: the Bogolyubov equations. *Ukrainian J. Phys.*, 54(8-9):847–861, 2009.

[19] R. Dautray and J.-L. Lions. *Mathematical Analysis and Numerical Methods for Science and Technology. Vol.5: Evolution Problems I*. Berlin etc.: Springer-Verlag, 1992.

[20] R. Denlinger. The propagation of chaos for a rarefied gas of hard spheres in the whole space. *Arch. Rational Mech. Anal.*, 229(2):885–952, 2018. doi:10.1007/s00205-018-1229-1.

[21] R. L. Dobrushin, Y. G. Sinai, and Y. M. Sukhov. Dynamical systems of statistical mechanics. In Y. G. Sinai, editor, *Dynamical Systems II: Ergodic Theory with Applications to Dynamical Systems and Statistical Mechanics*, pages 208–254. Springer, Berlin, Heidelberg, 1989. doi:10.1007/978-3-662-06788-8_10.

[22] J. R. Dorfman and M. H. Ernst. Hard-sphere binary-collision operators. *J. Stat. Phys.*, 57:581–593, 1989. doi:10.1007/BF01022823.

[23] J. R. Dorfman, H. van Beijeren, and T. R. Kirkpatrick. *Contemporary Kinetic Theory of Matter*. Cambridge University Press, 2021. doi:10.1017/9781139025942.

[24] M. Duerinckx. On the size of chaos via Glauber calculus in the classical mean-field dynamics. *Commun. Math. Phys.*, 382:613–653, 2021. doi:10.1007/s00220-021-03978-3.

[25] M. Duerinckx and L. Saint-Raymond. The propagation of chaos for a rarefied gas of hard spheres in the whole space. *Probab. Math. Phys.*, 2(1):27–69, 2021. doi:10.2140/pmp.2021.2.27.

[26] D. Enskog. Kinetische theorie der wärmeleitung, reibung und selbstdiffusion in gewissen verdichteten gasen und flüssigkeiten. *Kungl. Sv. Vetenskapsakademiens Handl.*, 63(4):3–44, 1922.

[27] M. H. Ernst. Bogoliubov Choh Uhlenbeck theory: Cradle of modern kinetic theory. In *Progress in Statistical Physics*, pages 3–27. World Sci. Publ. Company, Singapore, 1998. doi:10.1142/9789814528399.

[28] I. Gallagher. From Newton to Navier–Stokes, or how to connect fluid mechanics equations from microscopic to macroscopic scales. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 56:65–85, 2019. doi:10.1090/bull/1650.

[29] I. Gallagher, L. Saint-Raymond, and B. Texier. *From Newton to Boltzmann: hard spheres and short-range potentials*. Zurich Lectures in Advanced Mathematics. EMS, Zürich, 2013.

[30] I. V. Gapyak. The kinetic equations of a hard sphere system with initial correlations. *Proc. Inst. Math. NASU*, 11(1):166–177, 2014.

[31] I. V. Gapyak and V. I. Gerasimenko. Hierarchy of evolution equations for correlations of hard-sphere fluids. *Reports of NAS of Ukraine*, (3):3–12, 2022. doi:10.15407/dopovidi2022.02.003.

[32] V. I. Gerasimenko. Evolution of infinite particle systems interacting with nearest neighbors. *Reports of Acad. Sci. Ukrainian SSR*, (5):10–13, 1982.

[33] V. I. Gerasimenko. Nonequilibrium dynamics of a hard rod system. In *Proc. Inst. of Math.: "Methods of mathematical physics of infinite particle systems"*, pages 21–30. IM, Kyiv, 1991.

[34] V. I. Gerasimenko. On a solution of the BBGKY hierarchy for a one-dimensional hard-sphere system. *Theor. Math. Phys.*, 91(1):410–417, 1992. doi:10.1007/BF01019833.

[35] V. I. Gerasimenko. On the approaches to the derivation of the Boltzmann equation with hard sphere collisions. *Proc. Inst. Math. NASU*, 10(2):71–95, 2013. doi:10.48550/arXiv.1308.1789.

[36] V. I. Gerasimenko. Kinetic equations of active soft matter. In *Kinetic Theory*, pages 71–88. InTech, London, 2018. doi:10.5772/intechopen.70667.

[37] V. I. Gerasimenko. Kinetic equations of granular media. In *Progress in Fine Particle Plasmas*, pages 163–177. InTech, London, 2020. doi:10.5772/intechopen.90027.

[38] V. I. Gerasimenko. Nonlinear kinetic equations of quantum systems. *Proc. Inst. Math. NASU*, 17(2):82–112, 2020. doi:10.48550/arXiv.2107.10872.

[39] V. I. Gerasimenko, G. Borgioli, and G. Lauro. Derivation of a discrete Enskog equation from the dynamics of particles. *Rend. Sem. Mat. Univ. Pol. Torino*, 56(2):59–69, 1998.

[40] V. I. Gerasimenko, G. Borgioli, G. Lauro, and R. Monaco. Many particles dynamical system formulation for the discrete Enskog gas. *Transp. Theory and Stat. Phys.*, 25(3/4):581–592, 1996. doi:10.1080/00411459608220724.

[41] V. I. Gerasimenko, G. Borgioli, G. Lauro, and R. Monaco. A discrete velocity model of a gas: global in time solutions of the BBGKY hierarchy. *Reports on Math. Phys.*, 40(3):431–442, 1997. doi:10.1016/S0034-4877(97)85892-2.

[42] V. I. Gerasimenko and M. S. Borovchenkova. The Boltzmann–Grad limit of the Enskog equation of one-dimensional granular gases. *Reports of NAS of Ukraine*, (10):11–17, 2013.

[43] V. I. Gerasimenko and M. S. Borovchenkova. On the non-Markovian Enskog equation for granular gases. *J. Phys. A: Math. Theor.*, 47(3):035001, 2014. doi:10.1088/1751-8113/47/3/035001.

[44] V. I. Gerasimenko and Yu. Yu. Fedchun. Nonperturbative solution expansions of hierarchies of evolution equations in functional derivatives. *Proc. Inst. Math. NASU*, 9(2):347–375, 2012. doi:10.48550/arXiv.1107.0823.

[45] V. I. Gerasimenko and Yu. Yu. Fedchun. On semigroups of large particle systems and their scaling asymptotic behavior. In *Semigroups of Operators – Theory and Applications*, pages 165–182. Springer, N.Y., 2015. doi:10.1007/978-3-319-12145-1_10.

[46] V. I. Gerasimenko and I. V. Gapyak. On the evolution of observables and the Enskog kinetic equation. *Math. Bulletin Sh. Sci. Soc.*, 8(2):283–298, 2011.

[47] V. I. Gerasimenko and I. V. Gapyak. Hard sphere dynamics and the Enskog equation. *Kinetic and Related Models*, 5(3):459–484, 2012. doi:10.3934/krm.2012.5.459.

[48] V. I. Gerasimenko and I. V. Gapyak. The generalized Fokker–Planck equation for the Enskog gas. *Math. Bulletin Shevchenko Sci. Soc.*, 9:23–43, 2014.

[49] V. I. Gerasimenko and I. V. Gapyak. The non-Markovian Fokker–Planck kinetic equation for a system of hard spheres. *Reports of NAS of Ukraine*, (12):29–35, 2014. doi:10.15407/dopovidi2014.12.029.

[50] V. I. Gerasimenko and I. V. Gapyak. The Fokker–Planck equation with initial correlations in collisional kinetic theory. *Bukovina Math. J.*, 3(3–4):52–58, 2015.

[51] V. I. Gerasimenko and I. V. Gapyak. Low-density asymptotic behavior of observables of hard sphere fluids. *Advances in Math. Phys.*, 2018:1–11, 2018. doi:10.1155/2018/6252919.

[52] V. I. Gerasimenko and I. V. Gapyak. Boltzmann–Grad asymptotic behavior of collisional dynamics. *Reviews in Math. Phys.*, 33(2):2130001, 2021. doi:10.1142/s0129055x21300016.

[53] V. I. Gerasimenko and I. V. Gapyak. Propagation of correlations in a hard-sphere system. *J Stat. Phys.*, 189(2), 2022. doi:10.1007/s10955-022-02958-8.

[54] V. I. Gerasimenko and V. V. Gorunovich. Bogolyubov equations for the discrete model of a one-dimensional particle system. *Reports of Acad. Sci. Ukrainian SSR*, (8):34–38, 1991.

[55] V. I. Gerasimenko and A. G. Kornienko. The Boltzmann kinetic equation with correlations for hard sphere fluids. *Reports of NAS of Ukraine*, (3):17–23, 2015. doi:10.15407/dopovidi2015.03.017.

[56] V. I. Gerasimenko and D. Ya. Petrina. Evolution of states of infinite systems in classical statistical mechanics. In *Sov. Sci. Rev., sect. C: Math. Phys. Rev.*, volume 5, pages 1–52. Harwood Acad. Publ., N.Y., 1985.

[57] V. I. Gerasimenko and D. Ya. Petrina. Thermodynamic limit of nonequilibrium states of a three-dimensional hard sphere system. *Doklady of Acad. Sci. USSR*, 282(1):57–60, 1985.

[58] V. I. Gerasimenko and D. Ya. Petrina. Thermodynamic limit of nonequilibrium states of a three-dimensional system of elastic spheres. *Theor. Math. Phys.*, 64:734–747, 1985. doi:10.1007/BF01017041.

[59] V. I. Gerasimenko and D. Ya. Petrina. The Boltzmann–Grad limit of states of an infinite hard sphere system. *Doklady of Acad. Sci. USSR*, 297(2):336–340, 1987.

[60] V. I. Gerasimenko and D. Ya. Petrina. The Boltzmann–Grad limit of equilibrium states. *Reports of Acad. Sci. Ukrainian SSR*, (12):17–19, 1988.

[61] V. I. Gerasimenko and D. Ya. Petrina. Existence of the Boltzmann–Grad limit for an infinite system of hard spheres. *Theor. Math. Phys.*, 83:402–418, 1990. doi:10.1007/BF01019139.

[62] V. I. Gerasimenko and D. Ya. Petrina. On the generalized kinetic equation. *Reports of NAS of Ukraine*, (7):7–12, 1997.

[63] V. I. Gerasimenko and D. Ya. Petrina. The generalized kinetic equation generated by the BBGKY hierarchy. *Ukrainian J. Phys.*, 43(6/7):697–702, 1998.

[64] V. I. Gerasimenko, D. Ya. Petrina, and P. V. Malyshev. *Mathematical Foundations of Classical Statistical Mechanics: Continuous Systems*. Taylor and Francis Sci. Publ., London, 2nd ed. (Gordon and Breach Sci. Publ., N.Y., 1nd ed. 1989), 2002. doi:10.1201/9781482265026.

[65] V. I. Gerasimenko and T. V. Ryabukha. Cumulant representation of solutions of the BBGKY hierarchy of equations. *Ukrainian Math. J.*, 54:1583–1601, 2002. doi:10.1023/A:1023771917748.

[66] V. I. Gerasimenko and T. V. Ryabukha. On the dual nonequilibrium cluster expansion. *Reports of Acad. Sci. Ukrainian SSR*, (3):16–22, 2003.

[67] V. I. Gerasimenko, T. V. Ryabukha, and M. O. Stashenko. On the structure of expansions for the BBGKY hierarchy solutions. *J Phys. A: Math. General*, 37(42):9861–9872, 2004. doi:10.1088/0305-4470/37/42/002.

[68] V. I. Gerasimenko and V. O. Shtyk. Bogolyubov's principle of weakening correlations for an infinite system of hard spheres. *Reports of NAS of Ukraine*, (3):7–13, 2008.

[69] V. I. Gerasimenko, V. O. Shtyk, and A. G. Zagorodny. Hydrodynamic equations for microscopic phase densities. *Cent. Eur. J. Phys.*, 9(1), 2011. doi:10.2478/s11534-010-0033-9.

[70] V. I. Gerasimenko and M. O. Stashenko. Nonequilibrium cluster expansion of non-symmetric particle systems. *Sci. Bulletin of Volyn Univ.*, (4):5–13, 2003.
[71] J. W. Gibbs. *Elementary principles in statistical mechanics developed with especial reference to the rational foundation of thermodynamics*. C. Scribner, NY, 1902. doi:10.5962/bhl.title.32624.
[72] F. Golse. The Boltzmann equation and its hydrodynamic limits. In *Handbook of Differential Equations Evolutionary Equations*, volume 2, pages 159–301. North-Holland, 2005. doi:10.1016/S1874-5717(06)80006-X.
[73] H. Grad. On the kinetic theory of rarefied gases. *Commun. on Pure and Appl. Math.*, 2(4):331–407, 1949. doi:10.1002/cpa.3160020403.
[74] M. S. Green. Boltzmann equation from the statistical mechanical point of view. *J. Chem. Phys.*, 25(5):836–855, 1956. doi:10.1063/1.1743132.
[75] M. S. Green and R. A. Piccirelli. Basis of the functional assumption in the theory of the Boltzmann equation. *Phys. Rev.*, 132:1388–1410, 1963. doi:10.1103/PhysRev.132.1388.
[76] D. Hilbert. Begründung der kinetischen gastheorie. *Math. Ann.*, 72:562–577, 1912. doi:10.1007/BF01456676.
[77] J. G. Kirkwood. The statistical mechanical theory of transport processes II. Transport in gases. *J Chem. Phys.*, 15(1):72–76, 1947. doi:10.1063/1.1746292.
[78] M. Lachowicz. Individually-based markov processes modeling nonlinear systems in mathematical biology. *Nonlinear Analysis: Real World Applications*, 12(4):2396–2407, 2011. doi:10.1016/j.nonrwa.2011.02.014.
[79] O. E. Lanford, III. Time evolution of large classical systems. In *Dynamical systems, theory and applications*, pages 1–111. Lecture Notes in Phys., v. 38. Springer, Berlin, Heidelberg, 1975. doi:10.1007/3-540-07171-7-1.
[80] R. M. Lewis. Solution of the equations of statistical mechanics. *J. Math. Phys.*, 2:222–231, 1961. doi:10.1063/1.1703703.
[81] D. Ya. Petrina. Mathematical description of the evolution of infinite systems of classical statistical physics. i. Locally perturbed one-dimensional systems. *Theor. Math. Phys.*, 38:153–166, 1979. doi:10.1007/BF01016837.
[82] D. Ya. Petrina and V. I. Gerasimenko. A mathematical description of the evolution of the state of infinite systems of classical statistical mechanics. *Rus. Math. Surveys*, 38(5):1–61, 1983. doi:10.1070/RM1983v038n05ABEH003499.
[83] D. Ya. Petrina and V. I. Gerasimenko. Mathematical problems of statistical mechanics of a system of elastic balls. *Rus. Math. Surveys*, 45(3):153–211, 1990. doi:10.1070/rm1990v045n03abeh002360.
[84] T. Platkowski and R. Illner. Discrete velocity models of the Boltzmann equation: A survey on the mathematical aspects of the theory. *SIAM Review*, 30(2):213–255, 1988. doi:10.1137/1030045.
[85] Henri Poincaré. The principles of mathematical physics. *The Monist*, 15(1):1–24, 1905. doi:10.5840/monist190515137.
[86] I. Prigogine. *Non-Equilibrium Statistical Mechanics*. N.Y.: John Wiley & Sons, 1962.
[87] M. Pulvirenti, Saffirio C., and S. Simonella. On the validity of the Boltzmann equation for short range potentials. *Rev. Math. Phys.*, 26(2):1450001, 2014. doi:10.1142/S0129055X14500019.
[88] M. Pulvirenti and S. Simonella. Propagation of chaos and effective equations in kinetic theory: a brief survey. *Math. and Mech. of Complex Systems*, 4(3-4):255–274, 2016. doi:10.2140/memocs.2016.4.255.

[89] M. Pulvirenti and S. Simonella. The Boltzmann–Grad limit of a hard sphere system: analysis of the correlation error. *Invent. Math.*, 207:1135–1237, 2017. doi:10.1007/s00222-016-0682-4.

[90] D. Ruelle. *Statistical Mechanics: Rigorous Results*. Amsterdam: W.A. Benjamin, Inc., 1969.

[91] T. V. Ryabukha. On mean-value of observales functionals of one-dimensional infinite particle systems. *Rev. Math. Phys.*, 162(3):352–365, 2010. doi:10.1007/s11232-010-0028-0.

[92] Ch. Saffirio. Derivation of the Boltzmann equation: Hard spheres, short-range potentials and beyond. In *From Particle Systems to Partial Differential Equations III*, pages 301–321. Springer Inter. Publ., 2016. doi:10.1007/978-3-319-32144-8_15.

[93] L. Saint-Raymond. *Hydrodynamic Limits of the Boltzmann Equation*. Springer-Verlag, Berlin, 2009. doi:10.1007/978-3-540-92847-8.

[94] S. Simonella. Evolution of correlation functions in the hard sphere dynamics. *J. Stat. Phys.*, 155(6):1191–1221, 2014. doi:10.1007/s10955-013-0905-7.

[95] H. Spohn. *Large Scale Dynamics of Interacting Particles*. Springer-Verlag, Berlin, 1991. doi:10.1007/978-3-642-84371-6.

[96] G. Toscani. Kinetic and hydrodynamic models of nearly elastic granular flows. *Monatschefte für Mathematik*, 142:179–192, 2004. doi:10.1007/s00605-004-0241-8.

[97] A. Trushechkin. Microscopic and soliton-like solutions of the Boltzmann–Enskog and generalized Enskog equations for elastic and inelastic hard spheres. *Kinet. Relat. Models*, 7(4):755–778, 2014. doi:10.3934/krm.2014.7.755.

[98] C. Villani. A review of mathematical topics in collisional kinetic theory. In *Handbook of Mathematical Fluid Dynamics*, volume 1, pages 71–74. North-Holland, 2002. doi:10.1016/S1874-5792(02)80004-0.

[99] C. Villani. Mathematics of granular materials. *J. Stat. Phys.*, 124(2-4):781–822, 2006. doi:10.1007/s10955-006-9038-6.

[100] J. Yvon. La théorie statistique des fluides et l'équation d'état. Hermann&cie, Paris, 1935.

V. I. Gerasimenko
Institute of Mathematics of NAS of Ukraine, Kyiv
Email: gerasym@imath.kiev.ua
ORCID: 0000-0003-2577-2237

I. V. Gapyak
Taras Shevchenko National University of Kyiv
Email: gapjak@ukr.net
ORCID: 0000-0003-2102-1583

Формули типу Кларка-Окона на просторах регулярних основних і узагальнених функцій в аналізі білого шуму Леві

М. О. Качановський

Abstract. In the classical Gaussian analysis the Clark-Ocone formula can be written in the form

$$F = \mathbf{E}F + \int \mathbf{E}\big(\partial_t F|_{\mathcal{F}_t}\big)\, dW_t,$$

where a function (a random variable) F is square integrable with respect to the Gaussian measure and differentiable by Hida; $\mathbf{E}$ denotes the expectation; $\mathbf{E}\big(\circ|_{\mathcal{F}_t}\big)$—the conditional expectation with respect to the full σ-algebra $\mathcal{F}_t$ that is generated by the Wiener process W up to the point of time t; $\partial_\cdot F$ is the Hida derivative of F; $\int \circ(t)dW_t$ denotes the Itô stochastic integral with respect to the Wiener process. This formula has many applications, in particular, in the stochastic analysis and in the financial mathematics.

In this paper we generalize the Clark-Ocone formula to spaces of regular test and generalized functions of the Lévy white noise analysis. More exactly, we obtain different Clark-Ocone type formulas on the above-mentioned spaces, study the properties of the integrands in these formulas, establish the conditions under which a Clark-Ocone type formula takes a classical form, etc. In particular, we show that the restrictive condition of differentiability by Hida for a random variable is not really significant.

Анотація. У класичному гауссівському аналізі формулу Кларка-Окона можна записати у вигляді

$$F = \mathbf{E}F + \int \mathbf{E}\big(\partial_t F|_{\mathcal{F}_t}\big) dW_t,$$

де функція (випадкова величина) F є квадратично інтегровною за гауссівською мірою та диференційовною за Хідою; $\mathbf{E}$ позначає математичне сподівання; $\mathbf{E}\big(\circ|_{\mathcal{F}_t}\big)$ – умовне математичне сподівання відносно повної σ-алгебри $\mathcal{F}_t$, породженої вінерівським процесом W до моменту часу t; $\partial_\cdot F$ – похідна Хіди F; $\int \circ(t)dW_t$ позначає стохастичний інтеграл Іто за вінерівським процесом. Ця формула має багато застосувань, зокрема, у стохастичному аналізі та у фінансовій математиці.

2020 Mathematics Subject Classification: 46F05, 46F25, 60H40, 60G51, 60H05

Ключові слова: процес Леві; властивість хаотичного розкладу; розширений стохастичний інтеграл; стохастична похідна; формула Кларка-Окона

DOI: http://dx.doi.org/10.3842/trim.v20n1.529

В цій статті ми узагальнюємо формулу Кларка-Окона на простори регулярних основних і узагальнених функцій в аналізі білого шуму Леві. Точніше, ми отримуємо різні формули типу Кларка-Окона на вищезгаданих просторах, вивчаємо властивості підінтегральних функцій у цих формулах, встановлюємо умови, за яких формула типу Кларка-Окона приймає класичний вигляд, тощо. Зокрема, ми показуємо, що обмежувальна умова диференційовності за Хідою для випадкової величини не є суттєвою.

Вступ

Позначимо через $\mathcal{D}$ простір Шварца, що складається з усіх дійснозначних нескінченно-диференційовних функцій на $\mathbb{R}_+ := [0, +\infty)$ з компактними носіями. Добре відомо (напр., [33]), що $\mathcal{D}$ можна наділити топологією проективної границі, породженою сім'єю соболевських просторів. Нехай $\mathcal{D}'$ – множина лінійних неперервних функціоналів на $\mathcal{D}$. Відзначимо, що $\mathcal{D}'$ та $\mathcal{D}$ є негативним та позитивним просторами ланцюжка

$$\mathcal{D}' \supset L^2(\mathbb{R}_+) \supset \mathcal{D}, \tag{0.1}$$

де $L^2(\mathbb{R}_+)$ – простір (класів) дійснозначних функцій на $\mathbb{R}_+$, квадратично інтегровних за мірою Лебега (напр., [33]).

Позначимо через $\langle \cdot, \cdot \rangle$ дуальне спарювання між елементами $\mathcal{D}'$ та $\mathcal{D}$, породжене скалярним добутком у $L^2(\mathbb{R}_+)$; через нижній індекс $\mathbb{C}$ будемо позначати комплексифікації лінійних топологічних просторів (наприклад, елементами $\mathcal{D}_{\mathbb{C}}$ є $a+bi$, $a, b \in \mathcal{D}$); через $\mathcal{C}(\mathcal{D}')$ – циліндричну σ-алгебру на $\mathcal{D}'$.

Нехай γ – стандартна гауссівська міра на $(\mathcal{D}', \mathcal{C}(\mathcal{D}'))$ ($\mathcal{C}(\mathcal{D}')$ вважаємо поповненою відносно γ), тобто ймовірнісна ($\gamma(\mathcal{D}') = 1$) міра з перетворенням Лапласа

$$l_\gamma(\lambda) := \int_{\mathcal{D}'} e^{\langle x, \lambda \rangle} \gamma(dx) = e^{\langle \lambda, \lambda \rangle / 2}, \quad \lambda \in \mathcal{D}_{\mathbb{C}}.$$

Як добре відомо (напр., [4, 19, 25]), кожну квадратично інтегровну за γ та диференційовну за Хідою комплекснозначну функцію (випадкову величину) F на $\mathcal{D}'$ можна представити у вигляді

$$F = \mathbf{E}F + \int \mathbf{E}\big(\partial_t F|_{\mathcal{F}_t}\big) dW_t, \tag{0.2}$$

де $\mathbf{E}$ позначає математичне сподівання; $\mathbf{E}\big(\circ\,|_{\mathcal{F}_t}\big)$ – умовне математичне сподівання відносно повної σ-алгебри $\mathcal{F}_t$, породженої вінерівським процесом W до моменту часу t (тобто $\mathcal{F}_t$ – поповнення відносно γ σ-алгебри $\sigma(W_u : u \leqslant t)$); $\partial_\cdot F$ – похідна Хіди F; $\int \circ(t) dW_t$ позначає стохастичний інтеграл Іто за вінерівським процесом (для інтегралів по $\mathbb{R}_+$ ми, як правило, не вказуємо границі інтегрування задля спрощення позначень). Формула (0.2) називається *формулою Кларка-Окона.* Як бачимо, ця формула, зокрема, дозволяє поновити версію підінтегральної функції (ця функція не є єдиною, взагалі кажучи), якщо відомий результат стохастичного інтегрування.

Як відомо (напр., [7, 32]), формула (0.2) залишається справедливою (з точністю до зрозумілих модифікацій), якщо замість гауссівської міри розглядається пуассонівська. Відзначимо також, що можна легко уникнути обмежувального припущення, що випадкова величина F має бути диференційовною за Хідою: достатньо узагальнити формулу Кларка-Окона на певні простори узагальнених функцій (при цьому F може залишатись квадратично інтегровною), див., напр., [5, 6].

Формула Кларка-Окона та її узагальнення мають численні застосування, зокрема, у стохастичному аналізі та у фінансовій математиці, див., напр., [1, 6–8, 10, 22, 26–28, 32] і посилання там. Задля задоволення потреб застосувань побудовано різноманітні формули типу Кларка-Окона на різних просторах, з використанням різних стохастичних похідних та зі стохастичними інтегралами за різними випадковими процесами й мірами, див., зокрема, [1,2,5–7,13,14,18–20,22,32,36]. Наприклад, в [19,20] отримано формулу типу Кларка-Окона, пов'язану з процесами Леві, яка містить стохастичні інтеграли за вінерівським процесом та за компенсованою пуассонівською випадковою мірою.

В [6] запропоновано інший підхід до побудови формул типу Кларка-Окона в аналізі Леві, який базується на так званому розкладі Нуаларта-Скоутенса квадратично інтегровних випадкових величин [24,30]; зараз згадані формули містять інтеграли за спеціальними випадковими процесами. Варто відзначити, що автори [6] також узагальнюють свої результати на певні простори узагальнених випадкових величин.

В роботах автора [13,14,36] побудовано формули типу Кларка-Окона на просторах регулярних основних, квадратично інтегровних та регулярних узагальнених функцій майкснерівського аналізу білого шуму. Цей аналіз пов'язаний з узагальненою мірою Майкснера $\mathbf{m}$ [29] та з відповідним випадковим процесом Майкснера, похідною якого (в сенсі узагальнених функцій [34]) є майкснерівський білий шум (мірою цього шуму як узагальненого випадкового процесу [35] є $\mathbf{m}$).

Зауважимо, що підклас процесів Майкснера, який складається зі стаціонарних випадкових процесів, є доволі широким підкласом процесів Леві. Проте, побудови [13, 14, 36] суттєво відрізняються від побудов [19, 20] та [6]: ми намагались зберегти, наскільки це можливо, класичну форму формул типу Кларка-Окона, і тому використовували стохастичну похідну Хіди та стохастичне інтегрування лише за процесом Майкснера.

Дана робота в певному сенсі є продовженням досліджень [13, 14, 36], зараз наша мета полягає в отриманні та вивченні формул типу Кларка-Окона на просторах так званого регулярного параметризованого оснащення простору квадратично інтегровних випадкових величин в аналізі білого шуму Леві [15, 37]. Зокрема, ми встановлюємо необхідну і достатню умову, за якої можливо отримати формули типу Кларка-Окона з використанням інтегрування лише за випадковим процесом Леві; отримуємо різні формули типу Кларка-Окона та вивчаємо властивості підінтегральних функцій у цих формулах; а також з'ясовуємо необхідну і достатню умову, за якої формула типу Кларка-Окона набуває класичного вигляду (0.2) (з процесом Леві замість вінерівського процесу).

Статтю організовано наступним чином. В першому розділі ми наводимо необхідні попередні відомості: розглядаємо процес Леві та будуємо пов'язаний з ним ймовірнісний простір, зручний для подальшого викладу; описуємо запропоноване Є. В. Литвиновим [21] узагальнення властивості хаотичного розкладу в аналізі білого шуму Леві, на основі якого побудоване регулярне параметризоване оснащення простору квадратично інтегровних випадкових величин [15]; нагадуємо конструкцію згаданого оснащення; а також описуємо конструкції розширеного стохастичного інтеграла та стохастичної похідної Хіди на його просторах [15, 16]. Другий розділ присвячено побудові та вивченню формул типу Кларка-Окона: розглянуто формулу Кларка-Окона в найпростішому частинному випадку; встановлено необхідну і достатню умову, за якої можливо отримати формули типу Кларка-Окона з використанням стохастичного інтегрування лише за випадковим процесом Леві; отримано згадані формули найпростішого та наближеного до класичного вигляду; а також визначено необхідну і достатню умову, за якої формула Кларка-Окона в аналізі Леві набуває класичного вигляду.

1. Попередні відомості

В цій роботі будемо позначати через $\|\cdot\|_H$ або $|\cdot|_H$ норму в просторі H; через $(\cdot,\cdot)_H$ дійсний (тобто білінійний) скалярний добуток в просторі H; через $\langle\!\langle\cdot,\cdot\rangle\!\rangle_H$ або $\langle\cdot,\cdot\rangle_H$ дуальне спарювання, породжене скалярним добутком в просторі H; через $\mathcal{B}$ борелівську σ-алгебру; через 1_Δ індикатор множини або події Δ; та через $\widehat{\otimes}$ симетричне тензорне множення. Також ми використовуємо позначення pr lim (відповідно, ind lim) для проективної (відповідно, індуктивної) границі сім'ї просторів; це позначення означає, що граничний простір наділено топологією проективної (відповідно, індуктивної) границі (див., напр., [33]).

1.1. **Процес Леві та його ймовірнісний простір.** Нехай

$$L = (L_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$$

– дійснозначний локально квадратично інтегровний процес Леві (тобто неперервний за ймовірністю випадковий процес на $\mathbb{R}_+$ зі стаціонарними незалежними приростами і такий, що $L_0 = 0$, див., напр., [3]) без гауссівської частини та зсуву. Добре відомо (напр., [6]), що характеристична функція L має вигляд

$$\mathbf{E}[e^{i\theta L_t}] = \exp\Big[t\int_{\mathbb{R}}(e^{i\theta x} - 1 - i\theta x)\nu(dx)\Big], \tag{1.1}$$

де ν – міра Леві процесу L, що є мірою на $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$. Накладемо додатково такі умови: *ν є мірою Радона з носієм, що містить нескінченну кількість точок; $\nu(\{0\}) = 0$; існує $\varepsilon > 0$ таке, що*

$$\int_{\mathbb{R}} x^2 e^{\varepsilon|x|}\nu(dx) < \infty;$$

та

$$\int_{\mathbb{R}} x^2\nu(dx) = 1. \tag{1.2}$$

Визначимо міру білого шуму процесу L.

Означення 1.1.1. Ймовірнісна міра μ на вимірному просторі $(\mathcal{D}', \mathcal{C}(\mathcal{D}'))$ з перетворенням Фур'є

$$\int_{\mathcal{D}'} e^{i\langle\omega,\varphi\rangle}\mu(d\omega) = \exp\Big[\int_{\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}}(e^{i\varphi(t)x} - 1 - i\varphi(t)x)dt\nu(dx)\Big], \quad \varphi \in \mathcal{D}, \tag{1.3}$$

називається мірою білого шуму Леві.

Коректність цього визначення (тобто існування μ) випливає з теореми Бохнера-Мінлоса (напр., [11]), див. [21]. Нижче будемо вважати, що *циліндрична σ-алгебра $\mathcal{C}(\mathcal{D}')$ поповнена відносно μ.*

Позначимо через

$$(L^2) := L^2(\mathcal{D}', \mathcal{C}(\mathcal{D}'), \mu)$$

простір (класів) квадратично інтегровних за μ комплекснозначних функцій на $\mathcal{D}'$. Нехай $f \in L^2(\mathbb{R}_+)$ та послідовність $(\varphi_k \in \mathcal{D})_{k\in\mathbb{N}}$ збігається до f у $L^2(\mathbb{R}_+)$, коли $k \to \infty$. Можна показати (напр., [16, 21]), що

$$\langle\circ, f\rangle := (L^2) - \lim_{k\to\infty}\langle\circ, \varphi_k\rangle$$

є коректно визначеним елементом (L^2) (зокрема, $\langle\circ, f\rangle$ не залежить від того, якою саме послідовністю елементів $\mathcal{D}$ апроксимовано f).

Покладемо $1_{[0,0)} \equiv 0$ (формальний напівінтервал $[0,0)$ природно вважати порожньою множиною). З (1.1) та (1.3) випливає, що

$$(\langle \circ, 1_{[0,t)} \rangle)_{t \in \mathbb{R}_+}$$

можна ототожнити з процесом Леві на ймовірнісному просторі (ймовірнісній трійці) $(\mathcal{D}', \mathcal{C}(\mathcal{D}'), \mu)$ (див., напр., [6, 7]). Таким чином, для кожного $t \in \mathbb{R}_+$ маємо

$$L_t = \langle \circ, 1_{[0,t)} \rangle \in (L^2).$$

Зауважимо, що похідна у сенсі узагальнених функцій процесу Леві (тобто білий шум Леві)

$$\dot{L}_{\cdot}(\omega) = \langle \omega, \delta_{\cdot} \rangle \equiv \omega(\cdot),$$

де δ є дельта-функцією Дірака. Отже, $\dot{L}$ є узагальненим випадковим процесом (в сенсі [34]) з траєкторіями з $\mathcal{D}'$, а μ є мірою $\dot{L}$ у класичному сенсі [35].

1.2. **Литвинівське узагальнення властивості хаотичного розкладу.** Як відомо, фундаментальну роль у гауссівському аналізі білого шуму відіграє так звана *властивість хаотичного розкладу* (ВХР), яка полягає, грубо кажучи, у наступному: кожну квадратично інтегровну випадкову величину можна єдиним чином розкласти в ряд з повторних стохастичних інтегралів Іто від невипадкових функцій (див. детальний виклад, напр., у [23]). Використовуючи ВХР, можна будувати різні простори основних і узагальнених функцій, уводити та досліджувати різноманітні оператори і операції на цих просторах (зокрема, стохастичні інтеграли та похідні, віківське множення), тощо. В аналізі білого шуму Леві, на жаль, ВХР немає (точніше, серед процесів Леві тільки вінерівський та пуассонівський мають цю властивість, див. подробиці у [31]); але побудовано низку її узагальнень (короткий опис таких узагальнень із відповідними посиланнями міститься у [37]).

В цій роботі ми використовуємо одне з найкорисніших узагальнень ВХР в аналізі Леві, запропоноване Є. В. Литвиновим [21]. Коротко опишемо це узагальнення.

Розповсюдимо уведене вище позначення $\langle \cdot, \cdot \rangle$ на дуальні спарювання в симетричних тензорних степенях комплексифікації ланцюжка (0.1). Нехай $\mathbb{Z}_+ := \mathbb{N} \cup \{0\}$. Позначимо через $\mathcal{P}$ множину комплекснозначних поліномів на $\mathcal{D}'$, яка складається з нуля та елементів вигляду

$$f(\omega) = \sum_{n=0}^{N_f} \langle \omega^{\otimes n}, f^{(n)} \rangle, \quad \omega \in \mathcal{D}',\ f^{(n)} \in \mathcal{D}_{\mathbb{C}}^{\widehat{\otimes} n},\ N_f \in \mathbb{Z}_+,\ f^{(N_f)} \neq 0,$$

тут N_f – *степінь поліному* f; $\langle \omega^{\otimes 0}, f^{(0)} \rangle := f^{(0)} \in \mathcal{D}_{\mathbb{C}}^{\hat{\otimes} 0} := \mathbb{C}$. Міра білого шуму Леві μ має голоморфне в нулі перетворення Лапласа (це випливає з (1.3) та властивостей міри Леві ν, див. [21]), отже $\mathcal{P}$ є щільною множиною у (L^2) [38].

Позначимо через $\mathcal{P}_n$, $n \in \mathbb{Z}_+$, множину поліномів степені не більше n, через $\overline{\mathcal{P}}_n$ – замикання $\mathcal{P}_n$ в (L^2). Нехай для $n \in \mathbb{N}$

$$\mathbf{P}_n := \overline{\mathcal{P}}_n \ominus \overline{\mathcal{P}}_{n-1} \text{ (ортогональна різниця в } (L^2)).$$

Покладемо також $\mathbf{P}_0 := \overline{\mathcal{P}}_0$. Зрозуміло, що

$$(L^2) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \mathbf{P}_n. \tag{1.4}$$

Нехай $f^{(n)} \in \mathcal{D}_{\mathbb{C}}^{\hat{\otimes} n}$, $n \in \mathbb{Z}_+$. Позначимо через

$$:\langle \circ^{\otimes n}, f^{(n)} \rangle: \in (L^2)$$

ортогональну проекцію монома $\langle \circ^{\otimes n}, f^{(n)} \rangle$ на $\mathbf{P}_n$. Визначимо дійсні (білінійні) скалярні добутки $(\cdot,\cdot)_{ext}$ на $\mathcal{D}_{\mathbb{C}}^{\hat{\otimes} n}$, $n \in \mathbb{Z}_+$, поклавши для $f^{(n)}, g^{(n)} \in \mathcal{D}_{\mathbb{C}}^{\hat{\otimes} n}$

$$(f^{(n)}, g^{(n)})_{ext} := \frac{1}{n!} \int_{\mathcal{D}'} :\langle \omega^{\otimes n}, f^{(n)} \rangle: \, :\langle \omega^{\otimes n}, g^{(n)} \rangle: \mu(d\omega). \tag{1.5}$$

Коректність цього визначення доведено (з точністю до очевидних модифікацій) у [21].

Позначимо через $|\cdot|_{ext}$ норми, що відповідають скалярним добуткам (1.5), тобто $|\cdot|_{ext} := \sqrt{(\cdot, \bar{\cdot})_{ext}}$.

Означення 1.2.1. Для кожного $n \in \mathbb{Z}_+$ визначимо гільбертів простір $\mathcal{H}_{ext}^{(n)}$ як поповнення $\mathcal{D}_{\mathbb{C}}^{\hat{\otimes} n}$ за відповідною нормою $|\cdot|_{ext}$ (для скалярних добутків та норм у просторах $\mathcal{H}_{ext}^{(n)}$ ми збережемо позначення $(\cdot,\cdot)_{ext}$ та $|\cdot|_{ext}$ відповідно).

Для кожного $F^{(n)} \in \mathcal{H}_{ext}^{(n)}$ визначимо *віківський моном*

$$:\langle \circ^{\otimes n}, F^{(n)} \rangle: \stackrel{\text{def}}{=} (L^2) - \lim_{k\to\infty} :\langle \circ^{\otimes n}, f_k^{(n)} \rangle:,$$

де $\mathcal{D}_{\mathbb{C}}^{\hat{\otimes} n} \ni f_k^{(n)} \underset{k\to\infty}{\to} F^{(n)}$ в $\mathcal{H}_{ext}^{(n)}$ (коректність цього визначення можна довести методом «змішаних послідовностей»). Легко бачити що, зокрема,

$$:\langle \circ^{\otimes 0}, F^{(0)} \rangle: = \langle \circ^{\otimes 0}, F^{(0)} \rangle = F^{(0)} \qquad \text{та} \qquad :\langle \circ, F^{(1)} \rangle: = \langle \circ, F^{(1)} \rangle,$$

(пор. з [21]).

Оскільки, як неважко бачити,

$$\mathbf{P}_n = \left\{ :\langle \circ^{\otimes n}, F^{(n)} \rangle: \mid F^{(n)} \in \mathcal{H}_{ext}^{(n)} \right\}$$

для кожного $n \in \mathbb{Z}_+$, то з розкладу (1.4) випливає таке твердження.

Теорема 1.2.2 (литвинівське узагальнення ВХР, пор. з [21])**.** *Випадкова величина $F \in (L^2)$ якщо та лише якщо існує єдина послідовність ядер $F^{(n)} \in \mathcal{H}_{ext}^{(n)}$, $n \in \mathbb{Z}_+$, така, що*

$$F = \sum_{n=0}^{\infty} :\langle \circ^{\otimes n}, F^{(n)} \rangle: \tag{1.6}$$

(ряд збігається у (L^2)) та

$$\|F\|_{(L^2)}^2 = \int_{\mathcal{D}'} |F(\omega)|^2 \mu(d\omega) = \mathbf{E}|F|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} n! |F^{(n)}|_{ext}^2 < \infty. \tag{1.7}$$

Наслідок 1.2.3. *Для $F, G \in (L^2)$ дійсний (білінійний) скалярний добуток має вигляд*

$$(F, G)_{(L^2)} = \int_{\mathcal{D}'} F(\omega) G(\omega) \mu(d\omega) = \mathbf{E}[FG] = \sum_{n=0}^{\infty} n! (F^{(n)}, G^{(n)})_{ext},$$

де $F^{(n)}, G^{(n)} \in \mathcal{H}_{ext}^{(n)}$ – ядра з розкладів (1.6) для F та G відповідно. Зокрема, для $F^{(n)} \in \mathcal{H}_{ext}^{(n)}$, $G^{(m)} \in \mathcal{H}_{ext}^{(m)}$, $n, m \in \mathbb{Z}_+$,

$$\left(:\langle \circ^{\otimes n}, F^{(n)} \rangle:, :\langle \circ^{\otimes m}, G^{(m)} \rangle: \right)_{(L^2)} = \delta_{nm} n! (F^{(n)}, G^{(n)})_{ext},$$

де δ_{nm} – символ Кронекера.

Зауваження 1.2.4. Розклад (1.6) є аналогом розкладу квадратично інтегровної випадкової величини за ортогональними поліномами Ерміта, який є еквівалентним розкладу за повторними стохастичними інтегралами Іто у гауссівському аналізі. В той же час віківські мономи з (1.6) є поліномами лише у тому випадку, коли процес Леві є стаціонарним процесом Майкснера. Зацікавлений читач може знайти детальну інформацію про це у [21].

Для отримання багатьох результатів, пов'язаних з просторами $\mathcal{H}_{ext}^{(n)}$, необхідно рахувати скалярні добутки та норми у цих просторах. Наведена вище формула (1.5) практично непридатна для таких підрахунків; але, на щастя, існує відносно проста явна формула для згаданих скалярних добутків, отримана Є. В. Литвиновим у роботі [21]. Наведемо цю формулу у трохи модифікованій формі, отриманій у [16]. Нехай

$$p_n(x) := x^n + a_{n,n-1} x^{n-1} + \cdots + a_{n,1} x,$$
$$a_{n,j} \in \mathbb{R},\ j \in \{1, \ldots, n-1\},\ n \in \mathbb{N},$$

є ортогональними поліномами у просторі $L^2(\mathbb{R}, \nu)$ (класів) квадратично інтегровних за мірою Леві ν (див. (1.1), (1.3)) дійснозначних функцій на $\mathbb{R}$, тобто для довільних натуральних чисел n, m таких, що $n \neq m$,

$$\int_{\mathbb{R}} p_n(x) p_m(x) \nu(dx) = 0.$$

Позначимо через $\|\cdot\|_\nu$ норму в $L^2(\mathbb{R}, \nu)$. Зауважимо, що $p_1(x) = x$, а тому згідно з (1.2), $\|p_1\|_\nu = 1$.

Для $F^{(n)}, G^{(n)} \in \mathcal{H}_{ext}^{(n)}$, $n \in \mathbb{N}$, маємо

$$\begin{aligned}
&(F^{(n)}, G^{(n)})_{ext} \equiv (F^{(n)}, G^{(n)})_{\mathcal{H}_{ext}^{(n)}} = \\
&= \sum_{\substack{k, l_j, s_j \in \mathbb{N}:\ j=1,\dots,k, \\ l_1 > l_2 > \cdots > l_k, \\ l_1 s_1 + \cdots + l_k s_k = n}} \frac{n!}{s_1! \cdots s_k!} \Big(\frac{\|p_{l_1}\|_\nu}{l_1!} \Big)^{2s_1} \cdots \Big(\frac{\|p_{l_k}\|_\nu}{l_k!} \Big)^{2s_k} \times \\
&\quad \times \int\limits_{\mathbb{R}_+^{s_1+\cdots+s_k}} F^{(n)}(\underbrace{t_1, \dots, t_1}_{l_1}, \dots, \underbrace{t_{s_1}, \dots, t_{s_1}}_{l_1}, \dots, \underbrace{t_{s_1+\cdots+s_k}, \dots, t_{s_1+\cdots+s_k}}_{l_k}) \times \\
&\quad \times G^{(n)}(\underbrace{t_1, \dots, t_1}_{l_1}, \dots, \underbrace{t_{s_1}, \dots, t_{s_1}}_{l_1}, \dots, \underbrace{t_{s_1+\cdots+s_k}, \dots, t_{s_1+\cdots+s_k}}_{l_k})\, dt_1 \cdots dt_{s_1+\cdots+s_k}.
\end{aligned} \tag{1.8}$$

Зокрема, $(F^{(1)}, G^{(1)})_{ext} = (F^{(1)}, G^{(1)})_{L^2(\mathbb{R}_+)_{\mathbb{C}}}$,

$$(F^{(2)}, G^{(2)})_{ext} = (F^{(2)}, G^{(2)})_{L^2(\mathbb{R}_+)_{\mathbb{C}}^{\otimes 2}} + \frac{\|p_2\|_\nu^2}{2} \int_{\mathbb{R}_+} F^{(2)}(t,t) G^{(2)}(t,t) dt,$$

і т. д. Зауважимо, що для кожного натурального $n > 1$ простір $\mathcal{H}_{ext}^{(n)}$ є симетричним підпростором простору (класів) квадратично інтегровних за певною мірою Радона комплекснозначних функцій на $\mathbb{R}_+^n$.

Позначимо $\mathcal{H} := L^2(\mathbb{R}_+)$, тоді $\mathcal{H}_{\mathbb{C}} = L^2(\mathbb{R}_+)_{\mathbb{C}}$. З (1.8) випливає, що $\mathcal{H}_{ext}^{(1)} = \mathcal{H}_{\mathbb{C}}$, *і для кожного* $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ *простір* $\mathcal{H}_{\mathbb{C}}^{\widehat{\otimes} n}$ *можна ототожнити із власним підпростором простору* $\mathcal{H}_{ext}^{(n)}$, *який складається зі «зникаючих на діагоналях» елементів (тобто таких* $F^{(n)}$, *які містять представника (функцію)* $f^{(n)} \in F^{(n)}$ *таку, що* $f^{(n)}(t_1, \dots, t_n) = 0$, *якщо існують* $k, j \in \{1, \dots, n\}$: $k \neq j$, *але* $t_k = t_j$*). У цьому сенсі *простір* $\mathcal{H}_{ext}^{(n)}$ *є розширенням (англ. extension) простору* $\mathcal{H}_{\mathbb{C}}^{\widehat{\otimes} n}$, цим пояснюється, чому ми використовуємо індекси «*ext*» у наших позначеннях. В подальшому, говорячи про вкладення просторів $\mathcal{H}_{\mathbb{C}}^{\widehat{\otimes} n}$ в простори $\mathcal{H}_{ext}^{(n)}$ та використовуючи позначення на кшталт $\mathcal{H}_{\mathbb{C}}^{\widehat{\otimes} n} \subset \mathcal{H}_{ext}^{(n)}$, завжди розуміємо такі вкладення у щойно описаному сенсі.

1.3. **Регулярне оснащення простору квадратично інтегровних випадкових величин.** Позначимо

$$\mathcal{P}_W := \Big\{ f = \sum_{n=0}^{N_f} :\langle \circ^{\otimes n}, f^{(n)} \rangle: \ \Big| \ f^{(n)} \in \mathcal{D}_{\mathbb{C}}^{\widehat{\otimes} n}, N_f \in \mathbb{Z}_+ \Big\} \subset (L^2).$$

Нехай $\beta \in [0,1]$, $q \in \mathbb{Z}$ у випадку $\beta \neq 0$, та $q \in \mathbb{Z}_+$ якщо $\beta = 0$. Визначимо дійсні (білінійні) скалярні добутки $(\cdot,\cdot)_{q,\beta}$ на $\mathcal{P}_W$, поклавши для

$$f = \sum_{n=0}^{N_f} :\langle \circ^{\otimes n}, f^{(n)} \rangle:, \ g = \sum_{n=0}^{N_g} :\langle \circ^{\otimes n}, g^{(n)} \rangle: \in \mathcal{P}_W$$

$$(f,g)_{q,\beta} := \sum_{n=0}^{\min(N_f,N_g)} (n!)^{1+\beta} 2^{qn} (f^{(n)}, g^{(n)})_{ext}.$$

Легко перевірити [9], що $(\cdot,\cdot)_{q,\beta}$ задовольняє аксіоми скалярного добутку.

Позначимо через $(L^2)_q^\beta$ гільбертові простори, що є поповненнями $\mathcal{P}_W$ за нормами, породженими скалярними добутками $(\cdot,\cdot)_{q,\beta}$, та покладемо

$$(L^2)^\beta := \operatorname*{pr\,lim}_{q\to+\infty} (L^2)_q^\beta.$$

Легко бачити, що справедливе таке твердження (пор. з Теоремою 1.2.2 та її наслідком).

Твердження 1.3.1. 1. *Випадкова величина $F \in (L^2)_q^\beta$ якщо та лише якщо існує єдина послідовність ядер $F^{(n)} \in \mathcal{H}_{ext}^{(n)}$, $n \in \mathbb{Z}_+$, така, що F розкладається в ряд (1.6), який збігається у $(L^2)_q^\beta$, тобто*

$$\|F\|^2_{(L^2)_q^\beta} = \sum_{n=0}^{\infty} (n!)^{1+\beta} 2^{qn} |F^{(n)}|^2_{ext} < \infty. \tag{1.9}$$

2. *Випадкова величина $F \in (L^2)^\beta$ якщо та лише якщо її можна єдиним чином представити у вигляді (1.6), а відповідний ряд (1.9) збігається для кожного $q \in \mathbb{Z}_+$.*

3. *Для $F, G \in (L^2)_q^\beta$ скалярний добуток у $(L^2)_q^\beta$ має вигляд*

$$(F,G)_{(L^2)_q^\beta} = \sum_{n=0}^{\infty} (n!)^{1+\beta} 2^{qn} (F^{(n)}, G^{(n)})_{ext},$$

де $F^{(n)}, G^{(n)} \in \mathcal{H}_{ext}^{(n)}$ – ядра з розкладів (1.6) для F та G відповідно.

Наступне твердження є тривіальною модифікацією відповідного твердження з [15].

Твердження 1.3.2. *Для довільних $\beta \in (0,1]$ та $q \in \mathbb{Z}$, так само як і для $\beta = 0$ та $q \in \mathbb{Z}_+$, простір $(L^2)_q^\beta$ щільно та неперервно вкладено у простір $(L^2) = (L^2)_0^0$.*

Прийнявши до уваги цей результат, побудуємо ланцюжок

$$(L^2)^{-\beta} \supset (L^2)_{-q}^{-\beta} \supseteq (L^2) = (L^2)_0^0 \supseteq (L^2)_q^\beta \supset (L^2)^\beta, \qquad (1.10)$$

де $(L^2)_{-q}^{-\beta}$ та $(L^2)^{-\beta} = \operatorname{ind}\lim_{q\to+\infty}(L^2)_{-q}^{-\beta}$ – простори, спряжені відповідно до $(L^2)_q^\beta$ та $(L^2)^\beta$ відносно (L^2).

Означення 1.3.3. Ланцюжок (1.10) називається параметризованим регулярним оснащенням простору (L^2) квадратично інтегровних випадкових величин. Простори $(L^2)_q^\beta$ та $(L^2)^\beta$ називаються параметризованими просторами типу Кондратьєва регулярних основних функцій, а простори $(L^2)_{-q}^{-\beta}$ та $(L^2)^{-\beta}$ – параметризованими просторами типу Кондратьєва регулярних узагальнених функцій.

Наступне твердження випливає безпосередньо із цього означення та загальної теорії дуальності.

Твердження 1.3.4. (пор. з Теоремою 1.2.2, її наслідком та Твердженням 1.3.1) 1. *Регулярна узагальнена функція (узагальнена випадкова величина) $F \in (L^2)_{-q}^{-\beta}$ якщо та лише якщо існує єдина послідовність ядер $F^{(n)} \in \mathcal{H}_{ext}^{(n)}$, $n \in \mathbb{Z}_+$, така, що F розкладається в ряд (1.6), який збігається у $(L^2)_{-q}^{-\beta}$, тобто*

$$\|F\|^2_{(L^2)_{-q}^{-\beta}} = \sum_{n=0}^{\infty}(n!)^{1-\beta}2^{-qn}|F^{(n)}|^2_{ext} < \infty. \qquad (1.11)$$

2. *Регулярна узагальнена функція $F \in (L^2)^{-\beta}$ якщо та лише якщо її можна єдиним чином представити у вигляді (1.6), а відповідний ряд (1.11) збігається для деякого $q \in \mathbb{Z}_+$.*

3. *Для $F, G \in (L^2)_{-q}^{-\beta}$ скалярний добуток у $(L^2)_{-q}^{-\beta}$ має вигляд*

$$(F,G)_{(L^2)_{-q}^{-\beta}} = \sum_{n=0}^{\infty}(n!)^{1-\beta}2^{-qn}(F^{(n)},G^{(n)})_{ext},$$

де $F^{(n)}, G^{(n)} \in \mathcal{H}_{ext}^{(n)}$ – ядра з розкладів (1.6) для F та G відповідно.

4. *Дуальне спарювання між елементами* $F \in (L^2)^{-\beta}_{-q}$ *та* $f \in (L^2)^{\beta}_{q}$, *породжене дійсним (білінійним) скалярним добутком у* (L^2), *має вигляд*

$$\langle\!\langle F, f\rangle\!\rangle_{(L^2)} = \sum_{n=0}^{\infty} n!(F^{(n)}, f^{(n)})_{ext},$$

де $F^{(n)}, f^{(n)} \in \mathcal{H}^{(n)}_{ext}$ *– ядра з розкладів* (1.6) *для* F *та* f *відповідно.*

Відзначимо, що термін «регулярні» у назвах ланцюжка (1.10) та просторів основних і узагальнених функцій пов'язаний із тим фактом, що ядра з розкладів (1.6) елементів всіх просторів ланцюжка (1.10) належать одним і тим самим просторам $\mathcal{H}^{(n)}_{ext}$.

Більше того, простори $(L^2)^{\beta}_{q}$, $(L^2) = (L^2)^0_0$ та $(L^2)^{-\beta}_{-q}$ мають однакову структуру (пор. (1.9), (1.7) та (1.11)), тому в подальшому ми абстрагуємось від того, йдеться про регулярні основні, квадратично інтегровні чи регулярні узагальнені функції, та *будемо за умовчанням розглядати* $(L^2)^{\beta}_{q}$, $\beta \in [-1, 1]$, $q \in \mathbb{Z}$, *з нормою* (1.9).

Зауваження 1.3.5. Використання ваг 2^{qn} саме з числом 2 та з цілим q у визначенні скалярних добутків $(\cdot,\cdot)_{q,\beta}$ не є принциповим – можна використовувати більш загальні ваги K^{qn} із довільними $K > 1$ та $q \in \mathbb{R}$. Але такі узагальнення не є суттєвим для кола питань, які розглядаються у статті, тому ми обмежимось розглядом випадку $K = 2$ та $q \in \mathbb{Z}$ задля спрощення формул та позначень.

1.4. **Розширений стохастичний інтеграл.** Розклад (1.6) для елементів $(L^2)^{\beta}_{q}$ визначає ізометричний ізоморфізм (узагальнений ізоморфізм Вінера-Іто-Сігала)

$$\mathbf{I} : (L^2)^{\beta}_{q} \to \bigoplus_{n=0}^{\infty} (n!)^{1+\beta} 2^{qn} \mathcal{H}^{(n)}_{ext} :$$

для $F \in (L^2)^{\beta}_{q}$ вигляду (1.6)

$$\mathbf{I}F = (F^{(0)}, F^{(1)}, \dots) \in \bigoplus_{n=0}^{\infty} (n!)^{1+\beta}\, 2^{qn}\, \mathcal{H}^{(n)}_{ext}.$$

Нехай $\mathbf{1}$ – одиничний оператор на $\mathcal{H}_{\mathbb{C}}$. Тоді оператор

$$\mathbf{I}\otimes\mathbf{1} \colon (L^2)^{\beta}_{q}\otimes\mathcal{H}_{\mathbb{C}} \to \Big(\bigoplus_{n=0}^{\infty} (n!)^{1+\beta} 2^{qn}\mathcal{H}^{(n)}_{ext}\Big)\otimes\mathcal{H}_{\mathbb{C}} \cong \bigoplus_{n=0}^{\infty} (n!)^{1+\beta} 2^{qn}(\mathcal{H}^{(n)}_{ext}\otimes\mathcal{H}_{\mathbb{C}})$$

є ізометричним ізоморфізмом між гільбертовими просторами

$$(L^2)^{\beta}_{q} \otimes \mathcal{H}_{\mathbb{C}} \qquad \text{та} \qquad \bigoplus_{n=0}^{\infty} (n!)^{1+\beta} 2^{qn} (\mathcal{H}^{(n)}_{ext} \otimes \mathcal{H}_{\mathbb{C}}).$$

Зрозуміло, що для довільних $m \in \mathbb{Z}_+$ та $F_\cdot^{(m)} \in \mathcal{H}_{ext}^{(m)} \otimes \mathcal{H}_{\mathbb{C}}$ вектор $(\underbrace{0,\dots,0}_{m}, F_\cdot^{(m)}, 0, \dots)$ належить простору $\bigoplus_{n=0}^{\infty} (n!)^{1+\beta} 2^{qn} (\mathcal{H}_{ext}^{(n)} \otimes \mathcal{H}_{\mathbb{C}})$.

Покладемо

$$:\langle \circ^{\otimes m}, F_\cdot^{(m)} \rangle: \stackrel{def}{=} (\mathbf{I} \otimes \mathbf{1})^{-1} (\underbrace{0,\dots,0}_{m}, F_\cdot^{(m)}, 0, \dots) \in (L^2)_q^\beta \otimes \mathcal{H}_{\mathbb{C}}.$$

За побудовою елементи $:\langle \circ^{\otimes n}, F_\cdot^{(n)} \rangle:$, $n \in \mathbb{Z}_+$, утворюють ортогональний базис у просторі $(L^2)_q^\beta \otimes \mathcal{H}_{\mathbb{C}}$ у тому сенсі, що F *належить* $(L^2)_q^\beta \otimes \mathcal{H}_{\mathbb{C}}$ *якщо та лише якщо* F *можна єдиним чином представити у вигляді ряду*

$$F(\cdot) = \sum_{n=0}^{\infty} :\langle \circ^{\otimes n}, F_\cdot^{(n)} \rangle:, \quad F_\cdot^{(n)} \in \mathcal{H}_{ext}^{(n)} \otimes \mathcal{H}_{\mathbb{C}}, \tag{1.12}$$

який збігається у $(L^2)_q^\beta \otimes \mathcal{H}_{\mathbb{C}}$, *тобто*

$$\begin{aligned} \|F\|^2_{(L^2)_q^\beta \otimes \mathcal{H}_{\mathbb{C}}} &= \|(\mathbf{I} \otimes \mathbf{1}) F\|^2_{\bigoplus_{n=0}^{\infty} (n!)^{1+\beta} 2^{qn} (\mathcal{H}_{ext}^{(n)} \otimes \mathcal{H}_{\mathbb{C}})} = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (n!)^{1+\beta} 2^{qn} |F_\cdot^{(n)}|^2_{\mathcal{H}_{ext}^{(n)} \otimes \mathcal{H}_{\mathbb{C}}} < \infty. \end{aligned} \tag{1.13}$$

Опишемо конструкцію розширеного стохастичного інтеграла за процесом Леві, яка базується на розкладі (1.12) (зацікавлений читач може знайти більш детальний виклад у [15, 16]).

Нехай спочатку $F \in (L^2)_q^\beta \otimes \mathcal{H}_{\mathbb{C}}$ є таким, що ядра $F_\cdot^{(n)}$ належать просторам $\mathcal{H}_{\mathbb{C}}^{\widehat{\otimes} n} \otimes \mathcal{H}_{\mathbb{C}} \subset \mathcal{H}_{ext}^{(n)} \otimes \mathcal{H}_{\mathbb{C}}$ (див. Підрозділ 1.2). Тоді розклад (1.12) еквівалентний представленню

$$F(\cdot) = F_\cdot^{(0} + \sum_{n=1}^{\infty} n! \int_0^{\infty} \int_0^{t_n} \cdots \int_0^{t_2} F_\cdot^{(n)}(t_1, \dots, t_n) dL_{t_1} \cdots dL_{t_n} \tag{1.14}$$

[16] (див. також [12]), де ряд складається з повторних стохастичних інтегралів Іто; а розширений стохастичний інтеграл можна визначити за класичною схемою як

$$\begin{aligned} &\int F(t) \widehat{d} L_t := \\ &:= \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)! \int_0^{\infty} \int_0^{t_{n+1}} \cdots \int_0^{t_2} \widehat{F}^{(n)}(t_1, \dots, t_{n+1}) dL_{t_1} \cdots dL_{t_{n+1}} \cong \\ &\cong \sum_{n=0}^{\infty} :\langle \circ^{\otimes n+1}, \widehat{F}^{(n)} \rangle: \in (L^2)_{q-1}^\beta, \end{aligned} \tag{1.15}$$

де $\widehat{F}^{(n)} \in \mathcal{H}_{\mathbb{C}}^{\widehat{\otimes} n+1} \subset \mathcal{H}_{ext}^{(n+1)}$, $n \in \mathbb{Z}_+$, – симетризації ядер $F_{\cdot}^{(n)}$ за всіма аргументами (точніше, проекції $F_{\cdot}^{(n)} \in \mathcal{H}_{\mathbb{C}}^{\widehat{\otimes} n} \otimes \mathcal{H}_{\mathbb{C}}$ на $\mathcal{H}_{\mathbb{C}}^{\widehat{\otimes} n+1}$).

У загальному випадку представлення (1.14) не має місця (адже в аналізі білого шуму Леві ВХР немає), а ядра $\widehat{F}^{(n)}$ є невизначеними, оскільки, взагалі кажучи, неможливо проектувати елементи з просторів $\mathcal{H}_{ext}^{(n)} \otimes \mathcal{H}_{\mathbb{C}}$ на простори $\mathcal{H}_{ext}^{(n+1)}$ (див. Зауваження 1.5.2 нижче). Тим не менш, можна зробити наступне природне узагальнення.

Нехай $F_{\cdot}^{(n)} \in \mathcal{H}_{ext}^{(n)} \otimes \mathcal{H}_{\mathbb{C}}$, $n \in \mathbb{N}$. У класі еквівалентності $F_{\cdot}^{(n)}$ оберемо представника (функцію) $\dot{f}_{\cdot}^{(n)} \in F_{\cdot}^{(n)}$ такого, що

$$\forall t, t_1, \ldots, t_n \in \mathbb{R}_+ \ \left\{\exists k \in \{1, \ldots, n\} : t = t_k\right\} \Rightarrow \dot{f}_t^{(n)}(t_1, \ldots, t_n) = 0 \quad (1.16)$$

(тобто $\dot{f}_t^{(n)}(t_1, \ldots, t_n) = 0$, якщо аргумент t співпадає хоча б з одним з аргументів $t_1, \ldots, t_n$). Нехай $\widehat{f}^{(n)}$ – симетризація функції $\dot{f}_{\cdot}^{(n)}$ за $n+1$ змінною. Визначимо

$$\widehat{F}^{(n)} \in \mathcal{H}_{ext}^{(n+1)}$$

як клас еквівалентності в $\mathcal{H}_{ext}^{(n+1)}$, породжений функцією $\widehat{f}^{(n)}$ (тобто $\widehat{f}^{(n)} \in \widehat{F}^{(n)}$). Наступне твердження є тривіальною модифікацією відповідного результату з [16].

Лема 1.4.1. *Для довільних $n \in \mathbb{N}$ та $F_{\cdot}^{(n)} \in \mathcal{H}_{ext}^{(n)} \otimes \mathcal{H}_{\mathbb{C}}$ елемент*

$$\widehat{F}^{(n)} \in \mathcal{H}_{ext}^{(n+1)}$$

визначений коректно (зокрема, $\widehat{F}^{(n)}$ не залежить від вибору представника $\dot{f}_{\cdot}^{(n)} \in F_{\cdot}^{(n)}$, який задовольняє умову (1.16)), та

$$|\widehat{F}^{(n)}|_{\mathcal{H}_{ext}^{(n+1)}} \leqslant |F_{\cdot}^{(n)}|_{\mathcal{H}_{ext}^{(n)} \otimes \mathcal{H}_{\mathbb{C}}}. \quad (1.17)$$

Зауваження 1.4.2. Легко бачити, що якщо

$$F_{\cdot}^{(n)} \in \mathcal{H}_{\mathbb{C}}^{\widehat{\otimes} n} \otimes \mathcal{H}_{\mathbb{C}} \subset \mathcal{H}_{ext}^{(n)} \otimes \mathcal{H}_{\mathbb{C}},$$

то щойно побудоване ядро $\widehat{F}^{(n)}$ є згаданою вище проекцією $F_{\cdot}^{(n)}$ на $\mathcal{H}_{\mathbb{C}}^{\widehat{\otimes} n+1} \subset \mathcal{H}_{ext}^{(n+1)}$.

Означення 1.4.3. Для $F \in (L^2)_q^\beta \otimes \mathcal{H}_{\mathbb{C}}$ визначимо розширений стохастичний інтеграл за процесом Леві $\int F(t) \widehat{d} L_t \in (L^2)_{q-1}^\beta$, поклавши

$$\int F(t) \widehat{d} L_t := \sum_{n=0}^{\infty} :\langle \circ^{\otimes n+1}, \widehat{F}^{(n)} \rangle: \quad (1.18)$$

(пор. з (1.15)), де $\widehat{F}^{(0)} := F^{(0)}_{\cdot} \in \mathcal{H}_{\mathbb{C}} = \mathcal{H}_{ext}^{(1)}$ та $\widehat{F}^{(n)} \in \mathcal{H}_{ext}^{(n+1)}$, $n \in \mathbb{N}$, побудовані за ядрами $F^{(n)}_{\cdot} \in \mathcal{H}_{ext}^{(n)} \otimes \mathcal{H}_{\mathbb{C}}$ з розкладу (1.12) для F.

Оскільки (див. (1.18), (1.9), (1.17) та (1.13))

$$\begin{aligned}\left\| \int F(t)\widehat{d}L_t \right\|^2_{(L^2)^{\beta}_{q-1}} &= \sum_{n=0}^{\infty}((n+1)!)^{1+\beta}2^{(q-1)(n+1)}|\widehat{F}^{(n)}|^2_{\mathcal{H}_{ext}^{(n+1)}} \leqslant \\ &\leqslant \sum_{n=0}^{\infty}(n!)^{1+\beta}2^{qn}[(n+1)^{1+\beta}2^{-n+q-1}]|F^{(n)}_{\cdot}|^2_{\mathcal{H}_{ext}^{(n)}\otimes\mathcal{H}_{\mathbb{C}}} \leqslant \\ &\leqslant \max_{n\in\mathbb{Z}_+}[(n+1)^{1+\beta}2^{-n+q-1}]\|F\|^2_{(L^2)^{\beta}_q\otimes\mathcal{H}_{\mathbb{C}}},\end{aligned} \tag{1.19}$$

це визначення є коректним, а інтеграл

$$\int \circ(t)\widehat{d}L_t : (L^2)^{\beta}_q \otimes \mathcal{H}_{\mathbb{C}} \to (L^2)^{\beta}_{q-1} \tag{1.20}$$

є лінійним *обмеженим*, а тому і *неперервним* оператором.

Відзначимо, що стохастичний інтеграл (1.20) називається *розширеним*, оскільки у випадках, коли $(L^2)^{\beta}_q \otimes \mathcal{H}_{\mathbb{C}}$ є простором регулярних *узагальнених* або квадратично інтегровних функцій (тобто коли $\beta < 0$ або $\beta = 0$ і $q \leqslant 0$), він є узагальненням стохастичного інтеграла Іто [16].

Легко бачити, що розширений стохастичний інтеграл можна визначити формулою (1.18) як лінійний неперервний оператор, що діє з простору

$$(L^2)^{\beta} \otimes \mathcal{H}_{\mathbb{C}} := \operatorname{pr}\lim_{q\to+\infty}(L^2)^{\beta}_q \otimes \mathcal{H}_{\mathbb{C}}$$

в простір $(L^2)^{\beta}$, або з простору

$$(L^2)^{-\beta} \otimes \mathcal{H}_{\mathbb{C}} := \operatorname{ind}\lim_{q\to+\infty}(L^2)^{-\beta}_{-q} \otimes \mathcal{H}_{\mathbb{C}}$$

в простір $(L^2)^{-\beta}$, тут $\beta \in [0,1]$. До того ж за аналогією з (1.19) можна показати, що у випадку $\beta = -1$ розширений стохастичний інтеграл є лінійним неперервним оператором, що діє з простору $(L^2)^{-1}_q \otimes \mathcal{H}_{\mathbb{C}}$ в простір $(L^2)^{-1}_q$; а у випадку $\beta \in (-1,1]$, як випливає з результатів [15], цей інтеграл можна інтерпретувати як лінійний необмежений замкнений оператор, що діє з простору $(L^2)^{\beta}_q \otimes \mathcal{H}_{\mathbb{C}}$ в простір $(L^2)^{\beta}_q$.

Зауваження 1.4.4. В цій роботи нам не знадобляться стохастичні інтеграли за вимірними множинами, що відрізняються від $\mathbb{R}_+$, але такі інтеграли часто виникають у застосуваннях. Визначення згаданих інтегралів можна дати у класичний спосіб: для довільного $\Delta \in \mathcal{B}(\mathbb{R}_+)$

покладемо

$$\int_{\Delta} \circ(t)\widehat{d}L_t := \int \circ(t)1_{\Delta}(t)\widehat{d}L_t.$$

Зацікавлений читач може знайти детальну інформацію про такі інтеграли, зокрема, у [15, 16, 37].

1.5. **Стохастична похідна Хіди.** Опишемо конструкцію стохастичної похідної Хіди на просторах $(L^2)^{\beta}_q$, яка базується на розкладі (1.6) (детальніше цей матеріал викладено у [15, 16]).

Нехай $G^{(n)} \in \mathcal{H}^{(n)}_{ext}$, $n \in \mathbb{N}$, і $\dot{g}^{(n)} \in G^{(n)}$ – представник $G^{(n)}$. Розглянемо $\dot{g}^{(n)}(\cdot)$, тобто відділимо один аргумент $\dot{g}^{(n)}$, та визначимо елемент

$$G^{(n)}(\cdot) \in \mathcal{H}^{(n-1)}_{ext} \otimes \mathcal{H}_{\mathbb{C}}$$

як клас еквівалентності у $\mathcal{H}^{(n-1)}_{ext} \otimes \mathcal{H}_{\mathbb{C}}$, породжений функцією $\dot{g}^{(n)}(\cdot)$ (тобто $\dot{g}^{(n)}(\cdot) \in G^{(n)}(\cdot)$).

Лема 1.5.1. *Для довільних $n \in \mathbb{N}$ та $G^{(n)} \in \mathcal{H}^{(n)}_{ext}$ елемент*

$$G^{(n)}(\cdot) \in \mathcal{H}^{(n-1)}_{ext} \otimes \mathcal{H}_{\mathbb{C}}$$

визначений коректно (зокрема, $G^{(n)}(\cdot)$ не залежить від вибору представника $\dot{g}^{(n)} \in G^{(n)}$) та

$$|G^{(n)}(\cdot)|_{\mathcal{H}^{(n-1)}_{ext} \otimes \mathcal{H}_{\mathbb{C}}} \leqslant |G^{(n)}|_{\mathcal{H}^{(n)}_{ext}}. \tag{1.21}$$

Доведення цього твердження співпадає з точністю до очевидних модифікацій із доведенням відповідного результату у [16].

Зауваження 1.5.2. Варто відзначити, що, не зважаючи на оцінку (1.21), простір $\mathcal{H}^{(n)}_{ext}$, $n \in \mathbb{N}\backslash\{1\}$, не є підпростором простору $\mathcal{H}^{(n-1)}_{ext} \otimes \mathcal{H}_{\mathbb{C}}$, оскільки різні елементи $\mathcal{H}^{(n)}_{ext}$ можуть співпадати у $\mathcal{H}^{(n-1)}_{ext} \otimes \mathcal{H}_{\mathbb{C}}$, тобто представники різних класів еквівалентності у $\mathcal{H}^{(n)}_{ext}$ можуть потрапляти у один і той самий клас еквівалентності у $\mathcal{H}^{(n-1)}_{ext} \otimes \mathcal{H}_{\mathbb{C}}$ (а тому, зокрема, неможливо проектувати елементи $\mathcal{H}^{(n-1)}_{ext} \otimes \mathcal{H}_{\mathbb{C}}$ на $\mathcal{H}^{(n)}_{ext}$ та будувати ядра розкладу (1.18) розширеного стохастичного інтеграла за класичною схемою).

Означення 1.5.3. Для $G \in (L^2)^{\beta}_{q+1}$ визначимо стохастичну похідну Хіди $\partial.G \in (L^2)^{\beta}_q \otimes \mathcal{H}_{\mathbb{C}}$, поклавши

$$\partial.G := \sum_{n=1}^{\infty} n{:}\langle \circ^{\otimes n-1}, G^{(n)}(\cdot)\rangle{:}, \tag{1.22}$$

де $G^{(n)} \in \mathcal{H}_{ext}^{(n)}$ – ядра з розкладу (1.6) для G, які розуміються як елементи $\mathcal{H}_{ext}^{(n-1)} \otimes \mathcal{H}_{\mathbb{C}}$ (в описаному вище сенсі).

Оскільки (див. (1.22), (1.13), (1.21) та (1.9))

$$\begin{aligned} \|\partial.G\|^2_{(L^2)^\beta_q \otimes \mathcal{H}_{\mathbb{C}}} &= \sum_{n=1}^{\infty} ((n-1)!)^{1+\beta} n^2 2^{q(n-1)} |G^{(n)}(\cdot)|^2_{\mathcal{H}_{ext}^{(n-1)} \otimes \mathcal{H}_{\mathbb{C}}} \leqslant \\ &\leqslant \sum_{n=1}^{\infty} (n!)^{1+\beta} 2^{(q+1)n} [n^{1-\beta} 2^{-(n+q)}] |G^{(n)}|^2_{\mathcal{H}_{ext}^{(n)}} \leqslant \\ &\leqslant \max_{n \in \mathbb{N}} [n^{1-\beta} 2^{-(n+q)}] \|G\|^2_{(L^2)^\beta_{q+1}}, \end{aligned} \tag{1.23}$$

це визначення є коректним, а похідна

$$\partial. : (L^2)^\beta_{q+1} \to (L^2)^\beta_q \otimes \mathcal{H}_{\mathbb{C}} \tag{1.24}$$

є лінійним *обмеженим*, а тому і *неперервним* оператором.

Зрозуміло, що, як і розширений стохастичний інтеграл, стохастичну похідну Хіди можна визначити формулою (1.22) як лінійний неперервний оператор, що діє з простору $(L^2)^\beta$ в простір $(L^2)^\beta \otimes \mathcal{H}_{\mathbb{C}}$ ($\beta \in [-1, 1]$). До того ж за аналогією з (1.23) можна показати, що у випадку $\beta = 1$ стохастична похідна Хіди є лінійним неперервним оператором, що діє з простору $(L^2)^1_q$ в простір $(L^2)^1_q \otimes \mathcal{H}_{\mathbb{C}}$; а у випадку $\beta \in [-1, 1)$, як випливає з результатів [15], цю похідну можна інтерпретувати як лінійний необмежений замкнений оператор, що діє з простору $(L^2)^\beta_q$ в простір $(L^2)^\beta_q \otimes \mathcal{H}_{\mathbb{C}}$.

В наступному твердженні описано зв'язок між розширеним стохастичним інтегралом та стохастичною похідною Хіди.

Теорема 1.5.4. *Розширений стохастичний інтеграл*

$$\int \circ \widehat{d}L : (L^2)^{-\beta}_{-q} \otimes \mathcal{H}_{\mathbb{C}} \to (L^2)^{-\beta}_{-q-1}$$

та стохастична похідна Хіди (1.24) *є взаємно спряженими операторами:*

$$\int \circ \widehat{d}L = (\partial.)^*, \qquad \partial. = \left(\int \circ \widehat{d}L\right)^*, \tag{1.25}$$

тобто для довільних $F \in (L^2)^{-\beta}_{-q} \otimes \mathcal{H}_{\mathbb{C}}$ та $G \in (L^2)^\beta_{q+1}$

$$\langle\!\langle \int F(t) \widehat{d}L_t, G \rangle\!\rangle_{(L^2)} = \langle\!\langle F(\cdot), \partial.G \rangle\!\rangle_{(L^2) \otimes \mathcal{H}_{\mathbb{C}}}. \tag{1.26}$$

Доведення зводиться до встановлення рівності (1.26), яке проводиться так само, як і для інтеграла та похідної на просторах $(L^2) \otimes \mathcal{H}_{\mathbb{C}}$ та (L^2) відповідно, див. [16].

Відзначимо, що результат Теореми 1.5.4 тривіальним чином розповсюджується на випадок граничних просторів, тобто коли стохастичні інтеграл та похідна визначені відповідно на $(L^2)^{-\beta} \otimes \mathcal{H}_{\mathbb{C}}$ та $(L^2)^{\beta}$ $(\beta \in [-1, 1])$. Ясно також, що рівності (1.25) можуть використовуватись як альтернативні визначення розширеного стохастичного інтеграла та стохастичної похідної Хіди.

Зауваження 1.5.5. Результат Теореми 1.5.4 залишається справедливим для розширеного стохастичного інтеграла

$$\int \circ(t)\widehat{d}L_t : (L^2)^{-\beta}_{-q} \otimes \mathcal{H}_{\mathbb{C}} \to (L^2)^{-\beta}_{-q}$$

та стохастичної похідної Хіди

$$\partial_\cdot : (L^2)^{\beta}_{q} \to (L^2)^{\beta}_{q} \otimes \mathcal{H}_{\mathbb{C}},$$

[15] (див. також [16]). З цього результату випливає, зокрема, замкненість згаданих операторів.

Насамкінець зауважимо, що у випадках, коли замість розширеного стохастичного інтеграла $\int \circ(t)\widehat{d}L_t$ розглядається інтеграл

$$\int_\Delta \circ(t)\widehat{d}L_t = \int \circ(t)1_\Delta(t)\widehat{d}L_t, \qquad \Delta \in \mathcal{B}(\mathbb{R}_+)$$

(див. Зауваження 1.4.4), відповідним спряженим оператором є стохастична похідна Хіди $1_\Delta(\cdot)\partial_\cdot$, це тривіальним чином випливає з рівності (1.26).

2. Формули типу Кларка-Окона та суміжні питання

Нехай $\mathcal{F}_t$, $t \in \mathbb{R}_+$, – поповнення відносно міри білого шуму Леві σ-алгебри $\sigma(L_u : u \leqslant t)$, породженої процесом Леві L до моменту часу t. Для $F \in (L^2)^{\beta}_{q}$, $\beta \in [-1, 0)$ та $q \in \mathbb{Z}$, або $\beta = 0$ та $-q \in \mathbb{N}$ (тобто для узагальнених випадкових величин), визначимо математичне сподівання $\mathbf{E}$ та умовне математичне сподівання $\mathbf{E}\big(\circ\,|_{\mathcal{F}_t}\big)$, поклавши

$$\mathbf{E}F := \langle\!\langle F, 1\rangle\!\rangle_{(L^2)} = F^{(0)} \in \mathbb{C},$$

$$\mathbf{E}\big(F|_{\mathcal{F}_t}\big) := F^{(0)} + \sum_{n=1}^{\infty} :\!\langle \circ^{\otimes n}, F^{(n)}1_{[0,t)^n}\rangle\!: \in (L^2)^{\beta}_{q},$$

де $F^{(n)} \in \mathcal{H}^{(n)}_{ext}$ – ядра з розкладу (1.6) для F. Якщо $F \in (L^2) \subset (L^2)^{\beta}_{q}$, то, як легко бачити, $\mathbf{E}F$ є звичайним математичним сподіванням F; і цілком аналогічно доведенню Теореми 4.2 в [17] можна показати, що $\mathbf{E}\big(F|_{\mathcal{F}_t}\big)$ є умовним математичним сподіванням F відносно $\mathcal{F}_t$. Спираючись на це визначення, для $G \in (L^2)_q^\beta \otimes \mathcal{H}_{\mathbb{C}}$ природно покласти

$$\mathbf{E}\big(G(\cdot)|_{\mathcal{F}_\cdot}\big) := G_\cdot^{(0)} + \sum_{n=1}^{\infty} :\langle \circ^{\otimes n}, G_\cdot^{(n)} 1_{[0,\cdot)^n} \rangle : \in (L^2)_q^\beta \otimes \mathcal{H}_{\mathbb{C}}, \tag{2.1}$$

де $G_\cdot^{(n)} \in \mathcal{H}_{ext}^{(n)} \otimes \mathcal{H}_{\mathbb{C}}$ – ядра з розкладу (1.12) для G. Зрозуміло, що

$$G_\cdot^{(n)} 1_{[0,\cdot)^n} \in \mathcal{H}_{ext}^{(n)} \otimes \mathcal{H}_{\mathbb{C}}, \qquad |G_\cdot^{(n)} 1_{[0,\cdot)^n}|_{\mathcal{H}_{ext}^{(n)} \otimes \mathcal{H}_{\mathbb{C}}} \leqslant |G_\cdot^{(n)}|_{\mathcal{H}_{ext}^{(n)} \otimes \mathcal{H}_{\mathbb{C}}},$$

а тому $\mathbf{E}\big(\circ(\cdot)|_{\mathcal{F}_\cdot}\big)$ є лінійним неперервним оператором в $(L^2)_q^\beta \otimes \mathcal{H}_{\mathbb{C}}$.

2.1. **Формула Кларка-Окона в найпростішому частинному випадку.** Як і при описі конструкції розширеного стохастичного інтеграла, розглянемо спочатку найпростіший частинний випадок, в якому формула Кларка-Окона приймає класичний вигляд.

Твердження 2.1.1. *Нехай $F \in (L^2)_q^\beta$ є таким, що ядра $F^{(n)}$, $n \in \mathbb{Z}_+$, з розкладу (1.6) належать просторам $\mathcal{H}_{\mathbb{C}}^{\widehat{\otimes} n} \subset \mathcal{H}_{ext}^{(n)}$ (див. Підрозділ 1.2). Тоді*

$$F = \mathbf{E}F + \int \mathbf{E}\big(\partial_t F|_{\mathcal{F}_t}\big)\widehat{d}L_t \tag{2.2}$$

(пор. з (0.2)).

Доведення. Використовуючи (1.22), (2.1) та (1.15), нескладно прийти до висновку, що представлення (2.2) справедливе, якщо для кожного $n \in \mathbb{N}\backslash\{1\}$ і для кожного $F^{(n)} \in \mathcal{H}_{\mathbb{C}}^{\widehat{\otimes} n}$

$$nPr\big(F^{(n)}(\cdot_1, \ldots, \cdot_{n-1}, \cdot_n) 1_{[0,\cdot_n)^{n-1}}(\cdot_1, \ldots, \cdot_{n-1})\big) = F^{(n)}$$

у просторі $\mathcal{H}_{\mathbb{C}}^{\widehat{\otimes} n}$, тут і нижче Pr – оператор симетризації за всіма змінними. Але ця рівність виконується у вказаному просторі, оскільки $F^{(n)}$ є симетричною функцією (точніше, клас еквівалентності $F^{(n)}$ у просторі $\mathcal{H}_{\mathbb{C}}^{\widehat{\otimes} n}$ містить симетричну функцію-представника), для *різних* $t_1, \ldots, t_n$ $Pr 1_{[0,t_n)^{n-1}}(t_1, \ldots, t_{n-1}) = \frac{1}{n}$, а іншими випадками можна знехтувати через неатомарність міри Лебега. □

Зауваження 2.1.2. Нехай $F \in (L^2)_q^\beta$ задовольняє умову Твердження 2.1.1, а також є регулярною основною ($\beta > 0$ або $\beta = 0$ та $q \in \mathbb{N}$), або квадратично інтегровною ($\beta = q = 0$, $F \in (L^2)$) та диференційовною за Хідою ($\partial_\cdot F \in (L^2) \otimes \mathcal{H}_{\mathbb{C}}$) функцією. Тоді $\mathbf{E}\big(\partial_\cdot F|_{\mathcal{F}_\cdot}\big)$ є інтегровним за

Іто випадковим процесом, а тому у представленні (2.2) можна використовувати стохастичний інтеграл Іто (який співпадає в зазначених випадках з розширеним стохастичним інтегралом).

У загальному випадку представлення (2.2) не може бути справедливим хоча б тому, що не кожне $F \in (L^2)^\beta_q$ можна представити у вигляді

$$F = \mathbf{E}F + \int G(t)\widehat{d}L_t, \tag{2.3}$$

де G – бодай формальний ряд вигляду (1.12) (див. Теорему 2.2.1 нижче). Але навіть якщо F є таким, що його можна подати у вигляді (2.3), рівність (2.2) однаково може не виконуватись. Нехай, наприклад,

$$F = :\langle \circ^{\otimes 3}, F^{(3)} \rangle:, \;\; F^{(3)} \in \mathcal{H}^{(3)}_{ext}.$$

Тоді $\mathbf{E}F = 0$ та, як неважко підрахувати за допомогою (1.22), (2.1) та (1.18),

$$\int \mathbf{E}\big(\partial_t F|_{\mathcal{F}_t}\big)\widehat{d}L_t =$$
$$= \;:\langle \circ^{\otimes 3}, F^{(3)}(\cdot_1,\cdot_2,\cdot_3)\big(1_{[0,\cdot_3)^2}(\cdot_1,\cdot_2) + 1_{[0,\cdot_2)^2}(\cdot_3,\cdot_1) + 1_{[0,\cdot_1)^2}(\cdot_2,\cdot_3)\big)\rangle:,$$

а тому, використовуючи (1.9) та (1.8), отримуємо

$$\Big\|F - \int \mathbf{E}\big(\partial_t F|_{\mathcal{F}_t}\big)\widehat{d}L_t\Big\|^2_{(L^2)^\beta_q} = 6^{1+\beta}\cdot 8^q \times$$
$$\times \Big|F^{(3)}(\cdot_1,\cdot_2,\cdot_3)\big(1 - [1_{[0,\cdot_3)^2}(\cdot_1,\cdot_2) + 1_{[0,\cdot_2)^2}(\cdot_3,\cdot_1) + 1_{[0,\cdot_1)^2}(\cdot_2,\cdot_3)]\big)\Big|^2_{ext} =$$
$$= 9\cdot 6^\beta \cdot 8^q \|p_2\|^2_\nu \int_{\mathbb{R}^2_+} |F^{(3)}(t_1,t_1,t_2)|^2 1_{\{t_1 \geqslant t_2\}} dt_1 dt_2 +$$
$$+ 6^\beta \cdot 8^q \|p_3\|^2_\nu \int_{\mathbb{R}_+} |F^{(3)}(t_1,t_1,t_1)|^2 dt_1.$$

Якщо $F^{(3)}$ є таким, що $\int_{\mathbb{R}_+} |F^{(3)}(t_1,t_1,t_1)|^2 dt_1 = 0$, то $:\langle \circ^{\otimes 3}, F^{(3)}\rangle:$ можна представити у вигляді (2.3) (див. Теорему 2.2.1 нижче); але якщо при цьому

$$\int_{\mathbb{R}^2_+} |F^{(3)}(t_1,t_1,t_2)|^2 1_{\{t_1 \geqslant t_2\}} dt_1 dt_2 \neq 0,$$

то $F \neq \int \mathbf{E}\big(\partial_t F|_{\mathcal{F}_t}\big)\widehat{d}L_t$, тобто $:\langle \circ^{\otimes 3}, F^{(3)}\rangle:$ не можна представити у вигляді (2.2).

У наступних підрозділах ми встановимо необхідну і достатню умову, за якої $F \in (L^2)^\beta_q$ можна представити у вигляді (2.3); отримаємо формули типу Кларка-Окона для F; а також з'ясуємо необхідну і достатню умову, за якої F допускає представлення у вигляді (2.2).

2.2. **Належність випадкових величин області значень розширеного стохастичного інтеграла.** Розглянемо простий приклад. Нехай

$$F = :\langle \circ^{\otimes 2}, F^{(2)} \rangle:, \quad F^{(2)} \in \mathcal{H}_{ext}^{(2)}.$$

Зрозуміло, що якщо таке F можна представити у вигляді (2.3), то

$$G(\cdot) = :\langle \circ, G_{\cdot}^{(1)} \rangle:, \qquad G_{\cdot}^{(1)} \in \mathcal{H}_{ext}^{(1)} \otimes \mathcal{H}_{\mathbb{C}}, \qquad F^{(2)} = \widehat{G}^{(1)},$$

(див. Підрозділ 1.4). Оскільки за побудовою $\widehat{G}^{(1)}$ містить представника $\widehat{g}^{(1)}$ такого, що для кожного $t \in \mathbb{R}_+ \widehat{g}^{(1)}(t,t) = 0$, маємо *необхідну* умову, за якої $:\langle \circ^{\otimes 2}, F^{(2)} \rangle:$ можна представити у вигляді (2.3):

- $F^{(2)}$ *має містити представника* $f^{(2)}$ *такого, що для кожного* $t \in \mathbb{R}_+$ $f^{(2)}(t,t) = 0$.

Більше того, легко бачити, що ця умова є й *достатньою*: покладемо

$$G_{\cdot}^{(1)} := F^{(2)}(\cdot) \in \mathcal{H}_{ext}^{(1)} \otimes \mathcal{H}_{\mathbb{C}}$$

(іншими словами, $G_{\cdot}^{(1)}$ – це ядро $F^{(2)}$, яке розуміється як елемент простору $\mathcal{H}_{ext}^{(1)} \otimes \mathcal{H}_{\mathbb{C}}$, див. Підрозділ 1.5), тоді за виконання згаданої умови маємо $\widehat{G}^{(1)} = F^{(2)}$ (в якості представника $G_{\cdot}^{(1)}$, що задовольніє умову (1.16), можна взяти згадану вище функцію $f^{(2)}$), а тому згідно з (1.18)

$$\int :\langle \circ, G_t^{(1)} \rangle: \widehat{d}L_t = :\langle \circ^{\otimes 2}, F^{(2)} \rangle: = F.$$

У загальному випадку ситуація, звісно, подібна: $F \in (L^2)_q^{\beta}$ можна представити у вигляді (2.3) (таке представлення, взагалі кажучи, не є єдиним) якщо та лише якщо ядра з розкладу (1.6) для F мають властивості, притаманні ядрам з розкладу (1.18) для розширених стохастичних інтегралів. Точніше, справедливе таке твердження.

Теорема 2.2.1. *Нехай* $F \in (L^2)_q^{\beta}$. *Тоді наступні твердження еквівалентні:*

(1) F *можна представити у вигляді* (2.3), *де* $G \in (L^2)_q^{\beta} \otimes \mathcal{H}_{\mathbb{C}}$ *у випадку* $\beta \geqslant 0$, *та* $G \in (L^2)_{q-1}^{\beta} \otimes \mathcal{H}_{\mathbb{C}}$, *якщо* $\beta < 0$;

(2) *для кожного* $n \in \mathbb{N} \backslash \{1\}$ *ядро* $F^{(n)} \in \mathcal{H}_{ext}^{(n)}$ *з розкладу* (1.6) *для* F *містить представника* $f^{(n)}$ *такого, що* $f^{(n)}(t_1, \ldots, t_n) = 0$, *якщо для кожного* $i \in \{1, \ldots, n\}$ *існує* $j \in \{1, \ldots, n\} \backslash \{i\}$ *таке, що* $t_i = t_j$.

Доведення. Спочатку доведемо теорему для

$$F = :\langle \circ^{\otimes n}, F^{(n)} \rangle:, \qquad F^{(n)} \in \mathcal{H}_{ext}^{(n)}, \ n \in \mathbb{N} \backslash \{1\}$$

(випадки $n = 0$ та $n = 1$ є тривіальними).

(1)⇒(2) Нехай $:\langle\circ^{\otimes n}, F^{(n)}\rangle: = \int G(t)\widehat{d}L_t$. Зрозуміло, що зараз

$$G(\cdot) = :\langle\circ^{\otimes n-1}, G_\cdot^{(n-1)}\rangle:, \quad G_\cdot^{(n-1)} \in \mathcal{H}_{ext}^{(n-1)} \otimes \mathcal{H}_{\mathbb{C}}, \quad F^{(n)} = \widehat{G}^{(n-1)}$$

(див. (1.18)). Але за побудовою $\widehat{G}^{(n-1)} \in \mathcal{H}_{ext}^{(n)}$ задовольняє умову твердження (2) (в якості $f^{(n)}$ можна обрати функцію $\widehat{g}^{(n-1)} \in \widehat{G}^{(n-1)}$, що є симетризацією представника $\dot{g}_\cdot^{(n-1)} \in G_\cdot^{(n-1)}$, який задовольняє умову (1.16), див. Підрозділ 1.4).

(2)⇒(1) Нехай $f^{(n)} \in F^{(n)}$ – описаний у твердженні (2) представник $F^{(n)}$. Не втрачаючи загальності можна вважати, що $f^{(n)}$ є симетричною функцією. Покладемо

$$\begin{aligned} h_n(t_1,\dots,t_n) &:= Pr1_{\{t_1\neq t_n, t_2\neq t_n,\dots,t_{n-1}\neq t_n\}} = \\ &= \frac{1}{n}\Big[1_{\{t_1\neq t_n, t_2\neq t_n,\dots,t_{n-1}\neq t_n\}} + 1_{\{t_n\neq t_{n-1}, t_1\neq t_{n-1},\dots,t_{n-2}\neq t_{n-1}\}} + \\ &\qquad + \dots + 1_{\{t_2\neq t_1, t_3\neq t_1,\dots,t_n\neq t_1\}}\Big], \end{aligned} \tag{2.4}$$

$$g_t^{(n-1)}(t_1,\dots,t_{n-1}) := \begin{cases} \frac{f^{(n)}(t_1,\dots,t_{n-1},t)}{h_n(t_1,\dots,t_{n-1},t)}, & h_n(t_1,\dots,t_{n-1},t) \neq 0 \\ 0, & h_n(t_1,\dots,t_{n-1},t) = 0 \end{cases} \tag{2.5}$$

(зауважимо, що якщо $h_n(t_1,\dots,t_{n-1},t) = 0$, то

$$f^{(n)}(t_1,\dots,t_{n-1},t) = 0$$

за умовою твердження (2), а тому можна сказати, що $g_\cdot^{(n-1)}$ «зберігає всю інформацію» про функцію $f^{(n)}$). Використовуючи (1.8), неатомарність міри Лебега, та рівність

$$\begin{aligned} h_n(\underbrace{t_1,\dots,t_1}_{l_1},\dots,\underbrace{t_{s_1+\dots+s_k},\dots,t_{s_1+\dots+s_k}}_{l_k},t) &= \\ &= \frac{1}{n}1_{\{l_k>1\}} + \frac{s_k+1}{n}1_{\{l_k=1\}} \end{aligned} \tag{2.6}$$

для *різних* $t_1,\dots,t_{s_1+\dots+s_k},t$, яка випливає безпосередньо з (2.4), де

$$k, l_\cdot, s_\cdot \in \mathbb{N}, \quad l_1 > \dots > l_k, \quad l_1s_1 + \dots + l_ks_k = n-1,$$

отримаємо

$$
\begin{aligned}
&|g_{\cdot}^{(n-1)}|^2_{\mathcal{H}_{ext}^{(n-1)}\otimes\mathcal{H}_{\mathbb{C}}} = \\
&= \sum_{\substack{k,l_j,s_j\in\mathbb{N}:\\ j=1,\dots,k,\ l_1>\dots>l_k,\\ l_1s_1+\dots+l_ks_k=n-1}} \frac{(n-1)!}{s_1!\cdots s_k!}\Big(\frac{\|p_{l_1}\|_\nu}{l_1!}\Big)^{2s_1}\cdots\Big(\frac{\|p_{l_k}\|_\nu}{l_k!}\Big)^{2s_k}\times \\
&\qquad \times \int_{\mathbb{R}_+^{s_1+\dots+s_k+1}} \big|g_t^{(n-1)}(\underbrace{t_1,\dots,t_1}_{l_1},\dots,\underbrace{t_{s_1+\dots+s_k},\dots,t_{s_1+\dots+s_k}}_{l_k})\big|^2\times \\
&\qquad\qquad \times dt_1\cdots dt_{s_1+\dots+s_k}dt = \\
&= n\sum_{\substack{k,l_j,s_j\in\mathbb{N}:\ j=1,\dots,k,\\ l_1>\dots>l_k>1,\\ l_1s_1+\dots+l_ks_k+1=n}} \frac{n!}{s_1!\cdots s_k!}\Big(\frac{\|p_{l_1}\|_\nu}{l_1!}\Big)^{2s_1}\cdots\Big(\frac{\|p_{l_k}\|_\nu}{l_k!}\Big)^{2s_k}\times \\
&\qquad \times \int_{\mathbb{R}_+^{s_1+\dots+s_k+1}} \big|f^{(n)}(\underbrace{t_1,\dots,t_1}_{l_1},\dots,\underbrace{t_{s_1+\dots+s_k},\dots,t_{s_1+\dots+s_k}}_{l_k},t)\big|^2\times \\
&\qquad\qquad \times dt_1\cdots dt_{s_1+\dots+s_k}dt+ \\
&\quad + n\sum_{\substack{k,l_j,s_j\in\mathbb{N}:\\ j=1,\dots,k,\ l_1>\dots>l_k=1,\\ l_1s_1+\dots+l_{k-1}s_{k-1}+s_k+1=n}} \frac{n!}{s_1!\cdots(s_k+1)!(s_k+1)}\times \\
&\qquad\qquad \times\Big(\frac{\|p_{l_1}\|_\nu}{l_1!}\Big)^{2s_1}\cdots\Big(\frac{\|p_{l_{k-1}}\|_\nu}{l_{k-1}!}\Big)^{2s_{k-1}}\times \\
&\quad \times \int_{\mathbb{R}_+^{s_1+\dots+s_k+1}} \big|f^{(n)}(\underbrace{t_1,\dots,t_1}_{l_1},\dots,t_{s_1+\dots+s_{k-1}+1},\dots,t_{s_1+\dots+s_k},t)\big|^2\times \\
&\qquad\qquad \times dt_1\cdots dt_{s_1+\dots+s_k}dt \leqslant n|F^{(n)}|^2_{\mathcal{H}_{ext}^{(n)}} < \infty.
\end{aligned} \tag{2.7}
$$

Отже, функція $g_{\cdot}^{(n-1)}$ породжує елемент (клас еквівалентності)

$$G_{\cdot}^{(n-1)} \in \mathcal{H}_{ext}^{(n-1)} \otimes \mathcal{H}_{\mathbb{C}}.$$

Покладемо

$$\dot{g}_{\cdot_n}^{(n-1)}(\cdot_1,\dots,\cdot_{n-1}) := g_{\cdot_n}^{(n-1)}(\cdot_1,\dots,\cdot_{n-1})1_{\{\cdot_1\neq\cdot_n,\cdot_2\neq\cdot_n,\dots,\cdot_{n-1}\neq\cdot_n\}} \in G_{\cdot}^{(n-1)}.$$

Зрозуміло, що ця функція задовольняє умову (1.16). Враховуючи (2.4) та (2.5), отримуємо

$$\widehat{g}^{(n-1)}(\cdot_1,\ldots,\cdot_n) = Pr\dot{g}_{\cdot_n}^{(n-1)}(\cdot_1,\ldots,\cdot_{n-1}) =$$
$$= g_{\cdot_n}^{(n-1)}(\cdot_1,\ldots,\cdot_{n-1})h_n(\cdot_1,\ldots,\cdot_n) = f^{(n)}(\cdot_1,\ldots,\cdot_n) \in F^{(n)},$$

оскільки $f^{(n)}$ – симетрична функція, що задовольняє умову твердження (2) (зауважимо, що якби функція $f^{(n)}$ не задовольняла б умову твердження (2), остання рівність не мала б місця). З іншого боку, функція $\widehat{g}^{(n-1)}$ породжує ядро $\widehat{G}^{(n-1)} \in \mathcal{H}_{ext}^{(n)}$, яке використовується при визначенні розширеного стохастичного інтеграла:

$$\int :\langle \circ^{\otimes n-1}, G_t^{(n-1)}\rangle:\widehat{d}L_t = :\langle \circ^{\otimes n}, \widehat{G}^{(n-1)}\rangle:$$

(див. Підрозділ 1.4). Отже, $\widehat{G}^{(n-1)} = F^{(n)}$ в $\mathcal{H}_{ext}^{(n)}$, а тому, поклавши $G(\cdot) := :\langle \circ^{\otimes n-1}, G_{\cdot}^{(n-1)}\rangle:$, маємо $F = \int G(t)\widehat{d}L_t$, тобто умова твердження (1) виконана.

У загальному випадку імплікація (1)⇒(2) тривіальним чином випливає з (1.18) та відповідної імплікації у щойно розглянутому частинному випадку.

Доведемо імплікацію (2)⇒(1). Нехай

$$G(\cdot) := \sum_{n=1}^{\infty} :\langle \circ^{\otimes n-1}, G_{\cdot}^{(n-1)}\rangle:,$$

де $G_{\cdot}^{(n-1)} \in \mathcal{H}_{ext}^{(n-1)} \otimes \mathcal{H}_{\mathbb{C}}$ – ядра, побудовані вище для кожного $n \in \mathbb{N}\backslash\{1\}$, $G_{\cdot}^{(0)} := F^{(1)}(\cdot) \in \mathcal{H}_{ext}^{(1)} = \mathcal{H}_{\mathbb{C}}$. Достатньо довести, що $G \in (L^2)_q^{\beta} \otimes \mathcal{H}_{\mathbb{C}}$ у випадку $\beta \geqslant 0$, та $G \in (L^2)_{q-1}^{\beta} \otimes \mathcal{H}_{\mathbb{C}}$, якщо $\beta < 0$, тоді рівність (2.3) випливатиме з (1.18) та відповідної імплікації у щойно розглянутому частинному випадку. Використовуючи (1.13), оцінку

$$|G_{\cdot}^{(n-1)}|^2_{\mathcal{H}_{ext}^{(n-1)} \otimes \mathcal{H}_{\mathbb{C}}} \leqslant n|F^{(n)}|^2_{\mathcal{H}_{ext}^{(n)}}$$

(див. (2.7); випадок $n = 1$ є тривіальним), та (1.9), отримуємо для $\beta \geqslant 0$

$$\|G\|^2_{(L^2)_q^{\beta} \otimes \mathcal{H}_{\mathbb{C}}} = \sum_{n=1}^{\infty} ((n-1)!)^{1+\beta} 2^{q(n-1)} |G_{\cdot}^{(n-1)}|^2_{\mathcal{H}_{ext}^{(n-1)} \otimes \mathcal{H}_{\mathbb{C}}} \leqslant$$
$$\leqslant 2^{-q} \sum_{n=1}^{\infty} (n!)^{1+\beta} 2^{qn} n^{-\beta} |F^{(n)}|^2_{\mathcal{H}_{ext}^{(n)}} \leqslant 2^{-q} \|F\|^2_{(L^2)_q^{\beta}} < \infty,$$

та для $\beta < 0$

$$\|G\|^2_{(L^2)_{q-1}^{\beta} \otimes \mathcal{H}_{\mathbb{C}}} = \sum_{n=1}^{\infty} ((n-1)!)^{1+\beta} 2^{(q-1)(n-1)} |G_{\cdot}^{(n-1)}|^2_{\mathcal{H}_{ext}^{(n-1)} \otimes \mathcal{H}_{\mathbb{C}}} \leqslant$$

$$\leqslant 2^{1-q}\sum_{n=1}^{\infty}(n!)^{1+\beta}2^{qn}[2^{-n}n^{-\beta}]|F^{(n)}|^2_{\mathcal{H}^{(n)}_{ext}} \leqslant$$
$$\leqslant 2^{1-q}\max_{n\in\mathbb{N}}[2^{-n}n^{-\beta}]\|F\|^2_{(L^2)^\beta_q} < \infty,$$

звідки й випливає потрібне. □

Зауваження 2.2.2. Нехай випадкову величину $F \in (L^2)^\beta_q$ можна *формально* представити у вигляді $F = \mathbf{E}F + \int \mathcal{G}(t)\widehat{d}L_t$ (пор. з (2.3)), де

$$\mathcal{G}(\cdot) := \sum_{n=1}^{\infty} :\langle \circ^{\otimes n-1}, \mathcal{G}^{(n-1)}_{\cdot}\rangle:,$$

$\mathcal{G}^{(n-1)}_{\cdot} \in \mathcal{H}^{(n-1)}_{ext} \otimes \mathcal{H}_{\mathbb{C}}$, – *формальний* ряд, та

$$\int \mathcal{G}(t)\widehat{d}L_t := \sum_{n=1}^{\infty} :\langle \circ^{\otimes n}, \widehat{\mathcal{G}}^{(n-1)}\rangle:$$

(пор. з (1.18)) – *формальний* стохастичний інтеграл. Тоді для кожного ядра $F^{(n)} \in \mathcal{H}^{(n)}_{ext}$ ($n \in \mathbb{N}$) з розкладу (1.6) для F маємо $F^{(n)} = \widehat{\mathcal{G}}^{(n-1)}$, а тому F задовольняє умову твердження (2) Теореми 2.2.1, відтак F можна представити у вигляді (2.3) з $G \in (L^2)^\beta_q \otimes \mathcal{H}_{\mathbb{C}}$ ($\beta \geqslant 0$) або $G \in (L^2)^\beta_{q-1} \otimes \mathcal{H}_{\mathbb{C}}$ ($\beta < 0$).

Насамкінець відзначимо, що якщо $F = :\langle \circ^{\otimes n}, F^{(n)}\rangle:$, $F^{(n)} \in \mathcal{H}^{(n)}_{ext}$, $n \in \mathbb{N}\setminus\{1\}$, неможливо представити у вигляді (2.3), однаково можна побудувати ядра $G^{(n-1)}_{\cdot} \in \mathcal{H}^{(n-1)}_{ext} \otimes \mathcal{H}_{\mathbb{C}}$ за функціями (2.5). Але в цьому випадку $\widehat{G}^{(n-1)} \neq F^{(n)}$ в $\mathcal{H}^{(n)}_{ext}$ (зараз $|\widehat{G}^{(n-1)} - F^{(n)}|_{ext}$ містить інтеграли за сім'ями аргументів, для яких функція h_n, визначена у (2.4), дорівнює нулю) та $|\widehat{G}^{(n-1)}|_{ext} < |F^{(n)}|_{ext}$ (доведення цього факту залишимо зацікавленому читачу).

2.3. **Найпростіша формула типу Кларка-Окона в загальному випадку.** Почнемо з певної підготовки. Для $n \in \mathbb{N}\setminus\{1\}$ та $t_1, \ldots, t_n \in \mathbb{R}_+$ визначимо

$$\hbar_n(t_1, \ldots, t_n) := n h_n(t_1, \ldots, t_n), \tag{2.8}$$

де функції h_n визначені формулою (2.4); покладемо також $\hbar_1 \equiv 1$. Далі, для $G^{(n)}_{\cdot} \in \mathcal{H}^{(n)}_{ext} \otimes \mathcal{H}_{\mathbb{C}}$, $n \in \mathbb{Z}_+$, покладемо

$$\widetilde{G}^{(n)}_{\cdot}(\cdot_1, \ldots, \cdot_n) := \begin{cases} \frac{G^{(n)}_{\cdot}(\cdot_1,\ldots,\cdot_n)}{\hbar_{n+1}(\cdot_1,\ldots,\cdot_n,\cdot)}, & \text{якщо } \hbar_{n+1}(\cdot_1, \ldots, \cdot_n, \cdot) \neq 0 \\ 0, & \text{якщо } \hbar_{n+1}(\cdot_1, \ldots, \cdot_n, \cdot) = 0. \end{cases} \tag{2.9}$$

Легко бачити, що $\widetilde{G}^{(n)}_{\cdot} \in \mathcal{H}^{(n)}_{ext} \otimes \mathcal{H}_{\mathbb{C}}$ та

$$|\widetilde{G}^{(n)}_{\cdot}|_{\mathcal{H}^{(n)}_{ext} \otimes \mathcal{H}_{\mathbb{C}}} \leqslant |G^{(n)}_{\cdot}|_{\mathcal{H}^{(n)}_{ext} \otimes \mathcal{H}_{\mathbb{C}}}. \tag{2.10}$$

Для $G \in (L^2)^{\beta}_q \otimes \mathcal{H}_{\mathbb{C}}$ визначимо

$$(AG)(\cdot) := \sum_{n=0}^{\infty} :\langle \circ^{\otimes n}, \widetilde{G}^{(n)}_{\cdot} \rangle:, \tag{2.11}$$

де ядра $\widetilde{G}^{(n)}_{\cdot}$ побудовані по ядрам $G^{(n)}_{\cdot}$ з розкладу (1.12) для G. З оцінки (2.10) випливає, що A є лінійним *неперервним* оператором в $(L^2)^{\beta}_q \otimes \mathcal{H}_{\mathbb{C}}$.

Твердження 2.3.1. *Нехай $F \in (L^2)^{\beta}_q$. Тоді*

$$A\partial_{\cdot} F \in (L^2)^{\beta}_q \otimes \mathcal{H}_{\mathbb{C}} \quad \textit{для} \quad \beta \geqslant 0,$$

та

$$A\partial_{\cdot} F \in (L^2)^{\beta}_{q-1} \otimes \mathcal{H}_{\mathbb{C}} \quad \textit{для} \quad \beta < 0,$$

де $\partial_{\cdot}$ – похідна Хіди (1.24).

Доведення. У випадку $\beta < 0$ результат твердження випливає безпосередньо з властивостей операторів $\partial_{\cdot}$ та A. Розглянемо випадок $\beta \geqslant 0$. З (1.22) та (2.11) випливає, що

$$A\partial_{\cdot} F = \sum_{n=1}^{\infty} n{:}\langle \circ^{\otimes n-1}, \widetilde{F}^{(n)}(\cdot) \rangle{:},$$

де ядра $\widetilde{F}^{(n)}(\cdot) \in \mathcal{H}^{(n-1)}_{ext} \otimes \mathcal{H}_{\mathbb{C}}$ побудовані по ядрам $F^{(n)}$ з розкладу (1.6) для F, які розуміються як елементи просторів $\mathcal{H}^{(n-1)}_{ext} \otimes \mathcal{H}_{\mathbb{C}}$ (див. Підрозділ 1.5). Використовуючи (1.8), неатомарність міри Лебега, (2.6) та (2.8), подібно до викладки (2.7) можна встановити, що

$$|n\widetilde{F}^{(n)}(\cdot)|^2_{\mathcal{H}^{(n-1)}_{ext} \otimes \mathcal{H}_{\mathbb{C}}} \leqslant n|F^{(n)}|^2_{\mathcal{H}^{(n)}_{ext}}. \tag{2.12}$$

Скориставшись (1.13), цією оцінкою та (1.9), отримуємо

$$\begin{aligned} \|A\partial_{\cdot} F\|^2_{(L^2)^{\beta}_q \otimes \mathcal{H}_{\mathbb{C}}} &= \sum_{n=1}^{\infty} ((n-1)!)^{1+\beta} 2^{q(n-1)} |n\widetilde{F}^{(n)}(\cdot)|^2_{\mathcal{H}^{(n-1)}_{ext} \otimes \mathcal{H}_{\mathbb{C}}} \leqslant \\ &\leqslant 2^{-q} \sum_{n=1}^{\infty} (n!)^{1+\beta} 2^{qn} n^{-\beta} |F^{(n)}|^2_{\mathcal{H}^{(n)}_{ext}} \leqslant 2^{-q} \|F\|^2_{(L^2)^{\beta}_q} < \infty, \end{aligned}$$

звідки й випливає потрібне. □

Сформулюємо й доведемо основний результат підрозділу.

Теорема 2.3.2. *Нехай випадкова величина $F \in (L^2)_q^\beta$ може бути представлена у вигляді (2.3) (див. Теорему 2.2.1). Тоді має місце представлення (формула типу Кларка-Окона)*

$$F = \mathbf{E}F + \int A\partial_t F \widehat{d}L_t \tag{2.13}$$

(пор. з (2.2)).

Доведення. Спочатку доведемо теорему для $F = :\langle \circ^{\otimes n}, F^{(n)} \rangle:$, $F^{(n)} \in \mathcal{H}_{ext}^{(n)}$, $n \in \mathbb{N}\backslash\{1\}$ (випадки $n = 0$ та $n = 1$ є тривіальними). Задля спрощення позначень приймемо за визначенням $\frac{0}{0} := 0$. Використовуючи (1.22), (2.11), (2.9) та (2.8), отримуємо

$$\begin{aligned} A\partial.:\langle \circ^{\otimes n}, F^{(n)} \rangle: &= n:\langle \circ^{\otimes n-1}, \widetilde{F}^{(n)}(\cdot) \rangle: = \\ &= n:\langle \circ^{\otimes n-1}, \frac{f^{(n)}(\cdot_1, \dots, \cdot_{n-1}, \cdot)}{\hbar_n(\cdot_1, \dots, \cdot_{n-1}, \cdot)} \rangle: = :\langle \circ^{\otimes n-1}, \frac{f^{(n)}(\cdot_1, \dots, \cdot_{n-1}, \cdot)}{h_n(\cdot_1, \dots, \cdot_{n-1}, \cdot)} \rangle:, \end{aligned}$$

де $f^{(n)} \in F^{(n)} \in \mathcal{H}_{ext}^{(n)}$ – симетрична функція, описана у твердженні (2) Теореми 2.2.1 (нагадаємо, що якщо для деякого набору аргументів $t_1, \dots, t_{n-1}, t \in \mathbb{R}_+$ виконана умова

$$h_n(t_1, \dots, t_{n-1}, t) = \hbar_n(t_1, \dots, t_{n-1}, t) = 0,$$

то $f^{(n)}(t_1, \dots, t_{n-1}, t) = 0$). Але за побудовою ядер розширеного стохастичного інтеграла (див. Підрозділ 1.4) $\widehat{\frac{f^{(n)}}{h_n}} = f^{(n)} \in F^{(n)}$, звідки маємо, що

$$\int (A\partial.:\langle \circ^{\otimes n}, F^{(n)} \rangle:)(t) \widehat{d}L_t \equiv \int A\partial_t:\langle \circ^{\otimes n}, F^{(n)} \rangle: \widehat{d}L_t = :\langle \circ^{\otimes n}, F^{(n)} \rangle:,$$

що і треба було довести.

Твердження теореми в загальному випадку випливає з Твердження 2.3.1, (1.18) та щойно доведеного результату. □

Зауваження 2.3.3. Нехай $F \in (L^2)_q^\beta$ можна представити у вигляді (2.3). З Зауваження 2.2.2, Твердження 2.3.1 та представлення (2.13) випливає, що в якості підінтегральної функції $G(\cdot)$ можна обрати $A\partial.F$ (насправді саме у вигляді $A\partial.F$, хоч і в інших позначеннях, $G(\cdot)$ було побудовано при доведенні Теореми 2.2.1).

2.4. **Прямий аналог формули Кларка-Окона в загальному випадку.** Конструкція підінтегральної функції у формулі типу Кларка-Окона (2.13) є відносно простою, але ця формула не є безпосереднім узагальненням класичної формули Кларка-Окона (2.2). Справді, нехай $F \in (L^2)_q^\beta$ задовольняє умову Твердження 2.1.1. Використовуючи (1.22), (2.11), (2.9), (2.8), (2.4) та (2.1), неважко показати, що в цьому випадку

$$A\partial.F = \sum_{n=1}^{\infty} :\langle \circ^{\otimes n-1}, F^{(n)}(\cdot)\rangle:,$$

в той час як

$$\mathbf{E}\big(\partial.F|_{\mathcal{F}.}\big) = \sum_{n=1}^{\infty} n{:}\langle \circ^{\otimes n-1}, F^{(n)}(\cdot)1_{[0,\cdot)^{n-1}}\rangle{:} \neq A\partial.F,$$

взагалі кажучи (тут $F^{(n)}$, $n \in \mathbb{N}$, – ядра з розкладу (1.6) для F, які розуміються як елементи просторів $\mathcal{H}_{ext}^{(n-1)} \otimes \mathcal{H}_{\mathbb{C}}$, див. Підрозділ 1.5). Подібна ситуація має місце і в гауссівському аналізі, див. [13].

Отримаємо прямий аналог, тобто безпосереднє узагальнення формули Кларка-Окона (2.2) на випадок, коли випадкову величину F можна представити у вигляді (2.3), але умова Твердження 2.1.1 не виконана. Для $n \in \mathbb{N}$ та $t_1, \ldots, t_n, t \in \mathbb{R}_+$ покладемо

$$\chi_{n,t}(t_1, \ldots, t_n) := \begin{cases} 0, & \text{якщо } \exists i \in \{1, \ldots, n\} : t_i \geqslant t \\ & \text{та } \forall j \in \{1, \ldots, n\} \backslash \{i\}\ t_i \neq t_j \\ 1, & \text{в інших випадках} \end{cases} \tag{2.14}$$

тобто $\chi_{n,t}(t_1, \ldots, t_n) = 0$, якщо існує t_i кратності 1 (себто t_i не дорівнює жодному іншому t_j, $j \neq i$), більше за t або рівне t. Наприклад,

- $\chi_{3,4}(7,7,2) = 1$ ($2 < 4$, 7 має кратність 2),
- $\chi_{3,4}(5,5,5) = \chi_{3,4}(2,2,2) = 1$ (відсутні аргументи кратності 1),
- $\chi_{3,4}(7,2,2) = 0$ ($7 > 4$, 7 має кратність 1),
- $\chi_{3,4}(4,2,2) = 0$ (є однократний аргумент, що дорівнює 4).

Покладемо також $\chi_{0,\cdot} \equiv 1$. Для $G \in (L^2)_q^\beta \otimes \mathcal{H}_{\mathbb{C}}$ визначимо

$$\begin{aligned}(\mathbf{E}.G)(\cdot) &:= \sum_{n=0}^{\infty} :\langle \circ^{\otimes n}, G_\cdot^{(n)} \chi_{n,\cdot}\rangle: \\ &\equiv G_\cdot^{(0)} + \sum_{n=1}^{\infty} :\langle \circ^{\otimes n}, G_\cdot^{(n)} \chi_{n,\cdot}\rangle: \in (L^2)_q^\beta \otimes \mathcal{H}_{\mathbb{C}}\end{aligned} \tag{2.15}$$

(пор. з (2.1)), де $G_\cdot^{(n)} \in \mathcal{H}_{ext}^{(n)} \otimes \mathcal{H}_{\mathbb{C}}$ – ядра з розкладу (1.12) для G. Зрозуміло, що

$$G_\cdot^{(n)} \chi_{n,\cdot} \in \mathcal{H}_{ext}^{(n)} \otimes \mathcal{H}_{\mathbb{C}}, \qquad |G_\cdot^{(n)} \chi_{n,\cdot}|_{\mathcal{H}_{ext}^{(n)} \otimes \mathcal{H}_{\mathbb{C}}} \leqslant |G_\cdot^{(n)}|_{\mathcal{H}_{ext}^{(n)} \otimes \mathcal{H}_{\mathbb{C}}},$$

а отже $\mathbf{E}.$ є лінійним неперервним оператором в $(L^2)_q^\beta \otimes \mathcal{H}_{\mathbb{C}}$.

Твердження 2.4.1. (пор. з Твердженням 2.3.1) *Нехай* $F \in (L^2)^\beta_q$. *Тоді*

$$\mathbf{E}.\partial.F \in (L^2)^\beta_q \otimes \mathcal{H}_\mathbb{C} \quad \text{для} \quad \beta \geqslant 0$$

та

$$\mathbf{E}.\partial.F \in (L^2)^\beta_{q-1} \otimes \mathcal{H}_\mathbb{C} \quad \text{для} \quad \beta < 0,$$

де $\partial.$ *– похідна Хіди* (1.24).

Доведення. У випадку $\beta < 0$ результат твердження випливає безпосередньо з властивостей операторів $\partial.$ та $\mathbf{E}.$. Розглянемо випадок $\beta \geqslant 0$. З (1.22) та (2.15) випливає, що

$$\mathbf{E}.\partial.F = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1){:}\langle \circ^{\otimes n}, F^{(n+1)}(\cdot)\chi_{n,\cdot}\rangle{:}, \tag{2.16}$$

де $F^{(n+1)}$ – ядра з розкладу (1.6) для F, які розуміються як елементи просторів $\mathcal{H}^{(n)}_{ext} \otimes \mathcal{H}_\mathbb{C}$ (див. Підрозділ 1.5). Для того, щоб оцінити норму $\mathbf{E}.\partial.F$ в просторі $(L^2)^\beta_q \otimes \mathcal{H}_\mathbb{C}$, потрібен такий технічний результат.

Лема 2.4.2. *Для довільних* $n \in \mathbb{Z}_+$ *та* $F^{(n+1)} \in \mathcal{H}^{(n+1)}_{ext}$

$$(n+1)|F^{(n+1)}(\cdot)\chi_{n,\cdot}|^2_{\mathcal{H}^{(n)}_{ext}\otimes\mathcal{H}_\mathbb{C}} \leqslant |F^{(n+1)}|^2_{\mathcal{H}^{(n+1)}_{ext}} \tag{2.17}$$

(пор. з (2.12)*).*

Доведення. Використовуючи (1.8), (2.14), неатомарність міри Лебега та той добре відомий факт, що для *симетричної* інтегровної за Лебегом функції $f : \mathbb{R}^m_+ \to \mathbb{R}_+$, $m \in \mathbb{N}$,

$$\int_{\mathbb{R}^m_+} f(t_1, \dots, t_m) dt_1 \dots dt_m = m \int_{\mathbb{R}_+} dt_1 \int_{[0,t_1)^{m-1}} f(t_1, \dots, t_m) dt_2 \dots dt_m,$$

отримуємо

$$\begin{aligned}
&(n+1)|F^{(n+1)}(\cdot)\chi_{n,\cdot}|^2_{\mathcal{H}^{(n)}_{ext}\otimes\mathcal{H}_\mathbb{C}} = \\
&\quad = \sum_{\substack{k,l_j,s_j\in\mathbb{N}:\\ j=1,\dots,k,\ l_1>\dots>l_k,\\ l_1s_1+\dots+l_ks_k=n}} \frac{(n+1)!}{s_1!\cdots s_k!}\left(\frac{\|p_{l_1}\|_\nu}{l_1!}\right)^{2s_1}\cdots\left(\frac{\|p_{l_k}\|_\nu}{l_k!}\right)^{2s_k}\times \\
&\qquad \times \int\limits_{\mathbb{R}^{s_1+\dots+s_k+1}_+} |F^{(n+1)}(\underbrace{t_1,\dots,t_1}_{l_1},\dots,\underbrace{t_{s_1+\dots+s_k},\dots,t_{s_1+\dots+s_k}}_{l_k},t)\times \\
&\qquad \times \chi_{n,t}(\underbrace{t_1,\dots,t_1}_{l_1},\dots,\underbrace{t_{s_1+\dots+s_k},\dots,t_{s_1+\dots+s_k}}_{l_k})|^2 dt_1\cdots dt_{s_1+\dots+s_k}dt =
\end{aligned}$$

$$= \sum_{\substack{k,l_j,s_j\in\mathbb{N}:\\ j=1,\dots,k,\ l_1>\dots>l_k>1,\\ l_1s_1+\dots+l_ks_k=n}} \frac{(n+1)!}{s_1!\cdots s_k!}\Big(\frac{\|p_{l_1}\|_\nu}{l_1!}\Big)^{2s_1}\cdots\Big(\frac{\|p_{l_k}\|_\nu}{l_k!}\Big)^{2s_k}\times$$

$$\times\int\limits_{\mathbb{R}_+^{s_1+\dots+s_k+1}} \big|F^{(n+1)}(\underbrace{t_1,...,t_1}_{l_1},...,\underbrace{t_{s_1+\dots+s_k},...,t_{s_1+\dots+s_k}}_{l_k},t)\big|^2\times$$

$$\times\, dt_1\cdots dt_{s_1+\dots+s_k}dt+$$

$$+\sum_{\substack{k,l_j,s_j\in\mathbb{N}:\\ j=1,\dots,k,\ l_1>\dots>l_k=1,\\ l_1s_1+\dots+l_{k-1}s_{k-1}+s_k=n}} \frac{(n+1)!}{s_1!\cdots s_k!}\Big(\frac{\|p_{l_1}\|_\nu}{l_1!}\Big)^{2s_1}\cdots\Big(\frac{\|p_{l_{k-1}}\|_\nu}{l_{k-1}!}\Big)^{2s_{k-1}}\times$$

$$\times\int\limits_{\mathbb{R}_+^{s_1+\dots+s_k+1}} \big|F^{(n+1)}(\underbrace{t_1,...,t_1}_{l_1},...,t_{s_1+\dots+s_{k-1}+1},...,t_{s_1+\dots+s_k},t)\times$$

$$\times\,\chi_{n,t}(\underbrace{t_1,...,t_1}_{l_1},...,t_{s_1+\dots+s_{k-1}+1},...,t_{s_1+\dots+s_k})\big|^2dt_1\cdots dt_{s_1+\dots+s_k}dt=$$

$$= \sum_{\substack{k,l_j,s_j\in\mathbb{N}:\\ j=1,\dots,k,\ l_1>\dots>l_k>1,\\ l_1s_1+\dots+l_ks_k=n}} \frac{(n+1)!}{s_1!\cdots s_k!}\Big(\frac{\|p_{l_1}\|_\nu}{l_1!}\Big)^{2s_1}\cdots\Big(\frac{\|p_{l_k}\|_\nu}{l_k!}\Big)^{2s_k}\times$$

$$\times\int\limits_{\mathbb{R}_+^{s_1+\dots+s_k+1}} \big|F^{(n+1)}(\underbrace{t_1,...,t_1}_{l_1},...,\underbrace{t_{s_1+\dots+s_k},...,t_{s_1+\dots+s_k}}_{l_k},t)\big|^2\times$$

$$\times\, dt_1\cdots dt_{s_1+\dots+s_k}dt+$$

$$+\sum_{\substack{k,l_j,s_j\in\mathbb{N}:\\ j=1,\dots,k,\ l_1>\dots>l_k=1,\\ l_1s_1+\dots+l_{k-1}s_{k-1}+s_k=n}} \frac{(n+1)!}{s_1!\cdots s_k!}\Big(\frac{\|p_{l_1}\|_\nu}{l_1!}\Big)^{2s_1}\cdots\Big(\frac{\|p_{l_{k-1}}\|_\nu}{l_{k-1}!}\Big)^{2s_{k-1}}\times$$

$$\times\int\limits_{\mathbb{R}_+^{s_1+\dots+s_{k-1}+1}} dt dt_1\cdots dt_{s_1+\dots+s_{k-1}}\times$$

$$\times\int\limits_{[0,t)^{s_k}} \big|F^{(n+1)}(\underbrace{t_1,...,t_1}_{l_1},...,t_{s_1+\dots+s_{k-1}+1},...,t_{s_1+\dots+s_k},t)\big|^2\times$$

$$\times\, dt_{s_1+\dots+s_{k-1}+1}\cdots dt_{s_1+\dots+s_k}=$$

$$= \sum_{\substack{k,l_j,s_j\in\mathbb{N}:\\ j=1,\dots,k,\ l_1>\dots>l_k>1,\\ l_1s_1+\dots+l_ks_k+1=n+1}} \frac{(n+1)!}{s_1!\cdots s_k!}\Big(\frac{\|p_{l_1}\|_\nu}{l_1!}\Big)^{2s_1}\cdots\Big(\frac{\|p_{l_k}\|_\nu}{l_k!}\Big)^{2s_k}\times$$

$$\times\int_{\mathbb{R}_+^{s_1+\dots+s_k+1}}\big|F^{(n+1)}(\underbrace{t_1,\dots,t_1}_{l_1},\dots,\underbrace{t_{s_1+\dots+s_k},\dots,t_{s_1+\dots+s_k}}_{l_k},t)\big|^2\times$$

$$\times\, dt_1\cdots dt_{s_1+\dots+s_k}dt+$$

$$+\sum_{\substack{k,l_j,s_j\in\mathbb{N}:\\ j=1,\dots,k,\ l_1>\dots>1,\\ l_1s_1+\dots+l_{k-1}s_{k-1}+s_k+1=n+1}} \frac{(n+1)!}{s_1!\cdots(s_k+1)!}\Big(\frac{\|p_{l_1}\|_\nu}{l_1!}\Big)^{2s_1}\cdots\Big(\frac{\|p_{l_{k-1}}\|_\nu}{l_{k-1}!}\Big)^{2s_{k-1}}\times$$

$$\times\int_{\mathbb{R}_+^{s_1+\dots+s_k+1}}\big|F^{(n+1)}(\underbrace{t_1,\dots,t_1}_{l_1},\dots,t_{s_1+\dots+s_{k-1}+1},\dots,t_{s_1+\dots+s_k},t)\big|^2\times$$

$$\times\, dt_1\cdots dt_{s_1+\dots+s_k}dt\leqslant|F^{(n+1)}|^2_{\mathcal{H}_{ext}^{(n+1)}}.$$

(Зауважимо, що якщо $F^{(n+1)}$ задовольняє умову, накладену на ядра у твердженні (2) Теореми 2.2.1, то на останньому кроці маємо рівність, тобто в такому випадку

$$(n+1)|F_\cdot^{(n+1)}\chi_{n,\cdot}|^2_{\mathcal{H}_{ext}^{(n)}\otimes\mathcal{H}_{\mathbb{C}}}=|F^{(n+1)}|^2_{\mathcal{H}_{ext}^{(n)}},$$

довести це пропонується зацікавленому читачу.) □

Повернемось до доведення твердження. Скориставшись формулами (2.16), (1.13), (2.17) та (1.9), отримуємо

$$\|\mathbf{E}_\cdot\partial_\cdot F\|^2_{(L^2)^\beta_q\otimes\mathcal{H}_{\mathbb{C}}}=\sum_{n=0}^\infty (n!)^{1+\beta}2^{qn}(n+1)^2|F^{(n)}(\cdot)\chi_{n,\cdot}|^2_{\mathcal{H}_{ext}^{(n)}\otimes\mathcal{H}_{\mathbb{C}}}\leqslant$$

$$\leqslant 2^{-q}\sum_{n=0}^\infty((n+1)!)^{1+\beta}2^{q(n+1)}(n+1)^{-\beta}|F^{(n+1)}|^2_{\mathcal{H}_{ext}^{(n+1)}}\leqslant$$

$$\leqslant 2^{-q}\|F\|^2_{(L^2)^\beta_q}<\infty,$$

звідки й випливає потрібне. □

Сформулюємо й доведемо основний результат підрозділу.

Теорема 2.4.3 (пор. з Теоремою 2.3.2)**.** *Нехай випадкова величина $F\in(L^2)^\beta_q$ може бути представлена у вигляді (2.3) (див. Теорему 2.2.1).*

Тоді має місце представлення (формула типу Кларка-Окона)

$$F = \mathbf{E}F + \int \mathbf{E}_t \partial_t F \widehat{d}L_t \tag{2.18}$$

(пор. з (2.2)*,* (2.13)*).*

Доведення. Спочатку доведемо теорему для

$$F = :\langle \circ^{\otimes n}, F^{(n)} \rangle:, \ F^{(n)} \in \mathcal{H}^{(n)}_{ext}, \ n \in \mathbb{N} \backslash \{1\}$$

(випадки $n = 0$ та $n = 1$ є тривіальними). Використовуючи (1.22), (2.15) та (1.18), отримуємо

$$\int \mathbf{E}_t \partial_t :\langle \circ^{\otimes n}, F^{(n)} \rangle: \widehat{d}L_t = n :\langle \circ^{\otimes n}, \widehat{F^{(n)}(\cdot)\chi_{n-1,\cdot}} \rangle:,$$

отже, треба довести, що $n\widehat{F^{(n)}(\cdot)\chi_{n-1,\cdot}} = F^{(n)}$ в $\mathcal{H}^{(n)}_{ext}$. Нехай $f^{(n)} \in F^{(n)}$ – симетрична функція, описана у твердженні (2) Теореми 2.2.1. Нагадаємо, що ядро $\widehat{F^{(n)}(\cdot)\chi_{n-1,\cdot}}$ породжене симетризацією функції

$$f^{(n)}(\cdot_1, \ldots, \cdot_{n-1}, \cdot)\chi_{n-1,\cdot}(\cdot_1, \ldots, \cdot_{n-1}) 1_{\{\cdot_1 \neq \cdot, \ldots, \cdot_{n-1} \neq \cdot\}}$$

за всіма змінними, див. Підрозділ 1.4. Використовуючи (1.8), властивості функції $f^{(n)}$, щойно згадану конструкцію ядра $\widehat{F^{(n)}(\cdot)\chi_{n-1,\cdot}}$ та неатомарність міри Лебега, отримуємо

$$\begin{aligned}
&|F^{(n)} - n\widehat{F^{(n)}(\cdot)\chi_{n-1,\cdot}}|^2_{ext} = |f^{(n)} - n\widehat{f^{(n)}(\cdot)\chi_{n-1,\cdot}}|^2_{ext} = \\
&= \sum_{\substack{k, l_j, s_j \in \mathbb{N}: \\ j=1,\ldots,k, \ l_1 > \cdots > l_k = 1, \\ l_1 s_1 + \cdots + l_{k-1}s_{k-1} + s_k = n}} \frac{n!}{s_1! \ldots s_k!} \Big(\frac{\|p_{l_1}\|_\nu}{l_1!} \Big)^{2s_1} \cdots \Big(\frac{\|p_{l_{k-1}}\|_\nu}{l_{k-1}!} \Big)^{2s_{k-1}} \times \\
&\times \int_{\mathbb{R}_+^{s_1+\cdots+s_k}} \Big| f^{(n)}(\underbrace{t_1, \ldots, t_1}_{l_1}, \ldots, t_{s_1+\cdots+s_{k-1}+1}, \ldots, t_{s_1+\cdots+s_k})[1- \\
&- 1_{\{t_{s_1+\cdots+s_{k-1}+1} < t_{s_1+\cdots+s_k}, t_{s_1+\cdots+s_{k-1}+2} < t_{s_1+\cdots+s_k}, \ldots, t_{s_1+\cdots+s_k-1} < t_{s_1+\cdots+s_k}\}} - \\
&- 1_{\{t_{s_1+\cdots+s_k} < t_{s_1+\cdots+s_k-1}, t_{s_1+\cdots+s_{k-1}+1} < t_{s_1+\cdots+s_k-1}, \ldots, t_{s_1+\cdots+s_k-2} < t_{s_1+\cdots+s_k-1}\}} - \\
&- \cdots - 1_{\{t_{s_1+\cdots+s_{k-1}+2} < t_{s_1+\cdots+s_{k-1}+1}, \ldots, t_{s_1+\cdots+s_k} < t_{s_1+\cdots+s_{k-1}+1}\}}] \Big|^2 \times \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad \times dt_1 \cdots dt_{s_1+\cdots+s_k} = 0
\end{aligned}$$

(для *різних* $t_{s_1+\cdots+s_{k-1}+1}, \ldots, t_{s_1+\cdots+s_k}$ один і тільки один індикатор в цій викладці дорівнює одиниці; інші випадки можна ігнорувати через неатомарність міри Лебега).

Твердження теореми в загальному випадку випливає з Твердження 2.4.1, (1.18) та щойно доведеного результату. □

Відзначимо, що якщо $F \in (L^2)_q^\beta$ задовольняє умову Твердження 2.1.1 (тобто якщо ядра $F^{(n)}$, $n \in \mathbb{Z}_+$, з розкладу (1.6) для F належать просторам $\mathcal{H}_{\mathbb{C}}^{\widehat{\otimes}n} \subset \mathcal{H}_{ext}^{(n)}$), формула (2.18) редукується до (2.2) (довести це пропонується зацікавленому читачу).

Зауваження 2.4.4. (пор. з Зауваженням 2.3.3) Нехай $F \in (L^2)_q^\beta$ можна представити у вигляді (2.3). З Зауваження 2.2.2, Твердження 2.4.1 та представлення (2.18) випливає, що в якості підінтегральної функції $G(\cdot)$ можна обрати $\mathbf{E}.\partial.F$.

2.5. **Класична формула Кларка-Окона.** У Підрозділі 2.1 ми встановили доволі обтяжливу *достатню* умову на випадкову величину F, за якої формула Кларка-Окона для F приймає класичний вигляд (2.2) (див. Твердження 2.1.1). На щастя, ця умова не є необхідною, і клас випадкових величин, для яких справедливе представлення (2.2), є доволі широким. Розглянемо це питання докладно.

Нехай $F = :\langle \circ^{\otimes 3}, F^{(3)} \rangle:$, $F^{(3)} \in \mathcal{H}_{ext}^{(3)}$. Умовою, за якої це F можна представити у вигляді (2.3), є рівність $\int_{\mathbb{R}_+} |F^{(3)}(t,t,t)|^2 dt = 0$, див. Підрозділ 2.1. Але, як ми бачили у згаданому підрозділі, для представлення F у вигляді (2.2) цього недостатньо: потрібна ще рівність

$$\int_{\mathbb{R}_+^2} |F^{(3)}(t_1,t_1,t_2)|^2 1_{\{t_1 \geqslant t_2\}} dt_1 dt_2 = 0,$$

яка виконується, якщо $F^{(3)}$ *містить представника, який дорівнює нулю, коли кратність найбільшого аргументу більша за одиницю* (грубо кажучи, якщо $F^{(3)}(t_1,t_1,t_2) = 0$, коли $t_1 \geqslant t_2$). Виявляється, що для $F \in (L^2)_q^\beta$ подібна умова на ядра з розкладу (1.6) і є необхідною та достатньою для представлення F у вигляді (2.2). Сформулюємо та доведемо відповідне твердження; але спочатку пояснимо, чому виникає саме така умова.

Нехай $F \in (L^2)_q^\beta$ можна представити у вигляді (2.3) (насправді за виконання згаданої вище умови ця вимога виконана автоматично, див. Зауваження 2.5.2 нижче). Представлення (2.18), яке є однією з конкретизацій представлення (2.3) (див. Зауваження 2.4.4), відрізняється від представлення (2.2) використанням функцій $\chi_{n,\cdot}$ (див. (2.14)) замість індикаторів $1_{[0,\cdot)^n}$ у підінтегральному виразі (пор. (2.15) та (2.1)). Але, на відміну від індикаторів, функції $\chi_{n,\cdot}$ «не реагують» на «поведінку» тих аргументів, кратність яких є більшою за одиницю; отже, для того, щоб вирази у правих частинах (2.18) та (2.2) співпали, «реагувати» мають ядра з розкладу (1.6) для F.

Теорема 2.5.1 (пор. з Теоремою 2.2.1)**.** *Нехай* $F \in (L^2)^\beta_q$. *Наступні твердження еквівалентні:*

(1) *F можна представити у вигляді* (2.2), *де* $\mathbf{E}\big(\partial_\cdot F|_{\mathcal{F}_\cdot}\big) \in (L^2)^\beta_q \otimes \mathcal{H}_\mathbb{C}$ *у випадку* $\beta \geqslant 0$, *та* $\mathbf{E}\big(\partial_\cdot F|_{\mathcal{F}_\cdot}\big) \in (L^2)^\beta_{q-1} \otimes \mathcal{H}_\mathbb{C}$, *якщо* $\beta < 0$;

(2) *для кожного* $n \in \mathbb{N}\backslash\{1\}$ *ядро* $F^{(n)} \in \mathcal{H}^{(n)}_{ext}$ *з розкладу* (1.6) *для* F *містить представника* $f^{(n)}$ *такого, що* $f^{(n)}(t_1, \dots, t_n) = 0$, *якщо існують* $i, j \in \{1, \dots, n\}$, $i \neq j$, *такі, що*
$$\max\{t_1, \dots, t_n\} = t_i = t_j$$
(тобто якщо кратність найбільшого $t_\cdot \in \{t_1, \dots, t_n\}$ *більша за одиницю).*

Доведення. Спочатку доведемо теорему для
$$F = :\!\langle \circ^{\otimes n}, F^{(n)} \rangle\!:, \;\; F^{(n)} \in \mathcal{H}^{(n)}_{ext}, \;\; n \in \mathbb{N}\backslash\{1\},$$
(випадки $n = 0$ та $n = 1$ є тривіальними). Нехай $f^{(n)} \in F^{(n)}$ – симетричний представник класу еквівалентності $F^{(n)}$ в просторі $\mathcal{H}^{(n)}_{ext}$. Використовуючи (1.22), (2.1) та конструкцію ядер розширеного стохастичного інтеграла (див. Підрозділ 1.4), отримуємо
$$\begin{aligned}\int \mathbf{E}\big(\partial_t F|_{\mathcal{F}_t}\big)\widehat{d}L_t &= \int \mathbf{E}\big(\partial_t :\!\langle \circ^{\otimes n}, F^{(n)} \rangle\!:|_{\mathcal{F}_t}\big)\widehat{d}L_t = \\ &= \int n :\!\langle \circ^{\otimes n-1}, f^{(n)}(t) 1_{[0,t)^{n-1}} \rangle\!: \widehat{d}L_t = \\ &= :\!\langle \circ^{\otimes n}, f^{(n)} n Pr 1_{[0,\cdot_n)^{n-1}}(\cdot_1, \dots, \cdot_{n-1}) \rangle\!:,\end{aligned}$$
де, як і раніше, Pr – оператор симетризації за всіма змінними. Отже, випадкову величину $F = :\!\langle \circ^{\otimes n}, F^{(n)} \rangle\!:$ можна представити у вигляді (2.2) якщо та лише якщо функції $f^{(n)}$ та $f^{(n)} n Pr 1_{[0,\cdot_n)^{n-1}}(\cdot_1, \dots, \cdot_{n-1})$ належать одному і тому самому класу еквівалентності $F^{(n)}$ в $\mathcal{H}^{(n)}_{ext}$.

(1)⇒(2) Якщо F можна представити у вигляді (2.2), то, як щойно встановлено, $f^{(n)} n Pr 1_{[0,\cdot_n)^{n-1}}(\cdot_1, \dots, \cdot_{n-1}) \in F^{(n)}$. Легко перевірити, що ця функція задовольняє умову твердження (2) теореми.

(2)⇒(1) Нехай $f^{(n)} \in F^{(n)}$ – описаний у твердженні (2) представник $F^{(n)}$. Не втрачаючи загальності можна вважати, що $f^{(n)}$ є симетричною функцією. Легко показати, що зараз справедлива рівність $f^{(n)} = f^{(n)} n Pr 1_{[0,\cdot_n)^{n-1}}(\cdot_1, \dots, \cdot_{n-1})$, а тому F можна представити у вигляді (2.2).

У загальному випадку імплікація (1)⇒(2) тривіальним чином випливає з (1.18) та відповідної імплікації у щойно розглянутому частинному випадку; імплікація (2)⇒(1) – з того факту, що за виконання умови твердження (2)

$$\mathbf{E}\big(\partial_{\cdot} F|_{\mathcal{F}_{\cdot}}\big) = \mathbf{E}_{\cdot}\partial_{\cdot} F$$

(див. доведення Твердження 2.5.3 нижче), Твердження 2.4.1, (1.18) та щойно доведеної відповідної імплікації у частинному випадку. □

Зауваження 2.5.2. Відзначимо, що якщо деяке $F \in (L^2)_q^\beta$ задовольняє умову твердження (2) Теореми 2.5.1, то це F задовольняє й умову твердження (2) Теореми 2.2.1, оскільки представлення (2.2) для F є однією з конкретизацій представлення (2.3). Довести це можна й безпосередньо, що пропонується зробити в якості вправи зацікавленому читачу.

Як вже відзначалось, формула типу Кларка-Окона (2.18) є безпосереднім узагальненням класичної формули Кларка-Окона (2.2). Точніше, справедливе таке твердження.

Твердження 2.5.3. *Якщо* $F \in (L^2)_q^\beta$ *можна представити у вигляді* (2.2), *то*

$$\mathbf{E}\big(\partial_{\cdot} F|_{\mathcal{F}_{\cdot}}\big) = \mathbf{E}_{\cdot}\partial_{\cdot} F \tag{2.19}$$

в $(L^2)_q^\beta \otimes \mathcal{H}_{\mathbb{C}}$ *у випадку* $\beta \geqslant 0$ *та в* $(L^2)_{q-1}^\beta \otimes \mathcal{H}_{\mathbb{C}}$ *у випадку* $\beta < 0$.

Доведення. Спочатку доведемо твердження для

$$F = :\langle \circ^{\otimes n}, F^{(n)}\rangle:, \qquad F^{(n)} \in \mathcal{H}_{ext}^{(n)},\ n \in \mathbb{N}\backslash\{1\}$$

(випадки $n = 0$ та $n = 1$ є тривіальними). Нехай $f^{(n)} \in F^{(n)}$ – описаний в умові твердження (2) Теореми 2.5.1 представник $F^{(n)}$. Згідно з (1.22), (2.1) та (2.15) достатньо показати, що

$$f^{(n)}(\cdot)1_{[0,\cdot)^{n-1}} = f^{(n)}(\cdot)\chi_{n-1,\cdot}$$

в $\mathcal{H}_{ext}^{(n-1)} \otimes \mathcal{H}_{\mathbb{C}}$. Легко перевірити, що якщо для деяких $t_1, \dots, t_{n-1}, t$

$$1_{[0,t)^{n-1}}(t_1, \dots, t_{n-1}) \neq \chi_{n-1,t}(t_1, \dots, t_{n-1}),$$

то кратність $\max\{t_1, \dots, t_{n-1}, t\}$ є більшою за одиницю; а у такому випадку $f^{(n)}(t_1, \dots, t_{n-1}, t) = 0$. Отже, для будь-якого набору аргументів

$$f^{(n)}(t_1, \dots, t_{n-1}, t)[1_{[0,t)^{n-1}}(t_1, \dots, t_{n-1}) - \chi_{n-1,t}(t_1, \dots, t_{n-1})] = 0$$

і тому

$$|f^{(n)}(\cdot)[1_{[0,\cdot)^{n-1}} - \chi_{n-1,\cdot}]|_{\mathcal{H}_{ext}^{(n-1)} \otimes \mathcal{H}_{\mathbb{C}}} = 0,$$

що і треба було довести.

У загальному випадку рівність (2.19) в просторі $(L^2)_{q-1}^\beta \otimes \mathcal{H}_{\mathbb{C}}$ є наслідком щойно доведеного результату та неперервності операторів $\partial_{\cdot}$,

$\mathbf{E}\big(\circ(\cdot)|_{\mathcal{F}_\cdot}\big)$ і $\mathbf{E}_\cdot$; а якщо $\beta \geqslant 0$, то згідно з твердженням 2.4.1 ця рівність є справедливою в просторі $(L^2)_q^\beta \otimes \mathcal{H}_{\mathbb{C}} \subset (L^2)_{q-1}^\beta \otimes \mathcal{H}_{\mathbb{C}}$. □

Відзначимо, що результати цієї статті залишаються справедливими для випадкових величин $F \in (L^2)^\beta$, $\beta \in [-1, 1]$, в цьому випадку підінтегральні функції належать відповідним просторам $(L^2)^\beta \otimes \mathcal{H}_{\mathbb{C}}$.

Насамкінець зауважимо, що крім просторів з регулярного оснащення простору (L^2) (1.10), в аналізі білого шуму Леві уводяться та вивчаються так звані простори *нерегулярних* основних і узагальнених функцій [15, 37], а також визначаються та досліджуються різноманітні оператори й операції на таких просторах. Варто зазначити, що деякі властивості згаданих просторів суттєво відрізняються від властивостей просторів $(L^2)_q^\beta$. Побудові й дослідженню формул типу Кларка-Окона на просторах нерегулярних основних і узагальнених функцій будуть присвячені інші роботи автора.

Я щиро вдячний професору В. І. Герасименку за пропозицію написати цю статтю та всебічну підтримку.

Література

[1] K. Aase, B. Oksendal, N. Privault, and J. Uboe. White noise generalizations of the Clark-Haussmann-Ocone theorem with application to mathematical finance. *Finance Stochastics*, 4(4):465–496, 2000. doi:10.1007/PL00013528.

[2] F. E. Benth, G. Di Nunno, A. Lokka, B. Oksendal, and F. Proske. Explicit representation of the minimal variance portfolio in markets driven by Lévy processes. *Math. Finance*, 13(1):55–72, 2003. doi:10.1111/1467-9965.t01-1-00005.

[3] Jean Bertoin. *Lévy processes*, volume 121 of *Cambridge Tracts in Mathematics*. Cambridge University Press, Cambridge, 1996.

[4] J. M. C. Clark. The representation of functionals of Brownian motion by stochastic integrals. *Ann. Math. Statist.*, 41:1282–1295, 1970. doi:10.1214/aoms/1177696903.

[5] M. De Faria, M. J. Oliveira, and L. Streit. A generalized Clark-Ocone formula. *Random Oper. Stochastic Equations*, 8(2):163–174, 2000. doi:10.1515/rose.2000.8.2.163.

[6] G. Di Nunno, B. Oksendal, and F. Proske. White noise analysis for Lévy processes. *J. Funct. Anal.*, 206(1):109–148, 2004. doi:10.1016/S0022-1236(03)00184-8.

[7] G. Di Nunno, B. Oksendal, and F. Proske. *Malliavin Calculus for Lévy Processes with Applications to Finance*. Universitext. Springer-Verlag, Berlin, 2009.

[8] Khalifa Es-Sebaiy and Ciprian A. Tudor. Lévy processes and Itô-Skorokhod integrals. *Theory Stoch. Process.*, 14(2):10–18, 2008. URL: http://tsp.imath.kiev.ua/files/156/1420_2.pdf.

[9] M. M. Frei. Wick calculus on spaces of regular generalized functions of Lévy white noise analysis. *Carpathian Mathematical Publications*, 10(1):82–104, 2018. doi:10.15330/cmp.10.1.82-104.

[10] W. Grecksch, C. Roth, and V. V. Anh. q-fractional Brownian motion in infinite dimensions with application to fractional Black-Scholes market. *Stoch. Anal. Appl.*, 27(1):149–175, 2009. doi:10.1080/07362990802565084.

[11] H. Holden, B. Oksendal, J. Uboe, and T.-S. Zhang. *Stochastic partial differential equations*. Universitext. Springer, New York, second edition, 2010. A modeling, white noise functional approach. doi:10.1007/978-0-387-89488-1.

[12] N. A. Kachanovsky. On an extended stochastic integral and the Wick calculus on the connected with the generalized Meixner measure Kondratiev-type spaces. *Meth. Func. Anal. and Topol.*, 13(4):338–379, 2007.

[13] N. A. Kachanovsky. Clark-Ocone type formulas in the Meixner white noise analysis. *Carpathian Mathematical Publications*, 3(1):56–72, 2011.

[14] N. A. Kachanovsky. Clark-Ocone type formulas on spaces of test and generalized functions of Meixner white noise analysis. *Meth. Func. Anal. and Topol.*, 18(2):160–175, 2012.

[15] N. A. Kachanovsky. Extended stochastic integrals with respect to a Lévy process on spaces of generalized functions. *Mathematical Bulletin of Taras Shevchenko Scientific Society*, 10:169–188, 2013.

[16] N. A. Kachanovsky. On extended stochastic integrals with respect to Lévy processes. *Carpathian Mathematical Publications*, 5(2):256–278, 2013.

[17] N. A. Kachanovsky and V. A. Tesko. Stochastic integral of Hitsuda-Skorokhod type on the extended Fock space. *Ukr. Math. J.*, 61(6):873–907, 2009. doi:10.1007/s11253-009-0257-2.

[18] Ioannis Karatzas, Daniel L. Ocone, and Jinlu Li. An extension of Clark's formula. *Stochastics Rep.*, 37(3):127–131, 1991. doi:10.1080/17442509108833731.

[19] A. Lokka. Martingale representation, chaos expansion and Clark-Ocone formulas. In *Research Report, Centre for Mathematical Physics and Stochastics, University of Aarhus, Denmark, 22*, pages 1–24. 1999.

[20] A. Lokka. Martingale representation of functionals of Lévy processes. *Stochastic Anal. Appl.*, 22(4):867–892, 2004. doi:10.1081/SAP-120037622.

[21] Eugene Lytvynov. Orthogonal decompositions for Lévy processes with an application to the gamma, Pascal, and Meixner processes. *Infin. Dimens. Anal. Quantum Probab. Relat. Top.*, 6(1):73–102, 2003. doi:10.1142/S0219025703001031.

[22] Jan Maas and Jan van Neerven. A Clark-Ocone formula in UMD Banach spaces. *Electron. Commun. Probab.*, 13:151–164, 2008. doi:10.1214/ECP.v13-1361.

[23] P. A. Meyer. Quantum Probability for Probabilists. pages X+312. In: Lect. Notes in Math., Vol. 1538, Springer–Verlag, Berlin. 1993.

[24] David Nualart and Wim Schoutens. Chaotic and predictable representations for Lévy processes. *Stochastic Process. Appl.*, 90(1):109–122, 2000. doi:10.1016/S0304-4149(00)00035-1.

[25] Daniel Ocone. Malliavin's calculus and stochastic integral representations of functionals of diffusion processes. *Stochastics*, 12(3-4):161–185, 1984. doi:10.1080/17442508408833299.

[26] Daniel L. Ocone and Ioannis Karatzas. A generalized Clark representation formula, with application to optimal portfolios. *Stochastics Stochastics Rep.*, 34(3-4):187–220, 1991. doi:10.1080/17442509108833682.

[27] Horst Osswald. Malliavin calculus on extensions of abstract Wiener spaces. *J. Math. Kyoto Univ.*, 48(2):239–263, 2008. doi:10.1215/kjm/1250271411.

[28] G. Peccati and M. S. Taqqu. Stable convergence of generalized L^2 stochastic integrals and the principle of conditioning. *Electron. J. Probab.*, 12(15):447–480, 2007. doi:10.1214/EJP.v12-404.

[29] Irina Rodionova. Analysis connected with generating functions of exponential type in one and infinite dimensions. *Methods Funct. Anal. Topology*, 11(3):275–297, 2005. URL: http://mfat.imath.kiev.ua/article/?id=321.

[30] W. Schoutens. Stochastic processes and orthogonal polynomials. pages XIII+166. In: Lect. Notes in Statist., Vol. 146. Springer–Verlag, New York. 2000.

[31] D. Surgailis. On L^2 and non-L^2 multiple stochastic integration. pages 212–226. In: Lect. Notes in Control and Information Sciences, Vol. 36, Springer–Verlag., Berlin–Heidelberg. 1981. doi:10.1007/BFb0006424.

[32] Xicheng Zhang. Clark-Ocone formula and variational representation for Poisson functionals. *Ann. Probab.*, 37(2):506–529, 2009. doi:10.1214/08-AOP411.

[33] Ю. М. Березанский, Г. Ф. Ус, and З. Г. Шефтель. *Функциональный анализ. Курс лекций.* Вища школа, Київ, 1990.

[34] И. М. Гельфанд and Н. Я. Виленкин. *Обобщенные функции, Том IV.* Государственное издательство физико-математической литературы, Москва, 1961.

[35] И. И. Гихман and А. В. Скороход. *Теория случайных процессов, Том 2.* Наука, Москва, 1973.

[36] М. О. Качановський. Формули типу Кларка-Окона в майкснерівському аналізі білого шуму для недиференційовних за Хідою випадкових величин. *Наукові вісті НТУУ "КПІ"*, 15(4):56–60, 2011.

[37] М. О. Качановський. Про стохастичне інтегрування, диференціювання та віківське числення в аналізі білого шуму Леві. In *Сучасні проблеми математики та її застосувань, частина II: Збірник праць Інституту математики НАН України, том 18, №1*, pages 456–507. Інститут математики НАН України, 2021.

[38] А. В. Скороход. *Интегрирование в гильбертовом пространстве.* Наука, Москва, 1975.

М. О. Качановський
Інститут математики НАН України, м. Київ
Email: nkachano@gmail.com
ORCID: 0000-0001-7354-5384

Збірник праць Ін-ту математики НАН України (2023) т. 20, №1, 843–872

The theory of dynamical systems of conflict in the framework of functional analysis

Volodymyr Koshmanenko

Abstract. In this article, we give an introduction to the mathematical setting of problems related to the phenomenon of conflict in terms of constructions in Hilbert spaces. The struggle (conflict, game) between opponents (adversaries, players) will be represented by operator transformations of vectors in Hilbert spaces and probabilistic distributions on the territory of life resources. The phenomenon of conflict as a contradiction between opponents appears in mathematical terms as an intersection the domains of definition for operators and overlapping of corresponding measures.

Conflict interaction between opponents in the physical sense is described by the specific transformation of states in a Hilbert space. In turn, this is a mapping that changes the spectral measurements. Thus, a complex dynamical system arises, which we call a dynamical system of conflict. Then the following main problems arise as fundamental questions. What reasonable law of engagement (game or war) should be adopted to resolve the initial intersections? What is a fair limiting distribution of the resource territory?

In a more general formulation, solving conflict problems means the detailed describing of all possible outcomes on opponents states of the type: victories, defeats, states of equilibrium, compromises as fixed points together with their basins of attraction.

Анотація. Стаття присвячена введенню математичної постановки задач, пов'язаних із феномен конфлікту, в термінах конструкцій у гільбертових просторах. Боротьба (конфлікт, гра) між опонентами (супротивниками, гравцями) буде представлена операторними перетвореннями векторів у гільбертових просторах та ймовірнісними розподілами на просторі життєвих ресурсів. Феномен конфлікту, як суперечність між опонентами, в математичних термінах означає перетин областей визначення для операторів та перекриття носіїв відповідних мір.

Конфліктна, у фізичному сенсі, взаємодія між опонентами описується специфічним перетворенням станів у гільбертовому просторі. У свою чергу, ці відображення змінюють спектральні вимірювання. Таким чином, виникає складна динамічна система, яку ми називаємо динамічною

The author was partly supported in framework of the project “Mathematical modelling of complex dynamical systems and processes caused by the state security” (No. 0123U100853)

Keywords: dynamical system of conflict; opponent; Hahn-Jordan decomposition; rigged Hilbert space; equilibrium

DOI: http://dx.doi.org/10.3842/trim.v20n1.530

системою конфлікту. Як основні проблеми постають наступні фундаментальні питання. Який розумний закон конфліктної взаємодії (гри чи війни) треба прийняти для розв'язання початкових перетинів? Яким має бути справедливий граничний розподіл території життєвого ресурсу?

У більш загальному формулюванні, розв'язання конфліктних проблем означає детальний опис усіх можливих результатів про стани опонентів типу: перемоги, поразки, рівноваги, компроміси, як нерухомі точки, разом з басейнами їх притягання.

Having created the world,
God has appointed for everyone
a place at paradise, but
Devil invented a conflict

1. Introduction

1.1. A bit of history. The classical approaches to the conflict phenomenon and its applications have been discussed in many publications (see, for example, [5–8], [11], [14–17], [20], [10, 21–23], [27]). Here we shortly recall only some of well-known relating equations, models and versions:

– the Malthus-Verhulst population equation describing the dynamics of internal competition,

$$\frac{dP}{dt} = (b-d)P - cP^2,$$

– the logistic equation

$$x_{n+1} = rx_n\,(1-x_n)$$

which has been used to explain many population phenomena and existence of different evolution cycles,

– the Lotka-Volterra equations

$$\dot{N} = aN - bNP, \qquad \dot{P} = -cP + dNP$$

with wide spectrum of applications to behavior of hostile essences (for example, the predator-prey model).

Besides, there are many problems with collision situations reflected in the game theory (see, for example, [39] "Theory of Games and Economic Behavior", by John von Neumann and Oskar Morgenstern).

1.2. Transition to a new vision. However, it is impossible to understand the global picture of conflict phenomena on a universal scale, without moving from classical approaches to posing problems in terms of the modern theory of dynamic systems, using of Hilbert or Banach spaces, theory of self-adjoint operators and methods of functional analysis.

Today, it is obvious that a wide range of phenomena in the natural environment, such as, for example, biological populations or the dramatic evolution of society, can be understood at least partially only with the help of complex systems theory.

So, in world there are several powerful scientific centers to study of complex systems (of type Santa Fe Institute in Mexico). In this direction the main mathematical instruments are the non-linear analysis, the theory of dynamical systems, and the computer modelling. According to the theory developing in [19, 40] well constructed non-linear dynamical system has always enough equilibrium states, both repulsive and attractive which separate the phase space into zones with different regimes of behavior for trajectories. The equilibrium states here play the same role as eigenvectors for operator in the linear analysis.

Moreover, we have to use all powerful instruments already developed in mathematical physics and functional analysis. This transition to using of contemporary methods is similar to going from classical physics to quantum mechanics and quantum field theory.

One of the important feature of a new approach to description of results (instead of construction of deterministic trajectories) is the going to statistical (probabilistic) interpretation of results. It means that in general that it is impossible to predict, who will be a winner and how many he obtains in each single case of the game. Thus, all prediction results of conflict interactions will be presented in a form of probabilistic distributions on infinitely dimensional space. So, we need to use the methods of Hilbert or Banach spaces.

Further, a notion of the conflict transformation as a some mapping in the states space may be adequately represented by a specific linear operator in a Hilbert space. It should correspond to the physical process of conflict interaction between large (in a real, infinity) amount of alternative sides (opponents, players, agents).

We start with obvious remark that only two forms of rough interaction are observed in our living environment, namely, repulsive and attractive. It follows that the construction of a universal conflict transformation in the dynamical equations can be based on two operations corresponding to simple mathematical signs: *minus* and *plus*. This is similar to the creation and annihilation operators in quantum field theory. This is why we have to look for construction of equations with two basic transformations that represent the attraction and repulsion in each dynamical conflict model and that are analogous to the creation and annihilation operators in quantum field theory. It is important that these equations are necessarily non-linear, since the value of the terms corresponding to each opponent changes non-additively at each moment of the conflict game.

Finally, we note that despite the important impact of abstract outcomes on our understanding of various processes, especially in multi-component and multi-agent models represented by mean-field games with total payoffs, from the point of view of concrete applications, the results of an abstract theory are of little use. In fact, we need to develop a more advanced universal conflict theory of the type of axiomatic approach in quantum field theory.

In the next sections, we will consider only the simplest versions of conflict transformations without taking into account external influences. For more discussion and results see the constructions in [2], [4], [24]-[25], [28]-[37], [35].

2. The universal law of conflict interaction

Who should be here,
me or my enemy, that is the question

Here we discuss the mathematical writing of a heuristic version of the universal law of interaction between alternative opponents. In other words, we are trying to build a simple mapping that describes the elementary act of physical collision between abstract adversaries. In the following constructions of complex conflict systems, this map will be transformed into a more convenient and perfect form.

Consider a standard situation. Let A and B be two alternative opponents living in the common resource space Ω. Alternativeness means that any interaction between A and B occurs according to the law of mutual repulsion in the sense probable presence. Therefore, we will use the probabilistic approach.

Let $\mathbf{P}^A = \mathbf{P}^A(\Delta)$ ($\mathbf{P}^B = \mathbf{P}^B(\Delta)$) denote probability of presence A (B) in some disputed region $\Delta \subset \Omega$ at the initial moment of discrete time. It is then natural to expect that any single act of conflict between these opponents will change these initial probabilities to new ones determined by simple formulas:

$$\mathbf{P}^A_{\text{new}}(\Delta) = \mathbf{P}^A(1 - \mathbf{P}^B), \qquad \mathbf{P}^B_{\text{new}}(\Delta) = \mathbf{P}^B(1 - \mathbf{P}^A). \tag{2.1}$$

The right-hand sides of these equalities contain the products of two values: the probability of being in the Δ region for one of the rivals and the probability of not being in the same region for the second.

We call the law (2.1) a generalized formula of William Shakespeare, considering $\mathbf{P}^C_{\text{new}}(\Delta) = \mathbf{P}^C(1 - \mathbf{P}^C)$, $C = A, B$ as its usual variant, which was implemented in the logistic equation.

We take this universal law as the basic part of all formulas describing the conflict struggle. So, in specific models of dynamical systems of conflict, this law of struggle is consistently repeated until the moment of victory or defeat, or to a certain kind of balance (compromise), or, finally, to the achievement of cyclic orbits.

In particular, if continuous time is used, then the above heuristic law of conflict transformation can be written in the form of a system of nonlinear differential equations:

$$\frac{d}{dt}\mathbf{P}^A = \mathbf{P}^A(1-\mathbf{P}^B), \qquad \frac{d}{dt}\mathbf{P}^B = \mathbf{P}^B(1-\mathbf{P}^A).$$

To clarify this law, we are taking another important step: regionalization of the resource space of the conflict. Formally, this means the decomposition Ω to a set of partitioned regions:

$$\Omega = \bigcup_{i=1}^{m} \Omega_i, \quad 2 \leqslant m \leqslant \infty. \tag{2.2}$$

In fact, all real conflict processes take place in some space or territory that is always there is naturally divided into separate ones parts (we call them regions) that are separated from each other and in each of which there are purely local relations between the presence of conflicting parties (opponents). The structure of such partitions can be significantly different in the mathematical sense, from Ω_i as ideal subsets to manifolds with complex even fractal supports. In what follows we assume that some decomposition (2.2) are fixed. However, it may change in the course of conflict resolution similar as it happened when one state intervenes on another. Next, we assume that some separation (2.2) is fixed. However, this can change during conflict resolution, such as when one state intervenes in another. Moreover, in models describing the infinite repetition of biological populations that compete with each other, it is necessary to carry out a self-similar division of each region Ω_i at all moments of time $t = 1, 2, \ldots$:

$$\Omega_i = \Omega_{i_1} = \bigcup_{i_2=1}^{m} \Omega_{i_1 i_2}, \qquad \ldots, \qquad \Omega_{i_1 \cdots i_{k-1}} = \bigcup_{i_k=1}^{m} \Omega_{i_1 \cdots i_k},\ k = t.$$

Here we will make only one step. Let $\mathbf{P}_i^A \equiv \mathbf{P}^A(\Omega_i, t)$ and $\mathbf{P}_i^B \equiv \mathbf{P}^B(\Omega_i, t)$ denote the independent probabilities of capturing region Ω_i by opponents A and B, respectively, at time t. Then, if we assume the uniformity of such distributions into regions Ω_i, then the above law takes the form of a system of $2m$ differential equations:

$$\frac{d}{dt}\mathbf{P}_i^A = \lambda \mathbf{P}_i^A(1-\mathbf{P}_i^B), \qquad \frac{d}{dt}\mathbf{P}_i^B = \lambda \mathbf{P}_i^B(1-\mathbf{P}_i^A), \quad i \in \overline{1, m},$$

where λ is a normalization factor.

In what follows we use discrete time, so instead of the above differential equations let's move on to the differences:

$$p_i^{t+1} = \lambda p_i^t(1 - r_i^t), \qquad r_i^{t+1} = \lambda r_i^t(1 - p_i^t), \quad t = 0, 1, \dots, \tag{2.3}$$

where the notation is entered, $p_i^t := \mathbf{P}^A(\Omega_i, t)$, $r_i^t = \mathbf{P}^B(\Omega_i, t)$. Since we use a statistical approach, vectors $p^t = (p_1^t, \dots, p_m^t)$, $r^t = (r_1^t, \dots, r_m^t)$ are stochastic for each t:

$$\sum_{i=1}^m p_i^t = 1 = \sum_{i=1}^m r_i^t.$$

It is not difficult to notice that the normalization coefficient λ in (2.3) depends on time and has the form

$$\lambda = 1/z^t, \qquad z^t = 1 - \theta^t, \qquad \theta^t := (p^t, r^t) = \sum_{i=1}^m p_i^t r_i^t.$$

Difference equations (2.3) establishes the simplest probabilistic law for conflict transformation which we will denote as $\star$. Models of dynamical conflict systems

$$\{p^0, r^0\} \xrightarrow{\star,\ t} \{p^t, r^t\},\ t = 1, 2, \dots$$

generated by the difference system equations of the type (2.3), has already been studied in a number of publications (see [28–34, 36, 37]). One of our main ones results confirm the convergence of all trajectories of the dynamic systems described above to equilibrium states. We call this result the conflict theorem. It can be formulated as follows (see [32] and references therein).

Theorem 2.1. *Each trajectory $\{p^t, r^t\}$ of CDS generated by the system of equations (2.3) starting with of an arbitrary point $\{p^0, r^0\}$ given by a pair of stochastic vectors p^0, r^0 which are different, $(p^0, r^0) \neq 1$, converges to the limit state (fixed point),*

$$\{p^t, r^t\} \longrightarrow \{p^\infty, r^\infty\},\ t \longrightarrow \infty,$$

which consists with two orthogonal vectors, $p^\infty \perp r^\infty$. That is,

– *if at the initial moment of time the inequality $p_i^0 > r_i^0$ was fulfilled for some coordinates, then*

$$p_i^\infty > 0, \qquad r_i^\infty = 0,$$

– *if $p_k^0 < r_k^0$, then*

$$p_k^\infty = 0, \qquad r_k^\infty > 0,$$

– *and if $p_j^0 = r_j^0$, then*

$$p_j^\infty = r_j^\infty = 0.$$

Values of non-zero boundary coordinates $p_i^\infty > 0$, $r_k^\infty > 0$ are proportional to the initial differences $d_i = p_i^0 - r_i^0$, $d_k = r_k^0 - p_k^0$, i.e.

$$p_i^\infty = d_i/D, \qquad r_k^\infty = d_k/D,$$

where the proportionality coefficient D is independent of indices of non-zero coordinates.

Thus, the struggle of opponents for possession of regions in space (2.2) is only able to redistribute the initial values probabilities of their presence in different regions in accordance with the law alternative conflict of the form (2.3). That is, the dominance of one of the players in some Ω_i leads to the disappearance of another in the same region. Presence is redistributed in such a way that opponents are located in different regions that do not overlap. Therefore, all trajectories of the dynamic system (2.3) converge to the equilibrium states given by orthogonal vectors in the sense of $\mathbb{R}^m$ if $m < \infty$ or in the Hilbert space l_2 if $m = \infty$. Any compromise states in pure alternative dynamics are impossible.

3. Connection with perturbation theory

Perturbation theory in mathematical physics provides a powerful tool for its use in conflict theory. First, let's briefly recall the background.

3.1. **Perturbed operators and their scattering.** Let a Hilbert space $\mathcal{H}$ be the state space of some physical system and H be its free Hamiltonian. For example, $\mathcal{H} = L_2(\mathbb{R}^3)$, and $H = -\Delta$ – the Laplace operator. Then, according to quantum mechanics, the dynamics is described by the Schrödinger equation. Its solutions are written by vector functions of the form $\Psi(t) = \exp^{-itH}\Psi(0)$, which describe the time evolution of the trajectories, starting from states $\Psi(0) \in \mathcal{H}$.

Let us now consider two perturbations V_1 and V_2 of H, which can be considered as the influence of alternative opponents on free evolution. Suppose both sums, $H_k = H + V_k$, $k = 1, 2$, are well-defined self-adjoint operators of $\mathcal{H}$. Then, again according to the abstract Schrödinger equation

$$i\frac{d}{dt}\Psi(t) = H_k\Psi(t),$$

there appear two different time evolutions:

$$\Psi_1(t) = e^{-itH_1}\Psi(0), \qquad \Psi_2(t) = e^{-itH_2}\Psi(0).$$

The physical collision between such different behaviors is described in perturbation theory by the so-called scattering operator

$$S = W^+(W^-)^*,$$

where

$$W^{\pm} = \lim_{t\to\pm\infty} e^{itH_2}e^{-itH_1}$$

is defined as the wave operators [26]. The existence problem of the wave and scattering operators are non-trivial and has long history. Especially in the case of singular perturbations (see, for example, [33]).

Here we want to look at H_k as operator strategies that correspond to the alternative behavior of a certain entity (population, political ideologies, opinions, etc.). Then $\Psi_k(t)$ represent its independent time evolutions with the initial state $\Psi(0)$. But instead of the collision in the above form of the scattering operator, we propose to find a new description of the confrontation between opposite sides in the form of a discrete-time sequence of acts of redistribution for the initial positions in the life space according to the universal nonlinear rule.

3.2. **Infinite-dimensional space of living resources.** Thus, we need to define the conflict composition $\star$ in terms of vector-states of Hilbert space,

$$\Psi_1(t) \star \Psi_2(t) = ?,\ \ t = 0, 1, 2, \ldots$$

The transformation $\star$ will correspond to interaction between alternative sides for presence in the living (resources) space $\mathcal{H}$.

One of the way is to engage an observation the position operator Q. Its spectrum, $\Omega := \sigma(Q)$, we will treat as the living (or resources) space for alternative opponents. Then the independent time evolutions in such space may be described in terms of probability measures

$$\mu_k^t(\Delta) := (\mathbb{E}_Q(\Delta)\Psi_k^t, \Psi_k^t), \qquad \Delta \in \mathcal{B},$$

where $\mathcal{B}$ is the Borel algebra of subsets on Ω, and $\mathbb{E}_Q(\Delta)$ denotes the operator spectral measure (the identity resolution of operator Q).

It is worth recalling the physical interpretation. According to the principles of quantum physics (see, for example, J. von Neumann "Mathematische Fundamentals of Quantum Mechanics") the values $\mu_1^t(\Delta)$, $\mu_2^t(\Delta)$ can be considered as the independent probabilities of finding opposite sides represented by states Ψ_i in the subset $\Delta \subseteq \Omega$. In other words, its are the mathematical expectations to observe (to measure) the presence of opponents with strategies H_1, H_2 in states Ψ_1^t, Ψ_2^t restricted to subspace $\mathbb{E}_Q(\Delta)\mathcal{H}$.

The conflict interaction causes a certain deformation of these independent expectations.

Now we will explain the idea for construction of the mathematical transformation $\star$ corresponding to a conflict interaction in a Hilbert space.

We suppose that each conflict dynamics has its own time, continuous or discrete, in general different from the independent (free) time evolutions of physical systems. Here we develop an abstract approach to definition of the conflict transformation. Let μ_i^t, ν_i^t denote a couple of probability measures of above type on the measurable space $(\Omega = \sigma(Q), \mathcal{B})$. Putting

$$\mathbf{P}_{\mu_1}^t(\Delta) := \mu_1^t(\Delta), \qquad \mathbf{P}_{\mu_2}^t(\Delta) := \mu_2^t(\Delta), \ \Delta \in \mathcal{B},$$

we define conflict transformation in terms of these measures:

$$\begin{Bmatrix} \mu_1^t \\ \mu_2^t \end{Bmatrix} \xrightarrow{\star,\ t} \begin{Bmatrix} \mu_1^{t+1} \\ \mu_2^{t+1} \end{Bmatrix} \qquad (\mu_1^0 = \mu_1,\ \mu_2^0 = \mu_2),$$

where we use discrete time $t = 0, 1, \ldots$. At each step, the measures are modified using a generated William Shakespeare type formula (2.1):

$$\mu_1^{t+1}(\Delta) = \mathbf{P}_{\mu_1}^{t+1}(\Delta) \simeq \mathbf{P}_{\mu_1}^t(\Delta) \cdot (1 - \mathbf{P}_{\mu_2}^t(\Delta)),$$
$$\mu_2^{t+1}(\Delta) = \mathbf{P}_{\mu_2}^{t+1}(\Delta) \simeq \mathbf{P}_{\mu_2}^t(\Delta) \cdot (1 - \mathbf{P}_{\mu_1}^t(\Delta)).$$

The inverse problem, i.e., the reconstruction of vectors Ψ_1^t, Ψ_2^t on the measures μ_1^t, μ_2^t will be considered in further sections.

3.3. **Singular perturbation as a cause of conflict.**

Conflict is caused
by the singular structure of matter

Here we show that alternative behavior strategies corresponding to the above operators H_k arise naturally under a singular perturbation of the free Hamiltonian.

Briefly, the splitting of unity (free Hamiltonian) into contradiction sides (H_k operators) can be described within the framework of singular perturbation theory.

In our approach, the phenomenon of conflict between alternative parties looks like a kind of explosion of free evolution, "exit from paradise". Mathematically, this means splitting the free Hamiltonian H on two or more branches of conflicting evolution. We associate this path with the singular perturbation H. But first we mention the usual approach again.

Let us consider a free energy operator H with domain $\mathcal{D}(H)$ in a Hilbert space $\mathcal{H}$. Let

$$\mathcal{D} = \{\Psi \in \mathcal{D}(H), \|\Psi\| = 1\}$$

denote some initial set of states for the physical system associated with operator H. We note that in general in real situation, each concrete physical system involves in the "life" not all vectors from $\mathcal{D}(H)$. So, $\mathcal{D}$ is only a part of $\mathcal{D}(H)$, but it is assumed that $\mathcal{D}$ is a dense subset in $\mathcal{H}$. Each vector $\Psi \in S$ has a pure deterministic free time evolution described by the Schrödinger equation, $\Psi(t) = \exp^{-itH} \Psi$.

If the physical influence on the system is described as a “rough” perturbation written in the form $H_1 = H + V_1$, where V_1 is a fairly good operator that has an interpretation of the external field, then the problem is to describe the perturbed picture of the new evolution, including the spectral analysis of H_1. Moving on to another perturbation V_2, we get some new evolution picture, $\Psi(t) = \exp^{-itH_2}\Psi$ evolution. There is no conflicting phenomenon on this way.

Further we need in the following

Definition 3.3.1 ([33]). A self-adjoint operator $\widetilde{H}$ is called *(purely) singularly perturbed with respect to* H if the linear set

$$\mathcal{D}_\Gamma = \left\{ f \in \mathrm{Dom}(H) \cap \mathrm{Dom}(\widetilde{H}) \mid Hf = \widetilde{H}f \right\}$$

is dense in the Hilbert space $\mathcal{H}$.

Here, Γ is associated with some extremely small set in physical space that is responsible for the singular perturbation.

For more detailed facts connected with definition of singular perturbation see [33]

Formally every singular perturbed operator may appear in the following way. At first one consider a restriction of H into some dense linear subset $\mathcal{D}_\Gamma = \mathcal{D} \subseteq \mathcal{D}(H)$ with consequent extension to any a new self-adjoint operators H_i such that:

$$H_i \restriction \mathcal{D}_\Gamma = H \restriction \mathcal{D}_\Gamma, \quad i \geqslant 2.$$

We will always assume that $\mathcal{D}_i = \mathcal{D}_\Gamma \cap \mathcal{D}(H_i)$ are dense in $\mathcal{H}$.

Now, the evolution of the physical system associated with different operators H_i will have a certain kind of uncertainty because these operators are quite close (they are identical on a dense set) but still different (due to a singular perturbation on a very small set Γ). Hence, opposite and conflicting paths may arise for the evolutions started from the vectors $\Psi \in \cap_i \mathcal{D}_i$. The theory of the dynamic system of conflict is designed to give a description of this kind of evolution and to solve the problem of “fair” redistribution of the conflict territory $\Omega = \sigma(Q)$ which the spectrum of Q.

To this aim, we need to select and use an explicit law of conflict interactions that will govern the time dependence of the trajectories of the conflict dynamical system.

3.4. **The law of conflict interaction in terms of states.** Here we will describe one of the possible variants of conflict dynamics in terms pairs of non-orthogonal states $\Psi \in \mathcal{D}_1$, $\Phi \in \mathcal{D}_2$ which correspond to two conditional opponents. It will be performed by a composition marked $\star$ and operating in the Hilbert space $\mathcal{H}$.

Let Q denote the self-adjoint operator in $\mathcal{H}$ corresponding to the observation, which is called a position. Its spectrum represents the resource area for all other observations.

Put in correspondence to a couple Ψ, Φ their spectral representations with respect the operator Q:

$$\Psi \to \mu(\Delta) := (\mathbb{E}_Q(\Delta)\Psi, \Psi),$$
$$\Phi \to \nu(\Delta) := (\mathbb{E}_Q(\Delta)\Phi, \Phi),\ \Delta \in \mathcal{B},$$

where $\mathbb{E}_Q(\Delta)$ stands for the operator spectral measure of Q and $\mathcal{B}$ denotes the Borel σ-algebra. In what follows we denote this map by symbol K.

These probability measures μ, ν we interpret as two starting independent distributions for a couple of some opponents (individuals) along the territory $\Omega = \sigma(Q)$ where $\sigma(Q)$ denotes the spectrum of Q. If the states of the opponents are orthogonal, $\Psi \perp \Phi$, then the measure carriers μ, ν have a zero intersection and there is no conflict between the opponents. But if

$$\operatorname{supp}(\mu) \cap \operatorname{supp}(\nu) \neq \varnothing,$$

then the opponents start to struggle (conflict interaction) with the aim of displacing each other from the territory of joint coexistence.

The simplest version for the evolution law $\star$ of opponent sides,

$$\begin{Bmatrix} \mu^0 \\ \nu^0 \end{Bmatrix} \xrightarrow{\star,\ t} \begin{Bmatrix} \mu^t \\ \nu^t \end{Bmatrix}, \qquad (\mu^0 = \mu,\ \nu^0 = \nu),\ t \geqslant 0,$$

may be described by the nonlinear equations of a view:

$$\frac{d}{dt}\mu^t \simeq \Theta^t \mu^t - \eta^t, \qquad\qquad \frac{d}{dt}\nu^t \simeq \Theta^t \nu^t - \eta^t, \tag{3.1}$$

where $\Theta^t = \Theta(\mu^t, \nu^t) := (H\Phi^t, \Psi^t)$ stands for the multiplicative Hamiltonian of the system and $\eta^t = \eta^t(\mu, \nu)$ denotes the so-called *conflict occupation measure*. Here we used an isometric correspondence

$$K : \mathcal{H} \ni \Psi^t \longleftrightarrow \mu^t_\Psi \longleftrightarrow \psi(t) \in L_2(\Omega, d\mathbb{E}_Q(x)),\ x \in \Omega \tag{3.2}$$

($\psi(t)$ is the density of μ^t_Ψ with respect to the spectral measure of Q) which is constructed on the basis of the spectral theorem for the operator Q (see [9] for details). In fact formulas (3.1) are analogies of the products $\mathbf{P}^t_\mu(\Delta) \cdot (1 - \mathbf{P}^t_\nu(\Delta))$ from the above Shakespeare's formula.

Now we need to give some explanation about the concept of the conflict occupation measure in the abstract situation. Let μ, ν be a pair of positive measures on $(\Omega, \mathcal{B})$. Of course, we can assume that as above

$$\mu(\Delta) = (\mathbb{E}_Q(\Delta)\Psi, \Psi)_{\mathcal{H}}, \qquad\qquad \nu(\Delta) = (\mathbb{E}_Q(\Delta)\Phi, \Phi)_{\mathcal{H}}$$

with the assumption that $\operatorname{supp}(\mu) \cap \operatorname{supp}(\nu) \neq \varnothing$.

Suppose that the conflict territory Ω is separated into a finite amount of regions: $\Omega = \bigcup \Omega_i$. Then we define the conflict occupation (intervention) measure for the starting couple $\{\mu, \nu\}$ as $\eta := \eta_\nu + \eta_\mu$, where

$$\eta_\nu(\Delta) := \mathrm{Var}_\mu(\nu) = \sup_{\Delta = \cup \Delta_i} \sum_i \chi_\omega(\Delta_i)\nu(\Delta_i), \quad \Delta, \Delta_i \in \mathcal{B},$$

$$\chi_\omega(\Delta_i) = \begin{cases} 1, & \text{if } \omega(\Delta_i) \geqslant 0, \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

and

$$\eta_\mu(\Delta) := \mathrm{Var}_\nu(\mu) = \sup_{\Delta_i \subseteq \Delta \bigcap \Omega_i} \sum_i \chi_{-\omega}(\Delta_i)\mu(\Delta_i),$$

$$\chi_{-\omega}(\Delta_i) = \begin{cases} 1, & \text{if } -\omega(\Delta_i) \geqslant 0, \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

where $\omega := \mu - \nu$ is the signed measure associated with μ, ν. In particular, if Δ is a set of *absolute domination* for μ:

$$\mu(\Delta') \geqslant \nu(\Delta'), \ \forall \Delta' \subseteq \Delta,$$

then $\eta_\nu(\Delta) = \nu(\Delta)$. And similarly for η_μ, if ν absolute dominates on some Δ, i.e.,

$$\nu(\Delta') \geqslant \mu(\Delta'), \ \forall \Delta' \subseteq \Delta,$$

then $\eta_\mu(\Delta) = \mu(\Delta)$. Thus, the value $\eta_\nu(\Delta)$ estimates the "intervention strength" of opponent for μ on a set where it has absolute dominance, and vice versa, $\eta_\mu(\Delta)$ has a similar but opposite meaning, it evaluates the strength of occupation of another opponent which is represented by μ on a set Δ, where now ν has absolute dominance.

It should be noted that in general the conflict occupation measure is not probabilistic, i.e., $\eta(\Omega) < 1$. In addition, we can say that conflict confrontation is very weak whenever $\eta(\Omega) \sim 0$ and extremely strong if $\eta(\Omega)$ is close to 1.

We propose some illustrative example: $\eta_\nu(\Delta)$ may estimate how many English-speaking persons lives in Ukraine, while $\eta_\mu(\Delta)$ gives values of Ukrainian-speaking persons there are in some fixed region Δ in the USA. These values refer to the initial time $t = 0$ and will change according to the conflict dynamics in a form (3.1).

Theorem 3.5 (Theorem of conflict in terms of states in a Hilbert space)**.** *Let states of a couple opponents at a time moment $t = 0$ are given by two unite non-orthogonal vectors $\Psi, \Phi \in \mathcal{H}$. Using the mapping* (3.2) *put in* *correspondence to* Ψ, Φ *measures* μ_Ψ, ν_Φ*. Assume that the set*

$$\mathrm{supp}(\mu_\Psi) \bigcap \mathrm{supp}(\nu_\Phi) \neq \varnothing.$$

Then the trajectory of the conflict dynamical system

$$\begin{Bmatrix} \Psi^0 \\ \Phi^0 \end{Bmatrix} \xrightarrow{\star,\ t} \begin{Bmatrix} \Psi^t \\ \Phi^t \end{Bmatrix}, \qquad (\Psi^0 = \Psi,\ \Phi^0 = \Phi), \quad t \geqslant 0,$$

with the conflict composition $\star$ *generated by equations of type* (3.1) *in terms of measures* $\mu_\Psi(\cdot) = (\mathbb{E}_Q(\cdot)\Psi, \Psi)$*,* $\nu_\Phi(\cdot) = (\mathbb{E}_Q(\cdot)\Phi, \Phi)$*, converges to a fixed point* $\{\Psi^\infty, \Phi^\infty\}$*. Thus, there exist the limits in the strong sense in* $\mathcal{H}$

$$\Psi^\infty = \lim_{t\to\infty} \Psi^t, \qquad\qquad \Phi^\infty = \lim_{t\to\infty} \Phi^t.$$

That is

$$\Psi^\infty \perp \Phi^\infty$$

and

$$\mathrm{supp}(\mu_{\Psi^\infty}) \bigcap \mathrm{supp}(\nu_{\Phi^\infty}) = 0.$$

Proof. Here we give only some sketch of our arguments.

At first, we come from equations (3.1) to its difference variants, i.e., to the conflict dynamics at the discrete time

$$\begin{Bmatrix} \Psi^0 \\ \Phi^0 \end{Bmatrix} \xrightarrow{\star,\ t} \begin{Bmatrix} \Psi^t \\ \Phi^t \end{Bmatrix}, \quad t = 0, 1, \ldots$$

where each couple Ψ^t, Φ^t is defined by the iteration procedure in accordance with dynamics of the associated measures:

$$\begin{aligned} \mu_\Psi^{t+1}(\Delta) &= \frac{\mu_\Psi^t(\Delta)(1+\Theta^t) - \eta^t(\Delta)}{1+\Theta^t+W^t}, \\ \nu_\Phi^{t+1}(\Delta) &= \frac{\nu_\Phi^t(\Delta)(1+\Theta^t) - \eta^t(\Delta)}{1+\Theta^t+W^t}, \end{aligned} \tag{3.3}$$

where $\Delta \in \mathcal{B}$, $\Theta^t = (H\Psi^t, \Phi^t)$, and $W^t = \eta^t(\Omega)$.

Further, for proving of the limiting measures

$$\mu_\Psi^\infty = \omega^+/z_\mu, \qquad\qquad \nu_\Phi^\infty = \omega^-/z_\nu,$$

we use a suitable version of arguments (see, for instance [32]), where ω^+/z_μ, ω^-/z_ν denote the normalized components of the Hahn-Jordan decomposition for signed measure $\omega = \mu_\Psi - \nu_\Phi = \omega^+ + \omega^-$. And finally, we come back from $L_2(\Omega, d\mathbb{E}_Q(x))$ to the Hilbert space using the inverse transformation K^{-1}:

$$\Psi^\infty = K^{-1}\mu_\Psi^\infty, \qquad\qquad \Phi^\infty = K^{-1}\nu_\Phi^\infty. \qquad \square$$

A more general theorem is also true if we modify the conflict interaction law (3.3). Namely, instead of $\Theta^t = (H\Psi^t, \Phi^t)$, we take $\Theta_1^t = (H_1\Psi^t, \Phi^t)$ and $\Theta_2^t = (H_2\Psi^t, \Phi^t)$, where H_1, H_2 is a pair of singularly perturbed operators. They arise as a pair of self-adjoint extensions of the symmetric restriction H to the domain $\mathcal{D}_\Gamma$, where $\Gamma \subset \Omega$ is the zero set with respect to the spectral measure of the operator Q:

$$\int_\Gamma \|\phi(x)\|^2 d\mathbb{E}_Q(x) = 0, \quad \forall \phi \in L_2(\Omega, d\mathbb{E}_Q(x)).$$

3.6. **The method of rigged spaces.** Quite often, the conflict struggle arises between rather close, almost identical living conceptions. This kind of proximity can be accurately described in terms of singular perturbations of the general free Hamiltonian. Then, as in the real situation, each adversary will have its own Hamiltonian, which determines the strategy of its evolution in time.

Let us describe this approach in more details.

Let H be a strongly positive self-adjoint operator in a Hilbert space $\mathcal{H}$ and

$$\mathcal{H}_- \sqsupset \mathcal{H} \sqsupset \mathcal{H}_+ = \mathrm{Dom} H$$

denotes the associated rigged (equipped) space (for details see [9]). Here $\sqsupset$ stands for the dense inclusion. This rigged space is only some part of the so-called H-scale of Hilbert spaces,

$$\mathcal{H}_{-k} \sqsupset \mathcal{H} = \mathcal{H}_0 \sqsupset \mathcal{H}_{+k} = \mathrm{Dom} H^{k/2}, \quad k > 0.$$

The concept of a singular perturbation first appears in physical considerations (see [3]) related to the problem of the expression

$$-\Delta + \lambda\delta, \ \lambda \in \mathbf{R}^1,$$

where $-\Delta$ is the Laplace operator, and δ stands for the Dirac delta function treated as a singular one-point potential. The corresponding linear functional

$$l_\delta(\varphi) = \langle \varphi, \delta \rangle := \int_{\mathbb{R}^3} \delta_{x_0}(x)\varphi(x)dx = \varphi(x_0), \quad \varphi \in C(\mathbb{R}^3)$$

is singular in $L_2(\mathbb{R}^3, dx)$ since its null set $\ker(l_\delta)$ creates a dense domain in L_2. In an abstract approach, the singularity property was extended to quadratic forms in the rigged spaces.

Definition 3.6.1 ([33])**.** A positive quadratic form $\gamma(\cdot,\cdot)$ on $\mathcal{H}_+$ is called *singular* in $\mathcal{H}$ if for each $\Psi \in \mathcal{H}$ there exists a sequence $\varphi_n \in \mathcal{H}_+$ such that $\varphi_n \to \Psi$ and $\gamma[\varphi_n] = \gamma(\varphi_n, \varphi_n) \to 0$ as $n \to \infty$.

It is clear that a quadratic form γ is singular if its null set

$$\ker(\gamma) = \{\varphi \in \mathcal{H}_+ | \ \ \gamma[\varphi] = 0\} =: \mathcal{D}_0$$

creates a dense domain in $\mathcal{H}$, i.e. $\mathcal{D}_0^{\mathrm{cl}} = \mathcal{H}$ (cl = closure). Thus, γ contains practically unobservable physical information.

Despite this "almost zero information", singular quadratic forms can exert a strong physical influence on the H Hamiltonian. In particular, singular quadratic forms can carry singular perturbations H, which significantly change the behavior of evolutions in time.

Let γ be fixed and its null set $\ker(\gamma) = \mathcal{D}_0$ be dense in $\mathcal{H}$. Then the restrictions

$$\mathbf{H} := H|\mathcal{D}_0$$

defines some symmetric operator in $\mathcal{H}$. We assume that its deficiency indices are equal and nonzero:

$$n^+(\mathbf{H}) = n^-(\mathbf{H}) \neq 0.$$

The family of its self-adjoint extensions

$$\{\widetilde{H} = \widetilde{H}^* \mid \widetilde{H}|_{\mathcal{D}_0} = \mathbf{H}_{\mathcal{D}_0}\}$$

represents all possible candidates for a singular perturbed operator. The resolvent of each operator $\widetilde{H}$ allows an explicit construction according to the so-called Krein's formula. We will give only the most famous sample of Krein's formula:

$$\widetilde{H}^{-1} = H_F^{-1} + \widetilde{B}P_{\mathcal{N}_0},$$

where $P_{\mathcal{N}_0}$ denotes the orthogonal projector onto the defect subspace $\mathcal{N}_0$ of $\mathbf{H}$, and $\widetilde{B}$ represents the extension parameter. It is some self-adjoint operator in $\mathcal{N}_0$. Above H_F denotes the Friedrichs extension of $\mathbf{H}$ which often coincides with $\mathbf{H}$. Depending on the operator $\widetilde{B}$, the corresponding singular perturbed extension $\widetilde{H}$ can have many new spectral properties in comparison with the original H.

We note that each operator $\widetilde{B}$ is closely connected with singular quadratic form γ. Since it is usually assumed that γ is continuous on $\mathcal{H}_+$ there exists the associated bounded operator $B_\gamma : \mathcal{H}_+ \to \mathcal{H}_-$. And all $\widetilde{B}$ in fact is also obtained using some singular quadratic form γ_B in the rigged Hilbert space.

It is important that all operators $\widetilde{H}$ are the same on the dense in $\mathcal{H}$ domain $\mathcal{D}_0$. So, one able to consider the conflict dynamical system with many, $m \geqslant 2$, opponents. Every of them will have its own strategy of behavior in a form of the operator H_i. Thus, for any family of self-adjoint extensions $\{H_i\}_{i=1}^m$ defined by the above formula,

$$H_i^{-1} = H_F^{-1} + \widetilde{B}_i P_{\mathcal{N}_0}, \tag{3.4}$$

we have

$$H_i\Psi = \mathbf{H}\Psi, \quad \Psi \in \mathcal{D}_0.$$

This fact causes a certain uncertainty of the evolution in time of arbitrary vectors $\Psi \in \mathcal{H}$, if they are interpreted as the states of some biological system. Since the singular perturbation is located on a very small, in the physical sense, set, we denote it Γ (for example, at a single point, as a delta potential, or on a fractal that has zero Lebesgue measure), it is difficult to take into account, it is not visible. From the point of view of biological essence, this kind of violation does not exist. But nevertheless, different elements of the biological population under the influence of a singular influence choose different strategies of behavior corresponding to Hamiltonian among the set $\{\widetilde{H}\}$. Thus, any singular perturbation can be interpreted as the cause of the splitting of the behavior of the biological population into different branches of evolution over time with subsequent confrontational struggle between them.

So, if we fix some family of self-adjoint extensions $\{H_i\}_{i=1}^m$, $m \geqslant 2$ and associate to each H_i some kind of "society" (as a linear set of vectors $\mathcal{D}_i$ from $\mathcal{H}$), then its evolution admits description similar to the previous ones for a couple of players. Thus, we have the Theorem of conflict for a complex system with many opponents fighting each one against all others.

Theorem 3.7. *For $\Psi_i \in \mathcal{H}$, $i \in \overline{1,m}$, put $\mu_i(\cdot) = (\mathbb{E}_Q(\cdot)\Psi_i, \Psi_i)$ and define the "mean field" measures $\nu_i(\cdot) = \frac{1}{m-1}\sum_{k\neq i}\mu_k$. Consider the conflict dynamical system with trajectories*

$$\{\mu_1^0, \dots, \mu_m^0\} \xrightarrow{\star,\ t} \{\mu_1^t, \dots, \mu_m^t\},\ t \geqslant 0$$

produced by formulas

$$\frac{d}{dt}\mu_i^t = \Theta_i^t\mu_i^t - \eta_i^t, \qquad \mu_i^0 = \mu_i, \tag{3.5}$$

where $\Theta_i^t := (H_i^{-1}\Psi_i^t, 1/(m-1)\sum_{k\neq i}\Psi_k)$ with H_i defined by the Krein formula (3.4) and $\eta_i = \eta_{\mu_i} + \eta_{\tilde{\nu}_i}$ is the occupation measure for a couple μ_i, ν_i. Assume that all differences

$$D_{ii'} = \widetilde{B}_i - \widetilde{B}_{i'}, \quad i, i' \in \overline{1,m}$$

are compact operators. Then, under some pure technical additional assumptions on the family μ_i, for each $\Delta \in \mathcal{B}$ there exist limits

$$\mu_i^\infty(\Delta) = \lim_{t\to\infty}\mu_i^t(\Delta), \qquad \mu_i^\infty \perp \mu_{i'}^\infty, \quad i \neq i'.$$

That is,

$$\mu_i^\infty = \omega_i^+/z_{\omega_i},$$

where ω_i^+/z_{ω_i} denotes the normalized positive component of the Hahn-Jordan decomposition for family of signed measures $\omega_i = \mu_i - \nu_i$.

In particular, for the vectors $\Psi_i^t := K^{-1}\mu_i^t$ we have convergence in the strong sense:

$$\lim_{t\to\infty} \Psi_i^t = \Psi_i^\infty,$$

where all vectors $\Psi_i^\infty := K^{-1}\mu_i^\infty$ are orthogonal in $\mathcal{H}$.

One may consider the family of the limiting vectors $\{\Psi_i^\infty\}_{i=1}^m$ as the equilibrium state for the starting conflict system.

The proof of this theorem faces new difficulties due to the fact that in (3.5) the functional Θ_i^t is not the same for all components, but depends on H_i. Besides, it is necessary to coordinate the procedure of the Hahn-Jordan decomposition for family of signed measures ω_i. In application this decomposition means the separation of the common living territory between alternative players.

We recall that according to the well-known Hahn-Jordan theorem [13], there exist two kinds of decomposition connected with a signed measure of a view $\omega_i = \mu_i - \nu_i$. Namely, for the set, $\Omega_{\omega_i} = \mathrm{supp}(\omega_i)$ and for ω_i, $\omega_i = \omega_i^+ - \omega_i^-$, where measures ω_i^+ and ω_i^- are orthogonal. The first decomposition has a form

$$\Omega_{\omega_i} = \Omega_{\omega_i^+} \bigcup \Omega_{\omega_i^-},$$

where $\Omega_{\omega_i^\pm} = \mathrm{supp}(\omega_i^\pm)$. That is

$$\Omega_{\omega_i^+} \bigcap \Omega_{\omega_i^-} = \varnothing,$$

and where the positive and negative components ω_i^+, ω_i^- are uniquely definition as follows,

$$\omega_i^+(\Delta) = Var_+(\omega_i, \Delta) := \sup_{\Delta' \subseteq \Delta} \omega_i(\Delta'),$$
$$\omega_i^-(\Delta) = Var_-(\omega_i, \Delta) := -\inf_{\Delta' \subseteq \Delta} \omega_i(\Delta'), \quad \Delta', \Delta \in \mathcal{B}.$$

This theorem states that

$$\mu_i^t(\Delta) \to \mu_i^\infty(\Delta) \geqslant 0, \qquad \text{if } \Delta \subseteq \Omega_{\omega_i^+},$$
$$\mu_i^t(\Delta) \to 0, \qquad \text{if } \Delta \subseteq \Omega_{\omega_i^-}.$$

The set

$$\Omega_{\Psi_1,\ldots,\Psi_m} = \bigcup_i \mathrm{supp}(\omega_{i=1}^m)$$

naturally to treat as the common living territory for m players associated with vectors $\Psi_1, \ldots, \Psi_m$. Due to conflict transformation,

$$\Omega_{\omega_i^+} = \operatorname{supp}(\omega_i^+) = \operatorname{supp}(\mu_i^\infty),$$

and therefore the set $\Omega_{\Psi_1,\ldots,\Psi_m}$ was separated into new family of regions without intersections:

$$\Omega_{\Psi_1,\ldots,\Psi_m} = \bigcup_{i=1}^m \Omega_{\omega_i^+} = \bigcup_i \operatorname{supp}(\mu_i^\infty).$$

Thus, the conflict is resolved since there appears the equilibrium state $\Psi_1^\infty, \ldots, \Psi_m^\infty$ described in terms of the associate limiting measures:

$$\left\{\begin{matrix} \mu_1^t \\ \vdots \\ \mu_m^t \end{matrix}\right\} \xrightarrow{\star,\ t} \left\{\begin{matrix} \mu_1^\infty = \omega_1^+/z_{\mu_1} \\ \vdots \\ \mu_m^\infty = \omega_m^+/z_{\mu_m} \end{matrix}\right\}, \qquad \mu_i^\infty \perp \mu_{i'}^\infty,\ i \neq i'$$

where

$$\operatorname{supp}(\mu_i^\infty) = \Omega_{\omega_i^+}.$$

The last equality shows that every measure ${\mu_i}^\infty$ is concentrated in region of the initial absolute domination of μ_i over all $\mu_{i'}$, $i' \neq i$.

On this way we may consider a model of an abstract society represented by two conflict clusters of vectors $S = S_1 \bigcup S_2$. Each subsystem S_1, S_2 contains a finite number, m_1, m_2, of players represented by unite vectors

$$\Psi_i \in S_1 \subset \mathcal{D}_1 \subset \mathcal{D}(H), \qquad\qquad \Phi_k \in S_2 \subset \mathcal{D}_2 \subset \mathcal{D}(H).$$

Then there appear two clusters of the associated probability measures:

$$\mu_i(\cdot) = (\mathbb{E}_Q(\cdot)\Psi_i, \Psi_i), \Psi_i \in \mathcal{D}_1, \qquad \nu_k(\cdot) = (\mathbb{E}_Q(\cdot)\Phi_k, \Phi_k), \Phi_k \in \mathcal{D}_2$$

and their “mean field” alternative variants

$$\tilde{\mu}_i = 1/m_2 \sum_k \nu_k, \qquad\qquad \tilde{\nu}_k = 1/m_1 \sum_i \mu_i.$$

Theorem 3.8 (Conflict between two clusters of opponents)**.** *All trajectories of the conflict dynamical system*

$$\{\mu_1^0, \ldots, \mu_{m_1}^0, \quad \nu_1^0, \ldots, \nu_{m_2}^0\} \xrightarrow{\star,\ t} \{\mu_1^t, \ldots, \mu_{m_1}^t, \quad \nu_1^t, \ldots, \nu_{m_2}^t\},\ t \geqslant 0,$$

generated by formulas of type

$$\frac{d}{dt}\mu_i^t = \Theta^t \mu_i^t - \eta_\nu^t, \qquad\qquad \frac{d}{dt}\nu_k^t = \Theta^t \nu_k^t - \eta_\mu^t,$$

converges to a fixed point (an equilibrium state):

$$\{\mu_1^\infty, \ldots, \mu_{m_1}^\infty, \quad \nu_1^\infty, \ldots, \nu_{m_2}^\infty\}, \qquad \mu_i^\infty \perp \nu_k^\infty,\ \forall i, k.$$

3.9. **Towards physical examples.** Let H denote the Hamiltonian of some physical system of some elements (particles) with $+/-$ charge or $+1/-1$ sign of spines.

Then subspaces $\mathcal{D}_i \subset \mathcal{D}(H),\ i = 1, 2$ differ due to chosen priority with respect to positive-negative charges or right-left sign of spins.

At starting time moment there are many vectors Ψ_i, Φ_k with the mixed distribution along an above physical property. The conflict interaction between possessing to one of them produces the separation all mixed states into two orthogonal subspaces:

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2.$$

The close pictures appear in the Ising model describing the behavior of nuts in a lattice of magnetic dipoles with $+1$ or -1 spins, as well as in potential theory which deals with the existence problem of minimizing signed measures supported on a condenser $A = A_+ \bigcup A_-$.

Else one example gives a model of quantum harmonic oscillator. Let

$$\mathcal{H} = L_2(\mathbb{R}^1, dx), \qquad H = 1/2m(Q^2 + P^2), \qquad Q \simeq x, \qquad P \simeq id/dx.$$

The operator H has the discrete spectrum:

$$H\mathbf{e}_i = \lambda_i \mathbf{e}_i, \qquad \lambda_i = (i + 1/2)\overline{\mathbf{h}}\omega, \qquad \omega \text{ is the oscillation phase,}$$

where

$$\mathbf{e}_i(x) \simeq \exp(-x^2/2)\mathbf{H}_i(x), \qquad \mathbf{H}_i(x) \text{ are Hermite polynomials.}$$

In the simplest case we consider the system $\{\Psi, \Phi\}$ with two unit vectors, $\Psi, \Phi \in \mathcal{D}(H)$:

$$\Psi = \sum_{i=0}^{\infty} a_i \mathbf{e}_i, \qquad \Phi = \sum_{i=0}^{\infty} b_i \mathbf{e}_i, \quad a_i, b_i \in \mathbb{C},$$

$$\|\Psi\| = \sum_i p_i = 1 = \sum_i r_i = \|\Phi\|, \qquad p_i = |a_i|^2, \qquad r_i = |b_i|^2$$

The conflict interaction between Ψ, Φ deforms their free dynamics given by the Schrödinger equation. The problem of "right" redistribution of starting priorities along the spectrum we write in a symbolic form as $\Psi^t{\star}\Phi^t$? In other words we regard Ψ, Φ as opponents whose projection weights (amplitudes) p_i, r_i on $\mathbf{e}_i$ show their priority relations with respect to eigenvalues λ_i.

Let us separate all basic oscillators $\mathbf{e}_i$ into two subsets $\mathcal{D}_\Psi, \mathcal{D}_\Phi$ using the priority domination produced by Ψ and Φ:

$$\mathbf{e}_i \in \mathcal{D}_\Psi, \text{ if } i \in N_\Psi = \{i \mid p_i \geqslant r_i\},$$

$$\mathbf{e}_k \in \mathcal{D}_\Phi, \text{ if } k \in N_\Phi = \{k \mid r_k > p_k\},$$

where recall, p_i (r_k) is a probability to find Ψ (Φ) in a pure state $\mathbf{e}_i$, ($\mathbf{e}_k$). Now we are able to define the occupation discrete measure $\eta(\Psi, \Phi) = \eta$:

$$\eta = (\eta_i)_{i=0}^{\infty}, \qquad \eta_i = \begin{cases} p_i, & \text{if } p_i \leqslant r_i \\ r_i, & \text{if } r_i < p_i \end{cases}$$

We assert the existence of an equilibrium limiting state for such conflict dynamics at discrete time. Namely, by the Theorem of conflict there exist the limits

$$\lim_{t\to\infty} p_i^t = p_i^{\infty}, \qquad \lim_{t\to\infty} r_k^t = r_k^{\infty},$$

such that $p_i^{\infty} = 0$, $i \in N_{\Phi}$, $r_k^{\infty} = 0$, $k \in N_{\Psi}$. The system $\{\Psi^{\infty}, \Phi^{\infty}\}$ with the limit vectors

$$\Psi^{\infty} = \sum_{i \in N_{\Psi}} a_i^{\infty} \mathbf{e}_i, \qquad \Phi^{\infty} = \sum_{k \in N_{\Phi}} b_k^{\infty} \mathbf{e}_k$$

creates a fixed point, $\Psi^{\infty} \perp \Phi^{\infty}$. It is easy to see that this equilibrium state is extremely unstable.

4. Connections with potential theory

In this section, we are going to substantiate our idea about the connection between the well-known Gaussian minimization problem in potential theory and the existence of a limit state of equilibrium in conflict theory. In other words, we want to show that the minimizing measure in the potential theory as the equilibrium charge on the capacitor essentially coincides with state of compromise redistribution in dynamical system of conflict (DSC). To formulate our goal in more detail, we need additional preparations.

But at first we recall shortly some facts from the classical theory of capacities of compact sets [12,38] following the papers [41–45]. This theory was initiated by Wiener and developed by many scientists, we remind only Frostman, Riesz, de la Vallee-Poussin. The modern notion of inner and outer capacities was originated by Cartan. He observed that the cone of all positive measures on $\mathbb{R}^3$ with finite Newtonian energy is complete in the energy norm. The using of the strong and the so-called vague topologies enabled Fuglede to extend a theory of capacities for measures on a locally compact space X for positive definite kernels κ on X. Ohtsuka developed this approach for vector-valued Radon measures $\mu_i, i \in I$ on X, where $\dim I \leqslant \infty$.

The last fact is important for application in theory of dynamical systems of conflict when we want to study the models with an arbitrary amount of opponents associated with vectors $\Psi_i, i \in I$ in a Hilbert space $\mathcal{H}$ of type $L_2(\Omega, d\mathbb{E}_Q(x))$ with $\Omega = X \subseteq \mathbb{R}^n$ where Q is so-called the position operator.

In [45] was developed and investigated the theory of inner capacities and inner capacitary measures and proved a series of theorem on convergence of above measures and their potentials for monotone families of sets. We used some results from [45] to prove Theorem 4.1 (see below).

Let $\mathcal{M}, \mathcal{M}^+$ denote the sets of all signed and positive measures on X, and $\mathcal{M}_1^+(X)$ denotes the set of all probability measures on X.

Let $G(x, y), x, y \in X$ be a positive definite kernel on a locally compact Hausdorff space X. For a given kernel G the function

$$U_G^\mu(x) \equiv G(x, \mu) := \int G(x, y) d\mu(y), \qquad \mu \in \mathcal{M}$$

is called the potential of a measure μ and the value

$$E_G[\mu] \equiv G(\mu, \mu) := \iint G(x, y) d\mu(x) d\mu(y)$$

is its energy.

Consider a compact set $K \subset X$. Given G and a compact set $K \subset X$, the value

$$c(K) \equiv \mathrm{cap}_G(K) := \left[\inf\{E_G[\mu] : \ \mu \in \mathcal{M}_1^+(X), \ \mu(K) = 1\}\right]^{-1}$$

is called [1, 12, 38] the *interior capacity of a set K with respect to G.*

The capacity of the set can be defined in another way [1] in terms of smooth functions,

$$c(K) := \inf\left\{\|\varphi\|^2_{\mathcal{H}_+} : \ \varphi \in C_0^\infty, \ \varphi(x) \geqslant 1 \text{ on } K\right\},$$

where $\mathcal{H}_+$ means a positive Hilbert space built on a given kernel G (in fact, it is some Sobolev space).

One of main results of the potential theory asserts that under rather wide assumptions on a set K there exists the so-called *equilibrium measure* $\gamma \in \mathcal{M}^+$ supported on K such that

$$c(K) = E_G[\gamma] = \|\gamma\|^2_{\mathcal{H}_+}$$

and

$$U_G^\gamma(x) = 1, \quad \forall x \in K,$$

where $\|\cdot\|_{\mathcal{H}_+}$ denotes the norm in the Hilbert space associated with G.

Further we assume that $X \subseteq \mathbb{R}^n$ and that a kernel G is perfect in the B. Fuglede's sense [18]. In particular, $G(x, y)$ is a symmetric and lower semi-continuous. So, using the notation from [45], we may put $G(x, y) = \kappa(x, y)$, where $\kappa(x, y)$ denotes one of the perfect kernels of type:

– Newton

$$\kappa(x, y) = |x - y|^{2-n}, \ n \geqslant 3,$$

– Riesz

$$\kappa(x, y) = |x - y|^{\alpha-n}, \ 0 < \alpha < n,$$

– or general Green ones

$$\kappa(x,y) = g_\Gamma(x,y), \quad \Gamma \subset \mathbb{R}^n.$$

For given strictly positive definite kernel κ on X we define the Hilbert space $\mathcal{H}_\kappa \equiv \mathcal{H}_+$ by the standard procedure of compactification and factorization of the linear space from signed measures $\mathcal{M}(X)$ with the inner product

$$(\omega_1, \omega_2)_{\mathcal{H}_\kappa} := \kappa(\omega_1, \omega_2)$$

and the norm $\|\omega\| = \sqrt{\kappa[\omega]}$.

According to [45] there are various ways for solution for "the problem of minimizing energy integrals over various unite charge distributions" on a set K with a presence of an extreme field. This problem is frequently referred to as the Gauss variational ones.

In particular, for arbitrary $K \subset \mathbb{R}^n$ and the kernel κ denote by $\mathcal{M}^+(K)$ the cone of all positive measures μ concentrated on K and which have finite energy $E_\kappa[\mu]$. It is known that this cone is strongly complete in the norm of $\mathcal{H}_\kappa$. Then for any $K \subset \mathbb{R}^n$ with finite inner capacity $c(K)$, there exists the equilibrium measure γ_K which is uniquely determined by the two relations

$$\kappa[\gamma_K] = \|\gamma_K\|^2_{\mathcal{H}_\kappa} = c(K),$$
$$\kappa(x, \gamma_K) = 1 \text{ on } K.$$

It is remarkable that similar kind of the result is true for a set K which is replaced by the condenser of a view $\Omega = \Omega_- \bigcup \Omega_+$ and instead of positive measures μ need to take signed measures ω. In the simplest reading, the solution of the minimizing problem meant that for wide kind of sets of type a condenser with finite κ-capacity there exists the signed measure

$$\gamma = \gamma_+ - \gamma_- \in \mathcal{M}(\Omega), \tag{4.1}$$

$\gamma_+ \in \mathcal{M}^+(\Omega_+)$, $\gamma_- \in \mathcal{M}^+(\Omega_-)$, such that

$$E_\kappa[\gamma] = \kappa(\gamma, \gamma) = c_\kappa(\Omega), \qquad \kappa(x, \gamma) = 1 \quad \gamma - \text{almost everywhere.}$$

Here $c_\kappa(\Omega)$ denotes a capacity of the condenser Ω with respect a given kernel $\kappa(x,y)$.

Our hypothesis is that the minimizing measure γ may be constructed as the limiting distribution in the DSC. In a symbol we are going to write (see below Theorem 4.1)

$$\mu_+^\infty = \gamma_+, \qquad\qquad \mu_-^\infty = \gamma_-,$$

with γ_+ and γ_- defined as follows:

$$\lim_{t\to\infty} \{\mu_A^t \star \mu_B^t\} = \{\mu_+^\infty, \mu_-^\infty\},$$

where $\star$ denotes the conflict interaction in the space of probability measures on Ω. In other worlds it means that the measures μ_A^t, μ_B^t corresponds to two alternative opponents A, B after the conflict interaction at the time moment t creates a sequence of signed measures ω^t which converges to the minimizing measure γ under a fixed condenser Ω. That is, the conflict interaction mapping $\star$ have to be constructed with using the kernel κ, and we extend our considerations to construction of the DSC in the Hilbert space $\mathcal{H}_\kappa$ with the inner product

$$(\omega_1, \omega_2)_{\mathcal{H}_\kappa} := \int \kappa(x,y) d(\omega_1 \otimes \omega_2)(x,y)$$

and the norm

$$\|\omega\|_{\mathcal{H}_\kappa} = \sqrt{\kappa(\omega, \omega)}.$$

So we formulate our intentions in the form of a theorem, although we do not have a complete proof of it today.

Theorem 4.1. *Let H, Q be a self-adjoint operators in Hilbert space $\mathcal{H}$. Assume the spectrum Q is absolutely continuous, $\sigma(Q) = \sigma_{ac} = X \subseteq \mathbb{R}^n$, $n \geqslant 1$, H is strongly positive, and its inverse has an integral representation in $L_2(\sigma(Q), d\mathbb{E}_Q(x))$ given by a kernel:*

$$(H_{-1}\Psi, \Phi) = (\mu_\Psi, \mu_\Phi)_{L_2(\sigma(Q), d\mathbb{E}_Q(x))} = \int_{\sigma(Q)} \kappa(x,y) d\mu_\Psi(x) d\mu_\Phi(y),$$

where

$$\mu_\Psi(\cdot) = (\mathbb{E}_Q(\cdot)\Psi, \Psi), \;\; \mu_\Phi(\cdot) = (\mathbb{E}_Q(\cdot)\Phi, \Phi)$$

and the associated with H^{-1} integral kernel $\kappa(x,y)$ is perfect in sense Fuglede (see [18]).

Let H_A, H_B denote a couple self-adjoint extension of the symmetric operator

$$\mathbf{H} := H_{\mathcal{D}_0}, \quad \mathcal{D}_0 \subset \mathcal{D}(H)$$

which has a nontrivial deficiency indices $n^+(\mathbf{H}) = n^-(\mathbf{H}) \neq 0$. These operators, H_A, H_B, are corresponded to the Hamiltonians of two opponent sides, A and B. They admit interpretations as the strategies of the dynamical behavior.

Let the DSC associated with H_A, H_B is fixed by a number of components $m_A + m_B = m < \infty$ and a decomposition of $\sigma(Q) \equiv \Omega$ into some kind of condenser:

$$\Omega = \Omega_- \bigcup \Omega_+, \qquad \Omega_- = \bigcup_{j \in N_-} \Omega_j, \qquad \Omega_+ = \bigcup_{i \in N_+} \Omega_i,$$
$$N_- = \{1, \ldots, m_B\}, \qquad N_+ = \{1, \ldots, m_A\}, \tag{4.2}$$

such that

$$\Omega_i^{\mathrm{cl}} \bigcap \Delta_j^{\mathrm{cl}} = \varnothing, \ i \neq j.$$

The states of this DSC are consisted from a set of m vectors

$$\{\Psi_i^t \in \mathcal{D}(H_A)\}_{i \in N_+}, \qquad \{\Phi_j^t \in \mathcal{D}(H_B)\}_{j \in N_-}$$

which change

$$\left\{ \begin{matrix} \Psi_i^t \\ \Phi_j^t \end{matrix} \right\} \xrightarrow{\star} \left\{ \begin{matrix} \Psi_i^{t+1} \\ \Phi_j^{t+1} \end{matrix} \right\},$$

in the discrete time $t = 0, 1, \ldots$ in accordance with the law of conflict interaction $\star$ given in the terms of associated measures:

$$\begin{aligned} \mu_{\Psi_i}^{t+1}(\Delta) &= \frac{\mu_{\Psi_i}^t(\Delta)(1+\Theta^t) - \eta_i^t(\Delta))}{1+\Theta^t+W_A^t}, \\ \mu_{\Phi_j}^{t+1}(\Delta) &= \frac{\mu_{\Phi_j}^t(\Delta)(1+\Theta^t) - \eta_j^t(\Delta))}{1+\Theta^t+W_B^t}, \end{aligned} \tag{4.3}$$

where $\Delta \in \mathcal{B}$,

$$\Theta^t = \sum_{i \in I_A, j \in I_B} (H\Psi_i^t, \Phi_j^t), \quad W_A^t = \sum_i \eta_i^t(X), \quad W_B^t = \sum_j \eta_j^t(X), \tag{4.4}$$

and where the occupation measures $\eta_i^t(\cdot)$ and $\eta_j^t(\cdot)$ are defined under assumption that every Ω_i is a set of absolute domination for μ_{Ψ_i} in the sense that:

$$\mu_{\Psi_i}(\Delta') \geqslant \nu_i(\Delta'), \quad \forall \Delta' \subseteq \Omega_i, \tag{4.5}$$

and similarly every Ω_j, $j \in I_B$ is a set of absolute domination for μ_{Φ_j}:

$$\mu_{\Phi_j}(\Delta') \geqslant \nu_j(\Delta'), \quad \forall \Delta' \subseteq \Omega_j, \tag{4.6}$$

where measures ν_i, ν_j are defined as the "mean fields" created by the opponent sides:

$$\nu_i(\Delta) = 1/m_B \sum_{j \in I_B} \mu_{\Phi_j}(\Delta) + 1/(m_A - 1) \sum_{k \neq i} \mu_{\Psi_k}(\Delta),$$

$$\nu_j(\Delta) = 1/m_A \sum_{i \in I_A} \mu_{\Psi_i}(\Delta) + 1/(m_B - 1) \sum_{k \neq j} \mu_{\Phi_k}(\Delta).$$

That is, $\eta_i^t(\cdot)$, $\eta_j^t(\cdot)$ are defined as it was described in Subsection 3.4 starting with signed measures $\omega_i := \mu_{\Psi_i} - \nu_i$ and $\omega_j := \mu_{\Phi_j} - \nu_j$.

Then the minimizing problem for above fixed condenser $\Omega = \sigma(Q)$ of view (4.2) with above assumptions (4.5) and (4.6), admits unique solution γ_Ω in the following space of probability measures

$$\mathcal{M}_+^1(\Omega) \times \mathcal{M}_+^1(\Omega) :=$$

$$:= \{\mu_{\Psi_i},\ \mu_{\Phi_j}, \Psi_i \in \mathcal{D}(H_A), \Phi_j \in \mathcal{D}(H_B),\ \|\Psi_i\| = \|\Phi_j\| = 1\}.$$

In particular, it means that there exists the trajectory of DSC that converges to the equilibrium signed measure $\gamma_\Omega = \gamma_{\Omega_-} + \gamma_{\Omega_+}$ where

$$\gamma_{\Omega_+} = \lim_{t\to\infty} \sum_{i\in I_A} \mu^t_{\Psi_i}, \qquad \gamma_{\Omega_+} = \lim_{t\to\infty} \sum_{j\in I_B} \mu^t_{\Phi_j}.$$

Here we represent only some arguments for proving of the above theorem. At first, we remark that in according Theorems 3.5 and 3.7, there exist limiting measures

$$\mu^\infty_{\Psi_i} = \lim_{t\to\infty} \mu^t_{\Psi_i}, \qquad \mu^\infty_{\Phi_j} = \lim_{t\to\infty} \mu^t_{\Phi_j}, \qquad i \in I_A, j \in I_B,$$

which are supported on the corresponded subsets Ω_i or Ω_j, respectively. The last fact follows from assumption that for every starting measure μ_{Ψ_i} or μ_{Φ_j} the set Ω_i or respectively Ω_j is a set of absolute domination:

$$\mu_{\Psi_i}(\Delta') \geqslant \nu_i(\Delta'), \qquad \forall \Delta' \subset \Omega,$$
$$\mu_{\Phi_j}(\Delta') \geqslant \nu_j(\Delta'), \qquad \forall \Delta' \subset \Omega.$$

By this, the values of occupation measures $\eta^t_i(\Delta')$, $\eta^t_j(\Delta')$, which, we recall, estimate the "intervention strength" of opponents and the "strength of competition" with $\mu^t_{\Psi_k}$, $k \neq i$ and $\mu^t_{\Phi_k}$, $k \neq j$, respectively, on sets Ω_i, Ω_j converges to zero with $t \to \infty$ for any $\Delta' \subseteq \Omega_i$ and $\Delta' \subseteq \Omega_j$. And vice versa, by the same reason of absolute dominance, values of all measures $\mu^t_{\Psi_i}(\Delta')$ and $\mu^t_{\Phi_j}(\Delta')$ goes to zero when Δ' did not belong to Ω_i and Ω_j, respectively.

Note that $\eta_\mu(\Delta)$ has a similar but opposite meaning, it evaluates the strength of occupation of another opponent which is represented by μ on a set Δ, where now ν has absolute dominance.

Here it is worth recalling the property of absolute dominance in the abstract case. Consider a couple of probability measures $\mu, \nu \in \mathcal{M}^+(X)$, $\mu \neq \nu$. Assume that for some Δ one of the measures μ or ν has a local priority with respect other. It means that for any Borel $\Delta' \in \Delta$ following inequality is fulfilled:

$$\mu(\Delta') \geqslant \nu(\Delta') \qquad \text{or} \qquad \mu(\Delta') \leqslant \nu(\Delta').$$

Using this tool we introduce on of the main characteristic of an opponent, its dominant territory as the maximal subset where one of above inequalities are fulfilled. In the case of two measures, this problem has a solution in terms of the classical Hahn decomposition for the charge $\omega = \mu - \nu$.

In the theory for conflict dynamical systems with many alternative opponents associated with an arbitrary family of probability measures $\{\mu_i\}$ on the measurable space $(\Omega, \mathcal{B})$ there appears a similar task as a part of the equilibrium states problem. Importantly that supports of limiting measures corresponding to the equilibrium state just coincide with subsets from decomposition of Ω into the maximal regions of dominance for each measure μ_i over all others in the sense, $\mu_i(F) \geqslant \mu_k(F)$, $\forall k \neq i$.

We assert that under fixed integral kernel κ constructed by a suitable operator H, the minimizing measures γ_i for each subset Ω_i admits construction among a family of the limiting measures μ_i^∞ which appear in DSC with arbitrary sets of starting opponent components $m = m_A + m_B < \infty$.

It should be noted that above the decomposition (4.2) was originally fixed, while in theory the complex systems composed with a family of $m \geqslant 2$ advisories, say $A, B, C, \ldots$ which are associated with probabilities measures μ_i, $i \geqslant 3$ on a space $(\Omega, \mathcal{B})$ the analogous decomposition

$$\Omega = \bigcup_{i=1}^{m} \mathbf{\Omega}_i^+$$

appears as result of long fighting. Here $\mathbf{\Omega}_i^+$ is not unique and dependents on the starting relations between measures μ_i. Therefore, it coincides with the union of all subsets of absolute dominance for one of the opponents. Equivalently, this means that every μ_i exceeds all other measures in the sense that

$$\mu_i(F) \geqslant \mu_k(F), \quad \forall k \neq i, \quad \forall F \subseteq \mathbf{\Omega}_i^+ \bigcap \mathcal{B}.$$

Although the same set also appears as support of the limit measure μ_i^∞.

In fact, it is a nontrivial problem to generalize the above kind of decomposition for a case of several opponents. From the one hand side it may be performed using the classic Hahn-Jordan decomposition for each couple of measures μ_i, ν_i which define a signed measure $\omega_i = \mu_i - \nu_i$, where

$$\nu_i := 1/(m-1) \sum_{k \neq i} \mu_k.$$

The difficulties connected with a fact that $\mu_i(F) \geqslant \nu_i(F)$ does not imply that $\mu_i(F) \geqslant \mu_k(F)$ for $k \neq i$ and therefore the set of absolute domination for μ_i in general is less than a positive subset of ω_i. So we need to extend the classic Hahn-Jordan decomposition into positive and negative components, $\omega = \omega_- + \omega_+$, on the case of multipolar expansions for a family of signed measures: $\omega_{i,k} = \mu_i - \mu_k,\ i, k \in \overline{[1, m]}, m \geqslant 3$. On the other hand in the theory of DSC with many opponents, this problem is closely related to the problem of finding equilibrium states and the limiting redistribution of resource space as a result of the conflict interaction.

4.2. **A case of conflict interaction between a finite number of abstract societies.** Let A_i, $i \in \overline{1, m}$ denote $m > 1$ abstract societies living in the resource territory $\Omega \subset X$, which is a compact set in $\mathbb{R}^n$. Match each

A_i with a set of some individuals. Mathematically, this means a family of vectors Ψ_{α_i}, $\alpha_i \in I_i < \infty$ in the Hilbert space $\mathcal{H}$ or probability measures $\mu_{\alpha_i} \in \mathcal{M}_1^+(\Omega)$ associated with the vectors Ψ_{α_i} in the spectral representation of the position operator Q with $o(Q) = \Omega$. We assume that each A_i has priority in some region $\Omega_i \subset \Omega$ of the resource area. In other words, Ω_i denotes the domain of absolute dominance for the family of measures μ_{α_i}:

$$\Omega_i = \cup_F \big\{\mu \in \mathcal{M}_1^+(X) \mid \mu_{\alpha_i}(E) \geqslant \mu_{\alpha_k}(E),\ \forall E \subseteq F,\ \forall k \neq i\big\}.$$

Let $\{A_i, \Omega = \bigcup_i \Omega_i,\ \bigstar\}$ denote the dynamical system of conflict between abstract societies A_i. Here $\bigstar$ and corresponds to the law of conflict interaction and controls the behavior of trajectories in terms of vectors $\Psi^t_{\alpha_i}$ or measures $\mu^t_{\alpha_i}$, $t = 0, 1, \dots$ The mathematical definition of $\bigstar$ depends on the specific real model. In general, in what form this mapping is implemented, the question is open. It can be constructed similarly to formulas (4.3) with additional terms corresponding to the division of the entire system into clusters. The question about the form of the energy functional Θ^t, see (4.4), is especially important since it is defined by some Hamiltonian H whose inverse H^{-1} and its quadratic form $(H^{-1}\cdot, \cdot)_{\mathcal{H}}$ is used for construction of the integral kernel $\kappa_H(\cdot, \cdot) \equiv \kappa(\cdot, \cdot)$. The question of the form of the energy functional Θ^t, see (4.4), is particularly important, since it is determined by some Hamiltonian H, the inverse of which H^{-1} and its quadratic form $(H^{-1}\cdot, \cdot)_{\mathcal{H}}$ is used to construct the integral kernel $\kappa_H(\cdot, \cdot) \equiv \kappa(\cdot, \cdot)$.

Thus, under all technical assumptions about the structure of the resource space $\Omega = \bigcup_i \Omega_i$, as a generalized condenser, the kernel κ_H, and the properties of the potential function $\kappa(x, \mu)$, where the measures of μ we take from $\mathcal{M}_1^+(\Omega)$ (for details see [41–45]), we can formulate our hypothesis in the form of a theorem as follows.

Theorem 4.3. *The minimizing measure $\gamma_\Omega = \sum_i \gamma_i$ for which*

$$\kappa(\gamma_\Omega, \gamma_\Omega) = \|\gamma_\Omega\|^2 \quad \text{and} \quad \kappa(\gamma_i, \gamma_i) = c_\kappa(\Omega_i),$$

where $c_\kappa(\cdot)$ is the capacity of the set Ω_i can be defined among the family of limit measures μ_i^∞ that arise in the above-described dynamical system of conflict with arbitrary sets of starting combinations $\mu_i \in \mathcal{M}_i(\Omega)$.

It is important that the minimizing measure γ_Ω as an equilibrium state of the conflict system allows approximate construction using iterative sequences according to formulas of the type (4.3).

Finally, we note that an essential technical trick in the proof of the above theorem is based on the notion of inner balayage for measures in the sense of the following definition [45].

For the set $\Omega_i \subset \Omega$, the inner balayage μ^{Ω_i} $\mu \in \mathcal{M}^+(\Omega)$ is defined as the measure with minimum energy $\kappa(\nu, \nu)$ in the class

$$\Gamma^+_{\Omega_i,\mu} := \{\nu \in \mathcal{M}^+(\Omega) \mid \kappa(\cdot, \nu) \geqslant \kappa(\cdot, \mu) \text{ on } \Omega_i\},$$

i.e.

$$\|\mu^{\Omega_i}\|^2 = \min_{\nu \in \Gamma^+_{\Omega_i,\mu}} \|\nu\|^2.$$

References

[1] D. R. Adams and D. R. Hedberg. *Function Spaces and Potential Theory*. Springer-Verlag, Berlin, 1966.

[2] S. Albeverio, M. Bodnarchyk, and V. Koshmanenko. Dynamics of discrete conflict interactions between non-annihilating opponent. *Methods of Funct. Anal. Topol.*, 11(4):309–319, 2005.

[3] S. Albeverio, F. Gesztesy, R. Høegh-Krohn, and H. Holden. *Solvable Models in Quantum Mechanics*. Springer-Verlag, Berlin, 1988.

[4] S. Albeverio, V. Koshmanenko, and I. Samoilenko. The conflict interaction between two complex systems: Cyclic migration. *J. Interdisciplinary Math.*, 11(42):163–185, 2008. doi:10.1080/09720502.2008.10700552.

[5] R. Axelrod. The dissemination of culture: A model with local convergence and global polarization. *J. Conflict Resolution*, 42(2):203–226, 1997. doi:10.1177/0022002797041002001.

[6] N. Bellomo, F. Brezzi, and M. Pulvirenti. Modeling behavioral social systems. *Math. Models and Methods in Appl. Sci.*, 27(1):1–11, 2017. doi:10.1142/S0218202517020018.

[7] N. Bellomo, M. Herrero, and A. Tosin. On the dynamics of social conflicts: looking for the black swan. *Kinetic And Related Models*, 6(3):459–479, 2013. doi:10.3934/krm.2013.6.459.

[8] N. Bellomo and J. Soler. On the mathematical theory of the dynamics of swarms viewed as complex systems. *Math. Models Methods Appl. Sci.*, 22:29, 2012. doi:10.1142/S0218202511400069.

[9] Yu. M. Berezansky. *Expansions in eigenfunctions of self-adjoint operators*. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1968.

[10] G. Deffuant, D. Neau, F. Amblard, and G. Weisbuch. Mixing beliefs among interacting agents. *Adv. Compl. Syst.*, 3:87–98, 2000. doi:10.1142/S0219525900000078.

[11] M. H. Degroot. Reaching a consensus. *J. of the American Statist. Association*, 69:291–293, 1974. doi:10.1080/01621459.1974.10480137.

[12] J. L. Doob. *Classical Potential Theory and Its Probabilistic Counterpart*. Springer, Berlin, 1984.

[13] N. Dunford and J. T. Schwartz. *Linear Operators, Part 1: General Theory*. Interscience publ., NY, London, 1958.

[14] J. M. Epstein. *Nonlinear dynamics, mathematical biology, and social science*. Addison-Wisley Publ. Co., 1997.

[15] J. M. Epstein. Why model? *J. of the American Statist. Association*, 11:412, 2008. URL: https://www.jasss.org/11/4/12.html.

[16] A. Flachea, M. Mäsa, T. Feliciania, E. Chattoe-Brownb, G. Deffuantc, S. Huetc, and J. Lorenzd. Models of social influence: Towards the next frontiers. *J. of Artificial Societies and Social Simulation*, 20(4):2JASSS, 2017. doi:10.18564/jasss.3521.

[17] N. E. Friedkin and E. C. Johnsen. *Social Influence Network Theory*. Cambridge Univer. Press, NY, 2011. doi:10.1017/CBO9780511976735.
[18] B. Fuglede and N. Zorii. Green kernels associated with Riesz kernels. *Ann. Acad. Sci. Fenn. Math.*, 43:121–145, 2018. doi:10.5186/aasfm.2018.4305.
[19] P. Glendinning. *Stability, instability and chaos*. Cambridge, 1994.
[20] Hu. Haibo. Competing opinion diffusion on social networks. *R. Soc. Open Sci.*, 4:171160, 2017. doi:10.1098/rsos.171160.
[21] R. Hegselmann and U. Krause. Opinion dynamics and bounded confidence models, analysis and simulations. *J. Artificial Societies and Social Simulation*, 5(3):1–33, 2002. URL: https://jasss.soc.surrey.ac.uk/5/3/2.html.
[22] H. Hong and S. H. Strogatz. Conformists and contrarians in a Kuramoto model with identical natural frequencies. *Phys. Rev. E*, 84:046202, 2011. doi:10.1103/PhysRevE.84.046202.
[23] M. Jalili. Social power and opinion formation in complex networks. *Physica A: Stat. Mech. and its Appl.*, 392:959–966, 2013. doi:10.1016/j.physa.2012.10.013.
[24] T. Karataieva and V. Koshmanenko. Origination of the singular continuous spectrum in the dynamical systems of conflict. *Methods of Funct. Anal. Topology*, 15:15–30, 2009. URL: http://mfat.imath.kiev.ua/article/?id=461.
[25] T. V. Karataieva, V. D. Koshmanenko, M. J. Krawczyk, and K. Kulakowski. Mean field model of a game for power. *Physica A: Stat. Mech. and its Appl.*, 525:535–547, 2019. doi:10.1016/j.physa.2019.03.110.
[26] T. Kato. *Perturbation theory of linear operators*. Springer-Verlag, 1976.
[27] S. MD. M. Khan and K. I. Takahashi. Segregation through conflict. *Advances in Appl. Sociology*, 3:315–319, 2013. doi:10.1016/j.jdeveco.2015.05.002.
[28] V. Koshmanenko. A theorem on conflict for a pair of stochastic vectors. *Ukrainian Math. J.*, 55:671–678, 2003. URL: https://umj.imath.kiev.ua/index.php/umj/article/view/3930.
[29] V. Koshmanenko. Theorem of conflicts for a pair of probability measures. *Math. Methods of Operations Research*, 59:303–313, 2004. doi:10.1007/s001860300330.
[30] V. Koshmanenko. The infinite direct products of probability measures and structural similarity. *Methods Funct. Anal. Topology*, 17:20–28, 2011. URL: http://mfat.imath.kiev.ua/article/?id=571.
[31] V. Koshmanenko. Existence theorems of the ω-limit states for conflict dynamical systems. *Methods Funct. Anal. Topology*, 20(4), 2014.
[32] V. Koshmanenko. *Spectral theory for conflict dynamycal systems*. Naukova dymka, Kyiv, 2016. URL: http://mfat.imath.kiev.ua/article/?id=744.
[33] V. Koshmanenko and M. Dudkin. The method of rigged spaces in singular perturbation theory of self-adjoint operators. In *Operator Theory: Advance and Applications*, volume 253. Birkhäuser, 2016. doi:10.1007/978-3-319-29535-0.
[34] V. Koshmanenko and I. Verygina. Dynamical systems of conflict in terms of structural measures. *Methods Funct. Anal. Topology*, 22:81–93, 2016. URL: http://mfat.imath.kiev.ua/article/?id=843.
[35] V. Koshmanenko and I. Verygina. On optimal strategy in models of the conflict redistribution of a resource space. *Ukrainian Math. J.*, 69:1051–1059, 20167. doi:10.1007/s11253-017-1414-7.
[36] V. D. Koshmanenko and S. M. Petrenko. The Hahn-Jordan decomposition as the equilibrium state of a conflict system. *Ukraïn. Mat. Zh.*, 68(1):64–77, 2016. doi:10.1007/s11253-016-1209-2.

[37] V. D. Koshmanenko and O. R. Satur. Sure event problem in multicomponent dynamical systems with attractive interaction. *J. Math. Sci.*, 249(4):629–646, 2020. doi:10.1007/s10958-020-04962-3.

[38] N. S. Landkof. *Foundations of Modern Potential Theory.* Springer, Berlin, 1972.

[39] J. von Neumann and O. Morgenstern. *Theory of Games and Economic Behavior.* Princeton Univer. Press, 1944.

[40] S. Wiggins. *Introduction To Applied Nonlinear Dynamical Systems And Chaos.* Springer-Verlag, 2003. doi:10.1007/b97481.

[41] N. Zorii. Equilibrium problems for infinite dimensional vector potentials with external fields. *Potential Anal.*, 38:397–432, 2013. doi:10.1007/s11118-012-9279-8.

[42] N. Zorii. Necessary and sufficient conditions for the solvability of the gauss variational problem for infinite dimensional vector measures. *Potential Anal.*, 41:81–115, 2014. doi:10.1007/s11118-013-9364-7.

[43] N. Zorii. A theory of inner Riesz balayage and its applications. *Bull. Pol. Acad. Sci. Math.*, 68:41–67, 2020. doi:10.4064/ba191104-31-1.

[44] N. Zorii. Harmonic measure, equilibrium measure, and thinness at infinity in the theory of Riesz potentials. *Potential Anal.*, 69:1051–1059, 2021. doi:10.1007/s11118-021-09923-2.

[45] N. Zorii. On the theory of capacities on locally compact spaces and its interaction with the theory of balayage. *Potential Anal.*, 69:1051–1059, 2022. doi:10.1007/s11118-022-10010-3.

Volodymyr Koshmanenko
Institute of mathematics of NAS of Ukraine, Kyiv, 01004, Ukraine
Email: koshman63@gmail.com
ORCID: 0000-0002-7108-4964

Збірник праць Ін-ту математики НАН України (2023) т. 20, №1, 873–895

Розширені можливості аналітичної механіки суцільного середовища

О. С. Лимарченко

Abstract. Advanced potentials of analytical mechanics of continuum medium and sources promoted the appearance, development and high achievements of this direction of research namely in Ukraine are under discussion. We traced connections of this direction with D. O. Grave and his follower M. O. Kilchevsky. We shortly state and show by examples new elements of this approach and its advantages. It is shown that similar research are developed now in Ukraine.

Анотація. Обговорюються розширені можливості аналітичної механіки суцільного середовища і джерела, які сприяли виникненню, розвитку і високим досягненням такого напрямку досліджень саме в Україні. Відстежуються зв'язки цього напрямку досліджень з Д. О. Ґраве і його учнем М. О. Кільчевським. Скорочено викладено і проілюстровано на ряді прикладів нові елементи такого підходу і його переваги. Показано, що подібні дослідження і дотепер розвиваються саме в Україні.

Вступ

При викладенні теоретичної механіки та деяких розділів фізики переважно аналітичній механіці відводиться роль деякого апарата, який по аналогії з другим законом Ньютона дозволяє одержати математичну модель системи у вигляді диференціальних рівнянь. Специфічною особливістю методів аналітичної механіки є те, що на простих прикладах усі переваги такого підходу не розкриваються, проте надмірна громіздкість і складність мають місце. Оскільки у звичайних вишівських курсах обмежуються саме такими прикладами, то загальне враження від методів аналітичної механіки залишається таке, що цей підхід не є конструктивним, а є лише методичним. В більшості вишів методи аналітичної механіки суцільних середовищ взагалі не вивчаються. Коли М. О. Кільчевському в різних обговореннях щодо методів аналітичної механіки казали про подібну обмеженість аналітичної механіки, то він часто вживав відомий афоризм Д. І. Менделєєва «Нафта не паливо,

2020 Mathematics Subject Classification: 70H25, 01A72

Ключові слова: Ґраве; Кільчевський; принцип Гамільтона; в'язі; коливання рідини з вільною поверхнею

DOI: http://dx.doi.org/10.3842/trim.v20n1.531

опалювати можна й асигнаціями». В роботі буде дано опис розширених можливостей методів аналітичної механіки суцільних середовищ в теоретичному і конструктивному напрямках.

1. Микола Олександрович Кільчевський, 1909–1979

Мені пощастило бути аспірантом академіка АН УРСР Миколи Олександровича Кільчевського. Під час навчання в Київському університеті він мені не читав лекції, але за підказкою досвідчених доцентів кафедри теоретичної механіки, на якій я проходив спеціалізацію, я познайомився з М. О. Кільчевським і після коротких обговорень і уточнень теми дипломної роботи саме під його керівництвом я провів дослідження задачі про імпульсне збурення руху стисливого газу в циліндричній камері. В ході двох зустрічей з ним я одержав пропозицію вступити до нього в аспірантуру. Для мене було дивним, але щонайменше п'ять осіб з університету і з Інституту механіки АН УРСР застерігало мене від вступу в аспірантуру саме до М. О. Кільчевського. Але я пообіцяв, перейшов на роботу в Інститут механіки АН УРСР, вступив до аспірантури, достроково захистив кандидатську дисертацію і ніколи не шкодував що пішов працювати саме з М. О. Кільчевським. Спочатку М. О. Кільчевський прохолодно до мене відносився, проте «проекзаменувавши» мене по ряду питань (наукових і загальних) став відноситися більш приязно. На моє прохання визначити мені тему дисертації він відповів, що дурням визначає теми сам, а розумні це мають робити самостійно. Через тиждень я запропонував тему, яку він схвалив, хоча відмітив, що очікував інший напрямок. Так я став займатися задачами динаміки конструкцій з рідиною з вільною поверхнею, причому з перших кроків в сумісній і в нелінійній постановці. Нашим бесідам не лише за темою моєї роботи сприяло те, що Б. Є. Патон, який сам слухав лекції М. О. Кільчевського, направляв Миколі Олександровичу на експертизу проєкти всіх «вічних двигунів» і «безінерційних рушіїв», які надходили до Президії АН УРСР. Зазвичай М. О. Кільчевский давав по черзі такі проєкти своїм аспірантам, а потім уважно слухав підготовлені версії відгуків аспірантів, уточнював їх і за підписами академіка та аспіранта цей відгук повертався до Президії АН УРСР. Поступово я «набив руку» і майже всі відгуки писав сам. При обговоренні таких проєктів дрібниць не було. Я підлягав жорсткій критиці як за манери побудови речень на наукові теми, так і за стиль написання. За що я безмежно вдячний М. О. Кільчевському: стиль викладення матеріалу він мені прищепив. Часто також М. О. Кільчевський доручав мені готувати відгуки на автореферати дисертацій.

М. О. Кільчевський не був би собою якби під час різних обговорень таких проєктів і моїх досліджень він би не робив посилання на свій попередній досвід, своїх колег і свою наукову школу. З величезною вдячністю він згадував Д. О. Ґраве, якого вважав своїм керівником. Згадуючи про Д. О. Ґраве Микола Олександрович завжди відзначав його наукову і культурну енциклопедичність. Він був науковим експертом по широкому колу питань, завжди звертав увагу на культурний рівень співробітників. Учениця Д. О. Ґраве Т. В. Путята розповідала що на квартирі Д. О. Ґраве відбувалися зустрічі аспірантів і співробітників, на яких обов'язковою складовою було виконання музичних партій на фортеп'яно. Більш того, Д. О. Ґраве міг сказати приблизно наступне: «Ваше виконання цього твору свідчить, що сьогодні ви не готові до наукової консультації». Тобто він через музику бачив духовний стан і схильність до творчості. Він вчив всіх добрим манерам, новинкам культури та новим поглядам в науці. М. О. Кільчевський розповідав, що Д. О. Ґраве все життя відточував свою лекційну майстерність. З посмішкою він розповідав про один методичний винахід Д. О. Ґраве. Щоб наголосити, що деякі величини в математиці й механіці не є малими, він малював диференціал і деякі вектори ледь не на всю дошку, при цьому він сильно вдаряв крейдою в точці початку вектора, а потім через декілька кроків вздовж дошки завершував новим ударом по дошці кінець вектора. Тому, коли інколи було чутно значний шум, то всі з посмішкою казали, що турбуватися не треба, просто Д. О. Ґраве дійшов до зображення диференціала. Д. О. Ґраве казав, що на лекції викладач має бути й знавцем, і педагогом, і актором одночасно.

На початку минулого століття в механіці було два потужних «стрибка»: первинне формування асимптотичних методів нелінійної механіки та перегляд деяких положень плідної на той час теорії оболонок. Ще А. Айнштайн вказав на певну суперечність теорії оболонок, яке було пов'язане з тим, що класичні методи теорії оболонок приводили до еліптичних крайових задач з нескінченими швидкостями поширення збурень, а фізично вірогідними мали б бути гіперболічні постановки задач, яким притаманні скінчені швидкості поширення збурень. Відомо про контакти Д. О. Ґраве з А. Айнштейном з питань теорії відносності (я не бачив офіційного підтвердження цього, проте були згадки про це) і не виключено, що й ширше коло питань обговорювалося ними. В Київському політехнічному інституті в ті часи працював С. П. Тимошенко, який в контакті з П. С. Еренфестом створив теорію балок і оболонок, яка вже призводила до систем рівнянь гіперболічного типу. Проте ця теорія, яка включала інерцію зсувних рухів перерізів пружних тіл, не виглядала строго математично обґрунтованою. З точки зору М. О. Кільчевського це була теорія, що включала додаткову механічну гіпотезу, яка не виглядала бездоганно обґрунтованою. Тому на початку 30-х років минулого століття М. О. Кільчевський і незалежно І. М. Векуа почали створення нових математично обґрунтованих теорій оболонок. Як підсумок такої успішної роботи М. О. Кільчевський в 1939 році захистив докторську дисертацію. Через смерть Д. О. Ґраве науковим консультантом цієї роботи виступив І. Я. Штаєрман. Пізніше М. О. Кільчевський був залучений до виконання різних оборонних замовлень, а потім зосередив свою увагу на задачі про динамічне контактне стискання твердих тіл, за що був нагороджений Державною премією УРСР, а потім послідовно був обраний членом-кореспондентом АН УРСР і академіком АН УРСР. Крім того М. О. Кільчевський був обраний до складу бюро Національного Комітету СРСР з теоретичної та прикладної механіки, що автоматично включало його до складу запрошених гостей на засідання Академії наук СРСР, тому він був у курсі всіх основних новин наукового життя і мав численні контакти з колегами не лише з України.

М. О. Кільчевському належить видатний двотомний підручник з теоретичної механіки. Ця книга є не лише книгою з теоретичної механіки, а є ще й видатною роботою з філософії природничих наук. В 90-ті роки я познайомився з академіком НАН України М. В. Поповичем, відомим філософом, політиком. Він розповідав, що у свої молоді роки читав лекції з філософії природознавства студентам, інженерам. Одного разу після лекції він одержав від досвідченого слухача значну порцію критики та настанову, що йому слід прочитати підручник з теоретичної механіки М. О. Кільчевського, щоб впорядкувати свої знання. М. В. Попович розповідав мені, що він був в захваті від цього підручника і навіть не очікував що одержить таке джерело для подальшого розуміння проблем. Що вже казати про значення цього підручника для фахівців-механіків. Характерною рисою цього підручника є викладення механіки як складової частини природознавства в цілому і математики, а не просто інженерії, що безумовно було зроблено під впливом робіт Д. О. Ґраве [9, 15].

Надалі М. О. Кільчевський приділив основну увагу розвиненню методів аналітичної механіки континуальних систем. Він зі співавторами випустив три монографії «Основы аналитической механики оболочек», «Лекции по аналитической механике оболочек», «Аналитическая механика континуальных систем». Роки, стан здоров'я брали своє і свою публікаційну активність він знизив. Проте мені пощастило під час численних зустрічей з М. О. Кільчевським обговорити багато наукових і науково-методичних проблем аналітичної механіки та, я думаю, вірно зрозуміти його ставлення до багатьох етапів цієї теорії, основні етапи якої я надалі спробую донести до читачів. Звичайно ці положення значною мірою переломлені через мій досвід і моє засвоєння (сподіваюся не хибне) цих проблем.

2. Основні переваги методів аналітичної механіки в задачах руху суцільних середовищ

Викладення матеріалу в цьому розділі проводиться на основі ідей і формулювань М. О. Кільчевського, але в моїй інтерпретації й з моїми осучасненими уточненнями та доповненнями й переважно не на основі статей, книжок, а на основі бесід під час консультацій в період мого навчання в аспірантурі. Тому за всі неточності та недоліки беру відповідальність на себе.

Варіаційні принципи механіки бувають різними. В основному їх поділяють на дві групи: диференціальні та інтегральні принципи. Між собою ці принципи поділяються як формою функціоналів, так і вибором рухів порівняння. Традиційно випадки, коли не існує функціоналів, а є лише варіаційні співвідношення, називають варіаційними принципами умовно. М. О. Кільчевський особливу глибину змісту бачив саме у виборі рухів порівняння. Багаторічні дослідження в галузі варіаційних принципів свідчать про те, що найчастіше використовується варіаційний принцип Гамільтона – Остроградського, який до того ж є найбільш універсальним і конструктивним в плані одержання прикладних результатів. Тому надалі в цій роботі будемо орієнтуватися на цей варіант варіаційного принципу. Насамперед слід визначити співвідношення між системою законів Ньютона і варіаційними принципами механіки. Значна частина дослідників відводять варіаційному принципу Гамільтона – Остроградського підпорядкований статус, ставлячи на перше місце закони Ньютона. В більшості підручників з механіки доведенням коректності варіаційного принципу вважається те, що варіаційний принцип Гамільтона – Остроградського можна вивести з рівнянь Ньютона (коректніше з диференціального варіаційного принципу Даламбера – Лагранжа). Проте ще з часів П. Мопертюї має право на життя й інша думка, що в побудові основних законів механіки варіаційні принципи та закони Ньютона є еквівалентними [14].

Найбільш повно основні переваги варіаційних принципів механіки були викладені в [14]. В основному вони зводяться до таких властивостей.

1. Інваріантність формулювань варіаційних принципів відносно геометрії вивчаємих областей, що створює значні переваги при дослідженні задач з неканонічними формами областей.

2. Використання варіаційних принципів в механіці суцільних середовищ забезпечує коректність постановки крайових задач. При цьому кінематичні граничні умови є неодмінною складовою частиною реалізації варіаційних принципів і мають бути задовільнені заздалегідь, а динамічні граничні умови є природними для варіаційних формулювань задач. Тому форма і кількість граничних умов є невіддільною складовою реалізації варіаційного апарату. Більш того, цей апарат не буде працювати для некоректно поставлених задач, що відразу викликає потребу в ревізії вихідної постановки проблеми і, більш того, вказує на місце, де ця ревізія потрібна.

3. Варіаційні принципи природним чином описують рух всіх компонент системи та її взаємодію на основі властивості адитивності енергетичних характеристик. Варіювання призводить до одержання в аналітичному вигляді сил взаємодії між компонентами. Адитивність енергетичних характеристик дозволяє поєднувати механічні системи з підсистемами немеханічної природи, наприклад, з тепловими явищами, електромагнітними тощо.

4. Основні складності методичного типу, які потребують значної уваги при застосуванні методів розв'язання заснованих на постановках задач в диференціальному вигляді, стають схованими при формальній реалізації алгоритмів варіаційних методів і долаються на етапі формального виконання техніки варіювання.

Існує також розширення варіаційного принципу на релятивістські системи, проте тут ми не будемо аналізувати цю тему. Зазвичай вважалося що саме цим вичерпувалися можливості варіаційних принципів. М. О. Кільчевський наголошував, що головним у варіаційних принципах механіки є не саме екстремальне співвідношення, а вибір варіацій змінних, рухів порівняння. Нагадаємо, що в варіаційному принципі Гамільтона – Остроградського варіації змінних визначають рухи порівняння та обираються як можливі переміщення додатково наділені вимогою ізохронності. Отже, в підсумку рухи порівняння визначаються як

1) малі переміщення точок системи,
2) які в заданий момент часу (час зупинено)
3) задовольняють кінематичним обмеженням задачі (в'язям, а у випадку суцільного середовища ще і іншим обмеженням) і є
4) ізохронними.

Отже, пункт 1) визначає техніку варіювання функціонала, пункти 2) і 3) визначають характер задовільнення в'язей, а пункт 4) дозволяє специфікувати екстремалі. Головною проблемою є звичайно задовільнення в'язей. М. О. Кільчевський взагалі вважав, що «аналітична механіка є наукою про в'язі». На основі аналізу в'язей і їх порівняння згідно з його підходом можна зробити багато корисних висновків про поведінку системи.

Новим елементом, який був відзначений у бесідах із М. О. Кільчевським було визначення міри обмеження руху системи, яке накладається в'язями. Передумовою є відома теорема [8] про збільшення частот коливань при накладанні в'язей. Покажемо хід такого аналізу на прикладі руху резервуара з рідиною. Відомо, що сумісний рух резервуара з рідиною з вільною поверхнею описується достатньо складною моделлю [13], проте у випадку задачі про визначення частот задача значно спрощується. Система резервуар – рідина при поступальному і кутовому рухах тіла–носія в режимі сумісного руху складових системи в рамках лінійної моделі з утриманням в рівняннях лише першої антисиметричної форми коливань рідини описується такою математичною моделлю:

$$\begin{aligned}
&\ddot{a_1} + \frac{1}{\alpha_1^v}\ddot{\varepsilon_x}B_{1x}^1 + \frac{1}{\alpha_1^v}\ddot{\alpha_2}E_{11}^{1*} + \omega_1^2 a_1 = 0,\\
&\frac{\rho}{M_r + M_l}\ddot{a_1}B_{1x}^1 + \ddot{\varepsilon_x} + \frac{\rho}{M_r + M_l}\ddot{\alpha_2}F_2^1 = 0,\\
&\ddot{a_1}E_{11}^{1*} + 2\ddot{\varepsilon_x}F_2^1 + 2\ddot{\alpha_2}\left(\frac{1}{\rho}J_{res}^{22} + E_{11}^2\right) +\\
&\qquad + \alpha_2\frac{2g}{\rho}\left[M_r\left(l + \frac{H}{4}\right) + M_l\left(l + \frac{H}{2}\right)\right] = 0.
\end{aligned} \tag{2.1}$$

Тут a_1 амплітуда збудження коливань рідини за першою антисиметричною формою, ε_x і α_2 – параметри поступального і кутового руху резервуара. Ці параметри є незалежною сукупністю параметрів, які повністю характеризують рух системи. В рівняннях також використано такі позначення ρ – густина рідини, g – прискорення вільного падіння, H – рівень заповнення, M_r і M_l – маса резервуара і рідини, h_l і h_r – зміщення центрів ваги рідини і резервуара відносно площини незбуреної вільної поверхні, I_{res}^{ij} – тензор інерції резервуара, визначений відносно полюса, стосовно якого описується обертання резервуара. Індексні коефіцієнти є мірами зв'язаності руху рідини в резервуарі із поступальним і кутовим рухом (вони докладно проаналізовані в [13]).

Розглянемо дві задачі. Нехай резервуар не рухається. В цьому випадку друге і третє рівняння системи (2.1) виключаються, а з першого рівняння визначається частота коливань рідини:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{\kappa_1 g}{R}\tanh\frac{\kappa_1 H}{R}}.$$

Розглянемо другу задачу. Нехай тепер резервуар може здійснювати рух в горизонтальному напрямку. Що відбулося з точки зору аналізу в'язей? Фактично в'язь, яка обмежувала поступальний рух, знята. Виходить, що частота має зменшитися. Проте, визначення частоти сумісних коливань системи на основі рівнянь сумісного руху призводить до такої залежності

$$\omega^2 = \frac{\omega_0^2}{1 - \dfrac{\rho (B_{1x}^1)^2}{\alpha_1^x (M_l + M_r)}}.$$

Вираз у знаменнику менший за одиницю, оскільки всі змінні додатні та, беручи до уваги що знаменник більше за нуль, виходить, що частота неочікувано збільшилася. На основі підходу аналітичної механіки та властивостей в'язей це могло відбутися лише внаслідок накладання нових в'язей. Дійсно, після зняття обмеження на поступальний рух резервуара, друге рівняння системи можна проінтегрувати та з нього одержується фактично закон збереження положення центру мас системи (це випливає також з теореми про рух центру мас системи).

Таким чином ми з'ясували що з'явилася нова в'язь, яка до того ж призвела до збільшення частоти (цю в'язь можна одержати просто безпосереднім інтегруванням другого рівняння за часом).

І тут висновок, який в літературі відсутній: *обмеження на рух, обумовленому в'язями при закріпленні резервуара, є меншими, ніж обмеження, які накладає в'язь, що визначає незмінність положення центру мас системи.* Фактично в цьому алгоритмі схований метод побудови рейтингу в'язей за мірою їхнього впливу на обмеження рухів точок системи.

В ході таких обговорень М. О. Кільчеський ще відзначав, що наслідки багатьох гіпотез, які додатково приймаються для спрощення постановок задач, можна проаналізувати до розв'язання задачі з позицій аналізу в'язі. Треба відзначити, що кінематичні обмеження в задачах механіки суцільного середовища можуть приймати незвичні форми в порівнянні із задачами механіки дискретних систем.

Наприклад, умова нерозривності (вимога суцільності руху рідини) для випадку потенціального руху ідеальної нестисливої рідини набуває вигляду $\Delta\varphi = 0$ і стає для задачі течії рідини старшим диференціальним оператором. До кінематичних обмежень слід також відносити умови збереження об'єму рідини та умови розв'язуваності крайових задач, які теж набувають незвичних форм. Проте надалі такі умови не випливають з варіаційного принципу Гамільтона – Остроградського (не є природними) і тому мають бути задовільнені на рівні кінематичних в'язей до розв'язання варіаційної задачі.

Другий принциповий момент полягає в оцінюванні потенціальних можливостей варіаційних принципів в конструктивному напрямку. За часів М. О. Кільчевського варіаційні принципи використовувалися лише для доведення їхньої еквівалентності постановкам задач виведених на основі законів Ньютона або для виведення математичної моделі системи. Найчастіше після одержання математичної моделі задачі починалося застосування різних спрощувальних гіпотез і різних методів побудови розв'язку. Однією з проблем було і те, що в складних задачах механіки, які описували сумісний рух декількох компонент системи, одержувалася математична модель неоднорідної структури, наприклад, зв'язані системи диференціальних рівнянь в частинних і повних похідних, рівняння руху рідини та пружного тіла в ейлерових і лагранжевих змінних (для яких по-різному задаються граничні умови).

Принциповою пропозицією, яка випливала зі спілкування з М. О. Кільчевським, було безпосереднє застосування різних методів розв'язання і гіпотез спрощення до варіаційного формулювання задачі. В більшості задач це приводило до одержання математичної моделі однорідної структури у вигляді системи звичайних диференціальних рівнянь відносно амплітудних параметрів руху складових механічної системи. Мало того, як правило значно спрощувалося виділення незалежних варіацій, а в більшості випадків вдавалося побудувати функцію Лагранжа відносно амплітудних параметрів і потім одержати математичну модель на основі диференціальних рівнянь Лагранжа другого роду. І тут в нагоді був метод Канторовича [11], згідно з яким для задач механіки математично обґрунтовано вдається ввести представлення розв'язку задачі з відокремленими амплітудними параметрами. Цікаво що в другій половині 90-х років з'явився метод Курхенена – Леві, в якому були використані подібні ідеї, хоча ми з М. О. Кільчевським обговорювали такі способи в другій половині 70-х, а в 1979 я захистив кандидатську дисертацію з використанням цього методу.

Для більш глибокого розуміння нововведень представимо дві схеми використання варіаційних принципів механіки. Умовно їх назвемо класична схема і модифікована схема.

Класична схема. При задовільненні всіх кінематичних обмежень задачі будується функція Лагранжа для механічної системи. При проведенні процедури виділення незалежних варіацій на виході одержуються рівняння руху системи, динамічні граничні умови, сили взаємодії між складовими компонентами системи в аналітичному вигляді. В залежності від складу компонент системи, що досліджується, одержана математична модель може мати неоднорідну математичну структуру. Звернемо увагу, що конструктивна складова в плані наближення до розв'язання системи рівнянь в принципі відсутня.

Модифікована схема. При задовільненні всіх кінематичних обмежень задачі будується функція Лагранжа для механічної системи. Форма шуканого розв'язку спрощується на основі різних ідей розділення рухів, до яких входять частотне і амплітудне розділення рухів (асимптотичні методи нелінійної механіки), просторове розділення рухів (метод Канторовича, інші варіаційні методи математичної фізики в тому числі і методи поточкової дискретизації, наприклад, метод скінчених елементів, масштабне розділення рухів на основі методу вейвлетів), використання гіпотез, емпіричних і експериментальних співвідношень. Важливою рисою використання методів розв'язання на етапі до вживання техніки варіювання є властивість вперше відмічена Л. А. Коздобою [12], яка полягає в тому, що всі наближення, що використовуються в рамках реалізації варіаційного принципу Гамільтона – Остроградського набувають властивостей ізоенергетичності. Тобто на цьому етапі використання наближень не порушує законів збереження енергії. Вживання таких методів у відриві від варіаційного принципу вже не має таких властивостей. При проведенні процедури виділення незалежних варіацій або при одержанні рівнянь на основі перетвореної функції Лагранжа на виході одержуються рівняння руху системи, які задовільняють динамічним граничним умовам, сили взаємодії між складовими компонентами системи в аналітичному вигляді, виражені в амплітудних параметрах. Одержана модель є системою звичайних диференціальних рівнянь (має однорідну математичну структуру). Кількість рівнянь моделі дорівнює кількості ступенів вільності механічної системи, тобто з точки зору розмірності така модель є мінімальною. Одержана система рівнянь просто зводиться до форми Коші, що створює передумови для подальшого використання якісних методів диференціальних рівнянь і методів чисельного інтегрування.

Саме такий підхід був основою для дослідження нелінійних коливань рідини з вільною поверхнею в сумісній постановці задачі, що дозволило вперше розв'язати задачі про рух систем при кутовому русі конструкції-носія, рух рідини в резервуарах різної геометричної форми, параметричні коливання резервуарів з рідиною, задачі керування рухом конструкцій з рідиною, динаміку трубопроводів з рідиною, що тече [1, 2, 4, 13].

Зараз варіаційні методи механіки активно використовуються в різних розділах механіки. Тенденція така, що чим складніша задача і чим більше в цій задачі складових (часто навіть немеханічної природи), тим частіше використовуються варіаційні принципи. Слід відзначити також, що традиційно українські вчені частіше використовують варіаційні принципи механіки в порівнянні з вченими інших країн. Наприклад, в Інституті математики НАН України М. О. Луковський і О. М. Тимоха активно розвивають варіаційні методи дослідження задач механіки рідини з вільною поверхнею на основі варіаційного принципу Бейтмена, а раніше співробітники цієї школи активно використовували варіаційні методи для дослідження задач про визначення частот і форм коливань рідини, включаючи задачі про гідропружні коливання. Ризикну стверджувати, що ніде у світі так плідно і конструктивно варіаційні принципи механіки не вживаються. Найбільш ймовірно що саме вплив Д. О. Ґраве і М. О. Кільчевського і їх численних учнів-викладачів обумовив своєрідне сприйняття українськими вченими варіаційних принципів механіки.

3. Коливання рідини з вільною поверхнею в резервуарах нециліндричної форми

Одним із яскравих прикладів застосування варіаційного принципу Гамільтона – Остроградського з поглибленим аналізом кінематичних обмежень задачі є задача про нелінійні коливання ідеальної однорідної рідини в резервуарі у формі тіла обертання.

Ця задача є актуальною в теоретичному і практичному сенсі й, попри давнє обговорення способів її розв'язання, існує мало практичних алгоритмів реалізації таких підходів. Звичайно це пов'язане із нециліндричністю області, яку займає рідина, і тою властивістю, що математична задача для рідини ставиться для області, яка знаходиться нижче рівня вільної поверхні, а розв'язок задачі має задовільняти умові неперетікання на тій частині стінки, яка заходиться вище рівня вільної поверхні (де спочатку рідини немає), оскільки туди підіймаються гребні хвиль. Проте ця частина стінки в традиційну математичну постановку взагалі не входить.

Вважаємо, що резервуар здійснює поступальний рух, стінки резервуара є абсолютно твердими, рух рідини є безвихровим. За основу побудови розв'язувальної системи рівнянь взято метод [13], який оснований на використанні варіаційного принципу Гамільтона – Остроградського, і використовувався для випадку порожнин циліндричної форми.

Ставимо задачу побудувати математичну модель системи в амплітудних параметрах коливань вільної поверхні рідини за власними формами та параметрах руху резервуара. Варіаційний принцип Гамільтона –

Остроградського для такої системи має вигляд

$$\delta I = 0, \qquad \text{де } L = \int\limits_{t_1}^{t_2} L dt, \qquad L = T - \Pi. \tag{3.1}$$

Тут функція Лагранжа має вигляд

$$L = \frac{1}{2}\rho \int\limits_{\tau} (\vec{\nabla}\varphi + \dot{\vec{\varepsilon}})^2 d\tau + \frac{1}{2} M_r (\dot{\vec{\varepsilon}})^2 + \rho \int\limits_{\tau} \vec{g} \cdot \vec{r} d\tau - (M_r + M_l)\varepsilon_z g. \tag{3.2}$$

У цих рівняннях T і Π відповідно кінетична і потенціальна енергія системи, φ є потенціалом хвильового руху рідини, $\dot{\vec{\varepsilon}}$ – поступальна швидкість руху резервуара, $\vec{r}$ – радіус-вектор довільної точки рідини відносно центру незбуреної вільної поверхні рідини, яка обрана за початок системи координат незмінно зв'язаної з резервуаром, $\vec{n}$ – одиничний вектор нормаль до поверхні, ρ – густина рідини, M_r і M_l маса рідини та резервуара, $\vec{g} = \{0, 0, -g\}$, де g – прискорення вільного падіння.

Надалі будемо також використовувати позначення τ – область, яку займає рідина, S – збурена вільна поверхня рідини, Σ – змочувана поверхня контакту рідини з резервуаром у збуреному русі. Ці ж величини з індексом «0» є відповідними параметрами у незбуреному стані. Позначимо також $\Delta\Sigma = \Sigma - \Sigma_0$ – зміна змочуваної поверхні контакту рідини з резервуаром, яка обумовлена збуреним рухом системи.

Для ефективного розв'язання задачі з використанням методу збурень треба, щоб незбурена вільна поверхня і поверхня контакту рідини з резервуаром були координатними поверхнями. Для цього замість циліндричної системи координат введемо недекартову параметризацію області, яку займає рідина

$$\alpha = \frac{r}{f(z)}, \qquad \beta = \frac{z}{H}.$$

В цих співвідношеннях $r = f(z)$ є рівнянням твірної тіла обертання, яке утворює резервуар, H – глибина заповнення резервуара рідиною. Тепер площина $\beta = 0$ співпадає із незбуреною вільною поверхнею рідини S_0, а поверхня $\alpha = 1$ співпадає з незбуреною бічною поверхнею контакту рідини з резервуаром Σ_0. В параметрах α, θ, β, які введені замість циліндричної системи координат (θ – кутова координата циліндричної системи) область рідини τ набуває циліндричної форми ($\alpha \in [0, 1], \theta \in [0, 2\pi]$ і в незбуреному стані $\beta \in [-1, 0]$).

Виходячи з циліндричності області у новій параметризації рівняння вільної поверхні рідини в збуреному русі можна представити у розв'язаному вигляді відносно координати β

$$\beta = \frac{1}{H}\xi(\alpha, \theta, t). \tag{3.3}$$

Така форма представлення вільної поверхні (3.3) дозволяє ефективно застосувати метод збурень і метод Канторовича для побудови нелінійної скінченновимірної моделі динаміки резервуара з рідиною з вільною поверхнею у випадку резервуара у вигляді тіла обертання.

Згідно з варіаційним принципом Гамільтона – Остроградського (3.1), (3.2) варіації змінних мають задовільняти всім кінематичним обмеженням задачі, до яких відносяться

а) $\Delta\varphi = 0$ в області τ, яке є рівнянням нерозривності для руху рідини в збуреній області τ;

б) $\frac{\partial\varphi}{\partial n} = 0$ на поверхні Σ або в розгорнутій формі $\frac{\partial\varphi}{\partial r} - f'\frac{\partial\varphi}{\partial z} = 0$ при $r = f(z)$;

в) $\frac{\partial\xi}{\partial t} + \frac{1}{f^2}\frac{\partial\xi}{\partial\alpha}\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha} + \frac{1}{\alpha^2 f^2}\frac{\partial\xi}{\partial\theta}\frac{\partial\varphi}{\partial\theta} - \frac{\alpha f'}{f}\frac{\partial\xi}{\partial\alpha}\frac{\partial\varphi}{\partial z} = \frac{\partial\varphi}{\partial z}$ на збуреній вільній поверхні S, що є вимогою збігу руху в напрямку нормалі частинок рідини та руху точок вільної поверхні рідини;

г) до кінематичних обмежень слід віднести умову розв'язуваності крайової задачі Неймана для рівняння Лапласа для збуреного об'єму рідини τ. Представимо цю умову у такому вигляді

$$\int\limits_{\Sigma_0} \frac{\partial\varphi}{\partial n} ds + \int\limits_{\Delta\Sigma_0} \frac{\partial\varphi}{\partial n} ds + \int\limits_{S} \frac{\partial\varphi}{\partial n} ds = 0. \tag{3.4}$$

Згідно з ідеями аналітичної механіки через те, що ці три інтеграли являють собою обмеження на різних поверхнях, кожен з цих доданків має бути нульовим. За своїм змістом ці умови відповідають вимогам збереження об'єму рідини в її збуреному русі. Рівність нулю першого інтеграла дублює умову неперетікання на бічній поверхні резервуара. Третя умова може бути перетворена до вигляду

$$\int\limits_{S} \frac{\partial\varphi}{\partial n} ds = \int\limits_{S_0} \frac{\partial\xi}{\partial t} ds,$$

що фактично є вимогою збереження об'єму рідини при збуреному русі її вільної поверхні. Другий член обумовлений нелінійністю формулювання задачі і відповідає вимозі задовільнення умові неперетікання рідини на гребенях хвиль, тобто цей член відповідає за рух рідини вище рівня незбуреної вільної поверхні та фактично є вимогою, щоб рідина «відстежувала» стінку резервуара при підйомах над незбуреною вільною поверхнею.

Проведений аналіз кінематичних обмежень задачі містить певні оригінальні моменти. Умова а), попри те, що вона описується диференціальним оператором старшого порядку, по суті є кінематичним обмеженням, проте воно задається не на якійсь границі, а у всьому об'ємі. Умова г), яка є наслідком умови розв'язуваності крайової задачі, розпадається на три умови, з яких одна є залежна, друга є умовою збереження об'єму рідини, а третя відповідає вимозі, щоб рідина над вільною поверхнею «відстежувала» тверду стінку. Зауважимо, що в традиційній постановці задачі та при використанні методів збурень інформація про стінку резервуара над вільною поверхнею рідини в постановку задачі взагалі не входить. Тому в більшості методів розв'язання задач коливань рідини в резервуарах нециліндричної форми цією умовою нехтують.

Всім цим кінематичним обмеженням а)-г) треба задовільнити до розв'язання варіаційної задачі. При виведенні математичного формулювання цих обмежень ми скористалися підходами аналітичної механіки. Всі ці обмеження за своєю природою є кінематичними (вони не залежать від законів руху), проте частина з них не збігається з граничними умовами, які в багатьох роботах вважають єдиним джерелом виникнення кінематичних обмежень. Зокрема, обмеження а) і третя частина умови розв'язуваності крайової задачі не є наслідком граничних умов.

Перейдемо тепер до виконання всіх кінематичних обмежень задачі. Відомо, що задача про визначення частот і форм коливань рідини приводиться до такого вигляду

$$\Delta\varphi = 0 \text{ в } \tau, \qquad \frac{\partial\varphi}{\partial n} = 0 \text{ на } \Sigma_0, \qquad \frac{\partial\varphi}{\partial n} = \lambda\varphi \text{ на } S_0. \tag{3.5}$$

Згідно з цією постановкою задачі розв'язки будуть задовільняти кінематичному обмеженню а), кінематичній граничній умові на поверхні контакту резервуар-рідина Σ_0, але без виконання умови на $\Delta\Sigma$ і лінійній частині кінематичної граничної умови на вільній поверхні S_0. Така задача успішно розв'язується на основі методу Рітца з використанням частинних розв'язків рівняння Лапласа у формі гармонічних поліномів [13], які одержуються шляхом приведення частинних розв'язків рівняння Лапласа у сферичних координатах до циліндричної системи координат.

Проілюструємо цю задачу на рис. 3.1. Формулювання задачі робиться для τ з бічною границею Σ і вільною поверхнею S. Згідно з нелінійного формулювання задачі рідина має відстежувати стінку над вільною поверхнею, тобто вона має задовільняти умові неперетікання над вільною поверхнею рідини на поверхні $\Delta\Sigma$ (на малюнку на дузі AA_0).

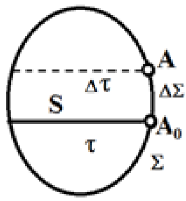


Рис. 3.1. Загальний вигляд області, яку займає рідина

Для довільної точки A ця вимога може бути записана у вигляді розкладу у ряд Тейлора

$$\left.\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right|_{A} = \left.\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right|_{A_0} + \xi\left.\frac{\partial^2\varphi}{\partial n\partial\tau_1}\right|_{A_0} + \frac{1}{2}\xi^2\left.\frac{\partial^3\varphi}{\partial n\partial\tau_1^2}\right|_{A_0} + \ldots = 0.$$

Тут через τ_1 позначено вектор дотичного напрямку. Через довільність збурень вільної поверхні ξ в точці A_0 має виконуватися вимога

$$\left.\frac{\partial^k\varphi}{\partial n\partial\tau_1^{k-1}}\right|_{A_0} = 0 \quad \text{для} \quad k = 1, 2, \ldots$$

Дослідження показують, що нормальні похідні в точці A_0 у випадку нециліндричних резервуарів взагалі не існують через те, що точка A_0 є сингулярною. З другого боку не можна накладати на розв'язки крайової задачі другого порядку додаткові умови порядку вищого або рівного за порядок основного рівняння, тобто умови порядку вище одиниці є некоректними. В підсумку це свідчить про те, що не можна використовувати розв'язки задачі про власні частоти та форми коливань як координатних функцій при розв'язанні нелінійної задачі, а також не можна накладати якісь додаткові обмеження на задачу про вільні коливання рідини з метою виконання граничної умови неперетікання на продовженні бічної поверхні резервуара, куди можуть досягати гребні хвиль.

В роботах Н. Є. Жуковського було показано [10], якщо рідина з рівнем заповнення до точки A виконує коливання, то область рідини до рівня A_0 виконує такі ж самі рухи (в кінематичному сенсі) як і рідина в резервуарі з об'ємом заповнення до рівня A_0. Тобто додана частина рідини на кінематику руху вихідної рідини (характер течії) не чинить вплив за виключенням частот коливань. Тому було запропоновано метод допоміжної області [3] для визначення координатних функцій для розв'язання нелінійної задачі про коливання рідини з вільною поверхнею, які задовільняють граничній умові неперетікання на стінках резервуара вище рівня незбуреної вільної поверхні, куди можуть досягати гребні хвиль.

Ідея методу полягає в тому, що розв'язується задача про вільні коливання рідини для області рідини із заповненням до точки A, далі за координатні функції для області τ беруться визначені координатні функції, які задовільняють умові неперетікання на поверхні $\Sigma_0 + \Delta\Sigma$, а за координатні функції на вільній поверхні рідини S_0 беруться функції, які одержуються на горизонтальному перерізі, що проходить через точку A_0. За своїм характером метод є наближеним, проте він враховує аналітичну природу розв'язку задачі про вільні коливання рідини і її сингулярні властивості. Успішність подальшого використання методу в основному визначається тим, що контур із сингулярними властивостями фактично переноситься від рівня, який відповідає положенню точки A_0 на рівень точки A, куди рідина вже взагалі не досягає. Таке винесення сингулярних точок за межі області рідини τ є типовим в інших задачах механіки ідеальної рідини.

Практичне використання такого підходу для побудови координатних функцій для представлення розв'язків нелінійної задачі динаміки рідини в різних резервуарах нециліндричної форми (конус, сфера, гіперболоїд, еліпсоїд, параболоїд [1,3]) дозволило досягнути відносної точності задовільнення граничної умови на Σ_0 порядку 10^{-5} і 10^{-3} на поверхні $\Delta\Sigma$, що більше ніж в 100 разів краще ніж для функцій, визначених за класичним методом. В підсумку це дозволяє з високою точністю задовільнити умовам розв'язуваності нелінійної задачі про рух рідини з вільною поверхнею (3.3) і підвищує точність задовільнення законів збереження енергії та маси, а також стійкість обчислювальних процедур.

Після використання розв'язків задачі на власні коливання рідини в резервуарі доповненої методом допоміжної області лишаються не задовільненими кінематична гранична умова на вільній поверхні та вимога збереження об'єму рідини у збуреному русі. Згідно з [3] приймемо такі представлення шуканих розв'язків, які для цієї задачі є фактично формою пошуку розв'язку за методом Канторовича. Крім того, через те, що резервуар є тілом обертання надалі можливе відокремлення кутової координати у представленні форми пошуку розв'язку.

$$\xi = \bar{\xi}(t) + \sum_i a_i(t)\bar{\psi}_i(\alpha)T_i(\theta), \qquad \varphi = \sum_i b_i(t)\psi_i(\alpha,\beta)T_i(\theta), \tag{3.6}$$

де

$$\bar{\psi}_i(\alpha) = \frac{\partial \psi}{\partial z}\bigg|_{\beta=0} = \left(\frac{1}{H}\frac{\partial \psi_i}{\partial \beta} - \frac{\alpha f'}{f}\frac{\partial \psi_i}{\partial \alpha}\right)\bigg|_{\beta=0}.$$

Також введено позначення $\bar{\xi}(t)$ – функція, яка забезпечує виконання закону збереження об'єму рідини у її збуреному русі і обумовлена нециліндричністю області τ, $\bar{\psi}_i(\alpha)T_i(\theta)$ – форма коливань вільної поверхні рідини, $\psi_i(\alpha,\beta)T_i(\theta)$ – потенціал швидкості, що відповідає руху рідини за цією формою. В представленні розв'язку (3.6) $a_i(t)$ і $b_i(t)$ є відповідно амплітудними параметрами збудження коливань вільної поверхні рідини та потенціалу швидкостей, що відповідають i-й формі коливань.

Згідно з теоремою, що безвихровий рух ідеальної однорідної нестисливої рідини повністю визначається рухом її границь, змінні a_i разом з параметрами руху резервуара $\vec{\varepsilon}$ є незалежними параметрами, які визначають рух границь області, а змінні b_i і $\bar{\xi}$ є залежними. Покажемо як виконується виключення цих залежних змінних з кінематичних обмежень, а саме з вимоги збереження об'єму рідини та кінематичної граничної умови на вільній поверхні рідини. Зауважимо також, що саме ці дві вимоги формулюються через нелінійні співвідношення і для їхнього виконання будуть застосовані асимптотичні методи нелінійної механіки з припущенням про малість збурень вільної поверхні рідини ξ.

Величина $\bar{\xi}$ визначається з вимоги збереження об'єму рідини у її збуреному русі. З використанням розкладу значення інтеграла зі змінною верхньою границею в ряд по ξ в околі $\xi=0$ одержимо з точністю до величин третього порядку малості (праворуч всі функції f і їх похідні беруться для $\beta=0$).

$$\Delta V=\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{1}\left[\int\limits_0^{\xi/H}[f(H\beta)]^2d\beta\right]\alpha H d\alpha\theta=$$
$$=\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{1}\left[f^2\frac{\xi}{H}+ff'\frac{\xi^2}{H^2}+(f'^2+ff")\frac{\xi^3}{3H^3}+\ldots\right]\alpha H d\alpha\theta.$$

Якщо представити $\bar{\xi}$ у вигляді розкладу за ступенями малості збурення вільної поверхні рідини ξ, $\bar{\xi}=\bar{\xi}_1+\bar{\xi}_2+\bar{\xi}_3+\bar{\xi}_4$ (нижній індекс відповідає порядку малості величини відносно значення ξ), то одержимо (величини з верхнім індексом «v» є інтегралами від форм коливань, вираз для яких тут не приводяться)

$$\begin{gathered}\bar{\xi}_1=0,\qquad \bar{\xi}_2=-\frac{f'}{\pi f}\sum_{i,j}a_ia_j\beta^v_{ij},\\ \bar{\xi}_3=-\frac{f'^2+ff"}{3\pi f^2}\sum_{i,j,k}a_ia_ja_k\gamma^v_{ijk},\ldots\end{gathered}\tag{3.7}$$

Тепер після знаходження залежності $\bar{\xi}$ від a_i представлення розв'язку задачі (3.6) задовільняє вимозі збереження об'єму рідини з точністю до величин третього порядку малості відносно ξ.

Для визначення залежності b_i від a_i скористаємося методом Гальоркіна. Введемо до розгляду диференціальний оператор

$$L^*(\xi,\varphi) = \frac{\partial\xi}{\partial t} + \frac{1}{f^2}\frac{\partial\xi}{\partial\alpha}\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha} + \frac{1}{\alpha^2 f^2}\frac{\partial\xi}{\partial\theta}\frac{\partial\varphi}{\partial\theta} - \frac{\alpha f'}{f}\frac{\partial\xi}{\partial\alpha}\frac{\partial\varphi}{\partial z} - \frac{\partial\varphi}{\partial z} = 0.$$

Виходячи з того, що система функцій $\bar{\psi}_k$ є формами коливань вільної поверхні, а значить вони є повною системою функцій, скалярні добутки нев'язок визначимо за схемою

$$\int\limits_{S_0} L^*(\xi,\varphi)\big|_S \bar{\psi}_k dS = 0, \quad k = 1, 2, \ldots,$$

при цьому диференціальний оператор L^* розкладається в ряд за степенями ξ, що еквівалентно його проєктуванню на незбурену вільну поверхню S_0. Після підставлення розкладів шуканих невідомих (3.6) одержимо наступні вирази для залежності величин b_i від a_i

$$\begin{aligned} b_p^{(1)} &= \sum_i \dot{a}_i \beta_{ip}^0, & b_p^{(2)} &= \sum_{i.j} \dot{a}_i a_j \gamma_{ijp}^0, \\ b_p^{(3)} &= \sum_{i.j,k} \dot{a}_i a_j a_k \delta_{ijkp}^0, & b_p^{(4)} &= \sum_{i.j,k,l} \dot{a}_i a_j a_k a_l h_{ijklp}^0. \end{aligned} \tag{3.8}$$

У співвідношення (3.8) входять коефіцієнти, що визначаються через квадратури від функцій $\bar{\psi}_k$ і ψ_k по незбуреній вільній поверхні. Після визначення залежностей (3.7) і (3.8) параметри a_k можна вважати повною незалежною системою змінних, що характеризують рух обмеженого об'єму рідини (у випадку рухомого резервуара треба до цих параметрів ще додати параметри руху тіла-носія). Ці залежності встановлені аналітично (у квадратурах) для довільної кількості форм коливань до розв'язання варіаційної задачі. Тепер розклади шуканих змінних (3.6), доповнені співвідношеннями (3.7) і (3.8), відповідають вільній механічній системі, рух якої визначається незалежними параметрами a_k, що характеризують рух вільної поверхні рідини та параметрам $\vec{\varepsilon}$, що характеризують рух тіла-носія.

Оскільки основною метою цієї роботи є викладення розширених можливостей варіаційних методів механіки, які ефективно працюють після належного аналізу всіх кінематичних обмежень задачі та виключенні цих обмежень до реалізації варіаційного принципу, викладення аналізу кінематичних обмежень задачі виконано докладно, а безпосередню реалізацію варіаційного принципу Гамільтона – Остроградського ми не будемо викладати детально. Це викликано тим, що після побудови розкладів змінних (7), які через вибір координатних функцій і виключення залежних параметрів на основі співвідношень (3.7) і (3.8), система, що досліджується, вже стає вільною і багато технічних проблем зникають.

Побудовані розклади (3.6) можна безпосередньо підставляти у функцію Лагранжа і при цьому система параметрів a_k і ε_i відповідає кількості ступенів вільності системи в рамках прийнятої моделі та за кількістю змінних є мінімальною. Схема побудови дискретної моделі складається з двох етапів перетворення функції Лагранжа

$$L(\xi, \varphi, \dot{\vec{\varepsilon}}) \to L(a_i, b_j, \bar{\xi}, \dot{\vec{\varepsilon}}) \to L(a_i, \dot{a}_j, \dot{\vec{\varepsilon}}).$$

Така схема ілюструє перехід спочатку від зв'язаної континуальної системи до зв'язаної дискретної системи, а потім, виключаючи кінематичні граничні умови на вільній поверхні та умову збереження об'єму рідини у її збуреному русі, здійснюється перехід до функції Лагранжа, що відповідає вільній системі з числом параметрів, яке дорівнює числу ступенів вільності системи.

Для переходу від континуальної структури моделі тіло – рідина до дискретної моделі можна застосувати метод Канторовича до варіаційного формулювання задачі, отриманого на основі принципу Гамільтона – Остроградського. Просторове і поверхневе інтегрування у функції Лагранжа проводиться в змінних α, θ, β. В підінтегральному виразі відбувається диференціювання по β членів, що містять потенціал швидкостей φ, і добутків цих членів на якобіан переходу від декартової геометрії до недекартової параметризації області τ_0, яку займає рідина в незбуреному стані. Для порожнини обертання в цілому відмінності від випадку резервуарів циліндричної форми полягають в тому, що,

- по-перше, функції, за якими відбувається розклад потенціалу швидкостей, задовільняють умови неперетікання на змочуваних границях наближено,
- по-друге, додається умова збереження об'єму рідини у її збуреному русі, і,
- по-третє, при виконанні знесення на незбурену вільну поверхню рідини за допомогою ряду Тейлора окремих членів функції Лагранжа, кінематичної граничної умови на вільній поверхні і умови збереження об'єму рідини у її збуреному русі у порівнянні з випадком циліндричної області додаються геометричні нелінійності обумовлені переходом до недекартової параметризації області, яку займає рідина;

– вчетверте, слід забезпечити, щоб координатні функції задовільняли умові неперетікання на бічній поверхні рідини не лише для поверхні контакту у незбуреному стані Σ_0, а і на її певному продовженні над рівнем незбуреної вільної поверхні куди можуть досягати гребні хвиль $\Delta\Sigma$.

В результаті застосування даної методики можна отримати рівняння Лагранжа другого роду – рівняння сумісного руху системи «резервуар-рідина» в амплітудних параметрах руху рідини з вільною поверхнею a_k та параметрах руху тіла-носія $\vec{\varepsilon}$

$$\sum_{k=1}^{N} p_{kr}(a_i, \dot{a}_j)\ddot{a}_k + \sum_{k=N+1}^{N+3} p_{kr}(a_i, \dot{a}_j)\ddot{\varepsilon}_{k-N} = q_r(a_i, \dot{a}_j, \varepsilon_l, \dot{\varepsilon}_m). \tag{3.9}$$

Через те, що другі похідні в ці рівняння входять лінійно, система звичайних диференціальних рівнянь легко приводиться до форми Коші, що сприяє подальшому аналітичному і чисельному дослідженню задачі. Легко показується, що породжувальна система диференціальних рівнянь є невиродженою, розподіл частот є відомим і діапазон розташування частот є компактним, що практично виключає проблеми прояву ефекту жорсткості при чисельному інтегруванні системи (3.9).

4. Вібраційне збудження руху системи резервуар-рідина в режимі сумісного руху

Як приклад ефективної побудови моделі про сумісний рух резервуара і рідини з вільною поверхнею на основі методів аналітичної механіки континуальних систем розглянемо випадок резервуара у формі еліпсоїду обертання, маса якого $M_r = 0.2M_l$ (прояв рухомості рідини на рух резервуара буде суттєвим). Розглянуто випадок еліпсоїдального резервуара з півосями $a = 1$ і $b = 2$. Випадок відповідає розтягненому по вертикалі еліпсоїда з глибиною заповнення $H = 0.75$. Резервуар здійснює рух в горизонтальній площині зі стану спокою під дією сили $F_x = A(M_r + M_l)\cos\omega t$ (A – множник, який для різних режимів підбирався так, щоб система виходила на режим нелінійних коливань, коли збурення на вільній поверхні мають порядок 0,2 від радіуса вільної поверхні рідини).

Аналізувалися такі випадки зміни частот $\omega = k_\omega \omega_c$, де

$$k_\omega = 0.9,\ 0.98,\ 1.0,\ 1.02,\ 1.1,\ 1.5,$$

а ω_c – частота сумісних коливань системи резервуар-рідина за першою формою. На рис. 4.1 представлені результати розрахунків зміни в часі збурень вільної поверхні рідини на бічній поверхні резервуара в площині zOx, в якій відбуваються коливання.

На рисунку зліва вгорі приведено глибину заповнення, згори в центі – значення відносної частоти та амплітудного параметра збудження коливань системи. Звернемо увагу на те, що для частот суттєво менших за резонансні коливання вільної поверхні значно відрізняються від синусоїдального закону і спостерігається дрейф середнього значення. При наближенні до резонансної частоти спостерігається висока чутливість системи до амплітуди збудження і навіть до зміни частоти на декілька процентів. В характері розвинення коливань суттєво проявляється модуляція, при цьому частота зміни кривої модуляції спочатку зменшується і є найменшою для відносної частоти 0.98, а потім знову наростає. Це свідчить про те, що нелінійності в такій системі є м'якого типу.

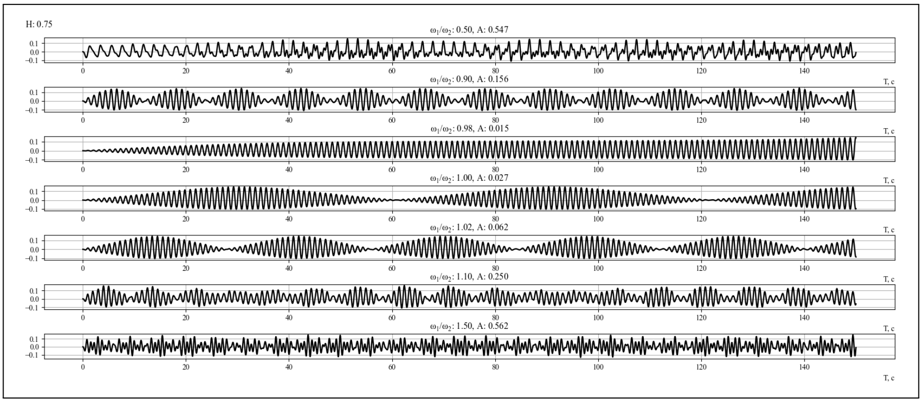


Рис. 4.1. Збурення вільної поверхні рідини в різних частотних діапазонах

Вихід системи на режим усталених коливань не спостерігався, проте для відносної частоти 0.98 період модуляційної кривої є достатньо великим і в окремих роботах це помилково сприймалося як вихід на усталений режим коливань. Відмітимо також, що для відносної частоти 1 суттєво проявляється відмічений в експериментах режим антирезонанса, коли протягом декількох періодів коливання на вільній поверхні фактично зникають (їх амплітуда коливань є незначною), що помітно в околі часу приблизно 60 с і 120 с. Лінійна теорія прогнозує подібність поведінки системи через наближений збіг частот модуляції для значень відносних частот симетричних відносно власної частоти [7]. Але в нашому випадку для частот 0.9 і 1.1 це не спостерігається, що пов'язане із виходом на режим, коли при формуванні модуляції беруть участь не дві форми коливань, а більше. Додаткові нелінійні властивості поведінки системи визначаються через трансцендентну залежність частот від номера форми, відміченого в [5] і відповідного ущільнення спектра коливань. Це обумовлює відсутність усталених режимів коливань.

Було розв'язано групу задач для різних варіантів еліпсоїдів і рівнів їх заповнення. Аналізуючи в комплексі одержані результати слід зазначити, що, по-перше, система резервуар-рідина демонструє високу чутливість до зміни частот особливо в безпосередньому околі резонансу.

По-друге, значною мірою при однакових відносних амплітудах збурень вільної поверхні рідини прояв нелінійності визначається нахилом стінок в околі незбуреної вільної поверхні. Так для малих глибин і для випадків стисненої форми еліпсоїда нахил стінки резервуара в околі вільної поверхні значно відрізняється від вертикальних стінок. Це сприяє підсиленню прояву нелінійного характеру коливань, оскільки наближення нахилу стінок резервуара до вертикального положення призводить до зростання обмежень на рух рідини, і, до того ж до зростання частот і відстаней між ними. Це зменшує взаємовплив форм коливань, а значить спрощує характер розвинення коливань.

По-третє, вагомо проявляється комплекс нелінійних ефектів розвинення коливань, а саме дрейф середнього значення коливань на низьких частотах, модуляція коливань, втрата регулярності коливань на високих частотах, антирезонанс, перевершення висоти горба хвилі над її впадиною.

В-четверте, на всіх режимах вихід системи резервуар-рідина на режим усталених коливань не спостерігався. Одержані результати узгоджуються з відомими теоретичними та експериментальними даними [6].

5. Висновки

У роботі викладено оригінальні ідеї використання розширених можливостей аналітичної механіки суцільного середовища, зародження яких, судячи з усього, відбулося в рамках наукової школи Д. О. Ґраве і пізніше наукової школи М. О. Кільчевського. Ці ідеї є основою поглибленого аналізу постановки задач механіки суцільних середовищ і сприяють розвиненню конструктивних методів, створених на основі аналітичної механіки. Відмічені переваги і оригінальність цих підходів проілюстровано на задачі про нелінійні коливання рідини з вільною поверхнею, яку розглянуто в рамках нелінійної задачі динаміки сумісного руху системи, включаючи випадок резервуара нециліндричної форми.

Література

[1] A. V. Konstantinov, O. S. Limarchenko, V. N. Mel'nik, and I. Yu. Semenova. Problem of the parametric oscillations of a noncylindrical tank partially filled with a fluid.

Internat. Appl. Mech., 52(6):599–604, 2016. Translation of Prikl. Mekh. **52** (2016), no. 6, 49–57. doi:10.1007/s10778-016-0780-4.

[2] A. V. Konstantinov, V. O. Limarchenko, and O. S. Limarchenko. Motion control for structure with liquid based on compensation of the liquid hydrodynamic response. *Journal of Automation and Information Sciences*, 52(6):58–70, 2020. doi:10.1615/jautomatinfscien.v52.i6.50.

[3] O. S. Limarchenko. Specific features of application of perturbation techniques in problems of nonlinear oscillations of a liquid with free surface in cavities of non-cylindrical shape. *Ukrainian Mathematical Journal*, 59(1):46–69, 2007. doi:10.1007/s11253-007-0004-5.

[4] O. S. Limarchenko and K. O. Semenovich. Energy redistribution between a reservoir and a liquid with a free boundary under angular motions of the system. *J. Math. Sci.*, 222(3):296–303, 2017. doi:10.1007/s10958-017-3300-0.

[5] M. Onorato, L. Vozella, D. Proment, and V. Lvov. Route to thermalization in the α-Fermi-Pasta-Ulam system. *PNAS*, 112(14):4208–4213, 2015. doi:10.1073/pnas.1404397112.

[6] P. Pal. Sloshing of liquid in partially filled container – an experimental study. *Int. J. Recent Trends in Engineering*, 1(6):1–5, 2009.

[7] W. Shaoa, J. Yanga, Z. Hu, and L. Tao. Coupled analysis of nonlinear sloshing and ship motions. *Applied Ocean Research*, 47:85–97, 2015. doi:10.1016/j.jsv.2010.05.006.

[8] Ф. Р. Гантмахер. *Лекции по аналитической механике.* М.: Физматлит, 2005.

[9] Д. А. Граве. *Значение математики в естествознании.* Кіевъ: Тип. Импер. ун-та св. Владиміра, 1908.

[10] Н. Е. Жуковский. *О движении твердого тела, имеющего полости, наполненные однородной капельной жидкостью.* М.: Физматлит, 2005.

[11] Л. В. Канторович and В. И. Крылов. *Приближенные методы высшего анализа.* Л.-М.: Физматгиз, 1962.

[12] Л. А. Коздоба. *Методы решения нелинейных задач теплопроводности.* М.: Наука, 1975.

[13] О. С. Лимарченко and В. В. Ясинский. *Нелинейная динамика конструкций с жидкостью.* К.: НТТУ КПИ, 1997.

[14] Л. С. Полак. *Вариационные принципы механики.* Физматлит, 1959.

[15] Д. О. Ґраве. *Теоретична механіка на основі техніки.* Харків: ХДУ, 1930.

О. С. Лимарченко

Київський національний університет імені Тараса Шевченка

Email: olelim2010@yahoo.com

ORCID: 0000-0002-2068-8987

Diffeomorphism groups of Morse-Bott foliation on the solid Klein bottle by Klein bottles parallel to the boundary

Sergiy Maksymenko

Abstract. Let $\mathcal{G}$ be a Morse-Bott foliation on the solid Klein bottle $\mathbf{K}$ into 2-dimensional Klein bottles parallel to the boundary and one singular circle S^1. Let also $S^1 \tilde{\times} S^2$ be the twisted bundle over S^1 which is a union of two solid Klein bottles $\mathbf{K}_0$ and $\mathbf{K}_1$ with common boundary K. Then the above foliation $\mathcal{G}$ on both $\mathbf{K}_0$ and $\mathbf{K}_1$ gives a foliation $\mathcal{G}'$ on $S^1 \tilde{\times} S^2$ into parallel Klein bottles and two singluar circles. The paper computes the homotopy types of groups of foliated (sending leaves to leaves) and leaf preserving diffeomorphisms for foliations $\mathcal{G}$ and $\mathcal{G}'$.

Анотація. Нехай $\mathcal{G}$ – шарування Морса-Ботта на заповненій пляшці Кляйна $\mathbf{K}$ на двовимірні пляшки Кляйна паралельні до межі $\partial \mathbf{K}$ та центральне коло S^1. Нехай також $S^1 \tilde{\times} S^2$ – тотальний простір єдиного нетривіального S^2-розшарування над колом S^1, яке є об'єднанням двох копій $\mathbf{K}_0$ та $\mathbf{K}_1$ заповненої пляшки Кляйна зі спільною межею K. Тоді шарування $\mathcal{G}$ на кожній копії $\mathbf{K}_0$ та $\mathbf{K}_1$ визначає шарування $\mathcal{G}'$ на $S^1 \tilde{\times} S^2$ на паралельні пляшки Кляйна та два сингулярні кола. В роботі обчислено гомотопічні типи груп дифеоморфізмів шарувань $\mathcal{G}$ та $\mathcal{G}'$.

1. Introduction

Let $D^2 = \{|w| \leqslant 1\}$ be the unit disk in the complex plane, $S^1 = \partial D^2$ be its boundary, and $\mathbf{T} = S^1 \times D^2$ be the solid torus. Define the following $\mathcal{C}^\infty$ function

$$f : \mathbf{T} \to [0;1], \qquad f(z,w) = |w|^2,$$

and for every $r \in [0;1]$ let $T_r := f^{-1}(r)$ be the inverse image of r. Evidently, T_r is a 2-torus for $r \in (0;1]$ and T_0 is a circle. Let also

$$\mathcal{F} = \{T_r \mid r \in [0;1]\}$$

be the partition on $\mathbf{T}$ into the inverse images of f.

Notice that f is a *Morse-Bott* function (in some sense the most simplest one), and the corresponding partition $\mathcal{F}$ is a *Morse-Bott* foliation, see e.g. [1,

2020 Mathematics Subject Classification: 57R30, 57T20
Keywords: foliation; diffeomorphism; homotopy type; solid Klein bottle
DOI: http://dx.doi.org/10.3842/trim.v20n1.532

6, 17]. Such foliations play and important role in Hamiltonian and Poisson geometries, however in the present paper we will not use this interpretation.

Given a partition $\mathcal{F}$ on a manifold M we will say that a diffeomorphism $h : M \to M$ is *$\mathcal{F}$-leaf preserving* if it leaves invaraint each leaf of $\mathcal{F}$, i.e. $h(\omega) = \omega$ for all $\omega \in \mathcal{F}$. Also, h is *$\mathcal{F}$-foliated* whenever the image $h(\omega)$ of each leaf $\omega \in \mathcal{F}$ is again a (perhaps some other) leaf of $\mathcal{F}$. Then for a subset $X \subset M$ we will denote by $\mathcal{D}^{lp}(\mathcal{F}, X)$ and $\mathcal{D}^{fol}(\mathcal{F}, X)$ respectively the groups of $\mathcal{F}$-leaf preserving and $\mathcal{F}$-foliated diffeomorphisms of M. If $X = \varnothing$, we will omit it from notations. Evidently, $\mathcal{D}^{lp}(\mathcal{F}, X)$ is a normal subgroup of $\mathcal{D}^{fol}(\mathcal{F}, X)$.

In a series of previous papers by the author and O. Khokhliuk [9–12, 16] there were computed homotopy types of groups of foliated and leaf preserving diffeomorphisms of the above foliation $\mathcal{F}$ on $\mathbf{T}$. Namely, the following results are obtained:

Theorem 1.1 ([12, Theorem 1.1.1])**.** *The group $\mathcal{D}^{lp}(\mathcal{F}, \partial\mathbf{T})$ is weakly contractible.*

Theorem 1.2 ([16])**.** *The pair $\big(\mathcal{D}^{lp}(\mathcal{F}), \mathcal{D}^{lp}(\mathcal{F}, \partial\mathbf{T})\big)$ is a strong deformation retract of the pair $\big(\mathcal{D}^{fol}(\mathcal{F}), \mathcal{D}^{fol}(\mathcal{F}, \partial\mathbf{T})\big)$.*

It is also known that the group $\mathcal{D}(\mathbf{T}, \partial\mathbf{T})$ of diffeomorphisms of $\mathbf{T}$ fixed on its boundary is contractible (N. Ivanov [8, Theorem 2]), while the group of all diffeomorphisms $\mathcal{D}(\mathbf{T})$, contains as a deformation retract a certain semidirect product $\mathcal{A} := (S^1 \times S^1) \rtimes U$, where

$$U = \{\left(\begin{smallmatrix} \varepsilon & n \\ 0 & \delta \end{smallmatrix}\right) \mid \varepsilon, \delta \in \{\pm 1\}, n \in \mathbb{Z}\} \subset \mathrm{SL}(2, \mathbb{Z})$$

(this is a classical result). In particular, $\pi_0\mathcal{D}(\mathbf{T}) \cong U$. In fact, $\mathcal{A}$ is contained even in $\mathcal{D}^{lp}(\mathcal{F}, \partial\mathbf{T})$, and Theorems 1.1 and 1.2 imply that the following inclusions are weak homotopy equivalences:

$$\begin{array}{c} \{\mathrm{id}_{\mathbf{T}}\} \hookrightarrow \mathcal{D}^{lp}(\mathcal{F}, \partial\mathbf{T}) \hookrightarrow \mathcal{D}^{fol}(\mathcal{F}, \partial\mathbf{T}) \hookrightarrow \mathcal{D}(\mathbf{T}, \partial\mathbf{T}), \\ \mathcal{A} \hookrightarrow \mathcal{D}^{lp}(\mathcal{F}) \hookrightarrow \mathcal{D}^{fol}(\mathcal{F}) \hookrightarrow \mathcal{D}(\mathbf{T}). \end{array}$$

Furthermore, gluing two copies $\mathbf{T}_0$ and $\mathbf{T}_1$ of the solid torus by some diffeomorphisms between their boundaries, one gets a lens space $L_{p,q}$. Then the foliation $\mathcal{F}$ on each of those tori gives a foliation $\mathcal{F}_{p,q}$ on $L_{p,q}$ into two singluar circles and parallel 2-tori. In [12, 16] there were also computed the homotopy types of the groups $\mathcal{D}^{lp}(\mathcal{F}_{p,q})$ and $\mathcal{D}^{fol}(\mathcal{F}_{p,q})$.

In the present paper we will make similar computations for the non-orientable counterpatrs of $\mathbf{T}$ and lens spaces: the solid Klein bottle $\mathbf{K}$ and the twisted S^2-bundle over the circle $S^1 \mathbin{\widetilde{\times}} S^2$.

More precisely, consider the following orientation reversing diffeomorphism $\xi : \mathbf{T} \to \mathbf{T}$ of order 2 given by $\xi(w, z) = (\bar{w}, -z)$. Then the quotient space $\mathbf{K} := \mathbf{T}/\xi$ is called the *solid Klein bottle*. It is a non-orientable 3-manifold and the corresponding quotient map $p : \mathbf{T} \to \mathbf{K}$ is its orientable double covering. Moreover, it is evident that $f \circ \xi = f$, whence there exists a $\mathcal{C}^\infty$ function $g : \mathbf{K} \to [0; 1]$ such that $f = g \circ p$. For $t \in [0; 1]$ let $K_t = g^{-1}(t)$ be the corresponding level set of g, so K_0 is a circle, while for $t \in (0; 1]$ the set K_t is a (2-dimensional) Klein bottle. In particular, $K_1 = \partial\mathbf{K}$.

Note also that $T_r = p^{-1}(K_t)$ and the restriction maps $p : T_r \to K_t$ (oriented for $r > 0$) double coverings.

Let $\mathcal{G} = \{K_t\}_{t \in [0;1]}$ be the partition of $\mathbf{K}$ into level sets of g. Then g is a Morse-Bott function for which K_0 is a non-degenerate critical manifold, and all other points of $\mathbf{K}$ are regular for g. Therefore one can regard $\mathcal{G}$ as a *Morse-Bott* foliation with the singluar leaf K_0.

Our aim is to compute the homotopy types of the groups $\mathcal{D}^{fol}(\mathcal{G})$ and $\mathcal{D}^{lp}(\mathcal{G})$ of $\mathcal{G}$-foliated and $\mathcal{G}$-leaf preserving diffeomorphism of $\mathbf{K}$ respectively, and their respective subgroups fixed on $\partial\mathbf{K}$. In fact most of the preliminary work is done in the mentioned above papers, and here we will just use their results for explicit computations. We are also aimed here to illustrate usefulness of the developed methods.

First we recall the following statement:

Lemma 1.3. *$\mathcal{D}(\mathbf{K}, \partial\mathbf{K})$ is contractible, while $\mathcal{D}(\mathbf{K})$ is homotopy equivalent to $S^1 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$, i.e. to the disjoint union of 4 circles.*

History of proof. W. B. R. Likorish [14] shown that $\pi_0\mathcal{D}(\mathbf{K}) \cong \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$ and that each diffeomorphism of $\partial\mathbf{K}$ extends to some diffeomorphism of $\mathbf{K}$. The latter can be rephrased so that the restriction map $\rho : \mathcal{D}(\mathbf{K}) \to \mathcal{D}(\partial\mathbf{K})$, $\rho(h) = h|_{\partial\mathbf{K}}$, (being also a continuous homomorphism) is surjective. Evidently, its kernel is the group $\mathcal{D}(\mathbf{K}, \partial\mathbf{K})$ of diffeomorphisms of $\mathbf{K}$ fixed on the boundary. Notice that the map ρ is known to be a locally trivial fibration which is a particular case of *"local triviality for embeddings"* statement independently proved by J.Cerf [2], R. Palais [18], and E. Lima [15].

Also, N. Ivanov [8] obtianed a general result on Waldhausen manifold which includes the statement that $\mathcal{D}(\mathbf{K}, \partial\mathbf{K})$ is contractible.

This implies that ρ is a homotopy equivalence. Moreover, it is also proved by C. Earle and J. Eeels [5] and A. Gramain [7] that the path components of $\mathcal{D}(\partial\mathbf{K})$ are homotopy equivalent to the circle. Hence $\mathcal{D}(\mathbf{K})$ is homotopy equivalent to $S^1 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$, i.e. to the disjoint union of 4 circles. $\square$

Our first result shows that the corresponding $\mathcal{G}$-foliated and $\mathcal{G}$-leaf preserving counterparts of the groups from Lemma 1.3 have the same homotopy types. So the situation here is literally the same as in Theorems 1.1 and 1.2.

Theorem 1.4. *The following statements hold.*
(1) *The group $\mathcal{D}^{lp}(\mathcal{G}, \partial\mathbf{K})$ is weakly contractible.*
(2) *The pair $\big(\mathcal{D}^{lp}(\mathcal{G}), \mathcal{D}^{lp}(\mathcal{G}, \partial\mathbf{K})\big)$ is a strong deformation retract of the pair $\big(\mathcal{D}^{fol}(\mathcal{G}), \mathcal{D}^{lp}(\mathcal{G}, \partial\mathbf{K})\big)$.*

They imply that the following maps denoted by (w.)h.e. are (weak) homotopy equivalences:

$$\begin{tikzcd}
\{\mathrm{id}_{\mathbf{K}}\} \arrow[r, hook, "\mathbf{w.h.e}"] \arrow[rrr, bend left, "h.e"] & \mathcal{D}^{lp}(\mathcal{G}, \partial\mathbf{K}) \arrow[r, hook, "\mathbf{h.e}"] & \mathcal{D}^{fol}(\mathcal{G}, \partial\mathbf{K}) \arrow[r, hook, "\mathbf{w.h.e}"] & \mathcal{D}(\mathbf{K}, \partial\mathbf{K}),
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{D}^{lp}(\mathcal{G}) \arrow[r, hook, "\mathbf{h.e}"] & \mathcal{D}^{fol}(\mathcal{G}) \arrow[r, hook, "\mathbf{w.h.e.}"] & \mathcal{D}(\mathbf{K}) \arrow[r, two heads, "\rho", "h.e."'] & \mathcal{D}(\partial\mathbf{K}) \simeq \sqcup_4 S^1,
\end{tikzcd}$$

*where the notations in **bold** denote new results and implications.*

This theorem will be proved in Section 3.

As mentioned above a *lens space* is a 3-manifold obtianed by gluing two solid tori $\mathbf{T}_0$ and $\mathbf{T}_1$ by some diffeomorphism between their boundaries, and there are infinitely many mutually non-diffeomorphic lens spaces. On the other hand, since every diffeomorphism of the Klein bottle K extends to a diffeomorphism of the solid Klein bottle $\mathbf{K}$, it follows that gluing two copies of $\mathbf{K}$ by some diffeomorphism of their boundaries gives always rise to the same manifold $S^1 \tilde{\times} S^2$ being a total space of a unique non-trivial S^2-bundle over S^1 called the *twisted S^2-bundle over S^1*.

Therefore one can regard $S^1 \tilde{\times} S^2$ as the union of two Solid klein bottles $\mathcal{G}_0$ and $\mathcal{G}_1$ glued by the indentity diffeomorphism of their boundaries. On each $\mathbf{K}_i$, $i = 0, 1$, we have defined above the foliation $\mathcal{G}$ into paralled 2-dimensional Klein bottles and one singluar circle. These foliations constitute together a foliation on $S^1 \tilde{\times} S^2$ into parallel Klein bottles and two singluar circles $S^1_i \subset \mathbf{K}_i$. We will denote that foliation by $\widehat{\mathcal{G}}$, and it will be convenient to call it *polar*.

As a consequence of Theorem 1.4 we get the following description of the homotopy types of $\widehat{\mathcal{G}}$-foliated and $\widehat{\mathcal{G}}$-leaf preserving diffeomorphisms of $S^1 \tilde{\times} S^2$. Notice that each $h \in \mathcal{D}^{lp}(\widehat{\mathcal{G}})$ leaves invariant the common boundary $\partial\mathbf{K}_0 = \partial\mathbf{K}_1$ which we will denote by K. Hence we have a well-defined continuous restriction homomorphism $\rho : \mathcal{D}^{lp}(\widehat{\mathcal{G}}) \to \mathcal{D}(K)$, $\rho(h) = h|_K$.

Its kernel is eveidently the group $\mathcal{D}^{lp}(\widehat{\mathcal{G}}, K)$ of $\widehat{\mathcal{G}}$-leaf preserving diffeomorphisms fixed on K.

Denote by $\mathcal{D}^{fol}_{+}(\widehat{\mathcal{G}})$ the (index 2) subgroup of $\mathcal{D}^{fol}(\widehat{\mathcal{G}})$ consisting of diffeomorphisms leaving invaraint each singular circle S^1_0 and S^1_1. Our second result if the following Theorem 1.5 which will be proved in Section 4:

Theorem 1.5. *The following statements hold.*

(1) *The group $\mathcal{D}^{lp}(\widehat{\mathcal{G}})$ is a strong deformation retract of $\mathcal{D}^{fol}_{+}(\widehat{\mathcal{G}})$.*

(2) *The "restriction to $K := \partial\mathbf{K}_0 = \partial\mathbf{K}_1$ homomorphism"*

$$\rho : \mathcal{D}^{lp}(\widehat{\mathcal{G}}) \to \mathcal{D}(K)$$

is a weak homotopy equivalence.

In particular, $\mathcal{D}^{lp}(\widehat{\mathcal{G}})$ and $\mathcal{D}^{fol}_{+}(\widehat{\mathcal{G}})$ are weakly homotopy equivalent to the disoint union of 4 circles, while $\mathcal{D}^{fol}(\widehat{\mathcal{G}})$ is homotopy equivalent to the disjoint union of 8 circles.

Note that M. Kim and F. Raymond [13], shown that

$$\pi_0\mathcal{D}(S^1 \mathbin{\widetilde{\times}} S^2) \simeq \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2,$$

and the generators of that group can be chosen to be also the generators of $\pi_0\mathcal{D}^{lp}(\widehat{\mathcal{G}})$. This gives the following

Corollary 1.6. *The inclusions $\mathcal{D}^{lp}(\widehat{\mathcal{G}}) \subset \mathcal{D}^{fol}_{+}(\widehat{\mathcal{G}}) \subset \mathcal{D}(S^1 \mathbin{\widetilde{\times}} S^2)$ induce bijections on π_0 groups:*

$$\pi_0\mathcal{D}^{lp}(\widehat{\mathcal{G}}) = \pi_0\mathcal{D}^{fol}_{+}(\widehat{\mathcal{G}}) = \pi_0\mathcal{D}(S^1 \mathbin{\widetilde{\times}} S^2) = \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2.$$

On the other hand, the homotopy type of $\mathcal{D}(S^1 \mathbin{\widetilde{\times}} S^2)$ is more complicated. It was described in E. César and C. Rourke [4, Theorem 2], which in turn extended the technnique from PhD theses by E. César [3].

2. Twisted bundles over the circle

In this sections we present an explicit model for the solid Klein bottle $\mathbf{K}$ and the universal covers of $\mathbf{K}$ and $\mathbf{K}\backslash K_0$. These notations will be used in the proof of Theorem 1.4.

2.1. Universal cover of the solid Klein bottle K.

Let

$$\kappa : \mathbb{R} \times \mathbb{C} \to \mathbb{R}, \qquad \kappa(s, w) = s,$$

be the trivial vector bundle (of real dimension 2), and $g' : \mathbb{R} \times \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ be a $\mathcal{C}^\infty$ function given by $g'(s, w) = |w|^2$. It determines a norm (or scalar product) on the fibers of κ.

Consider the following $\mathcal{C}^\infty$ vector bundle isomorphism (ξ, η) reversing orientation and having no fixed points:

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{R} \times \mathbb{C} \arrow[r, "\xi\colon (s,w) \mapsto (s+1, \bar{w})"] \arrow[d, "\kappa"'] & \mathbb{R} \times \mathbb{C} \arrow[d, "\kappa"] \\
\mathbb{R} \arrow[r, "\eta\colon s \mapsto s+1"] & \mathbb{R}
\end{tikzcd} \tag{2.1}$$

It defines a free and properly discontinuous action of $\mathbb{Z}$ on $\mathbb{R} \times \mathbb{C}$. Denote by $S^1 \widetilde{\times} \mathbb{C} = (\mathbb{R} \times \mathbb{C})/\mathbb{Z}$ the quotient space. Then $\mathbb{R}/\eta \cong S^1$ and the corresponding quotient maps $\beta : \mathbb{R} \times \mathbb{C} \to S^1 \widetilde{\times} \mathbb{C}$ and $\sigma : \mathbb{R} \to S^1$, $\sigma(s) = e^{2\pi i s}$, are universal coverings maps. Moreover, we get the well-defined quotient vector bundle $\gamma : S^1 \widetilde{\times} \mathbb{C} \equiv (\mathbb{R} \times \mathbb{C})/\xi \to \mathbb{R}/\eta \equiv S^1$ such that the following diagram is commutative:

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{R} \times \mathbb{C} \arrow[r, "\beta"] \arrow[d, "\kappa"'] & S^1 \widetilde{\times} \mathbb{C} \arrow[d, "\gamma"] \\
\mathbb{R} \arrow[r, "\sigma"] & S^1
\end{tikzcd}$$

Evidently, $g' \circ \xi = g'$, whence there exists a unique $\mathcal{C}^\infty$ function

$$g : S^1 \widetilde{\times} \mathbb{C} \to \mathbb{R},$$

such that $g' = g \circ \beta$. Then $\mathbf{K} := g^{-1}\big([0;1]\big)$ is the solid Klein bottle, $\beta : \mathbb{R} \times D^2 \to \mathbf{K}$ is the universal cover of $\mathbf{K}$, and

$$\mathcal{G} = \{K_r := g^{-1}(r)\}_{r \in [0;1]}$$

consists of level sets of g. Note that we also have a norm on the fibers

$$|\cdot| : S^1 \widetilde{\times} \mathbb{C} \to [0; +\infty], \qquad |x| = \sqrt{g(x)},$$

for $x \in S^1 \widetilde{\times} \mathbb{C}$, so K_r consists of elements of $S^1 \widetilde{\times} \mathbb{C}$ of norm $\sqrt{r}$.

For $r \in [0; 1]$ denote:

$$\mathbf{K}_r := g^{-1}\big([0; r]\big) = \{x \in S^1 \widetilde{\times} \mathbb{C} \mid |x| \leqslant \sqrt{r}\}, \qquad \mathbf{C}^r := g^{-1}\big([r; 1]\big).$$

Thus $\mathbf{K}_r$ is a "thinner" solid Klein bottle with boundary K_r, while $\mathbf{C}^r$ is a collar of the boundary Klein bottle $\partial\mathbf{K}$. In particular, K_0 is a circle being also the zero section of γ.

2.2. **Universal cover of $\mathbf{K} \backslash K_0$.** Consider also another universal covering map

$$\alpha : \mathbb{R}^2 \times (0; +\infty) \to \mathbb{R} \times (\mathbb{C} \backslash \{0\}), \qquad \alpha(s, \phi, r) = (s, re^{2\pi i \phi}).$$

Then the composition:

$$\zeta : \mathbb{R}^2 \times (0; 1] \xrightarrow{\alpha} \mathbb{R} \times (D^2 \backslash \{0\}) \xrightarrow{\beta} \mathbf{K} \backslash K_0$$

is the universal covering map for $\mathbf{K}\backslash K_0$. Evidently, for each leaf K_r, $r > 0$, its inverse $\zeta^{-1}(K_r)$ is the horizontal plane $\mathbb{R}^2 \times r$. In other words, the composition

$$g'' := g' \circ \alpha : \mathbb{R}^2 \times (0;+\infty) \to (0;+\infty)$$

is just the coordinate projection, $g''(s,\phi,r) = r$.

One easily checks that the group of covering translations of ζ is generated by the following diffeomorphisms

$$\begin{gathered} \mathbf{a},\mathbf{b} : \mathbb{R}^2 \times (0+\infty) \to \mathbb{R}^2 \times (0+\infty), \\ \mathbf{a}(s,\phi,r) = (s,\phi+1,r), \qquad \mathbf{b}(s,\phi,r) = (s+1,-\phi,r), \end{gathered} \tag{2.2}$$

and that the following identities holds:

$$\alpha \circ \mathbf{a} = \alpha, \qquad \alpha \circ \mathbf{b} = \xi \circ \alpha, \qquad \mathbf{b} \circ \mathbf{a} = \mathbf{a}^{-1} \circ \mathbf{b}.$$

Let us collect all those spaces and maps into the following commutative diagram:

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{R}^2 \times (0;1] \arrow[rr, hook] \arrow[d, "\alpha"] \arrow[dd, bend right, "\zeta"'] & & \mathbb{R}^2 \times (0;+\infty) \arrow[d, "\alpha"] \arrow[ddr, "g''"] & \\
\mathbb{R} \times (D^2\backslash\{0\}) \arrow[r, hook] \arrow[d, "\beta"] & \mathbb{R} \times D^2 \arrow[r, hook] \arrow[d, "\beta"] & \mathbb{R} \times \mathbb{C} \arrow[d, "\beta"] \arrow[dr, "g'"] & \\
\mathbf{K}\backslash K_0 \arrow[r, hook] \arrow[dr, "\gamma"] & \mathbf{K} = g^{-1}([0;1]) \arrow[r, hook] \arrow[d, "\gamma"] & S^1 \tilde{\times} \mathbb{C} \arrow[r, "g"] \arrow[dl, "\gamma"'] & \mathbb{R} \\
& S^1 & &
\end{tikzcd} \tag{2.3}$$

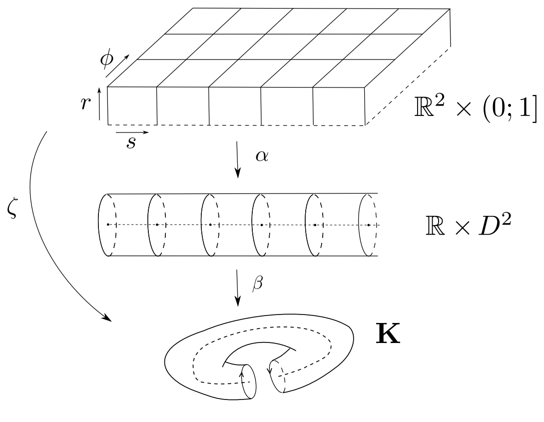


FIGURE 2.1. Universal coverings of $\mathbf{K}$ and $\mathbf{K}\backslash K_0$

2.3. **Liftings of diffemorphisms.** We will also use the following simple statement concerning covering maps:

Lemma 2.4. *Let $\beta : X \to Y$ be a covering map between path connected topological spaces, and $\xi : X \to X$ be any covering transformation, i.e. a homeomorphism satisfying $\beta \circ \xi = \beta$. Let also $h : Y \to Y$ be a continuous map having a lifting $h' : X \to X$, so $\beta \circ h' = h \circ \beta$. Then each of the following conditions implies that h' commutes with ξ, i.e. $\xi \circ h' = h' \circ \xi$.*

(1) *There exists a point $x \in X$ such that $\xi \circ h'(x) = h' \circ \xi(x)$.*

(2) *There exists a subset $A \subset Y$ being invariant under ξ, i.e. $\xi(A) = A$, and such that h' is fixed on A.*

Proof. (1) Notice that $\xi \circ h'$ and $h' \circ \xi$ are also liftings of h, since

$$\xi \circ h' \circ \beta = \xi \circ \beta \circ h = \beta \circ h, \qquad h' \circ \xi \circ \beta = h' \circ \beta = \beta \circ h.$$

Moreover, by assumption, they coincide at x. Then by uniqueness of liftings with one prescribed value, they should identically coincide on all of X.

(2) Let $x \in A$ be any point. Then, by assumption, $\xi(x) \in A$. As h' is fixed on A we have that $h' \circ \xi(x) = \xi(x) = \xi \circ h'(x)$. Hence by (1), $h' \circ \xi \equiv \xi \circ h'$ on all of X. □

Notice that each $h \in \mathcal{D}(\mathbf{K}, \partial\mathbf{K})$ lifts to a unique diffeomorphism

$$h' : \mathbb{R} \times D^2 \to \mathbb{R} \times D^2$$

fixed on $\mathbb{R} \times S^1$, so $\beta \circ h' = h \circ \beta$. Since $\mathbb{R} \times S^1$ is invariant under ξ, it follows from Lemma 2.4 that h' commutes with ξ.

Moreover, suppose in addition that $h(K_0) = K_0$, $h'(\mathbb{R} \times 0) = \mathbb{R} \times 0$, then the restriction $h'|_{\mathbb{R}\times(D^2\setminus\{0\})}$ lifts in turn to a unique diffeomorphism

$$h'' : \mathbb{R}^2 \times (0;1] \to \mathbb{R}^2 \times (0;1]$$

fixed on $\mathbb{R}^2 \times 1$, so

$$\alpha \circ h'' = h' \circ \alpha : \mathbb{R}^2 \times (0;1] \to \mathbb{R} \times (D^2\setminus\{0\}).$$

Again, since $\mathbb{R}^2 \times 1$ is invariant under $\mathbf{a}$ and $\mathbf{b}$, we get from Lemma 2.4 that h'' commutes with $\mathbf{a}$ and $\mathbf{b}$. These liftings h' and h'' of h will play an important role for our proofs.

Let us also mention that the group $\mathcal{D}^{lp}(\mathcal{G}, \partial\mathbf{K})$ can be defined as the subgroup of $\mathcal{D}(\mathbf{K}, \partial\mathbf{K})$ consisting of diffeomorphisms preserving the function g, i.e. satisfying the identity: $g \circ h = g$. Moreover, if $h \in \mathcal{D}^{lp}(\mathcal{G}, \partial\mathbf{K})$, both liftings h' and h'' are defined and they satisfy the following idenitities: $g' \circ h' = g'$ and $g'' \circ h'' = g''$.

3. Proof of Theorem 1.4

The second statement (2) that the pair $\big(\mathcal{D}^{lp}(\mathcal{G}), \mathcal{D}^{lp}(\mathcal{G}, \partial\mathbf{K})\big)$ is a strong deformation retract of $\big(\mathcal{D}^{fol}(\mathcal{G}), \mathcal{D}^{lp}(\mathcal{G}, \partial\mathbf{K})\big)$ is a particular case of results from [16].

For the proof of (1) we need to define an explicit model for the solid Klein bottle $\mathbf{K}$ and the universal covers of $\mathbf{K}$ and $\mathbf{K}\backslash K_0$.

(1) The proof of contractibility of the group $\mathcal{D}^{lp}(\mathcal{G}, \partial\mathbf{K})$ almost literally follows the proof of main result from [12] for similar foliation on the solid torus, since the results of that paper are proved in a greater generality and are applicable in the current situation. For the convenience of the reader we will repeat certain arguments. Namely, we will define four subgroups of $\mathcal{D}^{lp}(\mathcal{G}, \partial\mathbf{K})$:

$$\mathcal{B}_4 \subset \mathcal{B}_3 \subset \mathcal{B}_2 \subset \mathcal{B}_1 \subset \mathcal{B}_0 = \mathcal{D}^{lp}(\mathcal{G}, \partial\mathbf{K}),$$

and show[1] that *all the inclusions are homotopy equivalences, while the smallest group $\mathcal{B}_4$ is weakly contractible.*

To proceed with the proof it will be convenient to fix some $\mathcal{C}^\infty$ function $\mu : [0;1] \to [0;1]$ such that $\mu = 0$ on $[0;0.2]$ and $\mu = 1$ on $[0;0.8]$.

1) **Inclusion $\mathcal{B}_1 \subset \mathcal{B}_0$.**

Let us define the group $\mathcal{B}_1$. Let $h \in \mathcal{B}_0 = \mathcal{D}^{lp}(\mathcal{G}, \partial\mathbf{K})$ be any element and $h' : \mathbb{R} \times D^2 \to \mathbb{R} \times D^2$ be its unique lifting fixed on $\mathbb{R} \times S^1$. Since $h(K_0) = K_0$, it follows that $h'(\mathbb{R}\times 0) = \mathbb{R}\times 0$, so there exists an orientation preserving diffeomorphism $\sigma(h) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ commuting with ξ and such that

$$h'(s, 0) = \big(\sigma(h)(s),\ 0\big),\ \ s \in \mathbb{R}.$$

is $\mathbb{R} \times 0$ is also invariant under ξ. In particular,

$$h' \circ \xi(s, 0) = h'(s+1, 0) = \big(\sigma(h)(s+1), 0\big),$$
$$\xi \circ h'(s, 0) = \xi(\sigma(h)(s), 0) = \big(\sigma(h)(s) + 1, 0\big),$$

so $\sigma(h)(s+1) = \sigma(h)(s) + 1$ for all $s \in \mathbb{R}$. Let $\mathcal{D}^+_\eta(\mathbb{R})$ be the group of all orientation preserving diffeomorphisms q of $\mathbb{R}$ satisfying the identity $q(s+1) = q(s) + 1$ for all $s \in \mathbb{R}$. Then the correspondence $h \mapsto \sigma(h)$ is a well-defined map $\sigma : \mathcal{B}_0 \to \mathcal{D}^+_\eta(\mathbb{R})$. One easily check that σ is a continuous homomorphism.

Let $\mathcal{B}_1 := \ker(\sigma)$ be the kernel of σ. Thus $\mathcal{B}_1$ consists of $\mathcal{G}$-leaf preserving diffeomorphisms h such that their unique lifting h' to the universal cover $\mathbb{R} \times D^2$ fixed on $\mathbb{R} \times S^1$ is also fixed on $\mathbb{R} \times 0$.

[1] We also "reorder" here the groups $\mathcal{B}_i$ in comparison with their counterparts from [12]. Namely, we will make our diffeomorphisms fixed on the collar of $\partial\mathbf{K}$ at the fourth step, while in [12] that was done from the beginning. This will slightly simplify the exposition.

We claim that $\mathcal{B}_1$ *is a strong deformation retract of* $\mathcal{B}_0$. The proof it easy and consists of two statements. Let us recall the arguments from [12].

a) *σ admits a continuous section $s : \mathcal{D}^+_\eta(\mathbb{R}) \to \mathcal{D}^{lp}(\mathcal{G}, \partial\mathbf{K}) = \mathcal{B}_0$ satisfying $s(\mathrm{id}_\mathbb{R}) = \mathrm{id}_\mathbf{K}$.* Thus s is a continuous map (not necessarily a homomorphism) such that $\sigma \circ s(g) = g$ for all $g \in \mathcal{D}^+_\eta(\mathbb{R})$.

Indeed, note that each $q \in \mathcal{D}^+_\eta(\mathbb{R})$ extends to a diffeomorphism

$$\hat{q} : \mathbb{R} \times D^2 \to \mathbb{R} \times D^2, \qquad \hat{q}(w, s) = \big(w, \mu(|w|)q(s) + (1 - \mu(|w|)s)\big)$$

fixed even on the set $p^{-1}(\mathbf{C}^{0.8}) = \{(w, s) \mid |w| \in [0.8; 1]\}$. One easily checks that $\hat{q}$ also commutes with ξ, and preserves the sets $p^{-1}(K_r)$, $r \in [0; 1]$, being the inverses of the leaves of $\mathcal{G}$. Hence $\hat{q}$ yields a unique diffeomorphism $s(q)$ of $\mathbf{K}$ preserving the leaves of $\mathcal{G}$ and fixed on $\mathbf{C}^{0.8}$. In other words, $s(q) \in \mathcal{D}^{lp}(\mathcal{G}, \partial\mathbf{K}) = \mathcal{B}_0$. Moreover, $\hat{q}$ is in turn a unique lifting of $s(q)$ fixed on $\mathbb{R} \times S^1$, whence the correspondence $q \mapsto s(q)$ is the desired section of σ.

b) *The group $\mathcal{D}^+_\eta(\mathbb{R})$ is convex, and therefore contractible into the point $\mathrm{id}_\mathbb{R}$ via the "stantard" homotopy:*

$$H : \mathcal{D}^+_\eta(\mathbb{R}) \times [0; 1] \to \mathcal{D}^+_\eta(\mathbb{R}), \qquad H(q, t) = (1 - t)q + t\,\mathrm{id}_\mathbb{R}.$$

Then a) allows to construct the following homeomorphism

$$\eta : \mathcal{B}_1 \times \mathcal{D}^+_\eta(\mathbb{R}) \;\equiv\; \ker(\sigma) \times \mathcal{D}^+_\eta(\mathbb{R}) \;\to\; \mathcal{D}^{lp}(\mathcal{G}, \mathbf{C}^{0.8}),$$
$$\eta(h, q) = h \circ s(q).$$

which is "fixed on $\mathcal{B}_1$" in the sense that $\eta(h, \mathrm{id}_\mathbb{R}) = h$ for all $h \in \mathcal{B}_1$. As $\mathcal{D}^+_\eta(\mathbb{R})$ is contractible into the point $\mathrm{id}_\mathbb{R}$, it now follows that $\mathcal{B}_1$ is a strong deformation retract of $\mathcal{B}_0 = \mathcal{D}^{lp}(\mathcal{G}, \mathbf{C}^{0.8})$. We refer the reader to [12] for the details.

2) **Inclusion $\mathcal{B}_2 \subset \mathcal{B}_1$.**

Define $\mathcal{B}_2$ to be the subgroup of $\mathcal{B}_1$ consisting of diffeomorphisms *h coinciding with some vector bundle morphism $q : S^1 \tilde{\times} \mathbb{C} \to S^1 \tilde{\times} \mathbb{C}$ on $\mathbf{K}_{0.2}$.*

To see what this means consider the standard disk bundle $\gamma : \mathbf{K} \to S^1$ from (2.3), and for every $y \in S^1$ and $r \in (0; 1]$ denote by

$$D_r(y) = \gamma^{-1}(y) \cap \mathbf{K}_r$$

the closed 2-disk of radius r in the fibre over y. Notice that the intersections of $D_r(y)$ with the leaves of $\mathcal{G}$ constitute the partition of $D_r(y)$ into concentric circles. The following lemma is easy and directly follows from definitions of the above covering maps.

Lemma 3.1. *Let $h \in \mathcal{B}_1$ then the following conditions are equivalent:*

(1) *$h \in \mathcal{B}_2$;*

(2) *$h(D_{0.2}(y)) = D_{0.2}(y)$ for each $y \in S^1$ and the restriction*

$$h : D_r(y) \to D_r(y)$$

is a rotation (i.e. a linear isomorphism preserving concentric circles);

(3) *there exists a $\mathcal{C}^\infty$ function $\lambda_h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ such that*

$$h'(w, s) = (we^{2\pi i \lambda_h(s)}, s), \qquad \lambda_h(s+1) = -\lambda_h(s),$$

for all $s \in \mathbb{R}$ and $w \in D^2$ with $|w| \leqslant 0.2$;

(4) *there exists a $\mathcal{C}^\infty$ function $\lambda_h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ such that*

$$h''(s, \phi, r) = (s, \phi + \lambda_h(s), r), \qquad \lambda_h(s+1) = -\lambda_h(s),$$

for all $s \in \mathbb{R}$ and $r \in (0; 0.2]$;

In this case such a function λ_h in (3) and (4) is the same, and it is also unique. □

Proof. Equivalence of conditions (1)-(4) is easy. It also follows from (4) that λ_h is uniquely determined by h''. □

Now, by "linearization theorem" [11], the inclusion $\mathcal{B}_2 \subset \mathcal{B}_1$ is a homotopy equivalence. Notice that in our situation $\mathcal{G}$ consists of level sets of a positive definite 2-homogeneous on fibers function g. In this case the proof of that "linearization theorem" can be simplified as it was shown in [12, Theorem 3.1.2].

More precisely, the deformation of $\mathcal{B}_1$ into $\mathcal{B}_2$ can be defined as follows. Let U be a neighborhood of the central circle K_0 (i.e. the zero section of $p : S^1 \tilde{\times} \mathbb{C} \to S^1$) and $h : U \to S^1 \tilde{\times} \mathbb{C}$ a smooth embedding such that $h(K_0) = K_0$, but it is not necessarily fixed on K_0. Then one can define the following vector bundle isomorphism

$$\mathsf{T}_{\mathrm{fib}}(h) : S^1 \tilde{\times} \mathbb{C} \to S^1 \tilde{\times} \mathbb{C}, \qquad \mathsf{T}_{\mathrm{fib}}(h)(x) = \lim_{t \to 0} \tfrac{1}{t} h(tx),$$

which can be regarded as a "partial derivative" of h at points of K_0 in the direction of fibers of the vector bundle $p : S^1 \tilde{\times} \mathbb{C} \to S^1$, see [11]. In particular, $\mathsf{T}_{\mathrm{fib}}(h)$ is well defined for all $h \in \mathcal{B}_1$. It is easy to see that if $h \in \mathcal{B}_2$, so it coincides with some vector bundle morphism q on $\mathbf{K}_{0.2}$, then $\mathsf{T}_{\mathrm{fib}}(h) \equiv q$ on all of $S^1 \tilde{\times} \mathbb{C}$.

Define also the following function

$$\phi : [0;1] \times (S^1 \tilde{\times} \mathbb{C}) \to \mathbb{R}, \qquad \phi(t, x) = t + (1-t)\mu(|x|).$$

Evidently, $\phi(t, x) = 0$ exactly on the set $0 \times \mathbf{K}_{0.2}$. Now a deformation $H : \mathcal{B}_1 \times [0;1] \to \mathcal{B}_1$ of $\mathcal{B}_1$ into $\mathcal{B}_2$ can be given by the following formula:

$$H(h, t)(x) = \begin{cases} \frac{h(\phi(t,x)x)}{\phi(t,x)}, & (t, x) \in \big([0;1] \times \mathbf{K}\big) \backslash \big(0 \times \mathbf{K}_{0.2}\big), \\ \mathsf{T}_{\mathrm{fib}}(h)(x), & (t, x) \in 0 \times \mathbf{K}_{0.2}. \end{cases}$$

Inbdeed, one can show (using Hadamard lemma) that $H(h,t)$ is a diffeomorphism of $\mathbf{K}$ belonging to $\mathcal{B}_1$ for all $(h,t) \in \mathcal{B}_1 \times [0;1]$, and the map H is continuous with respect to the corrresponding $\mathcal{C}^\infty$ Whitney topologies, see [12, Theorem 3.1.2]. Moreover, it is evident, that

$$H_1(h) = h, \qquad\qquad H_0(h)|_{\mathbf{K}_{0.2}} = \mathsf{T}_{\mathrm{fib}}(h)|_{\mathbf{K}_{0.2}}.$$

The latter means that $H_0(h)$ coincides with the vector bundle morphism $\mathsf{T}_{\mathrm{fib}}(h)$ on $\mathbf{K}_{0.2}$, and thus $H_0(h)$ belongs to $\mathcal{B}_2$. Finally, if h is already in $\mathcal{B}_2$, then it easily follows from the formulas for H, that $H_t(h) = h = \mathsf{T}_{\mathrm{fib}}(h)$ on $\mathbf{K}_{0.2}$. Thus H is a homotopy of $\mathcal{B}_1$ which deforms $\mathcal{B}_1$ into $\mathcal{B}_2$ and leaves $\mathcal{B}_2$ invariant. This means that H is a deformation of $\mathcal{B}_1$ into $\mathcal{B}_2$, and therefore the inclusion $\mathcal{B}_2 \subset \mathcal{B}_1$ is a homotopy equivalence whose homotopy inverse is the map $H_0 : \mathcal{B}_1 \to \mathcal{B}_2$.

3) **Inclusion** $\mathcal{B}_3 \subset \mathcal{B}_2$.

Denote by $\mathcal{C}^\infty_*(\mathbb{R},\mathbb{R})$ the subset of the space $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$ consisting of functions $\delta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ satisfying the identity $\delta(s+1) + \delta(s) \equiv 0$ for all $s \in \mathbb{R}$.

Recall that, by Lemma 3.1, to each $h \in \mathcal{B}_2$ one associates a unique $\mathcal{C}^\infty$ function $\lambda_h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ satisfying conditions of Lemma 3.1. In particular, $\lambda_h \in \mathcal{C}^\infty_*(\mathbb{R},\mathbb{R})$, and thus we get a well-defined map $\lambda : \mathcal{B}_2 \to \mathcal{C}^\infty_*(\mathbb{R},\mathbb{R})$. One easily checks $\lambda_{h_1 \circ h_2} = \lambda_{h_1} + \lambda_{h_2}$ for all $h_1, h_2 \in \mathcal{B}_2$, so the correspondence $h \mapsto \lambda_h$ is a continuous homomorphism of topological groups.

Let $\mathcal{B}_3 := \ker(\lambda)$ be the kernel of λ, so it consists of elements $h \in \mathcal{B}_2$ for which $\lambda_h \equiv 0$, i.e. h'' is fixed on $\mathbb{R}^2 \times (0;0.2]$. One easily checks that the following two statements hold.

a) $\mathcal{C}^\infty_*(\mathbb{R},\mathbb{R})$ *is convex and therefore contractible.*

b) *The homomorphism* $\lambda : \mathcal{B}_2 \to \mathcal{C}^\infty_*(\mathbb{R},\mathbb{R})$ *admits a continuous section* $s : \mathcal{C}^\infty_*(\mathbb{R},\mathbb{R}) \to \mathcal{B}_2$. Actually, for each $\delta \in \mathcal{C}^\infty_*(\mathbb{R},\mathbb{R})$ we have the following diffeomorphism

$$h'_\delta : \mathbb{R} \times D^2 \to \mathbb{R} \times D^2, \qquad h'_\delta(s,w) = \big(s, we^{2\pi i(1-\mu(r))\delta(s)}\big).$$

Evidently, it is fixed near $\mathbb{R} \times S^1$, fixed on $\mathbb{R} \times 0$, commutes with the covering translation $\xi : \mathbb{R} \times D^2 \to \mathbb{R} \times D^2$ and preserves the function g'. Hence h'_δ yields a unique diffeomorphism $h_\delta : \mathbf{K} \to \mathbf{K}$, which is fixed near $\partial\mathbf{K}$ and preserves g. In turn, h'_δ is lifting of h_δ and is of the form (3) of Lemma 3.1. Hence $h_\delta \in \mathcal{B}_2$.

Now, similarly to the proof for the inclusion $\mathcal{B}_1 \subset \mathcal{B}_0$, these conditions imply that $\mathcal{B}_3$ is a strong deformation retract of $\mathcal{B}_2$.

4) **Inclusion** $\mathcal{B}_4 \subset \mathcal{B}_3$.

Let $\mathcal{B}_4$ be the subgroup of $\mathcal{B}_3$ consisting of $\mathcal{G}$-leaf preserving diffeomorphisms fixed on the collar $\mathbf{C}^{0.8}$. Then *the inclusion* $\mathcal{B}_4 \subset \mathcal{B}_3$ *is a homotopy equivalence.* Indeed, the deformation $H : \mathcal{B}_3 \times [0;1] \to \mathcal{B}_3$ of $\mathcal{B}_3$ into $\mathcal{B}_4$ can be given by:

$$H(h,t)(x) = \begin{cases} h\big((t|x| + (1-t)\mu(|x|))\frac{x}{|x|}\big), & |x| > 0, \\ h(x), & |x| \leqslant 0.2. \end{cases} \tag{3.1}$$

Thus $H_1(h) = h$, H_0 is fixed on $\mathbf{C}^{0.8}$.

5) **Weak contractibility of $\mathcal{B}_4$.**

Similarly to the last step of the proof of [12, Theorem 1.1.1] the group $\mathcal{B}_4$ can be embedded into the loop space of the group of diffeomorphisms of K, and that inclusion is a weak homotopy equivalence.

Namely, for each $h \in \mathcal{B}_4$ define the following path $\gamma_h : [0;1] \to \mathcal{D}(K)$ given by

$$\gamma_h(t)(x) = \begin{cases} x, & t = 0, \\ \frac{1}{t}h(tx), & t \in (0;1]. \end{cases}$$

Since h is fixed near K_0 and preserves "parallel" Klein bottles K_t, $t \in (0;1]$, it follows that γ_h is a well-defined continuous *loop* such that $\gamma(t) = \mathrm{id}_K$ for $t \in [0;0.2] \cup [0.8;1]$.

Moreover, the additional assumptions that for each $h \in \mathcal{B}_4$

– its lifting h' is fixed near $\mathbb{R} \times 0$

– while the lifting h'' of $h|_{\mathbf{K}\setminus K_0}$ is fixed on $\mathbb{R}^2 \times (0;0.2]$,

imply that h actually represents a null-homotopic loops in $\Omega(\mathcal{D}_{\mathrm{id}}(K))$. Thus the correspondence $h \mapsto \gamma_h$ is an embedded of $\mathcal{B}_4$ into the path component $\Omega_0(\mathcal{D}_{\mathrm{id}}(K), \mathrm{id}_K)$ of $\Omega(\mathcal{D}_{\mathrm{id}}(K), \mathrm{id}_K)$ consisting of null-homotopic loops.

It is shown in [10, Corollary 1.10] that the latter inclusion

$$\mathcal{B}_4 \subset \Omega_0(\mathcal{D}_{\mathrm{id}}(K), \mathrm{id}_K)$$

is a weak homotopy equivalence. In particular, for $i \geqslant 1$ we have the following isomorphisms:

$$\pi_i\mathcal{B}_4 = \pi_i\Omega_0(\mathcal{D}_{\mathrm{id}}(K), \mathrm{id}_K) = \pi_{i+1}\mathcal{D}_{\mathrm{id}}(K) = \pi_{i+1}S^1 = 0.$$

Hence all homotopy groups of $\mathcal{B}_4$ vanish.

This completes the proof of Theorem 3. □

Remark 3.2. Formula (3.1) for the homotopy in the case 4) is also applicable for all $h \in \mathcal{D}^{lp}(\mathcal{G})$ not only belonging to $\mathcal{B}_3$, and it gives a deformation of $\mathcal{D}^{lp}(\mathcal{G})$ into $\mathcal{D}^{lp}(\mathcal{G}, \mathbf{C}^{0.8})$. In particular, $\mathcal{D}^{lp}(\mathcal{G}, \mathbf{C}^{0.8})$ *is also weakly contractible.*

4. Proof of Theorem 1.5

Let $S^1 \mathbin{\tilde{\times}} S^2$ be the twisted S^2-bundle over S^1 glued from two copies of $\mathbf{K}_0$ and $\mathbf{K}_1$ by some diffeomorphism of their boundaries, and $K := \partial\mathbf{K}_0 = \partial\mathbf{K}_1$

be their common boundary. Let also $\widehat{\mathcal{G}}$ be the foliation into two circles and Klein bottles parallel ot K.

Statement (1) that the group $\mathcal{D}^{lp}(\widehat{\mathcal{G}})$ is a strong deformation retract of $\mathcal{D}^{fol}_{+}(\widehat{\mathcal{G}})$ is a direct consequence of results from [16].

(2) We should prove that the "restriction to K homomorphism"

$$\rho : \mathcal{D}^{lp}(\widehat{\mathcal{G}}) \to \mathcal{D}(K)$$

is a weak homotopy equivalence.

As noted above, due to [2, 15, 18], this homomorphism is a locally trivial fibration whose fiber, $\mathcal{D}^{lp}(\widehat{\mathcal{G}}, K)$, is the group of diffeomorphisms fixed on K. Since ρ is surjective, it suffices to show weak contractibility of $\mathcal{D}^{lp}(\widehat{\mathcal{G}}, K)$.

Let C be a neighborhood of K being a union of collars $\mathbf{C}^{0.8}$ of K in $\mathbf{K}_0$ and $\mathbf{K}_1$. Then the inclusion $\mathcal{D}^{lp}(\widehat{\mathcal{G}}, C) \subset \mathcal{D}^{lp}(\widehat{\mathcal{G}}, K)$ is a homotopy equivalence. The proof is similar to the formula (3.1) in the proof of the case 4) of Theorem 1.4.

On the other hand, $\mathcal{D}^{lp}(\widehat{\mathcal{G}}, C)$ is homeomorphic to the product

$$\mathcal{D}^{lp}(\widehat{\mathcal{G}}, \mathbf{C}^{0.8}) \times \mathcal{D}^{lp}(\widehat{\mathcal{G}}, \mathbf{C}^{0.8})$$

of two copies of $\mathcal{D}^{lp}(\widehat{\mathcal{G}}, \mathbf{C}^{0.8})$ being weakly contractible by Remark 3.2. Hence $\mathcal{D}^{lp}(\widehat{\mathcal{G}}, C)$ is weakly contractible as well. Therefore $\mathcal{D}^{lp}(\widehat{\mathcal{G}}, K)$ is also weakly contractible. Theorem 1.5 is completed.

References

[1] Raoul Bott. Morse theory indomitable. *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, 68:99–114 (1989), 1988. URL: http://www.numdam.org/item?id=PMIHES_1988__68__99_0.

[2] Jean Cerf. Topologie de certains espaces de plongements. *Bull. Soc. Math. France*, 89:227–380, 1961. doi:10.24033/bsmf.1567.

[3] Eugénia César de Sá. Automorphisms of 3-manifolds and representations of 4-manifolds, 1977. PhD theses, University of Warwick. URL: https://wrap.warwick.ac.uk/137386/1/WRAP_Theses_C%C3%A9sar_de_S%C3%A1_1977.pdf.

[4] Eugénia César de Sá and Colin Rourke. The homotopy type of homeomorphisms of 3-manifolds. *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)*, 1(1):251–254, 1979. URL: http://dx.doi.org/10.1090/S0273-0979-1979-14574-9, doi:10.1090/S0273-0979-1979-14574-9.

[5] C. J. Earle and J. Eells. A fibre bundle description of teichmüller theory. *J. Differential Geometry*, 3:19–43, 1969. doi:10.4310/jdg/1214428816.

[6] M. Evangelista-Alvarado, P. Suárez-Serrato, J. Torres Orozco, and R. Vera. On Bott-Morse foliations and their Poisson structures in dimension three. *J. Singul.*, 19:19–33, 2019. doi:10.5427/jsing.2019.19b.

[7] André Gramain. Le type d'homotopie du groupe des difféomorphismes d'une surface compacte. *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)*, 6:53–66, 1973. doi:10.24033/asens.1242.

[8] N. V. Ivanov. Groups of diffeomorphisms of Waldhausen manifolds. *Zap. Naučn. Sem. Leningrad. Otdel. Mat. Inst. Steklov. (LOMI)*, 66:172–176, 209, 1976. Studies in topology, II. doi:10.1007/BF01098421.

[9] O. Khokhliuk and S. Maksymenko. Diffeomorphisms preserving Morse-Bott functions. *Indag. Math. (N.S.)*, 31(2):185–203, 2020. doi:10.1016/j.indag.2019.12.004.

[10] O. Khokhliuk and S. Maksymenko. Smooth approximations and their applications to homotopy types. *Proc. Int. Geom. Cent.*, 13(2):68–108, 2020. doi:10.15673/tmgc.v13i2.1781.

[11] O. Khokhliuk and S. Maksymenko. Foliated and compactly supported isotopies of regular neighborhoods, 2022. doi:10.48550/arXiv.2208.05876.

[12] O. Khokhliuk and S. Maksymenko. Homotopy types of diffeomorphism groups of polar Morse-Bott foliations on lens spaces, 1. *to appear in Journal of Homotopy and Related Structures*, 2023. doi:10.1007/s40062-023-00328-z.

[13] M. Ho Kim and Frank Raymond. The diffeotopy group of the twisted 2-sphere bundle over the circle. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 322(1):159–168, 1990. doi:10.2307/2001526.

[14] W. B. R. Lickorish. Homeomorphisms of non-orientable two-manifolds. *Proc. Cambridge Philos. Soc.*, 59:307–317, 1963. doi:10.1017/s0305004100036926.

[15] Elon L. Lima. On the local triviality of the restriction map for embeddings. *Comment. Math. Helv.*, 38:163–164, 1964. doi:10.1007/BF02566913.

[16] S. Maksymenko. Homotopy types of diffeomorphism groups of polar Morse-Bott foliations on lens spaces, 2, 2023. doi:10.48550/arXiv.2301.12447.

[17] José Martínez-Alfaro, Ingrid S. Meza-Sarmiento, and Regilene D. S. Oliveira. Singular levels and topological invariants of Morse-Bott foliations on non-orientable surfaces. *Topol. Methods Nonlinear Anal.*, 51(1):183–213, 2018. doi:10.12775/TMNA.2017.051.

[18] Richard S. Palais. Local triviality of the restriction map for embeddings. *Comment. Math. Helv.*, 34:305–312, 1960. doi:10.1007/BF02565942.

Sergiy Maksymenko
Algebra and Topology Department
Institute of Mathematics of National Academy of Sciences of Ukraine
Tereshchenkivska str., 3, Kyiv, 01024, Ukraine
Email: maks@imath.kiev.ua
ORCID: 0000-0002-0062-5188

Збірник праць Ін-ту математики НАН України (2023) т. 20, №1, 911–946

Інтегральні теореми в скінченновимірній комутативній алгебрі

С. А. Плакса, В. С. Шпаківський

Abstract. For monogenic (continuous and differentiable in the sense of Gâteaux) functions given in special real subspaces of an arbitrary finite-dimensional commutative associative algebra over the complex field and taking values in this algebra, we establish basic properties analogous to properties of holomorphic functions of a complex variable. Methods for proving results are based on a representation of monogenic functions via holomorphic functions of complex variables that allows to establish analogues of Cauchy-Riemann conditions and the continuity of Gâteaux derivatives of all orders for monogenic functions. In such a way, analogues of a number of classical theorems of complex analysis (the Cauchy integral theorem for a curvilinear integral, the Cauchy integral formula, the Morera theorem, the Taylor theorem) are proved and different equivalent definitions for the mentioned monogenic functions are established. An analogue of the Cauchy theorem for an integral over non piecewise smooth surfaces is proved.

Анотація. Для моногенних (неперервних і диференційовних за Гато) функцій, що визначені у спеціальних дійсних підпросторах довільної скінченновимірної комутативної асоціативної алгебри над комплексним полем і примають значення в цій алгебрі, встановлено основні властивості, аналогічні властивостям голоморфних функцій комплексної змінної. Методи дослідження базуються на представленні моногенних функцій через голоморфні функції комплексних змінних, що дає змогу встановити аналоги умов Коші-Рімана та неперервність похідних Гато всіх порядків для моногенних функцій. У такий спосіб доведено аналоги ряду класичних теорем комплексного аналізу (інтегральна теорема Коші для криволінійного інтеграла, інтегральна формула Коші, теорема Морери, теорема Тейлора) та встановлено різні еквівалентні означення моногенних функцій. Доведено аналог теореми Коші для поверзневого інтеграла по не кусково гладких поверхнях.

2020 Mathematics Subject Classification: 30G35, 35J05, 31A30

Ключові слова: комутативна банахова алгебра; моногенна функція; аналітична функція; гіперголоморфна функція; умови Коші-Рімана; теорема Коші; інтегральна формула Коші; теорема Морери; теорема Тейлора

DOI: http://dx.doi.org/10.3842/trim.v20n1.533

1. Вступ

З середини 70-х років минулого століття в Інституті математики НАН України, починаючи з роботи І. П. Мельниченка [55], систематично і послідовно розробляється алгебраїчно-аналітичний підхід до основних еліптичних рівнянь математичної фізики, який пов'язаний з використанням комутативних алгебр.

Ідея такого підходу полягає у знаходженні комутативних банахових алгебр таких, щоб диференційовні за Гато функції зі значеннями в цих алгебрах мали компоненти, які є розв'язками заданих рівнянь з частинними похідними.

Такі алгебри були знайдені І. П. Мельниченком для тривимірного рівняння Лапласа (див. [55, 58, 59]) і еліптичних рівнянь з виродженням на осі, що описують осесиметричні потенціальні поля (див. [56,59]), В. Ф. Ковальовим і І. П. Мельниченком для двовимірного бігармонічного рівняння (див. [51, 57]) і узагальненого бігармонічного рівняння (див. [52]). Згодом, в роботах [27, 31] показано, що для опису всіх просторових гармонічних функцій у формі компонент диференційовних за Гато гіперкомплексних функцій відповідні нескінченновимірні комутативні банахові алгебри необхідно включити у топологічні векторні простори з тим же базисом і топологією покоординатної збіжності.

Інтерес до дослідження функцій в комутативних алгебрах гіперкомплексних чисел останнім часом зростає у зв'язку з поєднанням зручностей властивості комутативності з широкими можливостями застосувань (див., наприклад, монографії Г.Б, Прайса [35], Д. Бокалетті та ін. [9], М.Е. Луна-Елізаррарас та ін. [24] і роботи В.В. Кісіля [20, 21], А. Погоруя, М.Н. Родрігеса-Даніно і М. Шапіро [34], в яких вивчаються різноманітні алгебраїчні, геометричні і аналітичні аспекти теорії гіперкомплексних чисел).

Зрозуміло, що для успішної реалізації вказаного вище підходу до основних еліптичних рівнянь математичної фізики, необхідно розповсюдити класичні методи теорії голоморфних функцій комплексної змінної на диференційовні за Гато функції, задані в банахових алгебрах, асоційованих з рівняннями математичної фізики. Ускладненість ситуації при цьому полягає в обмеженості можливостей переносу класичних теорем комплексного аналізу в аналіз на банахових алгебрах.

У роботі Е. Р. Лорха [23] доведено інтегральну теорему Коші та інтегральну формулу Коші, теореми Тейлора та Морера для функцій, диференційовних у сенсі Лорха в довільній опуклій області комутативної банахової алгебри. Умову опуклості області в цих результатах було знято Е.К. Блюмом [5].

У той же час, застосування диференційовних функцій зі значеннями в комутативних банахових алгебрах до побудови розв'язків рівнянь математичної фізики вимагає дослідження таких функцій у спеціальних дійсних підпросторах вказаних алгебр (див. цитовані роботи [27, 31, 51, 52, 55, 57–59] та роботи П. В. Кетчума [18, 19], Л. Собреро [45]) і М. Н. Рошкулеця [39].

У цій роботі розглядаються моногенні (тобто неперервні та диференційовні за Гато) функції $\Phi : \Omega \to \mathbb{A}$, що визначені в області Ω певного дійсного підпростору E_3 скінченновимірної комутативної асоціативної алгебри $\mathbb{A}$ з одиницею над полем комплексних чисел і приймають значення в цій алгебрі.

Як буде показано, основні властивості таких моногенних функцій аналогічні властивостям голоморфних функцій комплексної змінної. Методи дослідження базуються на представленні моногенних функцій через голоморфні функції комплексних змінних, що дає змогу встановити аналоги умов Коші-Рімана та неперервність похідних Гато всіх порядків для моногенних функцій. У такий спосіб доведено аналоги ряду класичних теорем комплексного аналізу (інтегральна теорема Коші для криволінійного інтеграла, інтегральна формула Коші, теорема Морери, теорема Тейлора) та встановлено різні еквівалентні означення моногенних функцій.

Встановлені результати узагальнюють відповідні результати робіт [26, 28–30, 33] для моногенних функцій в конкретних скінченновимірних комутативних асоціативних алгебрах. Згадаємо також роботи П.В. Кетчума [18, 19], В. Гончарова [14] і М.Н. Рошкулеця [38, 40], в яких аналоги теореми Коші та інтегральної формули Коші для криволінійного інтеграла встановлено в інших конкретних комутативних алгебрах.

Вкажемо роботи, в яких деякі інтегральні теореми доведено в некомутативних алгебрах. Так, ряд гіперкомплексних аналогів інтегральної теореми Коші для криволінійного інтеграла встановлено в роботах А. Садбері [48], Ф. Коломбо, І. Сабадіні і Д. Струппи [11]. В роботах А. Садбері [48], Ф. Брекса, Р. Деланга і Ф. Соммена [7], В. В. Кравченка і М. В. Шапіро [22], С. Бернштейн [4], О. Ф. Геруса [49] подібні теореми доведено для поверхневого інтеграла.

2. Моногенні функції в скінченновимірній комутативній асоціативній алгебрі

Нехай $\mathbb{A}$ – n-вимірна комутативна асоціативна банахова алгебра з одиницею 1 над полем дійсних чисел $\mathbb{R}$ або над полем комплексних чисел $\mathbb{C}$, $3 \leqslant n \leqslant \infty$.

Розглянемо в алгебрі $\mathbb{A}$ вектори $e_1 = 1$, e_2, e_3, лінійно незалежні над полем $\mathbb{R}$. Це означає, що рівність

$$\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3 = 0, \qquad \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R},$$

виконується тоді і тільки тоді, коли $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$.

Нехай $E_3 := \{\zeta := xe_1 + ye_2 + ze_3 \,:\, x, y, z \in \mathbb{R}\}$ – лінійна оболонка векторів e_1, e_2, e_3 над полем $\mathbb{R}$.

Будемо використовувати однакове позначення Ω для області $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ і для області в E_3, яка є конгруентною до області Ω.

2.1. **Диференційовність за Лорхом і за Гато. Моногенні і аналітичні функції.** Розглянемо функцію $\Phi\colon \Omega \to \mathbb{A}$, визначену в області $\Omega \subset E_3$, і поняття диференційовності цієї функції за Лорхом і за Гато.

Функція $\Phi\colon \Omega \to \mathbb{A}$ називається *диференційовною за Лорхом* (див. [23]) в області $\Omega \subset E_3$, якщо для кожної точки $\zeta \in \Omega$ існує елемент $\Phi'_L(\zeta) \in \mathbb{A}$ такий, що для кожного $\varepsilon > 0$ існує $\delta > 0$ таке, що для всіх $h \in E_3$, для яких $\|h\| < \delta$, виконується нерівність

$$\big\|\Phi(\zeta + h) - \Phi(\zeta) - h\Phi'_L(\zeta)\big\| \leqslant \|h\|\,\varepsilon. \tag{2.1}$$

Очевидно, що в нерівності (2.1) *похідна Лорха* $\Phi'_L(\zeta)$ є функцією змінної ζ, тобто $\Phi'_L\colon \Omega \to \mathbb{A}$.

Зазначимо, що динференційовними за Лорхом функціями в комутативних асоціативних банахових алгебрах над полем $\mathbb{C}$ є, зокрема, головні продовження (див., наприклад, монографію Е. Хілле і Р. Філліпса [63, с. 182]) голоморфних функцій комплексної змінної. Якщо комплексна функція F є голоморфною в області $D \subset \mathbb{C}$, то для усіх $\zeta \in \mathbb{A}$, спектр яких міститься в D, головне продовження функції F виражається рівністю

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma} F(t)\,(t-\zeta)^{-1}\,dt, \tag{2.2}$$

де Γ – довільна замкнена спрямлювана жорданова крива в D, яка охоплює спектр елемента ζ.

Використовуючи диференціал Гато, І. П. Мельниченко [55] розглянув похідну Гато функції $\Phi\colon \Omega \to \mathbb{A}$ також як функцію точки $\zeta \in \Omega$.

Ми кажемо, що функція $\Phi\colon \Omega \to \mathbb{A}$ є *диференційовною за Гато* в області $\Omega \subset E_3$, якщо для кожної точки $\zeta \in \Omega$ існує елемент $\Phi'_G(\zeta) \in \mathbb{A}$ такий, що

$$\lim_{\delta \to 0+0} \big(\Phi(\zeta + \delta h) - \Phi(\zeta)\big)\,\delta^{-1} = h\Phi'_G(\zeta) \quad \forall h \in E_3. \tag{2.3}$$

Очевидно, що *похідна Гато* $\Phi'_G(\zeta)$ для кожного вектора $h \in E_3$ є узагальненням класичної похідної за напрямком.

Зауважимо, що обидва означення: похідної Лорха (2.1) і похідної Гато (2.3), – враховують існування необоротних елементів h в алгебрі $\mathbb{A}$, оскільки в цих означеннях не використовується ділення на елементи алгебри на відміну від класичного означення похідної функції комплексної змінної.

Очевидно, що функція Φ, диференційовна за Лорхом в області Ω, є також диференційовною за Гато і $\Phi'_L(\zeta) = \Phi'_G(\zeta)$ для всіх $\zeta \in \Omega$. Обернене твердження не є істинним подібно до того, як існування класичних похідних у точці за усіма напрямками не гарантує сильної диференційовності (і навіть неперервності) функції у цій точці.

Для функції $\Phi\colon \Omega \to \mathbb{A}$ розглянемо поняття моногенності та аналітичності.

Ми говоримо, що функція $\Phi\colon \Omega \to \mathbb{A}$ *моногенна* в області $\Omega \subset E_3$, якщо Φ неперервна і диференційовна за Гато в кожній точці області Ω.

Ми використовуємо поняття моногенної функції у сенсі існування для неї похідних чисел (див. монографії Е. Гурса [15] і Ю. Ю. Трохимчука [62]) у поєднанні з неперервністю цієї функції.

У науковій літературі назва моногенна функція використовується також для функцій, які задані у некомутативних алгебрах і задовольняють деякі умови, подібні до класичних умов Коші-Рімана (див., наприклад, роботу Дж. Райана [41]). Такі функції називають також регулярними (див., наприклад, роботу А. Садбері [48]) або гіперголоморфними (див., наприклад, монографію В. В. Кравченка і М. В. Шапіро [22]).

Функцію $\Phi : \Omega \to \mathbb{A}$ називають *аналітичною* в області $\Omega \subset E_3$, якщо в деякому околі кожної точки $\zeta_0 \in \Omega$ вона може бути представлена у вигляді суми збіжного степеневого ряду з коефіцієнтами, що належать алгебрі $\mathbb{A}$.

Очевидно, що кожна аналітична функція $\Phi : \Omega \to \mathbb{A}$ є моногенною в області $\Omega \subset E_3$ і її похідна Гато $\Phi'_G(\zeta)$ також є моногенною в цій області. Далі будуть вказані достатні умови, за яких моногенна функція

$$\Phi : \Omega \to \mathbb{A}$$

є аналітичною в області $\Omega \subset E_3$.

2.2. **Представлення моногенних функцій за допомогою голоморфних функцій комплексних змінних.** Нехай тепер $\mathbb{A}$ – довільна n-вимірна комутативна асоціативна алгебра з одиницею над полем комплексних чисел. Е. Картан у роботі [8] довів, що в алгебрі $\mathbb{A}$ існує базис $\{I_k\}_{k=1}^n$ і існують структурні константи $\Upsilon_{r,k}^s$ такі, що виконуються наступні правила множення:

$$1)\ \forall r, s \in [1, m] \cap \mathbb{N} : \quad I_r I_s = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad r \neq s, \\ I_r & \text{при} \quad r = s; \end{cases}$$

2) $\forall r, s \in [m+1, n] \cap \mathbb{N}: \quad I_r I_s = \sum\limits_{k=\max\{r,s\}+1}^{n} \Upsilon_{r,k}^{s} I_k;$

3) $\forall s \in [m+1, n] \cap \mathbb{N} \, \exists ! \, u_s \in [1, m] \cap \mathbb{N} \quad \forall r \in [1, m] \cap \mathbb{N}:$

$$I_r I_s = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad r \neq u_s, \\ I_s & \text{при} \quad r = u_s, \end{cases}$$

де $\mathbb{N}$ – множина натуральних чисел. Очевидно, що перші m базисних векторів $\{I_u\}_{u=1}^{m}$ є ідемпотентами і породжують напівпросту підалгебру $\mathcal{S}$ алгебри $\mathbb{A}$, а вектори $\{I_r\}_{r=m+1}^{n}$ породжують нільпотентну підалгебру $\mathcal{N}$ цієї алгебри. Надалі алгебру $\mathbb{A}$ з базисом Картана позначатимемо $\mathbb{A}_n^m$. Одиницею алгебри $\mathbb{A}_n^m$ є елемент $1 = \sum\limits_{u=1}^{m} I_u$.

Норма елемента $v = \sum\limits_{r=1}^{n} v_r I_r$ алгебри $\mathbb{A}_n^m$ визначається рівністю

$$\|v\| := \sqrt{\sum_{r=1}^{n} |v_r|^2}.$$

Алгебра $\mathbb{A}_n^m$ містить m максимальних ідеалів

$$\mathcal{I}_u := \left\{ \sum_{k=1,\, k\neq u}^{n} \lambda_k I_k \mid \lambda_k \in \mathbb{C} \right\}, \quad u = 1, 2, \ldots, m.$$

Визначимо m лінійних неперервних мультиплікативних функціоналів $f_u : \mathbb{A}_n^m \to \mathbb{C}$ рівностями

$$f_u(I_u) = 1, \qquad\qquad f_u(\omega) = 0,$$

для всіх $\omega \in \mathcal{I}_u$, $u = 1, 2, \ldots, m$. Нехай

$$e_1 = 1, \qquad e_2 = \sum_{r=1}^{n} a_r I_r, \qquad e_3 = \sum_{r=1}^{n} b_r I_r \tag{2.4}$$

при $a_r, b_r \in \mathbb{C}$ – трійка векторів в алгебрі $\mathbb{A}_n^m$, які лінійно незалежні над полем $\mathbb{R}$.

Нехай $\zeta := xe_1 + ye_2 + ze_3$, де $x, y, z \in \mathbb{R}$.

Очевидно, що $\xi_u := f_u(\zeta) = x + ya_u + zb_u$, $u = 1, 2, \ldots, m$.

Накладемо наступне обмеження на вибір лінійної оболонки E_3:

$$f_u(E_3) := \{f_u(\zeta) : \zeta \in E_3\} = \mathbb{C}, \qquad u = 1, 2, \ldots, m, \tag{2.5}$$

тобто образом $f_u(E_3)$ множини E_3 при кожному відображенні f_u має бути вся комплексна площина (див. [28]). Очевидно, що це має місце тоді і тільки тоді, коли при кожному фіксованому $u = 1, 2, \ldots, m$ хоча б одне з чисел a_u чи b_u належить $\mathbb{C} \backslash \mathbb{R}$.

Для області $\Omega \subset E_3$ через D_u позначимо область комплексної площини, на яку Ω відображається функціоналом f_u.

У роботі [43] доведено наступне представлення резольвенти:

$$(te_1 - \zeta)^{-1} = \sum_{u=1}^{m} \frac{1}{t - \xi_u} I_u + \sum_{s=m+1}^{n} \sum_{k=2}^{s-m+1} \frac{Q_{k,s}}{(t - \xi_{u_s})^k} I_s \qquad (2.6)$$

$$\forall\, t \in \mathbb{C} : t \neq \xi_u, \quad u = 1, 2, \ldots, m,$$

де $Q_{k,s}$ визначені такими рекурентними співвідношеннями:

$$Q_{2,s} := T_s, \quad Q_{k,s} = \sum_{r=k+m-2}^{s-1} Q_{k-1,r}\, B_{r,\,s}, \quad k = 3, 4, \ldots, s - m + 1,$$

при $T_s := ya_s + zb_s$, $B_{r,s} := \sum\limits_{k=m+1}^{s-1} T_k C_{r,s}^{k}$, $s = m + 2, \ldots, n$, а натуральні числа u_s визначені у правилі множення 3) алгебри $\mathbb{A}_n^m$.

Із співвідношень (2.6) випливає, що точки $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, які відповідають необоротним елементам $\zeta \in \mathbb{A}_n^m$, лежать на прямих

$$L_u : \quad \begin{cases} x + y\,\mathrm{Re}\,a_u + z\,\mathrm{Re}\,b_u = 0, \\ \qquad y\,\mathrm{Im}\,a_u + z\,\mathrm{Im}\,b_u = 0. \end{cases} \qquad (2.7)$$

Наступна теорема містить представлення моногенних функцій, що приймають значення в алгебрі $\mathbb{A}_n^m$, через голоморфні функції комплексних змінних.

Теорема 2.3 ([43]). *Нехай виконується умова (2.5) і область $\Omega \subset E_3$ є опуклою в напрямку прямих L_u при всіх $u = 1, 2, \ldots, m$. Тоді кожна моногенна функція $\Phi : \Omega \to \mathbb{A}_n^m$ подається у вигляді*

$$\begin{aligned} \Phi(\zeta) = \sum_{u=1}^{m} I_u \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_u} F_u(t)(t - \zeta)^{-1}\, dt + \\ + \sum_{s=m+1}^{n} I_s \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_{u_s}} G_s(t)(t - \zeta)^{-1}\, dt, \end{aligned} \qquad (2.8)$$

де F_u – деяка голоморфна функція в області D_u і G_s – деяка голоморфна функція в області D_{u_s}, а Γ_q – замкнена жорданова спрямлювана крива, яка лежить в області D_q, охоплює точку ξ_q і не містить точок ξ_ℓ, $\ell = 1, 2, \ldots, m, \ell \neq q$.

Зауваження 2.4. Основна відмінність між інтегральним оператором (2.8) і головним продовженням (2.2) голоморфних функцій у комутативну банахову алгебру полягає в тому, що крива Γ_u не зобов'язана охоплювати всі точки спектра елемента ζ. Тому інтегральний оператор (2.8) застосовний також у випадку, коли деякі точки згаданого спектра не належать області D.

Зазначимо, що Теорему 2.3 узагальнено в роботі [44] на випадок моногенних функцій $\Phi : \Omega \to \mathbb{A}_n^m$, заданних в області $\Omega \subset E_k$, де

$$E_k := \{\zeta = \sum_{j=1}^{k} x_j e_j : \; x_j \in \mathbb{R}\}$$

– лінійна оболонка векторів $e_1 = 1, e_2, \ldots, e_k$, $2 \leqslant k \leqslant 2n$, лінійно незалежних над полем $\mathbb{R}$. Отримані представлення моногенних функцій узагальнюють відповідні результати робіт [28, 33, 50, 60, 61] та ряд інших результатів про представлення аналітичних функцій в конкретних скінченновимірних комутативних алгебрах, що беруть свій початок від роботи Ф. Рінглеба [37], який отримав аналогічне представлення аналітичних функцій бікомплексної змінної.

Принциповими наслідками рівності (2.8) є твердження, сформульовані в наступній теоремі, яка справедлива для довільної області $\Omega \subset E_3$.

Теорема 2.5. *Нехай виконується умова* (2.5) *і функція* $\Phi : \Omega \to \mathbb{A}_n^m$ *є моногенною в довільній області* $\Omega \subset E_3$. *Тоді:*

1) *функція* Φ *є диференціовною за Лорхом в області* Ω*;*
2) *похідні Гато* $\Phi_G^{(r)}$ *є моногенними функціями в* Ω *для всіх* r.

Доведення. Розглянемо довільну точку $\zeta_0 \in \Omega$ і кулю $\mho \subset \Omega$ з центром у точці ζ_0.

Оскільки $\mho$ – опукла множина, то функція Φ подається у вигляді (2.8) в $\mho$. Звідси випливає, що компоненти U_k розкладу

$$\Phi(\zeta) = \sum_{k=1}^{n} U_k(x, y, z)\, I_k. \tag{2.9}$$

є $\mathbb{R}$-диференційовними функціями в області $\mho$, тобто співвідношення

$$U_k(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z) - U_k(x, y, z) =$$
$$= \frac{\partial U_k(x, y, z)}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial U_k(x, y, z)}{\partial y} \Delta y + \frac{\partial U_k(x, y, z)}{\partial z} \Delta z +$$
$$+ o\left(\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2}\right), \; (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2 \to 0,$$

виконуються для всіх $(x, y, z) \in \mho$.

Тепер диференційовність функції Φ за Лорхом в області $\mho$ встановлюється повністю аналогічно до диференційовності функції комплексної змінної за умови, що її дійсна і уявна частини є диференційовними функціями двох дійсних змінних (див., наприклад, М.О. Лаврентьєв і Б.В. Шабат [53, с. 21]).

Використовуючи представлення (2.8) функції Φ в області $\mho$, отримуємо наступний вираз для похідної Гато порядку r:

$$\Phi_G^{(r)}(\zeta) = \sum_{u=1}^{m} I_u \, \frac{r!}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma_u} F_u(t)\Big((te_1 - \zeta)^{-1}\Big)^{r+1} dt +$$
$$+ \sum_{s=m+1}^{n} I_s \, \frac{r!}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma_{u_s}} G_s(t)\Big((te_1 - \zeta)^{-1}\Big)^{r+1} dt, \qquad \forall\, \zeta \in \mho.$$

Більш того, ця похідна є неперервною функцією в області $\mho$. Отже, похідна Гато $\Phi_G^{(r)}$ є моногенною функцією в $\mho$ для будь-якого r.

В силу довільності вибору точки ζ_0 і кулі $\mho$ всі твердження теореми справедливі в області Ω. □

Розглянемо питання про аналоги умов Коші-Рімана як необхідних і достатніх умов моногенності функцій $\Phi : \Omega \to \mathbb{A}_n^m$.

Теорема 2.6. *Нехай виконується умова* (2.5)*. Для того, щоб функція* $\Phi : \Omega \to \mathbb{A}_n^m$ *була моногенною в області* $\Omega \subset E_3$*, необхідно і достатньо, щоб усі функції* $U_k : \Omega \to \mathbb{C}$ *в розкладі* (2.9) *були* $\mathbb{R}$*-диференціовними в області* Ω *і в цій області виконувалися умови*

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} = \frac{\partial \Phi}{\partial x}\, e_2, \qquad\qquad \frac{\partial \Phi}{\partial z} = \frac{\partial \Phi}{\partial x}\, e_3. \tag{2.10}$$

Доведення. Необхідність. $\mathbb{R}$-диференційовність функцій $U_k : \Omega \to \mathbb{C}$ в розкладі (2.9) випливає з представлення (2.8) моногенної функції Φ (див. доведення теореми 2.5).

Вибираючи в рівності (2.3) послідовно елементи $e_1 = 1, e_2, e_3$ у якості вектора h, отримуємо рівності

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = \Phi'_G(\zeta), \qquad \frac{\partial \Phi}{\partial y} = e_2\, \Phi'_G(\zeta), \qquad \frac{\partial \Phi}{\partial z} = e_3\, \Phi'_G(\zeta),$$

наслідком яких є рівності (2.10).

Достатність доводиться повністю аналогічно до того, як це робиться при доведенні відповідної теореми про диференційовність функцій комплексної змінної (див., наприклад, М. О. Лаврентьєв і Б. В. Шабат [53, с. 21]). □

Отже, умови (2.10) за своєю природою аналогічні до класичних умов Коші-Рімана для голоморфних функцій комплексної змінної.

3. Контурні інтегральні теореми для моногенних функцій в скінченновимірній комутативній асоціативній алгебрі

Розглянемо лініну оболонку

$$E_3 := \{\zeta = xe_1 + ye_2 + ze_3 \mid x, y, z \in \mathbb{R}\},$$

породжену векторами (2.4).

Визначимо криволінійний інтеграл в просторі E_3. Будемо використовувати те саме позначення γ для кривої в $\mathbb{R}^3$ і для конгруентної кривої в E_3.

Для спрямлюваної жорданової кривої γ в $\mathbb{R}^3$ і неперервної функції $\Psi : \gamma \to \mathbb{A}_n^m$, розкладеної за базисом $\{I_k\}_{k=1}^n$ у вигляді

$$\Psi(\zeta) = \sum_{k=1}^{n} U_k(x, y, z)\, I_k + i \sum_{k=1}^{n} V_k(x, y, z)\, I_k, \tag{3.1}$$

де $(x, y, z) \in \gamma$ і $U_k : \gamma \to \mathbb{R}$, $V_k : \gamma \to \mathbb{R}$, визначимо інтеграл вздовж кривої $\gamma \subset E_3$ рівністю

$$\int_{\gamma} \Psi(\zeta)\, d\zeta := \sum_{k=1}^{n} I_k \int_{\gamma} U_k(x, y, z)\, dx + \sum_{k=1}^{n} e_2 I_k \int_{\gamma} U_k(x, y, z)\, dy +$$
$$+ \sum_{k=1}^{n} e_3 I_k \int_{\gamma} U_k(x, y, z)\, dz + i \sum_{k=1}^{n} I_k \int_{\gamma} V_k(x, y, z)\, dx +$$
$$+ i \sum_{k=1}^{n} e_2 I_k \int_{\gamma} V_k(x, y, z)\, dy + i \sum_{k=1}^{n} e_3 I_k \int_{\gamma} V_k(x, y, z)\, dz,$$

де $d\zeta := e_1\, dx + e_2\, dy + e_3\, dz$.

Визначимо також поверхневий інтеграл в просторі E_3. Ми використовуємо те саме позначення Σ для поверхні в $\mathbb{R}^3$ і для конгруентної поверхні в E_3.

Нехай Σ – поверхня в $\mathbb{R}^3$ з вимірними за Жорданом проекціями на координатні площини. Для неперервної функції $\Psi : \Sigma \to \mathbb{A}_n^m$, розкладеної за базисом $\{I_k\}_{k=1}^n$ у вигляді (3.1), де $(x, y, z) \in \Sigma$ і $U_k : \Sigma \to \mathbb{R}$, $V_k : \Sigma \to \mathbb{R}$, визначимо інтеграл по поверхні Σ з диференціальною формою $dx\, dy$ рівністю

$$\int_{\Sigma} \Psi(\zeta)\, dx\, dy := \sum_{k=1}^{n} I_k \int_{\Sigma} U_k(x, y, z)\, dx\, dy + i \sum_{k=1}^{n} I_k \int_{\Sigma} V_k(x, y, z)\, dx\, dy.$$

Аналогічно визначаються інтеграли з диференціальними формами $dydz$ та $dzdx$.

Означення криволінійного і поверхневого інтегралів від функції гіперкомплексної змінної коректні в тому сенсі, що їх значення не залежать від вибору допустимих параметризацій відповідно кривої чи поверхні, оскільки гіперкомплексні інтеграли визначаються через відповідні дійсні інтеграли.

3.1. **Формула Стокса і теорема Коші для криволінійного інтеграла.** Наступне твердження містить аналог формули Стокса в алгебрі $\mathbb{A}_n^m$.

Теорема 3.2. *Якщо функція $\Phi : \Omega \to \mathbb{A}_n^m$ неперервна разом з частинними похідними першого порядку в області $\Omega \subset E_3$ і Σ – кусково-гладка поверхня в Ω, край якої γ є кусково-гладкою жордановою кривою, то справедливий наступний аналог формули Стокса:*

$$\int_\gamma \Phi(\zeta)\, d\zeta = \int_\Sigma \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} e_2 - \frac{\partial \Phi}{\partial y} e_1\right) dx\, dy + \\ + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} e_3 - \frac{\partial \Phi}{\partial z} e_2\right) dy\, dz + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial z} e_1 - \frac{\partial \Phi}{\partial x} e_3\right) dz\, dx.$$

Тепер перший крок в доведенні теореми Коші для гіперкомплексного криволінійного інтеграла полягає у використанні неперервності похідної Гато моногенної функції, яку встановлено в теоремі 2.5 за умови (2.5), аналогів умов Коші-Рімана (2.10) і теореми 3.2. В результаті отримуємо наступне твердження.

Теорема 3.3. *Нехай виконується умова* (2.5). *Нехай $\Phi : \Omega \to \mathbb{A}_n^m$ – моногенна функція в області $\Omega \subset E_3$ і Σ – кусково-гладка поверхня в Ω, край якої γ є кусково-гладкою жордановою кривою. Тоді*

$$\int_\gamma \Phi(\zeta)\, d\zeta = 0. \tag{3.2}$$

Зауваження 3.4. Зокрема, рівність (3.2) виконується у випадку, коли γ – межа $\partial\triangle$ будь-якого трикутника $\triangle$, що міститься в Ω. Пояснимо, що під трикутником $\triangle$ ми розуміємо плоску фігуру, обмежену трьома відрізками, що з'єднують три його вершини, а межа $\partial\triangle$ розглядається у відносній топології площини трикутника.

Другий крок в доведенні теореми Коші для гіперкомплексного криволінійного інтеграла здійснюється у випадку, коли область $\Omega \subset E_3$ є опуклою і γ – довільна замкнена спрямлювана жорданова крива в області Ω. У цьому випадку рівність (3.2) для кожної моногенної функції $\Phi : \Omega \to \mathbb{A}_n^m$ може бути доведена класичним способом так, як це зробив Е. Р. Лорх [23] в опуклій області усієї алгебри.

Через $\gamma[\zeta_1, \zeta_2]$ будемо позначати дугу орієнтованої жорданової кривої γ, де ζ_1 – початок цієї дуги і ζ_2 – її кінець.

Нарешті, доведемо наступний гіперкомплексний аналог інтегральної теореми Коші.

Теорема 3.5. *Нехай виконується умова* (2.5) *і функція* $\Phi : \Omega \to \mathbb{A}_n^m$ *є моногенною в області* $\Omega \subset E_3$. *Тоді для довільної замкненої жорданової спрямлюваної кривої* γ, *яка гомотопна точці в* Ω, *справедлива рівність* (3.2).

Доведення. Застосуємо схему доведення теореми 3.2 з роботи Е. Блюма [5]. Нехай крива γ має параметризацію $\zeta = \phi(t)$, $0 \leqslant t \leqslant 1$, при цьому $\phi(0) = \phi(1) = \zeta_0$, і нехай γ – гомотопна точці ζ_0. Тоді існує функція $H(s,t)$ двох дійсних змінних s і t, яка неперервна на квадраті $Q := [0,1] \times [0,1]$ і приймає значення в області Ω, така, що

$$H(0,t) = \phi(t), \quad H(1,t) \equiv \zeta_0 \qquad \forall\, t \in [0,1],$$
$$H(s,0) = H(s,1) = \zeta_0 \qquad \forall\, s \in [0,1].$$

Оскільки функція H – неперервна на компактній множині Q, то образ $K := \{H(s,t) : (s,t) \in Q\}$ є компактною множиною в Ω. Позначимо

$$\rho := \min_{\zeta' \in K,\, \zeta'' \in \partial\Omega} \|\zeta' - \zeta''\|.$$

Оскільки функція H – рівномірно неперервна на множині Q, то існує $\delta > 0$ таке, що

$$\|H(s',t') - H(s,t)\| < \rho/2 \tag{3.3}$$

для всіх $(s,t), (s',t') : |s' - s| < \delta,\ |t' - t| < \delta$.

Виберемо числа $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = 1$, що задовольняють нерівності $t_j - t_{j-1} < \delta$, $j = 1, 2, \ldots, n$, і покладемо $s_1 = t_1$. Позначимо $\zeta_{0,j} := H(0, t_j)$, $\zeta_{1,j} := H(s_1, t_j)$ при $j = 1, 2, \ldots, n-1$. Також через L_j позначимо відрізок з початком у точці $\zeta_{0,j}$ і кінцем у точці $\zeta_{1,j}$.

Введемо в розгляд криву $\gamma_1 := \{H(s_1,t) : 0 \leqslant t \leqslant 1\}$. Не зменшуючи загальності, можемо вважати, що крива γ_1 є спрямлюваною, оскільки, якщо це необхідно, γ_1 може бути замінена гомотопною їй ламаною, яка складається з відрізків, що послідовно сполучають точки $\zeta_0, \zeta_{1,1}, \zeta_{1,2}, \ldots, \zeta_{1,n}$.

В силу нерівності (3.3) дуги $\gamma[\zeta_0, \zeta_{01}]$, $\gamma_1[\zeta_0, \zeta_{11}]$ і відрізок L_1 містяться в кулі

$$B(\zeta_0) := \{\zeta \in E_3 : \|\zeta - \zeta_0\| < \rho\}.$$

Оскільки $B(\zeta_0)$ – опукла множина, що міститься в Ω, то

$$\int\limits_{\gamma[\zeta_0,\zeta_{01}]} \Phi(\zeta)d\zeta \; + \int\limits_{L_1} \Phi(\zeta)d\zeta \; = \int\limits_{\gamma_1[\zeta_0,\zeta_{11}]} \Phi(\zeta)d\zeta. \tag{3.4}$$

При $j = 1, 2, \ldots, n-2$ з (3.3) випливають наступні нерівності:

$$\begin{aligned} \|\zeta - \zeta_{0,j}\| < \rho/2, &\qquad \forall\, \zeta \in \gamma[\zeta_{0,j}, \zeta_{0,j+1}], \\ \|\zeta - \zeta_{1,j}\| < \rho/2, &\qquad \forall\, \zeta \in \gamma_1[\zeta_{1,j}, \zeta_{1,j+1}], \\ \|\zeta_{1,j} - \zeta_{0,j}\| < \rho/2, & \end{aligned}$$

в силу яких дуги $\gamma[\zeta_{0,j}, \zeta_{0,j+1}]$, $\gamma_1[\zeta_{1,j}, \zeta 1, j+1]$ і відрізки L_j, L_{j+1} містяться в кулі $B(\zeta_{0,j}) := \{\zeta \in E_3 : \|\zeta - \zeta_{0,j}\| < \rho\}$. Оскільки $B(\zeta_{0,j})$ – опукла множина, що міститься в Ω, то

$$-\int\limits_{L_j} \Phi(\zeta)d\zeta \; + \int\limits_{\gamma[\zeta_{0,j},\zeta_{0,j+1}]} \Phi(\zeta)d\zeta \; + \int\limits_{L_{j+1}} \Phi(\zeta)d\zeta \; = \int\limits_{\gamma_1[\zeta_{1,j},\zeta_{1,j+1}]} \Phi(\zeta)d\zeta, \tag{3.5}$$

$j = 1, 2, \ldots, n-2$.

Нарешті, подібно до рівності (3.4) отримуємо рівність

$$-\int\limits_{L_{n-1}} \Phi(\zeta)d\zeta \; + \int\limits_{\gamma[\zeta_{0,n-1},\zeta_0]} \Phi(\zeta)d\zeta \; = \int\limits_{\gamma_1[\zeta_{1,n-1},\zeta_0]} \Phi(\zeta)d\zeta. \tag{3.6}$$

Додаючи всі рівності (3.4), (3.5) і (3.6), бачимо, що знищуються всі інтеграли вздовж відрізків і залишається рівність

$$\int\limits_{\gamma} \Phi(\zeta)d\zeta \; = \int\limits_{\gamma_1} \Phi(\zeta)d\zeta. \tag{3.7}$$

Далі покладаємо $s_j = t_j$ і вводимо в розгляд криву $\gamma_j := \{H(s_j, t) : 0 \leqslant t \leqslant 1\}$ при $j = 2, 3, \ldots, n$. Подібно до γ_1, не зменшуючи загальності, можемо вважати, що всі криві γ_j є спрямлюваними.

Тепер подібно до рівності (3.7) отримуємо рівності

$$\int\limits_{\gamma_1} \Phi(\zeta)d\zeta = \int\limits_{\gamma_2} \Phi(\zeta)d\zeta = \ldots = \int\limits_{\gamma_n} \Phi(\zeta)d\zeta.$$

Таким чином, ми отримали рівність

$$\int\limits_{\gamma} \Phi(\zeta)d\zeta = \int\limits_{\gamma_n} \Phi(\zeta)d\zeta,$$

в якій крива γ_n вироджується в точку, оскільки $H(1,t) \equiv \zeta_0$. Отже,

$$\int\limits_{\gamma_n} \Phi(\zeta) d\zeta = 0,$$

і рівність (3.2) доведено. □

3.6. **Теорема Морери.** Через $s[\zeta_1, \zeta_2]$ позначимо відрізок з початком ζ_1 і кінцем ζ_2.

Справедливий наступний аналог теореми Морера для функцій зі значеннями в алгебрі $\mathbb{A}_n^m$.

Теорема 3.7. *Якщо функція $\Phi : \Omega \to \mathbb{A}_n^m$ неперервна в області $\Omega \subset E_3$ і задовольняє рівність*

$$\int\limits_{\partial\triangle} \Phi(\zeta)\, d\zeta = 0 \tag{3.8}$$

для кожного трикутника $\triangle$, що міститься в області Ω, то функція Φ є моногенною в області Ω.

Доведення. Нехай a – довільна фіксована точка в Ω. Розглянемо функцію

$$\Psi(\zeta) \;:=\; \int\limits_{s[a,\zeta]} \Phi(\tau)\, d\tau.$$

Покажемо, що функція Ψ є моногенною в області Ω і

$$\Psi'_G(\zeta) = \Phi(\zeta). \tag{3.9}$$

Візьмемо $h \in E_3$ і $\delta > 0$ такі, що трикутник $\triangle$ з вершинами a, ζ і $\zeta + \delta h$ міститься в Ω.

Використовуючи рівність (3.8), перетворюємо різницю

$$\begin{aligned}
\Psi(\zeta+\delta h) - \Psi(\zeta) \;&=\; \int\limits_{s[a,\zeta+\delta h]} \Phi(\tau)\, d\tau \;-\; \int\limits_{s[a,\zeta]} \Phi(\tau)\, d\tau \;= \\
&= \int\limits_{s[a,\zeta+\delta h]} \Phi(\tau)\, d\tau \;+\; \int\limits_{s[\zeta,a]} \Phi(\tau)\, d\tau \;+\; \int\limits_{s[\zeta+\delta h,\zeta]} \Phi(\tau)\, d\tau \;-\; \int\limits_{s[\zeta+\delta h,\zeta]} \Phi(\tau)\, d\tau \;= \\
&= \int\limits_{\triangle} \Phi(\tau)\, d\tau \;+\; \int\limits_{s[\zeta,\zeta+\delta h]} \Phi(\tau)\, d\tau \;=\; \int\limits_{s[\zeta,\zeta+\delta h]} \Phi(\tau)\, d\tau.
\end{aligned} \tag{3.10}$$

Використовуючи рівність (3.10), і неперервність функції Φ в точці ζ, отримуємо співвідношення

$$\left\|\frac{\Psi(\zeta+\delta h)-\Psi(\zeta)}{\delta}-\Phi(\zeta)h\right\| = \frac{1}{\delta}\left\|\int\limits_{s[\zeta,\zeta+\delta h]}\Phi(\tau)\,d\tau-\Phi(\zeta)\delta h\right\| =$$

$$= \frac{1}{\delta}\left\|\int\limits_{s[\zeta,\zeta+\delta h]}\big(\Phi(\tau)-\Phi(\zeta)\big)\,d\tau\right\| \leqslant \frac{M}{\delta}\int\limits_{s[\zeta,\zeta+\delta h]}\|\Phi(\tau)-\Phi(\zeta)\|\,\|d\tau\| \leqslant \tag{3.11}$$

$$\leqslant \frac{M}{\delta}\sup_{\tau\in s[\zeta,\zeta+\delta h]}\|\Phi(\tau)-\Phi(\zeta)\|\cdot\int\limits_{s[\zeta,\zeta+\delta h]}\|d\tau\| \leqslant$$

$$\leqslant M\,\|h\|\sup_{\tau\in s[\zeta,\zeta+\delta h]}\|\Phi(\tau)-\Phi(\zeta)\| \to 0, \quad \delta\to 0,$$

де M – деяка абсолютна стала.

Зі співвідношення (3.11) випливає рівність

$$\lim_{\delta\to 0+0}\frac{\Psi(\zeta+\delta h)-\Psi(\zeta)}{\delta}=\Phi(\zeta)h,$$

наслідком якої є рівність (3.9).

Оскільки в довільному околі точки ζ функція Φ є похідною Гато моногенної функції $\Psi:\Omega\to\mathbb{A}_3$, то в силу теореми 2.5 Φ є моногенною функцією в області Ω. $\square$

3.8. **Інтегральна формула Коші.** Ми використовуємо те саме позначення L_u для множини в E_3, що є конгруентною до прямої (2.7) в $\mathbb{R}^3$. Нехай

$$\zeta_0 := x_0e_1+y_0e_2+z_0e_3$$

– довільна точка області $\Omega\subset E_3$. В околі точки ζ_0, який міститься в Ω, візьмемо коло $C(\zeta_0)$ з центром в точці ζ_0. Через C_u позначимо образ кола $C(\zeta_0)$ при відображенні f_u, $u=1,2,\ldots,m$. Припустимо, що коло $C(\zeta_0)$ *охоплює множину* (див. [28])

$$\Big\{\zeta_0+\zeta:\zeta\in\bigcup_{u=1}^{m}L_u\Big\}. \tag{3.12}$$

Це означає, що крива C_u обмежує область D'_u таку, що $f_u(\zeta_0)\in D'_u$ при $u=1,2,\ldots,m$.

Скажемо, що крива $\gamma\subset\Omega$ *один раз охоплює множину* (3.12) (див. [28]), якщо існує коло $C(\zeta_0)$, яке охоплює вказану множину і гомотопне кривій γ в області $\Omega\setminus\Big\{\zeta_0+\zeta:\zeta\in\bigcup\limits_{u=1}^{m}L_u\Big\}$.

Візьмемо коло $C(0)$ з центром в точці 0, яке міститься в E_3 і охоплює множину $\bigcup\limits_{u=1}^{m} L_u$. Оскільки функція ζ^{-1} – неперервна на кривій $C(0)$, то існує інтеграл

$$\lambda := \int\limits_{C(0)} \tau^{-1}\, d\tau. \tag{3.13}$$

В силу теореми 3.5, значення інтеграла (3.13) не залежить від вибору кола $C(0)$, яке охоплює множину $\bigcup\limits_{u=1}^{m} L_u$.

Наступне твердження містить аналог інтегральної формули Коші для моногенних функцій $\Phi : \Omega \to \mathbb{A}_n^m$, заданних в області $\Omega \subset E_3$.

Теорема 3.9. *Нехай виконується умова* (2.5) *і функція* $\Phi : \Omega \to \mathbb{A}_n^m$ *є моногенною в області* $\Omega \subset E_3$. *Тоді для кожної точки* $\zeta_0 \in \Omega$ *виконується наступна рівність:*

$$\lambda\, \Phi(\zeta_0) = \int\limits_{\gamma} \Phi(\zeta)\, (\zeta - \zeta_0)^{-1}\, d\zeta, \tag{3.14}$$

де γ *– довільна замкнена жорданова спрямлювана крива в* Ω, *яка охоплює один раз множину* (3.12).

Доведення. Для довільного $\varepsilon \in (0,1)$ розглянемо коло

$$C(\zeta_0, \varepsilon) := \{\zeta_0 + \varepsilon(\zeta - \zeta_0) : \zeta \in C(\zeta_0)\},$$

де $C(\zeta_0)$ – коло, існування якого випливає з того, що крива γ охоплює один раз множину (3.12).

Оскільки γ гомотопна колу $C(\zeta_0, \varepsilon)$ в області $\Omega \backslash \{\zeta_0 + \zeta : \zeta \in \bigcup\limits_{u=1}^{m} L_u\}$, то з використанням теореми 3.5 отримуємо рівність

$$\int\limits_{\gamma} \Phi(\zeta)\, (\zeta - \zeta_0)^{-1}\, d\zeta \;=\; \int\limits_{C(\zeta_0,\varepsilon)} \Phi(\zeta)\, (\zeta - \zeta_0)^{-1}\, d\zeta. \tag{3.15}$$

Далі, представляючи інтеграл в правій частині рівності (3.15) у вигляді суми двох інтегралів, отримуємо

$$\begin{aligned}\int\limits_{\gamma} \Phi(\zeta)\, (\zeta - \zeta_0)^{-1}\, d\zeta \;&=\; \int\limits_{C(\zeta_0,\varepsilon)} (\Phi(\zeta) - \Phi(\zeta_0))\, (\zeta - \zeta_0)^{-1}\, d\zeta \;+ \\ &+\; \Phi(\zeta_0) \int\limits_{C(\zeta_0,\varepsilon)} (\zeta - \zeta_0)^{-1}\, d\zeta =: J_1 + J_2.\end{aligned} \tag{3.16}$$

Тут $J_2 = \lambda\, \Phi(\zeta_0)$ в силу рівності (3.13) при $\tau = \zeta - \zeta_0$.

Підінтегральна функція в інтегралі J_1 обмежена константою, яка не залежить від ε. Дійсно, в силу теореми 2.5 функція Φ диференційовна за Лорхом в області Ω і похідна $\Phi'_L = \Phi'_G$ неперервна в Ω. Тому зі співвідношення (2.1) випливає нерівність

$$\|\Phi(\zeta) - \Phi(\zeta_0)\| \leqslant c\varepsilon \qquad \forall\, \zeta \in C(\zeta_0, \varepsilon),$$

де стала c не залежить від ε. Крім того, функція $(\zeta - \zeta_0)^{-1}$, яка є неперервною на $C(\zeta_0)$, є також обмеженою на $C(\zeta_0)$. В результаті ми отримуємо оцінку

$$\|(\zeta - \zeta_0)^{-1}\| \;\leqslant\; \varepsilon^{-1} \max_{\tau \in C(\zeta_0)} \|(\tau - \zeta_0)^{-1}\| \;\leqslant\; c\varepsilon^{-1}, \quad \forall\, \zeta \in C(\zeta_0, \varepsilon),$$

де стала c не залежить від ε. З отриманих оцінок випливає, що функція $(\Phi(\zeta) - \Phi(\zeta_0))(\zeta - \zeta_0)^{-1}$ обмежена на колі $C(\zeta_0, \varepsilon)$ константою, яка не залежить від ε. Отже, інтеграл J_1 прямує до нуля, коли $\varepsilon \to 0$.

Нарешті, переходячи до границі в рівності (3.16) при $\varepsilon \to 0$, отримуємо рівність (3.14). $\square$

На відміну від подібних результатів Е. Лорха [23] і Е. Блюма [5], функція $\Phi : \Omega \to \mathbb{A}_n^m$ в теоремі 3.9 задана тільки в області Ω підпростору E_3, а не в області з усієї алгебри. Більш того, зауважимо, що інтегральна формула Коші, встановлена у роботах [5, 23], не застосовна до моногенної функції $\Phi : \Omega \to \mathbb{A}_n^m$, оскільки в ній інтегрування здійснюється вздовж кривої, на якій функція Φ, взагалі кажучи, не визначена.

Теорема 3.10. *Стала λ, визначена рівністю* (3.13), *є оборотним елементом в алгебрі $\mathbb{A}_n^m$.*

Доведення. З розкладу (2.6) випливає рівність

$$\zeta^{-1} = \sum_{k=1}^{n} \widetilde{A}_k\, I_k \tag{3.17}$$

з коефіцієнтами $\widetilde{A}_k$, що визначаються рівностями

$$\begin{aligned} \widetilde{A}_u &= \frac{1}{\xi_u}, && u = 1, 2, \ldots, m, \\ \widetilde{A}_s &= \sum_{k=2}^{s-m+1} \frac{\widetilde{Q}_{k,s}}{\xi_{u_s}^k}, && s = m+1, m+2, \ldots, n, \end{aligned} \tag{3.18}$$

в яких $\widetilde{Q}_{k,s}$ визначаються рекурентними співвідношеннями:

$$\begin{aligned} &\widetilde{Q}_{2,s} = -T_s, \\ &\widetilde{Q}_{k,s} = -\sum_{r=k+m-2}^{s-1} \widetilde{Q}_{k-1,r}\, B_{r,\,s}, \quad k = 3, 4, \ldots, s-m+1, \end{aligned} \tag{3.19}$$

де

$$T_s := y a_s + z b_s, \qquad s = m+1, m+2, \ldots, n, \tag{3.20}$$

$$B_{r,s} := \sum_{p=m+1}^{s-1} T_p \Upsilon_{r,s}^{p}, \qquad s = m+2, m+3, \ldots, n, \tag{3.21}$$

а структурні сталі $\Upsilon_{r,s}^{p}$ і натуральні числа u_s визначені відповідно в правилах множення 2) і 3) алгебри $\mathbb{A}_n^m$.

Враховуючи рівність (3.17) і співвідношення

$$d\zeta = dx\, e_1 + dy\, e_2 + dz\, e_3 = \sum_{u=1}^{m} \Big(dx + a_u\, dy + b_u\, dz\Big) I_u + \\ + \sum_{r=m+1}^{n} \Big(a_r\, dy + b_r\, dz\Big) I_r = \sum_{u=1}^{m} d\xi_u\, I_u + \sum_{r=m+1}^{n} dT_r\, I_r,$$

отримуємо наступну рівність:

$$\begin{aligned} \zeta^{-1}\, d\zeta = \sum_{u=1}^{m} \widetilde{A}_u\, d\xi_u\, I_u + \sum_{r=m+1}^{n} \widetilde{A}_{u_r}\, dT_r\, I_r + \\ + \sum_{s=m+1}^{n} \widetilde{A}_s\, d\xi_{u_s}\, I_s + \sum_{s=m+1}^{n} \sum_{r=m+1}^{n} \widetilde{A}_s\, dT_r\, I_s I_r =: \sum_{k=1}^{n} \sigma_k\, I_k. \end{aligned} \tag{3.22}$$

Тепер, враховуючи рівності (3.22) і (3.18), обчислюємо

$$\int\limits_{C(0)} \sum_{u=1}^{m} \sigma_u\, I_u = \sum_{u=1}^{m} I_u \int\limits_{C_u(0)} \frac{d\xi_u}{\xi_u} = 2\pi i \sum_{u=1}^{m} I_u = 2\pi i,$$

де $C_u(0)$ – образ кола $C(0)$ при відображенні f_u. Тому

$$\lambda = 2\pi i + \sum_{k=m+1}^{n} I_k \int\limits_{C(0)} \sigma_k,$$

і λ є оборотним елементом. $\square$

Отже, інтегальна формула Коші (3.14) може бути переписана у вигляді

$$\Phi(\zeta_0) = \lambda^{-1} \int\limits_{\gamma_\zeta} \Phi(\zeta)\,(\zeta-\zeta_0)^{-1}\,d\zeta. \tag{3.23}$$

В деяких спеціальних випадках (див. [28, 29, 33]) встановлено, що

$$\lambda = 2\pi i, \tag{3.24}$$

як і в комплексній площині.

Очевидно, що рівність (3.24) виконується тоді і тільки тоді, коли

$$\int\limits_{C(0)} \sigma_k = 0 \qquad \forall\, k = m+1,\dots,n, \tag{3.25}$$

але умови (3.25) важко перевірити в загальному випадку.

Вкажемо один спеціальний випадок, коли умови (3.25) легко перевіряються і рівність (3.24) виконується. Використаємо представлення алгебри $\mathbb{A}_n^m$ у вигляді напівпрямої суми $\mathbb{A}_n^m = \mathcal{S} \oplus_s \mathcal{N}$, де $\mathcal{S}$ – m-вимірна напівпроста підалгебра і $\mathcal{N}$ – $(n-m)$-вимірна нільпотентна підалгебра.

Теорема 3.11. *Нехай $\mathbb{A}_n^m = \mathcal{S} \oplus_s \mathcal{N}$ і $E_3 \subset \mathcal{S}$. Тоді виконується рівність* (3.24).

Доведення. З умови $E_3 \subset \mathcal{S}$ випливає, що

$$a_k = b_k = 0$$

для всіх $k = m+1,\dots,n$ в розкладі (2.4). Тому для довільного $\zeta \in E_3$, усі функції T_s і $B_{r,s}$ у співвідношеннях (3.20) і (3.21) рівні нулю.

Тепер, враховуючи співвідношення (3.19), робимо висновок про те, що в рівностях (3.18), $\widetilde{A}_s = 0$ при $s = m+1,\dots,n$. Звідси миттєво випливають рівності $\sigma_k = 0$ при $k = m+1,\dots,n$ і усіх $\zeta \in E_3$. Отже, умови (3.25) задовольняються і рівність (3.24) виконується. □

Зазначимо, що у випадку тривимірної лінійної оболонки E_3 теорема 3.11 узагальнює [28, теорема 6], доведену для напівпростих алгебр, на алгебри $\mathbb{A}_n^m$, які, взагалі кажучи, не є напівпростими.

Якщо крива інтерування в рівності (3.13) не охоплює множину $\bigcup\limits_{u=1}^{m} L_u$, то інтеграл в (3.13) може бути необоротним елементом алгебри $\mathbb{A}_n^m$. Це підтверджує наступний приклад.

Приклад 3.12. Розглянемо алгебру $\mathbb{A}_2$ (див. [60]) з базисом $\{\mathcal{I}_1, \mathcal{I}_2, \rho\}$ і таблицею множення:

$$\mathcal{I}_1^2 = \mathcal{I}_1, \quad \mathcal{I}_2^2 = \mathcal{I}_2, \quad \mathcal{I}_1\mathcal{I}_2 = 0, \quad \rho^2 = 0, \quad \mathcal{I}_1\rho = 0, \quad \mathcal{I}_2\rho = \rho.$$

Тут базис складається з двох ідемпотентних елементів $I_1 = \mathcal{I}_1$, $I_2 = \mathcal{I}_2$ і нільпотентного елемента $I_3 = \rho$, тобто $n = 3$ і $m = 2$.

Розглянемо інший базис в алгебрі $\mathbb{A}_2$:

$$e_1 = 1 = \mathcal{I}_1 + \mathcal{I}_2, \qquad e_2 = i\mathcal{I}_1 + \rho, \qquad e_3 = i\mathcal{I}_2.$$

Для $\zeta = xe_1 + ye_2 + ze_3$ маємо

$$\xi_1 = x + iy \qquad ,\xi_2 = \xi_{u_3} = x + iz.$$

Обернений елемент (3.17) має вигляд

$$\zeta^{-1} = \frac{1}{\xi_1}\,\mathcal{I}_1 + \frac{1}{\xi_2}\,\mathcal{I}_2 - \frac{y}{\xi_2^2}\,\rho,$$

так що всі необоротні елементи $\zeta \in E_3$ розміщуються на двох координатних прямих $L_1 = \{ze_3 : z \in \mathbb{R}\}$ і $L_2 = \{ye_2 : y \in \mathbb{R}\}$.

Візьмемо коло

$$C^{y,R} := \{\tau = xe_1 + e_2 + ze_3 : x^2 + z^2 = R^2\},$$

яке охоплює пряму L_2, але не охоплює пряму L_1. Тоді для $\zeta \in C^{y,R}$ маємо

$$d\zeta = dx\,e_1 + dz\,e_3 = dx\,\mathcal{I}_1 + d\xi_2\,\mathcal{I}_2,$$

$$\zeta^{-1}\,d\zeta = \left(\frac{1}{x+i}\,\mathcal{I}_1 + \frac{1}{\xi_2}\,\mathcal{I}_2 - \frac{1}{\xi_2^2}\,\rho\right)(dx\,\mathcal{I}_1 + d\xi_2\,\mathcal{I}_2) =$$
$$= \frac{dx}{x+i}\,\mathcal{I}_1 + \frac{d\xi_2}{\xi_2}\,\mathcal{I}_2 - \frac{d\xi_2}{\xi_2^2}\,\rho.$$

Легко обчислюється інтеграл

$$\int\limits_{C^{y,R}} \zeta^{-1}\,d\zeta = 2\pi i\,\mathcal{I}_2,$$

тобто цей інтеграл є необоротним елементом алгебри $\mathbb{A}_n^m$.

3.13. **Теорема Тейлора.** Виконуючи розклад функції (3.23) у степеневий ряд подібно до розкладу голоморфних функцій, що базується на розкладі в степеневий ряд ядра Коші (див., наприклад, О. І. Маркушевич [54, с. 298]), отримуємо наступне твердження.

Теорема 3.14. *Нехай виконується умова* (2.5) *і функція* $\Phi : \Omega \to \mathbb{A}_n^m$ *є моногенною в області* $\Omega \subset E_3$. *Тоді* Φ *є аналітичною в області* Ω, *тобто в деякому околі кожної точки* $\zeta_0 \in \Omega$ *вона може бути представлена у вигляді суми збіжного степеневого ряду*

$$\Phi(\zeta) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k\,(\zeta - \zeta_0)^k, \tag{3.26}$$

де

$$c_n = \frac{\Phi_G^{(n)}(\zeta_0)}{n!} = \lambda^{-1} \int\limits_{\gamma} \Phi(\tau)\Big((\tau - \zeta_0)^{-1}\Big)^{n+1} d\tau, \quad n = 0, 1, \dots,$$

і γ *– довільна замкнена жорданова спрямлювана крива в* Ω*, яка охоплює один раз множину* (3.12).

3.15. **Еквівалентні означення моногенних функцій.** Наступна теорема, що містить різні еквівалентні означення моногенної функції, є аналогом класичної теореми комплексного аналізу про різні еквівалентні означення голоморфних функцій.

Теорема 3.16. *Нехай виконується умова* (2.5). *Функція* $\Phi : \Omega \to \mathbb{A}_n^m$ *є моногенною в довільній області* $\Omega \subset E_3$ *тоді і тільки тоді, коли виконується одна з наступних умов:*

(I) *усі компоненти* $U_k : \Omega \to \mathbb{C}$ *розкладу* (2.9) *є* $\mathbb{R}$*-диференційовними функціями в області* Ω *і в цій області виконуються умови* (2.10)*;*

(II) *функція* Φ *є аналітичною в області* Ω*, тобто для кожної точки* $\zeta_0 \in \Omega$ *існує окіл, в якому функція* Φ *представляється у вигляді суми збіжного степеневого ряду* (3.26) *з коефіцієнтами* c_k*, що належать алгебрі* $\mathbb{A}_n^m$*;*

(III) *функція* Φ *неперервна в області* Ω *і виконується рівність* (3.8) *для кожного трикутника* $\triangle$*, що міститься в області* Ω*;*

(IV) *функція* Φ *є диференційовною за Лорхом в області* Ω*;*

(V) *в кожній кулі* $\mho \subset \Omega$ *існують* m *голоморфних функцій* F_u *в областях* $D_u := \{f_u(\zeta) : \zeta \in \mho\}$*,* $u = 1, 2, \dots, m$*, і* $n - m$ *голоморфних функцій* G_s *в областях* D_{u_s}*,* $s = m+1, m+2, \dots, n$*, таких, що функція* Φ *представляється у вигляді* (2.8)*, де* Γ_u *– замкнена жорданова спрямлювана крива, яка лежить в області* D_u*, охоплює точку* $f_u(\zeta)$ *і не містить точок* $f_q(\zeta)$*,* $q = 1, 2, \dots, m$*,* $q \neq u$*.*

Доведення. Еквівалентність умови (I) і моногенності функції Φ доведено в теоремі 2.6. Еквівалентність умови (II) і моногенності функції Φ є наслідком теореми 3.14 і властивості збіжного степеневого ряду (3.26) визначати моногенну функцію в області збіжності. Еквівалентність умови (III) і моногенності функції Φ випливає з теорем 3.5 і 3.7. Еквівалентність умови (IV) і моногенності функції Φ випливає з першого твердження теореми 2.5. Нарешті, еквівалентність умови (V) і моногенності функції Φ випливає з теореми 2.3. $\square$

Теорема 3.16 узагальнює результати робіт [26, 28–30, 33, 60, 61], встановлені для моногенних функцій в конкретних скінченновимірних алгебрах.

4. Теорема Коші для поверхневого інтеграла в скінченновимірній комутативній асоціативній алгебрі

Інтегральна теорема Коші є фундаментальним результатом класичного комплексного аналізу в комплексній площині $\mathbb{C}$: якщо межа ∂D області $D \subset \mathbb{C}$ є замкненою спрямлюваною жордановою кривою і функція $F\colon \overline{D} \longrightarrow \mathbb{C}$ – неперервна в замиканні $\overline{D}$ області D і голоморфна в D, то

$$\int\limits_{\partial D} F(z)dz = 0.$$

Розвиток гіперкомплексного аналізу як в комутативних, так і некомутативних алгебрах потребує аналогічних загальних аналогів інтегральної теореми Коші для багатовимірних просторів.

Добре відомо, що у випадку, коли однозв'язна область має замкнену кусково-гладку межу, просторові аналоги інтегральної теореми Коші можна отримати за допомогою класичної формули Гаусса-Остроградського за умови, що задана функція має неперервні частинні похідні першого порядку, які неперервно продовжуються на межу області. У такий спосіб аналоги інтегральної теореми Коші доведено в алгебрі кватерніонів (див., наприклад, монографію В. В. Кравченка і М. В. Шапіро [22, с. 66]) і в алгебрах Кліфформа (див., наприклад, монографію Ф. Брекса, Р. Деланга і Ф. Соммена [7, с. 52]).

Узагальнення інтегральної теореми Коші полягають у послабленні вимог до межі або до заданої функції. Як правило, такі узагальнення базуються на узагальненій Гаусса-Остроградського-Гріна-Стокса формулі (див., наприклад, Г. Федерер [12] або Дж. Харрісон і А. Нортон [16]) за умови неперервності частинних похідних заданої функції, але для розширених класів поверхонь інтегрування; див., наприклад,, Р. Абреу Блайя і Х. Борі Рейєс [1], а також Р. Абреу Блайя, Д. Пена Пена і Х. Борі Рейєс [3], де розглядаються спрямлювані або регулярні поверхні. В роботах А. Садбері [48] і О. Ф. Геруса [49], неперервність частинних похідних замінено диференційовністю компонент заданої функції, що приймає значення в алгебрі кватерніонів. Зазначимо, що в роботі [49] межа області залишається кусково-гладкою.

Далі ми доведемо аналог інтегральної теореми Коші для поверхневого інтеграла від гіперголоморфної функції, що задана в області тривимірного простору і приймає значення в довільній n-вимірній комутативній асоціативній алгебрі, де $3 \leqslant n < \infty$. Зазначимо, що моногенні функції в гармонічних алгебрах утворюють підмножину гіперголоморфних функцій, які, крім того, можуть бути заданими в областях, межі яких не є кусково-гладкими.

Аналогічний результат опубліковано в роботі [32] для гіперголоморфних функцій за умови, що задана комутативна алгебра розглядається над полем комплексних чисел. Проте, як випливає з наведеного далі доведення, така умова є неістотною. Зазначимо також, що подібний аналог інтегральної теореми Коші доведено О. Ф. Герусом [17] для гіперголоморфних функцій, що приймають значення в некомутативній алгебрі кватерніонів.

4.1. **Поверхневі інтеграли по квадровних поверхнях.** Розглянемо поняття квадровної поверхні в $\mathbb{R}^3$. Множина Σ називається *поверхнею* у просторі $\mathbb{R}^3$, якщо Σ є гомеоморфним образом квадрата $G := [0,1] \times [0,1]$ (див., наприклад, [36, с. 24]).

Через Σ^ε позначимо ε-окіл поверхні Σ, тобто множину

$$\Sigma^\varepsilon := \Big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \sqrt{(x-x_1)^2+(y-y_1)^2+(z-z_1)^2} \leqslant \varepsilon, \\ (x_1,y_1,z_1) \in \Sigma\Big\}.$$

Відстанню Фреше $d(\Sigma,\Lambda)$ між поверхнями Σ і Λ називається інфімум дійсних чисел ε, для яких виконуються співвідношення $\Sigma \subset \Lambda^\varepsilon$, $\Lambda \subset \Sigma^\varepsilon$ (див., наприклад, [13]). Послідовність багатогранників Λ_n називається *рівномірно збіжною* до поверхні Σ, якщо $d(\Lambda_n,\Sigma) \to 0$ при $n \to \infty$ (див., наприклад, [36, с. 121]).

Площею Лебега поверхні Σ називається величина

$$\mathfrak{L}(\Sigma) := \inf \liminf_{n\to\infty} \mathfrak{L}(\Lambda_n),$$

де інфімум береться по усіх послідовностях Λ_n, рівномірно збіжних до Σ (див., наприклад, [36, с. 468]), а $\mathfrak{L}(\Lambda_n)$ – площа багатогранника Λ_n.

Нехай поверхня Σ має скінченну площу Лебега. Тоді за теоремою Л. Чезарі [10, с. 7] існує параметризація поверхні

$$\Sigma = \big\{f(u,v) := \big(x(u,v),\, y(u,v),\, z(u,v)\big) : (u,v) \in G\big\}$$

така, що якобіани

$$A := \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v} - \frac{\partial y}{\partial v}\frac{\partial z}{\partial u}, \quad B := \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} - \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial u}, \quad C := \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u} \tag{4.1}$$

існують майже всюди на квадраті $G := [0;1] \times [0;1]$ і

$$\mathfrak{L}(\Sigma) = \int\limits_G \sqrt{A^2+B^2+C^2}\, du\, dv. \tag{4.2}$$

У випадку, коли $\mathfrak{L}(\Sigma) < \infty$ і рівність (4.2) виконується для заданої параметризації Σ, поверхню Σ будемо називати *квадровною.*

Сформулюємо деякі достатні умови квадровності поверхні Σ.

- Якщо Σ – спрямлювана поверхня (тобто, ліпшицевий образ квадрата), то з результатів Т. Радо [36, IV.4.28, IV.4.1 (e)] випливає, що поверхня Σ квадровна.
- Нехай компоненти $x(u,v)$, $y(u,v)$, $z(u,v)$ відображення f – абсолютно неперервні за Тонеллі (див., наприклад, [42, с. 169]). Нехай, крім того, в якобіанах A, B, C відображення f в кожному з добутків
$$\frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v}, \qquad \frac{\partial y}{\partial v}\frac{\partial z}{\partial u}, \qquad \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}, \qquad \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial u}, \qquad \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v}, \qquad \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u}$$
одна частинна похідна належить класу інтегровних функцій $L_p(G)$ на G, а інша частинна похідна належить $L_q(G)$, де $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$. Тоді поверхня Σ квадровна (див. Т. Радо [36, V.2.26]). Відзначимо, що для спрямлюваної поверхні Σ компоненти $x(u,v)$, $y(u,v)$, $z(u,v)$ відображення f абсолютно неперервні за Тонеллі (див., наприклад, [42, с. 169]).
- Якщо дві компоненти відображення $f(u,v)$ є функціями Ліпшиця, а третя компонента – абсолютно неперервна за Тонеллі, то поверхня Σ квадровна (див. Т. Радо [36, V.2.28]).

Тепер визначимо поверхневі інтеграли по квадровних поверхнях. *Замкнену поверхню* $\Gamma \subset \mathbb{R}^3$ розуміємо як образ сфери при гомеоморфному відображенні, яке відображає *хоча б одне коло на спрялювану криву.*

Отже, замкнена поверхня Γ подається як об'єднання двох поверхонь Γ_1, Γ_2, для яких $\Gamma_1 \cap \Gamma_2 =: \gamma$ є замкненою жордановою спрямлюваною кривою.

Нехай поверхні Γ_1, Γ_2 задані параметрично:
$$\Gamma_1 = \left\{ f_1(u,v) := \big(x_1(u,v),\, y_1(u,v),\, z_1(u,v)\big) : (u,v) \in G \right\},$$
$$\Gamma_2 = \left\{ f_2(u,v) := \big(x_2(u,v),\, y_2(u,v),\, z_2(u,v)\big) : (u,v) \in G \right\}.$$

Замкнена поверхня Γ називається *квадровною*, якщо поверхні Γ_1 і Γ_2 квадровні.

Для замкненої квадровної поверхні Γ і неперервної функції $F : \Gamma \to \mathbb{R}$ визначимо інтеграли по Γ рівностями
$$\begin{aligned}\int\limits_{\Gamma} F(x,y,z)\, dydz &:= \int\limits_{G} F\Big(x_1(u,v), y_1(u,v), z_1(u,v)\Big) A_1\, du\, dv - \\ &- \int\limits_{G} F\Big(x_2(u,v), y_2(u,v), z_2(u,v)\Big) A_2\, du\, dv,\end{aligned} \tag{4.3}$$

$$\int\limits_{\Gamma} F(x,y,z)\,dzdx := \int\limits_{G} F\Big(x_1(u,v), y_1(u,v), z_1(u,v)\Big)B_1\,du\,dv - \\ - \int\limits_{G} F\Big(x_2(u,v), y_2(u,v), z_2(u,v)\Big)B_2\,du\,dv, \tag{4.4}$$

$$\int\limits_{\Gamma} F(x,y,z)\,dxdy := \int\limits_{G} F\Big(x_1(u,v), y_1(u,v), z_1(u,v)\Big)C_1\,du\,dv - \\ - \int\limits_{G} F\Big(x_2(u,v), y_2(u,v), z_2(u,v)\Big)C_2\,du\,dv, \tag{4.5}$$

з якобіанами A_k, B_k, C_k відображення f_k вигляду (4.1) при $k = 1, 2$.

Легко переконатися у коректності означень (4.3)-(4.5). Справді, значення правих частин інтегралів в рівностях (4.3)-(4.5) однакові для усіх параметризацій f_1, f_2, для яких площі $\mathfrak{L}(\Gamma_1)$, $\mathfrak{L}(\Gamma_2)$ подаються рівностями вигляду (4.2), і значення правих частин інтегралів в рівностях (4.3)-(4.5) не залежать від вибору спрямлюваної кривої γ, яка розбиває Γ на дві частини.

Лема 4.2. *Якщо* Γ *замкнена квадровна поверхня, то*

$$\int\limits_{\Gamma} dydz = \int\limits_{\Gamma} dzdx = \int\limits_{\Gamma} dxdy = 0. \tag{4.6}$$

Доведення. За означенням

$$\int\limits_{\Gamma} dydz = \int\limits_{G} A_1\,du\,dv - \int\limits_{G} A_2\,du\,dv. \tag{4.7}$$

З результатів Т. Радо [36, V.2.64 (iii), IV.4.21 (iii$_3$)] випливає, що для поверхонь Γ_1, Γ_2 справедливі наступні рівності:

$$\int\limits_{G} A_k\,du\,dv = \int\limits_{\partial G} ydz, \qquad k = 1, 2, \tag{4.8}$$

де інтеграл в правій частині розуміємо як інтеграл Лебега-Стілтьєса, який беремо по межі ∂G квадрата G в додатному напрямку. Тепер з рівностей (4.7), (4.8) плививає, що перший інтеграл в рівності (4.6) дорівнює нулю. Інші рівності (4.6) доводяться аналогічно. □

4.3. **Гіперголоморфні функції. Допоміжні твердження.** Нехай тепер $\mathbb{A}$ – комутативна асоціативна алгебра над полем дійсних чисел $\mathbb{R}$ з базисом $\{e_k\}_{k=1}^n$, $3 \leqslant n < \infty$. Виділимо лінійний підпростір

$$E_3 := \{\zeta = xe_1 + ye_2 + ze_3 : x, y, z \in \mathbb{R}\},$$

породжений векторами e_1, e_2, e_3. Будемо використовати однакове позначення Ω для множини в $\mathbb{R}^3$ і для конгруентної множини в E_3.

Розглянемо функцію $\Psi : \Omega \to \mathbb{A}$, розкладену за базисом $\{e_k\}_{k=1}^n$ у вигляді

$$\Psi(\zeta) = \sum_{k=1}^{n} U_k(x, y, z) e_k, \tag{4.9}$$

де $(x, y, z) \in \Omega$ і $U_k : \Omega \to \mathbb{R}$.

Будемо казати, що функція $\Psi : \Omega \to \mathbb{A}$ є *гіперголоморфною* в області $\Omega \subset E_3$, якщо її дійснозначні компоненти розкладу (4.9) є диференційовними функціями в Ω і виконується наступна умова в кожній точці області Ω:

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x} e_1 + \frac{\partial \Psi}{\partial y} e_2 + \frac{\partial \Psi}{\partial z} e_3 = 0. \tag{4.10}$$

В науковій літературі використовуються різні назви для функцій, які задовольняють рівняння вигляду (4.10). Наприклад, в роботах А. Садбері [48], Ф. Коломбо, І. Сабадіні і Д. Струппи [11], В. Шпрьоссіга [46] такі функції називаються регулярними, а в роботах Ф. Брекса, Р. Деланга і Ф. Соммена [7], С. Бернштейн [4], Дж. Райана [41] – моногенними функціями. Ми будемо використовувати термінологію робіт В. В. Кравченка і М. В. Шапіро [22] В. Шпрьоссіга [47], О. Ф. Геруса [49].

Нехай Ω – обмежена замкнена множина в $\mathbb{R}^3$. Для неперервної функції $\Psi : \Omega_\zeta \to \mathbb{A}$, розкладеної за базисом $\{e_k\}_{k=1}^n$ у вигляді (4.9), означимо об'ємний інтеграл рівністю

$$\int_{\Omega} \Psi(\zeta)\, dx\, dy\, dz := \sum_{k=1}^{n} e_k \int_{\Omega} U_k(x, y, z)\, dx\, dy\, dz.$$

Нехай Γ – замкнена квадровна поверхня в $\mathbb{R}^3$. Для неперервної функції $\Psi : \Gamma_\zeta \to \mathbb{A}$, розкладеної за базисом $\{e_k\}_{k=1}^n$ у вигляді (4.9), де $(x, y, z) \in \Gamma$ і $U_k : \Gamma \to \mathbb{R}$, означимо поверхневий інтеграл по Γ з диференціальною формою $\sigma := dy\, dz\, e_1 + dz\, dx\, e_2 + dx\, dy\, e_3$ рівністю

$$\int_{\Gamma} \Psi(\zeta)\sigma := \sum_{k=1}^{n} e_1 e_k \int_{\Gamma} U_k(x, y, z)\, dy\, dz +$$
$$+ \sum_{k=1}^{n} e_2 e_k \int_{\Gamma} U_k(x, y, z)\, dz\, dx + \sum_{k=1}^{n} e_3 e_k \int_{\Gamma} U_k(x, y, z)\, dx\, dy,$$

де інтеграли в правій частині рівності визначені рівностями (4.3)-(4.5).

Наступна лема є наслідком леми 4.2 і означення диференціальної форми σ.

Лема 4.4. *Якщо* Γ *– замкнена квадровна поверхня, то*

$$\int\limits_{\Gamma} \sigma = 0. \tag{4.11}$$

Введемо евклідову норму

$$\|a\| := \left(\sum_{k=1}^{n} |a_k|^2 \right)^{1/2}$$

в алгебрі $\mathbb{A}$, де $a = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k e_k$ і $a_k \in \mathbb{R}$ при $k = \overline{1, n}$.

Нехай Γ – замкнена квадровна поверхня в $\mathbb{R}^3$. Для неперервної функції $U : \Gamma \to \mathbb{R}$, означимо поверхневий інтеграл по Γ з диференціальною формою $\|\sigma\|$ рівністю

$$\int\limits_{\Gamma} U(xe_1 + ye_2 + ze_3)\|\sigma\| :=$$

$$:= \int\limits_{G} U\Big(x_1(u,v)e_1 + y_1(u,v)e_2 + z_1(u,v)e_3\Big)\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}\, du\, dv -$$

$$- \int\limits_{G} U\Big(x_2(u,v)e_1 + y_2(u,v)e_2 + z_2(u,v)e_3\Big)\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}\, du\, dv.$$

Наступне твердження містить аналог формули Гаусса-Остроградського в алгебрі $\mathbb{A}$, який випливає з класичної формули Гаусса-Остроградського:

Теорема 4.5. *Нехай* Ω *– однозв'язна область в* E_3 *з кусково-гладкою межею* $\partial\Omega$*. Нехай* $\Psi : \Omega \to \mathbb{A}$ *– неперервна функція, що має неперервні частинні похідні першого порядку в області* Ω*, які неперервно продовжуються на межу* $\partial\Omega$*. Тоді справедливий наступний аналог формули Гаусса-Остроградського:*

$$\int\limits_{\partial\Omega} \Psi(\zeta)\sigma = \int\limits_{\Omega} \left(\frac{\partial \Psi}{\partial x} e_1 + \frac{\partial \Psi}{\partial y} e_2 + \frac{\partial \Psi}{\partial z} e_3 \right) dx\, dy\, dz. \tag{4.12}$$

Доведення наступної теореми подібне до доведень А. Садбері [48, теорема 9] і О. Ф. Геруса [49, теорема 1], де розглядалися функції, що приймають значення в алгебрі кватерніонів.

Теорема 4.6. *Нехай* ∂P *– межа замкненого куба* P*, який міститься в області* $\Omega \subset E_3$*, і функція* $\Psi : \Omega \to \mathbb{A}$ *– гіперголоморфна в області* Ω*.*

Тоді виконується наступна рівність:

$$\int\limits_{\partial P} \Psi(\zeta)\sigma = 0.$$

Доведення. Позначимо

$$K := \Big\| \int\limits_{\partial P} \Psi(\zeta)\sigma \Big\|.$$

Нехай тако, S позначає площу поверхні ∂P. Розділимо P на 8 рівних кубів і позначимо через P^1 такий куб, для якого

$$\Big\| \int\limits_{\partial P^1} \Psi(\zeta)\sigma \Big\| \geqslant K/8.$$

Очевидно, що поверхня ∂P^1 має площу $S/4$.

Продовжуючи цей процес, отримаємо послідовність вкладених кубів P^m з площами $S/4^m$ поверхонь ∂P^m, які задовольняють нерівності

$$\Big\| \int\limits_{\partial P^m} \Psi(\zeta)\sigma \Big\| \geqslant K/8^m. \tag{4.13}$$

За принципом Кантора існує єдина точка $\zeta_0 := x_0 e_1 + y_0 e_2 + z_0 e_3$, спільна для всіх кубів P^m. Оскільки функція Ψ має вигляд (4.9) і дійснозначні компоненти U_k диференційовні в Ω, то в околі точки ζ_0 маємо розклад

$$\Psi(\zeta) = \Psi(\zeta_0) + \Delta x \frac{\partial \Psi(\zeta_0)}{\partial x} + \Delta y \frac{\partial \Psi(\zeta_0)}{\partial y} + \Delta z \frac{\partial \Psi(\zeta_0)}{\partial z} + \delta(\zeta, \zeta_0)\rho,$$

де $\Delta x := x - x_0$, $\Delta y := y - y_0$, $\Delta z := z - z_0$, і $\delta(\zeta, \zeta_0)$ – нескінченно мала функція при $\rho := \|\zeta - \zeta_0\| \to 0$.

Тому для всіх достатньо малих кубів маємо

$$\int\limits_{\partial P^m} \Psi(\zeta)\sigma = \Psi(\zeta_0) \int\limits_{\partial P^m} \sigma + \frac{\partial \Psi(\zeta_0)}{\partial x} \int\limits_{\partial P^m} \Delta x\, \sigma + \frac{\partial \Psi(\zeta_0)}{\partial y} \int\limits_{\partial P^m} \Delta y\, \sigma +$$
$$+ \frac{\partial \Psi(\zeta_0)}{\partial z} \int\limits_{\partial P^m} \Delta z\, \sigma + \int\limits_{\partial P^m} \delta(\zeta, \zeta_0)\rho\, \sigma = \sum_{r=1}^{5} J_r.$$

Згідно з формулою (4.12), $J_1 = 0$. Використовуючи цю формулу і враховуючи рівність (4.10), отримуємо

$$J_2 + J_3 + J_4 = \frac{\partial \Psi(\zeta_0)}{\partial x} e_1 V_m + \frac{\partial \Psi(\zeta_0)}{\partial y} e_2 V_m + \frac{\partial \Psi(\zeta_0)}{\partial z} e_3 V_m = 0,$$

де через V_m позначено об'єм куба P^m.

Відзначимо, що для довільного $\varepsilon > 0$ існує число m_0 таке, що нерівність $\|\delta(\zeta, \zeta_0)\| < \varepsilon$ виконується для всіх кубів P^m при $m > m_0$. Відзначимо також, що ρ не більше, ніж діагональ куба P^m, тобто, $\rho \leqslant \frac{\sqrt{S}}{2^m\sqrt{2}}$. Тому, використовуючи згадані вище нерівності для $\delta(\zeta, \zeta_0)$ і ρ, отримуємо

$$\Bigg\| \int\limits_{\partial P^m} \Psi(\zeta)\sigma \Bigg\| = \|J_5\| \leqslant n\, M \int\limits_{\partial P^m} \rho\, \|\delta(\zeta, \zeta_0)\|\, \|\sigma\| \leqslant n\, M \frac{\sqrt{S}}{2^m\sqrt{2}}\, \frac{S}{4^m}\, \varepsilon, \tag{4.14}$$

де M – деяка абсолютна стала.

Зі співвідношень (4.13) і (4.14) випливає нерівність $K \leqslant c\,\varepsilon$, де стала c не залежить від ε. Перейшовши до границі в останній нерівності при $\varepsilon \to 0$, отримаємо рівність $K = 0$. □

4.7. **Аналог теореми Коші для поверхневого інтеграла.** Встановимо аналог теореми Коші для поверхневого інтеграла по межі $\partial\Omega$ у випадку, коли функція $\Psi : \overline{\Omega} \to \mathbb{A}$ гіперголоморфна в області Ω і неперервна в замиканні $\overline{\Omega}$ цієї області.

Для функції $\Psi : \overline{\Omega} \to \mathbb{A}$, гіперголоморфної в області $\Omega \subset E_3$ і неперервної в замиканні цієї області, розглянемо модуль неперервності

$$\omega_{\Psi,\overline{\Omega}}(\delta) := \sup_{\substack{\zeta_1,\zeta_2 \in \overline{\Omega}, \\ \|\zeta_1 - \zeta_2\| \leqslant \delta}} \|\Psi(\zeta_1) - \Psi(\zeta_2)\|.$$

Верхньою площею Мінковського множини $\partial\Omega$ називається величина

$$\mathcal{M}^*(\partial\Omega) := \limsup_{\varepsilon \to 0} \frac{V(\partial\Omega^\varepsilon)}{2\varepsilon}$$

(див., наприклад, П. Маттіла [25, с. 79]), де через $V(\partial\Omega^\varepsilon)$ позначено об'єм множини

$$\partial\Omega^\varepsilon := \Big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \sqrt{(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2} \leqslant \varepsilon, \\ (x_1, y_1, z_1) \in \partial\Omega\Big\}.$$

Теорема 4.8. *Нехай межею $\partial\Omega$ однозв'язної області $\Omega \subset E_3$ є замкнена квадровна поверхня, для якої $\mathcal{M}^*(\partial\Omega) < \infty$, і Ω має вимірні за Жорданом перетини з усіма площинами, перпендикулярними до координатних осей. Крім того, нехай функція $\Psi : \overline{\Omega} \to \mathbb{A}$ є гіперголоморфною в області Ω і неперервною в замиканні $\overline{\Omega}$ цієї області. Тоді справедлива рівність*

$$\int\limits_{\partial\Omega} \Psi(\zeta)\sigma = 0.$$

Доведення. Оскільки $\mathcal{M}^*(\partial\Omega) < \infty$, то існує $\varepsilon_0 > 0$ таке, що для всіх $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ виконується нерівність

$$V(\partial\Omega^\varepsilon) \leqslant c\varepsilon, \tag{4.15}$$

де стала c не залежить від ε.

Візьмемо $\varepsilon < \varepsilon_0/\sqrt{3}$. Розіб'ємо простір $\mathbb{R}^3$ на куби площинами, перпендикулярними до координатних осей, з ребром, довжина якого менша ε. Тоді маємо рівність

$$\int\limits_{\partial\Omega} \Psi(\zeta)\,\sigma = \sum_j \int\limits_{\partial(\Omega\cap K^j)} \Psi(\zeta)\,\sigma + \sum_k \int\limits_{\partial K^k} \Psi(\zeta)\,\sigma, \tag{4.16}$$

де перша сума застосовується до кубів K^j, для яких $\overline{K^j} \cap \partial\Omega \neq \varnothing$, а друга сума застосовується до кубів K^k, для яких $\overline{K^k} \subset \Omega$. За теоремою 4.6, друга сума дорівнює нулю.

Для оцінки інтеграла першої суми візьмемо точку $\zeta_j \in \Omega \cap K^j$. Зазначимо, що діаметр множини $\Omega \cap K^j$ не перевищує $\varepsilon\sqrt{3}$. Оскільки Ω має вимірні за Жорданом перетини з площинами, перпендикулярними до осей координат, то міра Лебега меж згаданих вище перетинів дорівнює 0, і тому множина $\partial(\Omega \cap K^j)$ складається з квадровних поверхонь. Отже, беручи до уваги рівність (4.11), отримуємо

$$\begin{gathered}\Bigg\| \int\limits_{\partial(\Omega\cap K^j)} \Psi(\zeta)\sigma \Bigg\| = \Bigg\| \int\limits_{\partial(\Omega\cap K^j)} (\Psi(\zeta) - \Psi(\zeta_j))\sigma \Bigg\| \leqslant \\ \leqslant n\,M \int\limits_{\partial(\Omega\cap K^j)} \|\Psi(\zeta) - \Psi(\zeta_j)\|\,\|\sigma\| \leqslant n\,M\omega_{\Psi,\overline{\Omega}}(\varepsilon\sqrt{3}) \int\limits_{\partial(\Omega\cap K^j)} \|\sigma\|,\end{gathered} \tag{4.17}$$

де M – деяка абсолютна стала.

Таким чином, наступна оцінка є результатом рівності (4.16) і нерівності (4.17):

$$\begin{gathered}\Bigg\| \int\limits_{\partial\Omega} \Psi(\zeta)\,\sigma \Bigg\| \leqslant n\,M\,\omega_{\Psi,\overline{\Omega}}(\varepsilon\sqrt{3}) \sum_j \int\limits_{\partial(\Omega\cap K^j)} \|\sigma\| \leqslant \\ \leqslant nM\,\omega_{\Psi,\overline{\Omega}}(\varepsilon\sqrt{3}) \Bigg(\int\limits_{\partial\Omega} \|\sigma\| + 6 \sum_j \varepsilon^2 \Bigg).\end{gathered} \tag{4.18}$$

Оскільки $\bigcup_j K^j \subset \partial\Omega^{\varepsilon\sqrt{3}}$, то, враховуючи нерівність (4.15), отримуємо оцінку

$$\sum_j \varepsilon^3 \leqslant V\left(\partial\Omega^{\varepsilon\sqrt{3}}\right) \leqslant c\varepsilon\sqrt{3},$$

з якої випливає нерівність

$$\sum_j \varepsilon^2 \leqslant c\sqrt{3}. \tag{4.19}$$

Нарешті, наступна нерівність є результатом оцінок (4.18) і (4.19):

$$\left\| \int\limits_{\partial\Omega_\zeta} \Psi(\zeta)\sigma \right\| \leqslant c_1\, \omega_{\Psi,\overline{\Omega}}(\varepsilon\sqrt{3})$$

де стала c_1 не залежить від ε.

Для завершення доведення зазначимо, що $\omega_{\Psi,\overline{\Omega}}(\varepsilon\sqrt{3}) \to 0$ при $\varepsilon \to 0$ в силу рівномірної неперервності функції Ψ на $\overline{\Omega}$. □

Теорема 4.8 узагальнює [29, теорема 1] доведену для трьохвимірної комутативної алгебри при додаткових припущеннях про межу $\partial\Omega$ і задану функцію. Подібний аналог теореми 4.8 доведений О. Ф. Герусом [17] для гіперголоморфних функцій в некомутативній алгебрі кватерніонів.

Розглянемо деякі умови, за яких виконується нерівність (4.15), що є еквівалентною умові $\mathcal{M}^*(\partial\Omega) < \infty$.

- Зазначимо, що для поверхні Σ в $\mathbb{R}^3$ існують додатні сталі c_1 і c_2 такі, що
$$c_1\varepsilon^3 N_\Sigma(\varepsilon) \leqslant V(\Sigma^\varepsilon) \leqslant c_2\varepsilon^3 N_\Sigma(\varepsilon), \tag{4.20}$$
де $N_\Sigma(\varepsilon)$ – найменша кількість ε-куль, що покривають Σ (див. Ф. М. Бородіч і А. Ю. Воловіков [6]).

  Зі співвідношення (4.20) випливає, що нерівність (4.15) еквівалентна нерівності вигляду
$$N_\Sigma(\varepsilon)\,\varepsilon^2 \leqslant c, \tag{4.21}$$
де стала c не залежить від ε.
- Враховуючи, що спрямлювана поверхня Σ є ліпшицевим образом квадрата G і нерівність вигляду (4.21) виконується для G, легко довести нерівність (4.21) для такої поверхні Σ.
- Якщо для поверхні Σ в $\mathbb{R}^3$, яка має скінченну двовимірну міру Хаусдорфа $\mathcal{H}^2(\Sigma)$, існує додатна стала c така, що
$$c\varepsilon^2 \leqslant \mathcal{H}^2\big(\Sigma \cap B(x,\varepsilon)\big) \tag{4.22}$$
для всіх $x \in \Sigma$ і $\varepsilon \in (0; \mathrm{diam}\Sigma]$, де $\mathrm{diam}\Sigma$ – діаметр поверхні Σ, а через $B(x,\varepsilon)$ позначено відкриту кулю з центром x і радіусом ε, то виконуються нерівності
$$P_\Sigma(\varepsilon)\varepsilon^2 \leqslant c_1\mathcal{H}^2(\Sigma) < \infty,$$

де $P_\Sigma(\varepsilon)$ – найбільша кількість неперетинних ε-куль з центрами в Σ і стала c_1 не залежить від ε (див. Р. Абреу Блайя, Х. Борі Рейєс і Т. Морено-Гарсіа [2, с. 309]). Тому, враховуючи нерівність

$$N_\Sigma(2\varepsilon) \leqslant P_\Sigma(\varepsilon)$$

(див. П. Маттіла [25, с. 78]), отримуємо нерівність (4.21) для поверхні Σ, яка задовольняє умову (4.22).

Зауваження 4.9. Має інтерес розгляд комутативних асоціативних алгебр $\mathbb{A}_n^m$, в яких існують лінійно незалежні над полем $\mathbb{R}$ елементи e_1, e_2, e_3, що задовольняють умову

$$e_1^2 + e_2^2 + e_3^2 = 0. \tag{4.23}$$

Такі алгебри називаються *гармонічними*, оскільки в них кожна моногенна функція $\Phi(\zeta)$ змінної $\zeta = xe_1 + ye_2 + ze_3$ задовольняє тривимірне рівняння Лапласа в силу співвідношень

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\Phi(\zeta) \equiv \Phi''_G(\zeta)(e_1^2 + e_2^2 + e_3^2) = 0$$

(див., наприклад, [18, 26, 55, 59, 61]) подібно до того, як кожна голоморфна функція комплексної змінної задовольняє двовимірне рівняння Лапласа.

Зазначимо, що у випадку лінійної оболонки E_3, для якої виконуються умови (2.5), (4.23) і $e_1 = 1$, моногенні функції вказаної змінної ζ утворюють підмножину гіперголоморфних функцій. Дійсно, кожна моногенна функція $\Phi\colon \Omega \to \mathbb{A}_n^m$ має $\mathbb{R}$-диференційовні компоненти U_k в розкладі (2.9) в області Ω, і в цій області виконуються умови (2.10), наслідком яких є рівності

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x}\,e_1 + \frac{\partial \Phi}{\partial y}\,e_2 + \frac{\partial \Phi}{\partial z}\,e_3 = \frac{\partial \Phi}{\partial x}(e_1^2 + e_2^2 + e_3^2) = 0.$$

У той же час існують гіперголоморфні функції які не є моногенними. Наприклад, функція $\Psi(x + ye_2 + ze_3) = ze_2 - ye_3$ задовольняє умову (4.10), але не задовольняє необхідні умови моногенності, а саме рівності вигляду (2.10).

Аналогічно, існують гіперголомофні функції, які не задовольняють тривимірне рівняння Лапласа. Наприклад, функція

$$\Psi(xe_1 + ye_2 + ze_3) = x^2 e_1 + i\left(x^2 + \frac{z^2}{2}\right)e_2 + (xz + x + iy)e_3$$

задовольняє рівняння (4.10), але компоненти x^2 і $x^2 + z^2/2$ не є просторовими гармонічними функціями.

Література

[1] Ricardo Abreu Blaya and Juan Bory Reyes. Boundary value problems for quaternionic monogenic functions on non-smooth surfaces. *Adv. Appl. Clifford Algebras*, 9(1):1–22, 1999. doi:10.1007/BF03041934.

[2] Ricardo Abreu Blaya, Juan Bory Reyes, and Tania Moreno García. Minkowski dimension and Cauchy transform in Clifford analysis. *Complex Anal. Oper. Theory*, 1(3):301–315, 2007. doi:10.1007/s11785-007-0015-0.

[3] Ricardo Abreu Blaya, Dixan Peña Peña, and Juan Bory Reyes. Clifford Cauchy type integrals on Ahlfors-David regular surfaces in $\mathbb{R}^{m+1}$. *Adv. Appl. Clifford Algebras*, 13(2):133–156, 2003. doi:10.1007/s00006-003-0008-7.

[4] S. Bernstein. Factorization of the nonlinear Schrödinger equation and applications. *Complex Variables and Elliptic Equations*, 51(5-6):429–452, 2006. doi:10.1080/17476930500481400.

[5] E. K. Blum. A theory of analytic functions in Banach algebras. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 78:343–370, 1955. doi:10.2307/1993068.

[6] Feodor M. Borodich and Aleksei Yu. Volovikov. Surface integrals for domains with fractal boundaries and some applications to elasticity. *R. Soc. Lond. Proc. Ser. A Math. Phys. Eng. Sci.*, 456(1993):1–24, 2000. doi:10.1098/rspa.2000.0506.

[7] F. Brackx, Richard Delanghe, and F. Sommen. *Clifford analysis*, volume 76 of *Research Notes in Mathematics*. Pitman (Advanced Publishing Program), Boston, MA, 1982.

[8] E. Cartan. Les groupes bilinéaires et les systèmes de nombres complexes. *Ann. Fac. Sci. Toulouse Sci. Math. Sci. Phys.*, 12(1):B1–B64, 1898. URL: http://www.numdam.org/item?id=AFST_1898_1_12_1_B1_0.

[9] Francesco Catoni, Dino Boccaletti, Roberto Cannata, Vincenzo Catoni, Enrico Nichelatti, and Paolo Zampetti. *The mathematics of Minkowski space-time*. Frontiers in Mathematics. Birkhäuser Verlag, Basel, 2008. With an introduction to commutative hypercomplex numbers.

[10] Lamberto Cesari. *Surface area*. Annals of Mathematics Studies, No. 35. Princeton University Press, Princeton, N. J., 1956.

[11] Fabrizio Colombo, Irene Sabadini, and Daniele C. Struppa. Slice monogenic functions. *Israel J. Math.*, 171:385–403, 2009. doi:10.1007/s11856-009-0055-4.

[12] Herbert Federer. *Geometric measure theory*. Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Band 153. Springer-Verlag New York, Inc., New York, 1969.

[13] M. Fréchet. Sur la distance de deux surfaces. *Ann. Soc. Polonaise Math.*, 3:4–19, 1924.

[14] V. Gončarov. Sur l'intégrale de Cauchy dans le domaine hypercomplexe. *Bulletin de l'Académie des Sciences de l'URSS. Classe des sciences mathématiques et na*, (10):1405–1424, 1932.

[15] E. Goursat. *Cours d'analyse mathématique*. Gauthier–Villars, Paris, 1910.

[16] Jenny Harrison and Alec Norton. The Gauss-Green theorem for fractal boundaries. *Duke Math. J.*, 67(3):575–588, 1992. doi:10.1215/S0012-7094-92-06724-X.

[17] O. F. Herus. On the Cauchy theorem for hyperholomorphic functions of spatial variable. *Journal of Mathematical Sciences*, 229(1):1–6, 2018. doi:10.1007/s10958-018-3658-7.

[18] P. W. Ketchum. Analytic functions of hypercomplex variables. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 30(4):641–667, 1928. doi:10.2307/1989440.

[19] P. W. Ketchum. A complete solution of Laplace's equation by an infinite hypervariable. *Amer. J. Math.*, 51(2):179–188, 1929. doi:10.2307/2370704.

[20] Vladimir V. Kisil. Hypercomplex representations of the Heisenberg group and mechanics. *Internat. J. Theoret. Phys.*, 51(3):964–984, 2012. doi:10.1007/s10773-011-0970-0.

[21] V.V. Kisil. Erlangen programme at large: an overview. In *Advances in Applied Analysis, Trends in Mathematics*, pages 1–94. Springer, Basel, 2012. doi:10.1007/978-3-0348-0417-1.

[22] Vladislav V. Kravchenko and Michael V. Shapiro. *Integral representations for spatial models of mathematical physics*, volume 351 of *Pitman Research Notes in Mathematics Series*. Longman, Harlow, 1996.

[23] Edgar R. Lorch. The theory of analytic functions in normed abelian vector rings. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 54:414–425, 1943. doi:10.2307/1990255.

[24] M. Elena Luna-Elizarrarás, Michael Shapiro, Daniele C. Struppa, and Adrian Vajiac. *Bicomplex holomorphic functions*. Frontiers in Mathematics. Birkhäuser/Springer, Cham, 2015. The algebra, geometry and analysis of bicomplex numbers. doi:10.1007/978-3-319-24868-4.

[25] Pertti Mattila. *Geometry of sets and measures in Euclidean spaces*, volume 44 of *Cambridge Studies in Advanced Mathematics*. Cambridge University Press, Cambridge, 1995. Fractals and rectifiability. doi:10.1017/CBO9780511623813.

[26] S. A. Plaksa. Commutative algebras associated with classic equations of mathematical physics. In *Advances in Applied Analysis, Trends in Mathematics*, pages 177–223. Springer, Basel, 2012. doi:10.1007/978-3-0348-0417-5.

[27] S. A. Plaksa. Integral theorems for monogenic functions in an infinite-dimensional space with a commutative multiplication. *Зб. праць Ін-ту матем. НАН України*, 10(4–5):306–319, 2013.

[28] S. A. Plaksa and R. P. Pukhtaievych. Monogenic functions in a finite-dimensional semi-simple commutative algebra. *Analele Universitatii "Ovidius" Constanta – Seria Matematica*, 22(1):221–235, December 2014. doi:10.2478/auom-2014-0018.

[29] S. A. Plaksa and V. S. Shpakivskyi. Integral theorems and a Cauchy formula in a commutative three-dimensional harmonic algebra. *Bull. Soc. Sci. Lett. Łódź Sér. Rech. Déform.*, 60(2):47–54, 2010.

[30] S. A. Plaksa and V. S. Shpakivskyi. Integral theorems in a commutative three-dimensional harmonic algebra. In *Progress in analysis and its applications*, pages 232–239. World Sci. Publ., Hackensack, NJ, 2010. URL: https://doi.org/10.1142/9789814313179_0031, doi:10.1142/9789814313179_0031.

[31] S. A. Plaksa and V. S. Shpakivskyi. A description of spatial potential fields by means of monogenic functions in infinite-dimensional spaces with a commutative multiplication. *Bulletin Soc. Sci. et Lettr. Łódź*, 62(2):55–65, 2012.

[32] S. A. Plaksa and V. S. Shpakivskyi. Cauchy theorem for a surface integral in commutative algebras. *Complex Variables and Elliptic Equations*, 59(1):110–119, November 2013. doi:10.1080/17476933.2013.845178.

[33] S. A. Plaksa and V. S. Shpakivskyi. Monogenic functions in a finite-dimensional algebra with unit and radical of maximal dimensionality. *Journal of Algerian Mathematical Society*, 1(1):1–13, 2014.

[34] A. Pogorui, R.M. Rodríguez-Dagnino, and M. Shapiro. Solutions for PDEs with constant coefficients and derivability of functions ranged in commutative algebras. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 37(17):2799–2810, November 2013. doi:10.1002/mma.3019.

[35] G. Baley Price. *An introduction to multicomplex spaces and functions*, volume 140 of *Monographs and Textbooks in Pure and Applied Mathematics*. Marcel Dekker, Inc., New York, 1991. With a foreword by Olga Taussky Todd.

[36] Tibor Radó. *Length and Area*. American Mathematical Society, New York,,, 1948.

[37] F. Ringleb. Beiträge zur funktionentheorie in hyperkomplexen systemen. *Rend. Circ. Mat. Palermo*, 57:311–340, 1933.

[38] M. N. Roşculeţ. O teorie a funcţiilor de o variabilă hipercomplexă în spaţiul cu trei dimensiuni. *Studii şi Cercetări Matematice*, 5(3–4):361–401, 1954.

[39] M. N. Roşculeţ. Algebre infinite associate la ecuaţii cu derivate parţiale, omogene, cu coeficienţi constanţi de ordin oarecare. *Studii şi Cercetări Matematice*, 6(3–4):567–643, 1955.

[40] M. N. Roşculeţ. Algebre liniare asociative şi comutative şi fincţii monogene ataşate lor. *Studii şi Cercetări Matematice*, 6(1–2):135–173, 1955.

[41] J. Ryan. Dirac operators, conformal transformations and aspects of classical harmonic analysis. *J. of Lie Theory*, 8:67–82, 1998.

[42] S. Saks. *Theory of the integral, 2nd English edition*. Warsaw, 1937.

[43] V. Shpakivskyi. Constructive description of monogenic functions in a finite-dimensional commutative associative algebra. *Advances in Pure and Applied Mathematics*, 7(1), January 2016. doi:10.1515/apam-2015-0022.

[44] V. S. Shpakivskyi. Monogenic functions in finite-dimensional commutative associative algebras. *Зб. праць Ін-ту матем. НАН України*, 12(3):251–268, 2015.

[45] L. Sobrero. Nuovo metodo per lo studio dei problemi di elasticità, con applicazione al problema della piastra forata. *Ricerche di Ingegneria*, 13(2):255–264, 1934.

[46] Wolfgang Spröß ig. Eigenvalue problems in the framework of Clifford analysis. *Adv. Appl. Clifford Algebras*, 11(S2):301–316, 2001. doi:10.1007/BF03219141.

[47] Wolfgang Sprössig. Quaternionic analysis and Maxwell's equations. *Cubo*, 7(2):57–67, 2005.

[48] A. Sudbery. Quaternionic analysis. *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.*, 85(2):199–224, 1979. doi:10.1017/S0305004100055638.

[49] О. Ф. Герус. Про гіперголоморфні функції просторової змінної. *Укр. матем. журн.*, 63(4):459–465, 2011.

[50] С. В. Грищук and С. А. Плакса. Моногенные функции в бигармонической алгебре. *Укр. матем. журн.*, 61(12):1587–1596, 2009. doi:10.1007/s11253-010-0319-5.

[51] В. Ф. Ковалев and И. П. Мельниченко. Бигармонические функции на бигармонической плоскости. *Докл. АН УССР. Сер. А*, (8):25–27, 1981.

[52] В. Ф. Ковалев and И. П. Мельниченко. *Алгебры функционально-инвариантных решений р-бигармонического уравнения. Препринт 91.10*. Киев: Ин-т математики АН УССР, 1991.

[53] М.А. Лаврентьев and Б.В. Шабат. *Методы теории функций комплексного переменного*. Москва: Наука, 1987.

[54] А.И. Маркушевич. *Теория аналитических функций*, volume 1. Москва: Наука, 1968.

[55] И. П. Мельниченко. О представлении моногенными функциями гармонических отображений. *Укр. матем. журн.*, 27(5):606–613, 1975.

[56] И. П. Мельниченко. Об одном методе описания потенциальных полей с осевой симметрией. In *Современные вопросы вещественного и комплексного анализа (Ин-т математики АН УССР, Киев)*, pages 98–102. 1984.

[57] И. П. Мельниченко. Бигармонические базисы в алгебрах второго ранга. *Укр. матем. журн.*, 38(2):252–254, 1986.

[58] И. П. Мельниченко. Алгебры функционально-инвариантных решений трехмерного уравнения Лапласа. *Укр. матем. журн.*, 55(9):1284–1290, 2003.
[59] И. П. Мельниченко and С. А. Плакса. *Коммутативные алгебры и пространственные потенциальные поля.* Ин-т математики НАН Украины, Киев, 2008.
[60] С. А. Плакса and Р. П. Пухтаевич. Конструктивное описание моногенных функций в трехмерной гармонической алгебре с одномерным радикалом. *Укр. матем. журн.*, 65(5):670–680, 2013. doi:10.1007/s11253-013-0810-x.
[61] С. А. Плакса and В. С. Шпаковский. Конструктивное описание моногенных функций в гармонической алгебре третьего ранга. *Укр. матем. журн.*, 62(8):1078–1091, 2010. doi:10.1007/s11253-011-0427-x.
[62] Ю. Ю. Трохимчук. *Непрерывные отображения и условия моногенности.* Москва: Физматиз, 1963.
[63] Э. Хилле and Р. Филлипс. *Функциональный анализ и полугруппы.* Москва: Издательство иностр. лит, 1962.

С. А. Плакса
Інститут математики НАН України, м. Київ
Email: plaksa@imath.kiev.ua, plaksa62@gmail.com
ORCID: 0000-0002-2828-0329

В. С. Шпаківський
Інститут математики НАН України, м. Київ
Email: shpakivskyi86@gmail.com
ORCID: 0000-0003-4256-8975

Наукове видання

Сучасні проблеми математики та її застосувань. III

Збірник праць Інституту математики НАН України

2023, т. 20, № 1

Modern problems of mathematics and its applications. III

Proceedings of the Institute of Mathematics of the NAS of Ukraine

2023, v. 20, No 1

Комп'ютерна верстка та підготовка оригінал-макету
В. І. Герасименко, С. І. Максименко.
Дизайн обгортки: Б. Г. Фещенко

Друк: підприємець Голіней О. М.
м. Івано-Франківськ, вул. Галицька, 128
тел. (0342) 58 04 32, +38 050 540 30 64
email: gsm1502@ukr.net
папір офсетний, друк цифровий
формат 70x100/16, ум. друк. 15.7 арк.
Зам. № 143 від 18.08.2023, наклад 300 прим.

Збірник праць містить лекції Ґравевських читань та праці
з актуальних напрямів розвитку сучасної математики в Україні,
присвячені 160-річчю академіка Дмитра Олександровича Ґраве.

Для наукових співробітників, викладачів
закладів вищої освіти, докторантів та аспірантів.

ISSN 1815-2910