



Національна академія наук України
Інститут математики НАН України

Збірник праць
Інституту математики НАН України

Сучасні проблеми математики та її застосувань

I

Київ - 2020

НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ НАУК УКРАЇНИ
ІНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

Сучасні проблеми математики
та її застосувань

I

Київ - 2020

НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ НАУК УКРАЇНИ
ІНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

Збірник праць
Інституту математики НАН України
Том 17, № 2

Головний редактор:

А.М. Самойленко

Редакційна колегія:

*О. В. Антонюк, О. А. Бойчук, В. Б. Василик, А. А. Дороговцев,
Ю. А. Дрозд, А. Н. Кочубей, І. О. Луковський, О. Г. Мазко,
В. Л. Макаров, С. І. Максименко, В. А. Михайлець, А. Г. Нікітін,
В. Л. Островський, С. А. Плакса, М. І. Портенко,
М. В. Працьовитий, О. Л. Ребенко, А. С. Романюк, А. С. Сердюк,
С. Г. Солодкий, О. М. Тимоха, О. М. Шарковський*

УДК 51-7; 510; 512; 514; 517; 519.2; 519.6

Сучасні проблеми математики та її застосувань, I.

Відп. ред. *В. І. Герасименко, Ю. А. Дрозд, С. І. Максименко.*

Зб. праць Ін-ту математики НАН України. Т. 17, № 2.

Київ: Ін-т математики НАН України, 2020. – 408 с.

ISSN 1815–2910

Збірник праць містить статті, присвячені основним набуткам наукових співробітників Інституту математики НАН України з актуальних напрямів розвитку сучасної математики та її застосувань.

Для наукових співробітників, викладачів закладів вищої освіти, докторантів і аспірантів.

The Proceedings devoted to the main acquisitions of scientists of the Institute of Mathematics of the NAS of Ukraine in current areas of development of modern mathematics and its applications.

For researchers, teachers of higher education institutions, doctoral and graduate students.

Відповідальні редактори:

В. І. Герасименко, доктор фіз.-мат. наук, професор

Ю. А. Дрозд, член-кореспондент НАН України, доктор фіз.-мат. наук, професор

С. І. Максименко, член-кореспондент НАН України, доктор фіз.-мат. наук, старший науковий співробітник

Рецензенти:

В. Г. Самойленко, доктор фіз.-мат. наук, професор

С. Г. Солоджий, доктор фіз.-мат. наук, старший науковий співробітник

Затверджено до друку Вченою радою Ін-ту математики НАН України, протокол № 11 від 22.12.2020 р.

Свідоцтво про державну реєстрацію – серія КВ №8459 від 19. 02. 2004 р.

Рік заснування - 1938 р.

© Інститут математики НАН України, 2020

100 років Математичного інституту УАН

В. І. Герасименко, Ю. А. Дрозд, С. І. Максименко

Abstract. This foreword presents some facts from the 100-year history of the Institute of Mathematics and the achievements of its founder.

In general, this volume of the Proceedings of the Institute of Mathematics, a periodical founded in 1938 by Professor D. Grave, include reviews related to advances in modern mathematics and the scientific preferences of leading scientists of the Institute of Mathematics of the NAS of Ukraine 100 years after the founding of the mathematical institution of the Ukrainian Academy of Sciences.

Анотація. У цьому передньому слові наведено деякі факти зі 100-річної історії Інституту математики та набутків його засновника. Загалом цей том Праць Інституту математики, періодичного видання, заснованого в 1938 р. професором Д. О. Граве, містить огляди, пов'язані з напрямками прогресу в сучасній математиці та науковими вподобаннями провідних вчених Інституту математики НАН України через 100 років з часу заснування математичної інституції Української Академії наук.

У березні 2020 р. виповнилось 100 років від часу заснування академіком Д. О. Граве Математичного інституту Української Академії наук (УАН).

Математична інституція у складі Української академії наук формально народилась за таких подій. Загальні збори УАН в лютому 1920 р. постановили: обрати професора Д. О. Граве членом УАН на чергових Загальних зборах 8 березня 1920 р. Професора Д. О. Граве обрали одноголосно на кафедру чистої математики з дорученням якнайшвидше організувати Математичний інститут УАН, який і «було засновано в той самий час без зволікання».

За наступне десятиліття становлення Академії наук проходили постійні зміни (реорганізація) її структури. Значною мірою ці зміни відбувались під впливом зовнішніх факторів, зокрема, завдяки спробам підпорядкувати самоврядну організацію державним та партійним органам, які в той історичний період самі зазнавали постійних трансформацій. За умов політичного хаосу, зміни влад та режимів видатні вчені

прагнули будь-що зберегти омріяну УАН. З огляду на це треба відзначити, що при цьому реорганізація структури Академії не означала зміни її наявних інституцій: вчених і напрямів їх досліджень.

Так, у жовтні 1920 р. Математичний інститут УАН було реорганізовано в такі інституції математичного профілю (згодом – комісії):

- Інститут застосовної математики (директор – не академік Н. Столярюв; із січня 1921 р. – це Геометричний інститут, на 17 березня 1921 р. у його складі було 9 осіб; в 1922 р. у складі залишився один директор без зарплати; проіснував до 1924 р.);
- Інститут чистої математики (директор – академік Г. Пфейффер);
- Комісію застосовної математики й механіки (директор – академік Д. Граве, проіснувала до 1923 р.).

Мотивацією такого розділення була та обставина, що крім фізико-математичного відділення в Академії мало бути відділення застосовного природознавства (з 1920 р. академік Д. Граве керує організацією цього відділення).

У травні-червні 1921 р. спеціальним рішенням Уряду наявні на той час в Україні наукові організації було об'єднано у дві структури:

- державну – Всеукраїнську академію наук (ВУАН) на базі УАН та
- громадську – на базі Українського наукового товариства.

З червня 1921 р., за окремою постановою РНК УСРР, набув чинності Статут ВУАН. В 1921 р. відбулося перше скорочення наукових співробітників ВУАН (із 606 до 149 осіб), представники уряду були присутні в Раді (Спільному зібранні) ВУАН, а наркомат освіти УСРР отримав право затверджувати академіків та президію ВУАН.

До 1929 р. ВУАН являла собою суміш державних наукових установ і громадських наукових організацій. Лише постановою Президії ВУАН від 7 січня 1930 р. всі наукові товариства було виключено з Академії. За задумом партійних органів реорганізація науково-дослідних установ мала бути спрямована на злиття дрібних дослідницьких закладів з метою створення великих науково-дослідних інститутів. Кількість таких інститутів у 1929–1930 рр. мала збільшитися до 34 у порівнянні з 16, які діяли у 1928 р. Водночас зменшилося число науково-дослідних кафедр – від 84 у 1928 р. до 4-х на кінець 1930 р.

У той час тло, на якому відбуваються зміни структури Академії, висвітлено в статті академіка І. Дзюби [5]:

... Початок 30-х рр. приніс нові випробування Академії. На атмосфері в ній гнітюче відбивалися політичні репресії в країні, цілеспрямоване «загострення класової боротьби», наслідки голодомору. Функцію «непримиренної боротьби проти ворожих елементів

ВУАН» виконувала комуністична фракція ВУАН, що перетворилася у своєрідного офіційного наглядача за діяльністю всієї Академії і кожного окремого її члена під приводом «всебічної, конкретної, глибокого пророблення наукової продукції робітників ВУАН, скерованої на допомогу у великій більшості науковців методологічно переозброїтись, а явно ворожих ізолювати» («Постанова комуністичної фракції ВУАН про політичний стан Академії», 20.05 1932 р.). Шал «боротьби» проти «ворожих елементів» набрав такого моторошного характеру, що партійному керівництву доводилося стримувати деяких надто войовничих функціонерів. Наприклад, у згаданій постанові засуджено «виступ тов. Рибка на зборах I Відділу ВУАН з критикою математичних праць М. М. Крилова, з заявою академіку М. М. Крилову, що він його праць не читав і вважає, що й читати не треба їх, щоб дати оцінку як буржуазному вченому». Під гаслом «критики й самокритики» проводилися «чистки» кадрів у принизливій формі публічного обговорення «громадського обличчя» видатних учених, викриття «ворожих тенденцій» у їхніх працях, визначення їхніх «здібностей» залежно від класового походження.

Зрештою математичні відділи структури Академії набули форми «циклів наук». Зокрема, фізико-математичний відділ відтепер мав у своєму складі 7 циклів, а до циклу фізико-математичних наук входили такі установи: 1) Кафедра застосовної математики і Комісія застосовної математики (керівник – Д. Граве); 2) Кафедра чистої математики і Комісія чистої математики (керівник – Г. Пфейффер); 3) Кафедра математичної фізики і Кабінет математичної фізики (керівник – М. Крилов); 4) Кафедра математичної статистики, Комісія для вивчення математичних проблем у статистиці економіці і Кабінет математичної статистики (керівник – М. Кравчук); 5) Кафедра експериментальної фізики та Лабораторія експериментальної фізики (керівник – О. Гольдман); 6) Кафедра геофізики і Комісія з геофізики (керівник – Б. Срезневський).

У зв'язку з переїздом столиці з Харкова (офіційно 24.06.1934 р.) до Києва відбулась чергова реорганізація структури Академії. Зокрема було реорганізовано кафедри та відповідні комісії ВУАН: застосовної математики (Д. Граве), чистої математики (Г. Пфейффер) і математичної статистики (М. Кравчук). Також було заплановано на 1932 р. організувати в Києві Інститут математики.

У січні 1934 р. постановою сесії ВУАН було ліквідовано кафедри, кабінети та інші установи. На їх основі було організовано академічні

інститути, в тому числі й Інститут математики, посаду директора якого став обіймати академік Д. О. Ґраве.

Треба наголосити, що «Інститут математики Академії наук УРСР об'єднав комісії, створені при кафедрах прикладної математики, математичного аналізу і математичної статистики в період 1919–1930 рр. Як в сенсі особового складу, так і в сенсі кола розроблюваних питань Інститут значною мірою є продовжувачем роботи названих кафедр й комісій» [7].

Не можна уявити історію Інституту математики без свого засновника і творця, і навпаки, – розглядати постать академіка Д. О. Ґраве окремо від математичної інституції Академії наук.



Дмитро Олександрович Ґраве

(6 вересня 1863, Кирилов - 19 грудня 1939, Київ)

Біографія фундатора математичної інституції в Академії неодноразово викладена в численних джерелах, тому має сенс лише звернути

увагу на власноруч написану Дмитром Олександровичем автобіографію з фондів бібліотеки Інституту математики НАН України [2].

Також не будемо детально затримуватися на його науковому набутку оскільки найкраще це висвітлено в працях його учнів [8,9]. Найвідоміші його праці [3,10,11] вже мають більш ніж вікову історію і досі не втратили свого впливу на розвиток математики. У некролозі [4] написаному Б. Н. Делоне наведено повний список наукових праць Д. О. Граве. Деякі його відомі праці з алгебри, математичної фізики та інших галузей математики, наприклад, актуарної математики (Д. О. Граве вважається одним з піонерів у створенні актуарної математики) увійшли до зібрання вибраних праць Д. О. Граве [1], опублікованого в наш час.

Зазначимо, що у 1935 р. урочисто відзначалось 50-річчя науково-педагогічної діяльності Д. О. Граве. З цієї нагоди у книзі [8] було зібрано праці його учнів.

Професор Д. О. Граве був видатною людиною в багатьох вимірах: вчений, видатний організатор науки, талановитий педагог та громадський діяч. Зокрема, він був засновником низки наукових і освітніх інституцій.

Д. О. Граве був одним з натхненників створення Української Академії наук. Наведемо бачення Голови-Президента УАН академіка В. І. Вернадського та професора Д. О. Граве: *«...важливо було увільнити Вченого від перевантаження обов'язками викладача навчального закладу, у тому разі, якщо він виявив здатність рухати науку вперед: Академія повинна складатися з об'єднання вчених людей, які отримують кошти від держави і віддаються науці і дослідницькій роботі, як справі свого життя, визнаній державою за державно важливу»* [6].

Фактично, Д. О. Граве мав права дійсного члена УАН ще до його обрання академіком в 1920 р, а саме: у липні 1918 р. Д. О. Граве за дорученням свого побратима академіка В. І. Вернадського був залучений до підкомісії з організації фізико-математичного відділення УАН: *«УАН мала сприяти створенню дослідницьких інститутів в усіх галузях людських знань»*. У лютому 1919 р. Д. О. Граве став дійсним членом постійної комісії зі складання біографічного словника українських діячів, а з листопада 1919 р. до кінця 1921 р. очолював Інститут технічної механіки, заснований академіком С. П. Тимошенко в листопаді 1918 р.

Ще декілька прикладів невичерпної енергії видатного організатора науки. У 1925 році Д. О. Граве разом з відомим інженером О. Я. Федоровим (учень Д. О. Граве) очолював «Виставку з вивчення світових просторів», яка проходила з червня по серпень в Києві.

Професор Д. О. Ґраве – натурфілософ і математичний фізик: *«На засіданні Другого відділення Української академії наук від 13.05.1921 р. (протокол 88) було постановлено за моєю доповіддю якомога швидко влаштувати «Лабораторію експериментальних досліджень з натуральної філософії»... той внутрішній світ ідей, які ми будемо, повинен бути не чим іншим, як сукупністю математичних теорій всіх явищ природи. Натуральну філософію я розумів у англійському сенсі слова, як механіку і математичну фізику...».*

Відома видатна роль професора Д. О. Ґраве в створенні

- природничо-математичного факультету Київського державного українського університету, який було засновано у 1917 р. і урочисто відкрито 6 вересня 1918 р. (також 22 жовтня святково було відкрито Кам'янець-Подільський державний український університет), та
- Таврійського університету (університету-здравниці, спочатку як філіалу Київського університету св. Володимира), який почав роботу у травні 1918 р. (професор Д. О. Ґраве розробив навчальний план).

Видатні якості Д. О. Ґраве як дослідника вдало поєднувалися з його хистом талановитого педагога. Педагогічній роботі він присвятив понад 45 років життя, викладав в університетах і інститутах Петербурга, Харкова, Києва.

Зі спогадів академіка О. М. Крилова (відомого механіка і математика, у 1928–1932 рр. директора фізико-математичного інституту АН СРСР – з 1934 р. Математичний інститут ім. Стеклова, перекладача «Математичних начал натуральної філософії» Ньютона, кораблебудівника, адмірала): *«Я с удовольствием вспоминаю Ваши лекции, которые я слушал 49 лет тому назад в университете. Я думаю, что я старейший из Ваших учеников. С глубочайшим уважением, искренне Вам преданный А. Н. Крилов. 1936 г.»*

І в наш час залишаються актуальними погляди О. М. Крилов про значення Науки для людства: *«Надо помнить, что затраты на истинно научное творчество окупаются затем в жизни государства не седмирицею, не сторицею, а числами, для которых в древнем языке не было названий».*

Філософія професора Д. О. Ґраве на підготовку молодих вчених – відбір має відбуватись не в процесі навчання, а в процесі творчої роботи. З 1908 р. розпочалися знамениті наукові семінари професора Д. О. Ґраве, що проходили в університеті та у нього вдома. За наслідками діяльності якого була створена перша велика математична школа на теренах України. Одними з найвидатніших учнів Д. О. Ґраве в той час були М. Г. Чеботарьов, який згодом створив відому казанську алгебраїчну школу, Б. М. Делоне – син професора Київського

політехнічного інституту М. Б. Делоне – вчителя відомого авіаконструктора І. Сікорського, який заснував ленінградську алгебраїчну школу. Учнем Б. М. Делоне був Д. К. Фадеєв, який керував Ленінградським алгебраїчним семінаром і виховав цілу плеяду відомих математиків. У творчій атмосфері семінарських занять професора Д. О. Ґраве виховувалися й інші його учні: майбутній академік ВУАН М. П. Кравчук, який у 1924 р. захистив першу в Україні докторську дисертацію з алгебри «Про квадратичні форми і лінійні перетворення» (його учнями були, зокрема, А. П. Люлька, С. П. Корольов, Ю. В. Кондратюк, В. М. Челомей), майбутній академік АН СРСР О. Ю. Шмідт, а також А. М. Островський, який став відомим завдяки теоремі про нормування поля раціональних чисел, М. Г. Крейн, В. П. Вельмін, Є. І. Жилінський та багато інших.

Особливо теплі спогади професор Д. О. Ґраве залишив про свого учня О. Ю. Шмідта: *«О. Ю. Шмідт вступив до моєї школи, коли був ще студентом, і незабаром зробив відкриття в теорії груп, що стало сенсацією в Німеччині»*. О. Ю. Шмідт у 1929 році заснував кафедру вищої алгебри Московського університету імені М. В. Ломоносова. Він є автором першої у світі монографії з теорії груп, виданої в Києві у 1916 р., в якій розглядаються нескінченні групи. З 1934 р. (до 1939 р.) після відродження Київського університету, який було ліквідовано в 1920 р., університету було присвоєно ім'я О. Ю. Шмідта.

У 1922 р. в Києві було організовано науково-дослідну кафедру математики. З 1923 р. її очолив Д. О. Ґраве. В цей період його цікавлять проблеми математики і механіки. Серед його учнів можна побачити М. О. Кільчевського, Ю. Д. Соколова і А. Л. Наумова, які багато зробили для розвитку механіки в Україні. Взагалі Д. О. Ґраве брав активну участь у долі багатьох українських математиків, зокрема М. М. Боголюбова, Н. І. Ахієзера, Є. Я. Ремеза, В. Є. Дяченко.

Треба відзначити еволюцію наукового семінару Д. О. Ґраве. У 20-ті роки на науковому семінарі обговорювались, наприклад, такі теми: «Класична гідродинаміка», «Механічна теорія ефіру», «Теорія електрики Максвелла», «Механіка Герца», «Теорія Айнштейна», «Квантова механіка», «Механіка молекулярної будови речовин».

Академік М. М. Боголюбов сформувався як вчений в галузі математичної фізики під впливом наукового семінару Д. О. Ґраве і згодом, працюючи в Інституті математики, написав фундаментальні праці із статистичної механіки і квантової теорії поля [6]. В наш час заснований ним Інститут теоретичної фізики носить ім'я М. М. Боголюбова.

Всіх учнів професора Д. О. Ґраве навіть згадати в короткій статті неможливо. Зазначимо лише, що з їхніми іменами пов'язані важливі

віхи у розвитку як нашого Інституту, так і вітчизняної математики загалом.

Не можна також не згадати про заснування Д. О. Ґраве перших в країні математичних періодичних видань: «Журнал математичного циклу Всеукраїнської Академії наук» (1931 р.), «Журнал Інституту математики Всеукраїнської Академії наук» (1934 р.), «Збірник праць Інституту математики АН УРСР» (1938 р.) як оберігає збереження найкращих традицій розвитку науки.

Заслуги професора Д. О. Ґраве з розвитку науки і освіти вшановувались в різні періоди його життя такими нагородами: до 1917 р. – дійсний статський радник, заслужений професор, орден св. Станислава 2-го ступ., орден св. Анни 2-го ступ., орден св. Володимира 4-го ступ. та 3-го ступ.; після 1917 р. – «Про соціальне забезпечення заслужених працівників науки» (1921 р.), почесний член АН СРСР, орден «Трудовий Червоний Прапор». У наш час кратер на Місяці названо на честь Ґраве.

У зв'язку з ювілейною датою варто згадати, що Інститут математики дав початок низці наукових установ Академії. Серед них

- Інститут кібернетики (наукова школа: Д. О. Ґраве, О. Ю. Шмідт, А. Г. Курош, С. Н. Черніков, В. М. Глушков), а саме, 6 вересня 1949 р., у зв'язку з організацією обчислювальної групи, відділ асимптотичних методів М. М. Боголюбова було перейменовано у відділ математичної фізики; пізніше на основі цієї групи було створено лабораторію обчислювальної техніки і математики, яку в 1956 р. очолив В. М. Глушков; в 1957 р. лабораторію було виокремлено в самостійний науковий заклад – Обчислювальний центр, а вже з 1962 р. – Інститут кібернетики.
- Інститут теоретичної фізики з 1966 р (наукова школа: Д. О. Ґраве, М. М. Боголюбов, О. С. Парасюк),
- Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України (1978 р.) – з 1973 р. Львівський філіал математичної фізики Інституту математики,
- Міжнародний математичний центр ім. Ю. О. Митропольського (наукова школа: Д. О. Ґраве, М. М. Крилов, М. М. Боголюбов, Ю. О. Митропольський), який працював у 1992–2017 рр.

Інститут математики зберігає в академічній науці найкращі традиції, започатковані корифеями математики – академіком Д. О. Ґраве та його найближчими учнями-наступниками. Велика кількість колишніх і нинішніх співробітників доклали багато зусиль для того, щоб Інститут математики перетворився на провідний, відомий світу науковий центр.

Це відбувалося завдяки багаторічним дослідженням, поширенню досвіду від покоління до покоління, і дало можливість закласти традиції та створити наукові школи світового рівня в пріоритетних напрямках розвитку математичної науки.

Завершуючи розповідь про джерела Інституту математики, треба наголосити, що інституція гідно витримала випробування часом, пройшовши складний шлях – від невеликого колективу вчених-одномудців до потужної науково-дослідної установи. У наш час ім'я Д. О. Граве залишається символом високої місії наукових досліджень, який дає насагу ученим Інституту: «... вивчаючи чисту математику не повинні втрачати енергії й віри у високе значення їх науки. Їх не повинна залишати віра в існування закладених в надрах їх розуму якостей, що дають можливість підноситися духом все вище і вище в нескінченність».

ЛІТЕРАТУРА

- [1] Д. О. Граве. *Вибрані праці*. Київ: Наук. думка, 1971, 356с.
- [2] Д. А. Граве. *Моя жизнь и научная деятельность (рукоп.)*. Бібл. Ін-та математики НАНУ, 1, Г-75, 40 с., 1935.
- [3] Д. А. Граве. *Энциклопедия математики. Очерк ее современного положения*. Київ: Изд. книжного магазина Н.Я. Оглоблина, тип-я И.И. Чоколова, 601 с., илл., 1912.
- [4] Б. Н. Делоне. Дмитрий Александрович Граве (1863–1939). *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, 4(4-5):349–356, 1940.
- [5] І. М. Дзюба. Академія наук України. In *Енцикл. Сучас. України, т.1*. К.: Поліграфкнига, 2001.
- [6] А. Г. Загородній, В. І. Герасименко. Геній сучасної теоретичної і математичної фізики. In *Творець теоретичної і математичної фізики*. Київ: Академперіодика, 532 с., 152 арк. іл., 2019, doi: 10.15407/akademperiodyka.387.532.
- [7] М. Ф. Кравчук. О работах Института математики Академии наук УССР. *УМН*, (3):249–251, 1937.
- [8] Н. Г. Чеботарев. Академик Дмитрий Александрович (к пятидесятилетию его научно-педагогической деятельности). *УМН*, (3):222–233, 1937.
- [9] Н. Г. Чеботарев. Академик Дмитрий Александрович Граве (1863–1939). In *Сборник памяти акад. Д.А. Граве*. М.–Л.: Госиздат, 1940.
- [10] Д. О. Граве. *Трактат з алгебричного аналізу. Том I. Початки науки*. Київ: Видавн. Ак. Наук УРСР, 208 с., 1938.
- [11] Д. О. Граве. *Трактат з алгебричного аналізу. Том II. Історичний огляд*. Київ: Видавн. Ак. Наук УРСР, 411 с., 1938.

В. І. Герасименко, Ю. А. Дрозд, С. І. Максименко

Задачі про екстремальне розбиття комплексної площини

О. К. Бахтін, І. В. Деніга, Л. В. Вигівська, І. Я. Дворак

Abstract. This paper is presented the development of the well-known direction of the geometric theory of the function of a complex variable, which is called «the problem of extremal decomposition of a complex plane with free poles» and arose from a deep idea of P. M. Tamrazov. In particular, we present a description of the results obtained in this direction in the Department of Complex Analysis and Potential Theory of the Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Ukraine for the period since the 2000s.

Анотація. У роботі наведено розвиток відомого напрямку геометричної теорії функції комплексної змінної, який має назву «задачі про екстремальне розбиття комплексної площини з вільними полюсами» та виник з однієї глибокої ідеї П. М. Тамразова. Зокрема, представлено опис результатів, які отримані в цьому напрямку у відділі комплексного аналізу і теорії потенціалу Інституту математики НАН України за період починаючи з 2000-х років.

1. Вступ.

В цій статті відображається роль члена-кореспондента НАН України, доктора фізико-математичних наук, професора Промарза Меліковича Тамразова в розвитку досліджень із геометричної теорії функцій комплексної змінної в Інституті математики НАН України [80–83]. Внесок Промарза Меліковича в розвиток і удосконалення різних методів геометричної теорії функцій таких, як метод екстремальних метрик, теорії квадратичних диференціалів, методу симетризації, варіаційних методів та інших добре висвітлено в оглядових статтях [1, 17, 72]. В даній статті ми зосередимо увагу на описі результатів і методів, отриманих у відділі комплексного аналізу і теорії потенціалу Інституту математики НАН України за період 2000-2020 роки (див. [2–16, 18–24, 27–36, 42, 56–63, 63–68, 71]), які були отримані у відомому напрямку геометричної теорії функцій, який виник з однієї досить глибокої ідеї П. М. Тамразова. В даний час вище вказаний напрямок геометричної теорії функцій

має назву «задачі про екстремальне розбиття комплексної площини з вільними полюсами» або «екстремальні задачі про неперетинні області з вільними полюсами».

Теорія екстремальних задач для областей, які не перетинаються, розпочинається з роботи М. О. Лаврентьєва [78], який у 1934 році, зокрема, у цій роботі поставив і розв'язав задачу про добуток конформних радіусів двох взаємно неперетинних областей. Далі, Г. М. Голузін [73] у 1951 році узагальнив постановку цієї задачі для n однозв'язних взаємно неперетинних областей і отримав повний розв'язок для $n = 3$ (див. також [76, 77]). При $n = 4$ цю задачу було розв'язано у [49] Г. В. Кузьміною. Для випадку, коли кількість взаємно неперетинних областей більша від чотирьох, в цій задачі і досі не отримано повного розв'язку. Загальну постановку екстремальних задач для однозв'язних взаємно неперетинних областей з фіксованими полюсами сформулював М. А. Лебедев [79], який розглядав задачі про максимізацію добутку конформних радіусів у деяких додатніх степенях на класах неперетинних однозв'язних областей. Однак, в кінці 60-х – на початку 70-х років минулого століття подальший прогрес у розв'язанні задач такого типу істотно призупинився.

У зв'язку з цим в 1968 році для того, щоб дати новий імпульс у розвитку даної тематики П. М. Тамразов у [83] висунув нову ідею. А саме: він запропонував розглядати такі екстремальні задачі, в яких полюси відповідних квадратичних диференціалів не фіксовані, а мають певну «свободу», причому на кратність полюсів не накладались жодні обмеження. Зокрема, у [83] наведено приклад розв'язаної екстремальної задачі для п'яти простих вільних полюсів першого порядку та запропоновано новий метод для розв'язання цієї задачі. В рамках цієї ідеї П. М. Тамразова у 1974-1975 роках, дуже несподівано на той час, в роботах Г. П. Бахтіної [25, 69, 70] було запропоновано низку екстремальних задач про неперетинні області, яким відповідають квадратичні диференціали з вільними полюсами другого порядку і отримано декілька часткових результатів в цих задачах.

Зокрема, одну з перших задач такого виду представлено Г.П. Бахтіною у її дисертації в 1974 р. [25], яка полягала у наступному: знайти максимум функціонала

$$\prod_{k=1}^n R(B_k, a_k), \quad (1.1)$$

де $\{B_k\}_{k=1}^n$ – довільна система однозв'язних взаємно неперетинних симетричних областей така, що $a_k \in B_k \subset \mathbb{C}$, $|a_k| = 1$, $k = \overline{1, n}$, де $R(B, a)$ – конформний радіус однозв'язної області B відносно внутрішньої точки a .

Зокрема, в роботі було одержано наступну оцінку

$$\prod_{k=1}^4 R(B_k, a_k) \leq 1,$$

причому рівність досягається коли система областей $\{B_k\}_{k=1}^4$ і точок $\{a_k\}_{k=1}^4$, відповідно, є круговими областями і полюсами квадратичного диференціала

$$Q(z)dz^2 = -\frac{z^2}{(z^4 - 1)^2} dz^2.$$

В. М. Дубінін [37–41] істотно узагальнив постановку Г. П. Бахтіної у наступному сенсі, а саме: він розглянув задачу про максимізацію функціонала (1.1) для внутрішніх радіусів і довільних багатозв'язних областей (які, взагалі кажучи, не обов'язково симетричні відносно одиничного кола) і розв'язав цю задачу завдяки створеному ним новому методу дослідження, який має симетризаційну природу, а саме завдяки методу розділяючого перетворення. Стосовно методу симетризації див. [84].

Суть цього метода полягає в тому, що він дозволяє зводити задачу з великим числом полюсів до декількох задач з меншим числом полюсів. І, зокрема, у [37] в 1978 році отримано такий результат.

Теорема 1.1. *Для довільних попарно різних точок $\{a_k\}_{k=1}^n$, $n \geq 2$, які лежать на колі $|z| = 1$ (і занумеровані в порядку зростання аргументів точок), та довільних попарно неперетинних областей $\{D_k\}_{k=1}^n$, таких, що $a_k \in D_k \subset \overline{\mathbb{C}}$, $k = \overline{1, n}$, виконується нерівність*

$$\prod_{k=1}^n r(D_k, a_k) \leq \left(\frac{4}{n}\right)^n,$$

де $r(D, a)$ – внутрішній радіус області D відносно точки a .

Знак рівності досягається коли області $\{D_k\}_{k=1}^n$ і точки $\{a_k\}_{k=1}^n$, є, відповідно, круговими областями і полюсами квадратичного диференціала

$$Q(w)dw^2 = -\frac{w^{n-2}}{(w^n - 1)^2} dw^2.$$

В 1984 р. Г. П. Бахтіна у [26] розглянула наступну задачу про максимум функціонала

$$\prod_{k=0}^n R^{\alpha_k}(B_k, a_k), \quad (1.2)$$

де $\{B_k\}_{k=0}^n$ – довільна система однозв’язних взаємно неперетинних областей, причому області $\{B_k\}_{k=1}^n$ симетричні відносно одиничного кола, такі, що $a_0 = 0 \in B_0 \subset U$, $a_k \in B_k \subset \mathbb{C}$, $\alpha_k \geq 0$, $k = \overline{0, n}$, $|a_k| = 1$, $k = \overline{1, n}$, і отримала деякі часткові результати в даній проблемі.

Пізніше, Є. Г. Ємельянов [43–46], а потім і Г. В. Кузьміна [49–53] розглянули задачі, у яких вільні полюси розташовані на двох колах.

У 1994 році В. М. Дубінін у [39] розглянув наступні задачі.

Задача 1.2. Довести, що максимум функціонала

$$I_n(\gamma) = r^\gamma(B_0, 0) \prod_{k=1}^n r(B_k, a_k),$$

де B_0, B_1, \dots, B_n , ($n \geq 2$) – попарно неперетинні області в $\overline{\mathbb{C}}$ такі, що $0 \in B_0 \subset \overline{\mathbb{C}}$, $a_k \in B_k \subset \overline{\mathbb{C}}$, $|a_k| = 1$, $k = \overline{1, n}$, $r(B_j, a_j)$ – внутрішній радіус області B_j відносно точки a_j ($a_j \in B_j$), $j = \overline{0, n}$ і $0 < \gamma \leq n$ досягається для деякої конфігурації областей, які мають n -кратну симетрію.

Задача 1.3. Для кожного фіксованого $\gamma \in (0, n]$ знайти максимум функціонала

$$J_n(\gamma) = r^\gamma(B_0, 0) \prod_{k=1}^n r(B_k, a_k)$$

за умови, що $B_0, B_1, B_2, \dots, B_n$, ($n \geq 2$), – попарно неперетинні багатозв’язні області в $\overline{\mathbb{C}}$, причому області B_1, B_2, \dots, B_n , ($n \geq 2$), симетричні відносно точок одиничного кола, $0 \in B_0 \subset \overline{\mathbb{C}}$, $a_k \in B_k \subset \overline{\mathbb{C}}$, $|a_k| = 1$, $k = \overline{1, n}$, ($a_k \in B_k$), $k = \overline{0, n}$.

Задача 1.4. При всіх значеннях параметра $\gamma \in \mathbb{R}^+$ показати, що максимум функціонала

$$Y_n(\gamma) = [r(B_0, 0) r(B_\infty, \infty)]^\gamma \prod_{k=1}^n r(B_k, a_k),$$

де $\{a_k\}_{k=1}^n$ – довільна система попарно різних точок одиничного кола, $B_0, B_\infty, \{B_k\}_{k=1}^n$ – сукупність областей, які взаємно не перетинаються, причому $0 \in B_0 \subset \overline{\mathbb{C}}$, $a_k \in B_k \subset \overline{\mathbb{C}}$, $k = \overline{1, n}$, $\infty \in B_\infty \subset \overline{\mathbb{C}}$, досягається для деякої конфігурації із областей B_k, B_∞ і точок a_k, ∞ , $k = \overline{0, n}$, які володіють n -кратною симетрією.

Таким чином, ідея П. М. Тамразова стимулювала виникнення нового напрямку геометричної теорії функцій комплексної змінної. В подальших підпунктах даної статті представлено прогрес у розвитку цього напрямку, починаючи з початку 2000 років по даний час [18, 28, 54, 55, 61, 62, 66].

Наведемо основні означення і позначення.

Нехай \mathbb{N} – множина натуральних чисел, \mathbb{R} – множина дійсних чисел, \mathbb{C} – площина комплексних чисел, $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ – її одноточкова компактифікація, $\mathbb{R}^+ = (0, +\infty)$, $\chi(t) = \frac{1}{2}(t + t^{-1})$ – функція Жуковського.

Нехай $B \subset \overline{\mathbb{C}}$ – однозв'язна область,

$$U = \{z : |z| < 1\}$$

– одиничний круг і $a \in B$. Згідно із теоремою Рімана про відображення, існує конформне відображення області B на одиничний круг U при якому $f(a) = 0$, $f'(a) > 0$. Якщо розглянути обернене відображення φ , яке здійснює відображення одиничного круга U на область B так, що $\varphi(0) = a$. Тоді поняття конформного радіуса однозв'язної області $B \subset \overline{\mathbb{C}}$ відносно точки $a \in B$ визначається наступним чином:

$$R(B, a) = \frac{1}{|f'(a)|} = |\varphi'(0)|.$$

Узагальненням поняття конформного радіуса для багатозв'язних областей є поняття внутрішнього радіуса області, який визначається за допомогою узагальненої функції Гріна.

Нехай $B \subset \overline{\mathbb{C}}$, $B \neq \overline{\mathbb{C}}$. Функцією Гріна області B називається така дійсна функція $g_B(z, a)$, яка визначена при всіх $z, a \in B$, $z \neq a$ та при кожному фіксованому $a \in B$ виконуються наступні умови:

- (1) функція $g_B(z, a)$ за змінною z є гармонійною в області $B \setminus \{a\}$;
- (2) якщо $z \rightarrow a$, то $g_B(z, a) \rightarrow +\infty$, при цьому різниця $g_B(z, a) - \ln \frac{1}{|z-a|}$ залишається обмеженою для скінченного a , різниця $g_B(z, a) - \ln |z|$ обмежена для $a = \infty$;
- (3) при наближенні до границі ∂B функція $g_B(z, a)$ прямує до 0.

Довільну область $B \subset \overline{\mathbb{C}}$ завжди можна вичерпати послідовністю областей $B_1 \subset B_2 \subset \dots$, для кожної з яких існує функція Гріна. Тоді за теоремою Харнака про зростаючі послідовності гармонічних функцій випливає, що для кожної точки $a \in B \setminus \{\infty\}$ послідовність гармонічних функцій

$$h_{B_k, a}(z) := g_{B_k}(z, a) - \ln \frac{1}{|z-a|}, \quad z \in B \setminus \{a\},$$

визначена за неперервністю в точці a та рівномірно збігається на компактних підмножинах області B при $k \rightarrow \infty$ або до $+\infty$ або до деякої гармонічної функції $h_{B, a}(z)$, яка не залежить від вибору областей B_1, B_2, \dots . У цьому випадку функція

$$g_B(z, a) := h_{B, a}(z) + \ln \frac{1}{|z-a|}$$

називається узагальненою функцією Гріна області B , а величина

$$r(B, a) := \exp(h_{B,a}(a))$$

називається *внутрішнім радіусом* області B відносно точки a . Все сказане вище має місце і для $w = \infty$:

$$h_{B_k, \infty}(z) := g_{B_k}(z, \infty) - \ln |z|.$$

Таким чином,

$$\begin{aligned} g_B(z, a) &= \ln \frac{1}{|z - a|} + \ln r(B, a) + o(1), \quad z \rightarrow a, \\ g_B(z, \infty) &= \ln |z| + \ln r(B, \infty) + o(1), \quad z \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Нехай $n, m \in \mathbb{N}$. Систему точок

$$A_{n,m} := \{a_{k,p} \in \mathbb{C} : k = \overline{1, n}, p = \overline{1, m}\}$$

будемо називати (n, m) -променевою, якщо при всіх $k = \overline{1, n}$ і $p = \overline{1, m}$ виконуються співвідношення:

- $0 < |a_{k,1}| < \dots < |a_{k,m}| < \infty$;
- $\arg a_{k,1} = \arg a_{k,2} = \dots = \arg a_{k,m} =: \theta_k$;
- $0 = \theta_1 < \theta_2 < \dots < \theta_n < \theta_{n+1} := 2\pi$.

У випадку $m = 1$, $(n, 1)$ -променевою системою точок будемо називати n -променевою і розглянемо більш прості позначення:

$$a_{k,1} := a_k, k = \overline{1, n}, \quad A_{n,1} := A_n, \quad a_{n+1} := a_1, \quad a_0 := a_n.$$

Величини

$$\begin{aligned} \alpha_k &:= \alpha_k(A_{n,m}) := \frac{1}{\pi} [\theta_{k+1} - \theta_k], \quad (k = \overline{1, n}), \\ \alpha_{n+1} &:= \alpha_1, \\ \alpha_0 &:= \alpha_n := \frac{1}{\pi} [2\pi - \theta_n], \end{aligned}$$

будемо називати *кутовими параметрами* (n, m) -променевої системи точок $A_{n,m}$. Очевидно, що $\sum_{k=1}^n \alpha_k(A_{n,m}) = 2$. Якщо (n, m) -променевою система точок $A_{n,m}$ має властивість $\alpha_k(A_{n,m}) = \frac{2}{n}$, $k = \overline{1, n}$, то її будемо називати *рівнопроменевою*. Величини $\{\mu_k(R)\}_{k=1}^n \subset \mathbb{R}^+$ при заданому R – коефіцієнти зміщення системи $A_{n,m}$, причому, $\mu_k(R) \leq m^{-2m}$, $R \in \mathbb{R}^+$.

Для фіксованого $R \in \mathbb{R}^+$ і будь-якої (n, m) -променевої системи точок $A_{n,m}$ введемо наступний «керуючий» функціонал:

$$L_R(A_{n,m}) := \prod_{k=1}^n \prod_{p=1}^m \left[\chi \left(\left| \frac{a_{k,p}}{R} \right|^{\frac{1}{\alpha_k}} \right) \cdot \chi \left(\left| \frac{a_{k,p}}{R} \right|^{\frac{1}{\alpha_{k-1}}} \right) \right]^{\frac{1}{2}} \cdot |a_{k,p}|.$$

Очевидно, що $L_1(A_{n,m}) = L(A_{n,m})$. Крім того,

$$L_R(A_{n,m}) = R^{mn} \cdot L \left(\frac{1}{R} \cdot A_{n,m} \right).$$

Для довільної n -променевої системи точок $A_n = \{a_k\}_{k=1}^n$ та числа $\gamma \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ введемо «керуючий» функціонал:

$$\mathcal{N}^{(\gamma)}(A_n) := \prod_{k=1}^n \left[\chi \left(\left| \frac{a_k}{a_{k+1}} \right|^{\frac{1}{2\alpha_k}} \right) \right]^{1-\frac{1}{2}\gamma\alpha_k^2} \prod_{k=1}^n |a_k|^{1+\frac{1}{4}\gamma(\alpha_k+\alpha_{k-1})}.$$

Клас n -променевих систем точок для яких справедлива рівність

$$\mathcal{N}^{(\gamma)}(A_n) = 1$$

автоматично включає всі системи n попарно різних точок, що розміщені на одиничному колі.

Нехай

$$P_k = P_k(A_n) := \{w : \arg a_k < \arg w < \arg a_{k+1}\},$$

$$a_{n+1} := a_1, \quad \alpha_k := \frac{1}{\pi} \arg \frac{a_{k+1}}{a_k}, \quad \alpha_{n+1} := \alpha_1,$$

$$k = \overline{1, n}, \quad \sum_{k=1}^n \alpha_k = 2.$$

Надалі позначимо $\chi(t) = \frac{1}{2}(t + t^{-1})$.

Для довільної системи попарно різних точок

$$A_n := \{a_k : |a_k| = 1, k = \overline{0, n}\}$$

і для відкритої множини D , $A_n \cup \{0\} \subset D$, позначимо через $D(a_k)$ зв'язну компоненту множини D , яка містить точку a_k , $k = \overline{0, n}$.

Нехай $D_k(0)$ – зв'язна компонента множини $D(0) \cap \overline{P}_k$, яка містить точку 0 , $D_k(a_k)$ – зв'язна компонента множини $D(a_k) \cap \overline{P}_k$, яка містить точку a_k , $D_k(a_{k+1})$ – зв'язна компонента множини $D(a_{k+1}) \cap \overline{P}_k$, яка містить точку a_{k+1} , для кожного $k = \overline{1, n}$, $a_{n+1} := a_1$.

Відкрита множина D , $A_n \cup \{0\} \subset D$, задовольняє умову *неналяганья* відносно системи точок $A_n = \{a_k\}_{k=1}^n$, $|a_k| = 1$, якщо справедлива рівність

$$[D_k(0) \cap D_k(a_k)] \cup [D_k(0) \cap D_k(a_{k+1})] \cup [D_k(a_k) \cap D_k(a_{k+1})] = \emptyset,$$

$$1 \leq k \leq n.$$

Система областей $\{D_k\}_{k=0}^n$ задовольняє умову *часткового налягання* відносно заданої системи точок одиничного кола, якщо відкрита множина $D = \cup_{k=0}^n D_k$ задовольняє умову *неналягання* відносно системи точок цього ж кола.

Одним із основних понять у даній роботі є поняття квадратичного диференціалу. Нехай B – область розширеної комплексної площини $\overline{\mathbb{C}}_z$. Під квадратичним диференціалом в B будемо розуміти символ

$$Q(z)dz^2, \tag{1.3}$$

де $Q(z)$ – функція, мероморфна в B . Якщо область $D \subset \overline{\mathbb{C}}_w$ конформно еквівалентна області B і відображення $\varphi : D \rightarrow B$ конформне та одностороннє, то будемо говорити, що квадратичний диференціал (1.3) породжує в області D за допомогою функції φ квадратичний диференціал $Q(w)dw^2 = Q(\varphi(w))(\varphi'(w))^2 dw^2$.

Скінчена точка $z_0 \in B$ називається *нулем* або *полосом* порядку n диференціала (1.3), якщо вона є відповідно нулем або полюсом функції $Q(z)$.

Нулі і полюси квадратичного диференціала (1.3) називаються його *критичними* точками, причому нулі і прості полюси називаються *скінченними* критичними точками.

Максимальна регулярна крива $z(t)$, на якій

$$Q(z)dz^2 \equiv Q(z(t))(z'(t))^2 dt^2 > 0$$

(відповідно $Q(z)dz^2 < 0$), називається *траєкторією* (відповідно *ортogonalною* траєкторією) диференціала (1.3). При конформному односторонньому відображенні траєкторії переходять у траєкторії.

Кругова область G для $Q(z)dz^2$ містить єдиний подвійний полюс a диференціала $Q(z)dz^2$ і $G \setminus \{a\}$ заповнена траєкторіями $Q(z)dz^2$, кожна із яких є замкнутою жордановою кривою, яка відділяє точку a від границі G . При певному виборі чисто уявної сталої τ функція

$$w = \exp \left\{ \tau \int (Q(z))^{\frac{1}{2}} dz \right\},$$

доозначена значенням нуль в точці a , конформно відображає G на круг $|w| < r$, причому точка a переходить в точку $w = 0$. В цілому теорія квадратичних диференціалів досить добре розроблена (див. [74]).

Нехай $\mathbb{C}^n = \underbrace{(\mathbb{C} \times \mathbb{C} \times \dots \times \mathbb{C})}_{n\text{-разів}}$, $n \in \mathbb{N}$ – n -вимірний комплексний простір,

$\overline{\mathbb{C}}^n = \underbrace{(\overline{\mathbb{C}} \times \overline{\mathbb{C}} \times \dots \times \overline{\mathbb{C}})}_{n\text{-разів}}$ – компактифікація простору \mathbb{C}^n , де множина нескінченно віддалених точок має комплексну розмірність $n - 1$.

Нехай $[D]^n$ – (декартовий степінь області $D \subset \overline{\mathbb{C}}$) позначає декартовий добуток $\underbrace{D \times D \times \dots \times D}_{n\text{-разів}}$, $[d]^n$ – (декартовий степінь точки $d \in \overline{\mathbb{C}}$) позначає точку $s \in \overline{\mathbb{C}}^n$, яка має координат $\underbrace{(d, \dots, d)}_{n\text{-разів}}$. Ясно, що $\mathbb{C}^1 = \mathbb{C}$, $\overline{\mathbb{C}}^1 = \overline{\mathbb{C}}$.

Область

$$\mathbb{B} = B_1 \times B_2 \times \dots \times B_n \subset \overline{\mathbb{C}}^n,$$

де кожна область $B_k \subset \overline{\mathbb{C}}$, $k = \overline{1, n}$, називається *поліциліндричною областю* в $\overline{\mathbb{C}}^n$ (див., наприклад, [85, Ч.ІІ]). Области B_k , $k = \overline{1, n}$, назвемо координатними областями області \mathbb{B} .

Узагальненим внутрішнім радіусом поліциліндричної області \mathbb{B} відносно точки $\Omega = (\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n) \in \mathbb{B}$, $\omega_k \in B_k$, $k = \overline{1, n}$ будемо називати величину

$$R(\mathbb{B}, \Omega) := \prod_{k=1}^n r(B_k, \omega_k), \quad (1.4)$$

де величини $r(B_k, \omega_k)$, $k = \overline{1, n}$ позначають внутрішні радіуси координатних областей B_k відносно ω_k .

Для $n = 1$ величина (1.4) є звичайним внутрішнім радіусом області $\mathbb{B} \subset \overline{\mathbb{C}}$ відносно Ω .

Нехай $\mathbb{U}^n = [U]^n$, де $U = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ (одиничний круг в комплексній площині \mathbb{C}). Позначимо через Γ_n множину точок

$$\Omega = (\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n) \subset \mathbb{C}^n,$$

$$|\omega_s| = 1, \quad s = \overline{1, n}.$$

Система $\{\mathbb{B}_k\}_{k=1}^m$ $\left(\mathbb{B}_k = B_1^{(k)} \times \dots \times B_n^{(k)}, \quad k = \overline{1, m}\right)$ називається *системою поліциліндричних неперетинних областей*, якщо для кожного фіксованого p_0 , $p_0 = \overline{1, n}$, система областей $\{B_{p_0}^{(k)}\}$, $k = \overline{1, m}$ є системою неперетинних областей на $\overline{\mathbb{C}}$.

Систему точок $\{\mathbb{A}_k\}_{k=1}^m$

$$\left(\mathbb{A}_k = \left(a_1^{(k)}, a_2^{(k)}, \dots, a_n^{(k)}\right) \in \mathbb{C}^n, \quad k = \overline{1, m}\right),$$

назвемо *променевою* в просторі \mathbb{C}^n , якщо для кожного фіксованого p_0 послідовність $\{a_{p_0}^{(k)}\}$, $k = \overline{1, m}$, є m -променевою системою точок на відповідній комплексній площині \mathbb{C} .

В роботах [62, 66] були узагальнені наведені вище задачі, а саме, розглядались функціонали трьох типів. Функціоналами першого типу назвемо функціонали виду

$$J_{n,m}(\gamma) = r^{\gamma_0}(D, 0) \prod_{k=1}^n \prod_{p=1}^m r^{\gamma_{k,p}}(D, a_{k,p}),$$

де $\gamma_0, \gamma_{k,p} \in \mathbb{R}^+$, $k = \overline{1, n}$, $p = \overline{1, m}$, $A_{n,m} = \{a_{k,p}\}$ – (n, m) -променева система точок, D – відкрита множина $A_{n,m} \subset D \subset \overline{\mathbb{C}}$, $0 \in D$.

Функціоналами другого типу назвемо функціонали виду

$$J_{n,m}(\gamma) = r^{\gamma_\infty}(D, \infty) \prod_{k=1}^n \prod_{p=1}^m r^{\gamma_{k,p}}(D, a_{k,p}),$$

де $\gamma_\infty, \gamma_{k,p} \in \mathbb{R}^+$, $k = \overline{1, n}$, $p = \overline{1, m}$, $A_{n,m} = \{a_{k,p}\}$ – (n, m) -променева система точок, D – відкрита множина $A_{n,m} \subset D \subset \overline{\mathbb{C}}$, $\infty \in D$.

Функціоналами третього типу назвемо функціонали виду

$$J_{n,m}(\gamma) = r^{\gamma_0}(D, 0) r^{\gamma_\infty}(D, \infty) \prod_{k=1}^n \prod_{p=1}^m r^{\gamma_{k,p}}(D, a_{k,p}),$$

де $\gamma_0, \gamma_\infty, \gamma_{k,p} \in \mathbb{R}^+$, $k = \overline{1, n}$, $p = \overline{1, m}$, $A_{n,m} = \{a_{k,p}\}$ – (n, m) -променева система точок, D – відкрита множина $A_{n,m} \subset D \subset \overline{\mathbb{C}}$, $0 \in D$, $\infty \in D$.

Внутрішнім радіусом $r(D, a)$ відкритої множини D відносно точки a називається внутрішній радіус зв'язної компоненти $D(a)$ даної множини відносно точки a .

Якщо $\gamma_0 = 0$, то функціонал першого типу набуде такого вигляду

$$J_{n,m}(0) = \prod_{k=1}^n \prod_{p=1}^m r^{\gamma_{k,p}}(D, a_{k,p}).$$

Задачі, в яких ставиться питання про знаходження точних оцінок зверху функціоналів першого (відповідно другого чи третього) типу, будемо називати задачами першого (відповідно другого чи третього) типу.

2. ДОСЛІДЖЕННЯ ЗАДАЧ ПЕРШОГО ТИПУ

В цьому розділі розглядається наступна задача першого типу.

Задача 1. Для кожного фіксованого $\gamma \in (0, nm]$ знайти максимум функціонала

$$I_{n,m}(\gamma) = r^\gamma(B_0, 0) \prod_{k=1}^n \prod_{p=1}^m r(B_{k,p}, a_{k,p}), \quad (2.1)$$

та описати екстремалі, де $n, m \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, $A_{n,m} = \{a_{k,p}\}$, $k = \overline{1, n}$, $p = \overline{1, m}$, – довільна фіксована (n, m) -променева система точок, $B_0, B_{k,p}$ – довільна система областей, що взаємно не перетинаються, таких, що $a_0 = 0 \in B_0 \subset \overline{\mathbb{C}}$, $a_{k,p} \in B_{k,p} \subset \overline{\mathbb{C}}$ при $k = \overline{1, n}$, $p = \overline{1, m}$.

Відмітимо, що задача 1 в загальній постановці окрім деяких часткових випадків на даний момент не піддається точному розв'язанню. Зокрема, при $\gamma = 0$, при $\gamma = \frac{n^2}{4}$ і довільній (n, m) -рівнопроменевої системі точок, при $m = 1$ та деяких γ цю задачу розв'язано у роботі [62]. Оскільки на даний момент сучасні методи не дозволяють розв'язати цю задачу для переважної більшості значень параметру γ , то виникає очевидне питання: вказати досить «хороші», в деякому сенсі, оцінки зверху даного функціоналу при будь-яких допустимих значень параметру γ .

У роботах [8, 10, 12, 13] запропоновано метод, за допомогою якого, для функціонала (2.1) знайдено оцінки зверху у вигляді деякої еволюційної нерівності. А саме, має місце таке твердження.

Теорема 2.1 ([13]). *Нехай $n, m \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, $\gamma \in (0, nm]$. Тоді для довільної фіксованої (n, m) -променевої системи точок $A_{n,m} = \{a_{k,p}\}$, $k = \overline{1, n}$, $p = \overline{1, m}$, і довільного набору областей, що взаємно не перетинаються $B_0, \{B_{k,p}\}$, $a_0 = 0 \in B_0 \subset \overline{\mathbb{C}}$, $a_{k,p} \in B_{k,p} \subset \overline{\mathbb{C}}$, $k = \overline{1, n}$, $p = \overline{1, m}$, справедлива нерівність*

$$I_{n,m}(\gamma) \leq (nm)^{-\frac{\gamma}{2}} (I_{n,m}(0))^{1-\frac{\gamma}{nm}} \left(\prod_{k=1}^n \prod_{p=1}^m |a_{k,p}| \right)^{\frac{2\gamma}{nm}}, \quad (2.2)$$

де

$$I_{n,m}(0) = \prod_{k=1}^n \prod_{p=1}^m r(B_{k,p}, a_{k,p}).$$

Якщо в формулі (2.2) покласти $\gamma = nm$ і $\prod_{k=1}^n \prod_{p=1}^m |a_{k,p}| = \rho$, то за умов теореми 2.1, має місце наступне співвідношення

$$r^{nm}(B_0, 0) \prod_{k=1}^n \prod_{p=1}^m r(B_{k,p}, a_{k,p}) \leq (nm)^{-\frac{nm}{2}} \cdot \rho^2. \quad (2.3)$$

Відмітимо, що в нерівності (2.3) за умов $\gamma = nm$ і $\prod_{k=1}^n \prod_{p=1}^m |a_{k,p}| = \rho$ структура точок і областей є не важливою.

Отримана вище еволюційна нерівність (2.2) є дуже цікавою нерівністю, яка раніше не була відома. Якщо в (2.3) покласти $m = n = 1$, тоді ця нерівність співпадає з відомою нерівністю М. О. Лаврентьєва. Таким чином, нерівність (2.3) є узагальненням теореми М. О. Лаврентьєва.

Використовуючи нерівність, доведену у роботі [62], а саме

$$I_{n,m}(0) \leq 2^{nm} \left(\prod_{k=1}^n \alpha_k \right)^m \left(\prod_{k=1}^n \mu_k(R) \right)^{\frac{1}{2}} \cdot L_R(A_{n,m})$$

та нерівність (2.2) отримаємо нерівність з «плаваючою» мажорантою (величини α_k , $\mu_k(R)$, $L_R(A_{n,m})$ введені раніше).

Теорема 2.2 ([13]). *Нехай $n, m \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, $\gamma \in (0, nm]$, $R \in \mathbb{R}^+$. Тоді для довільної фіксованої (n, m) -променевої системи точок*

$$A_{n,m} = \{a_{k,p}\}, \quad k = \overline{1, n}, \quad p = \overline{1, m},$$

та довільного набору областей, які попарно не перетинаються, B_0 , $\{B_{k,p}\}$, $a_0 = 0 \in B_0 \subset \overline{\mathbb{C}}$, $a_{k,p} \in B_{k,p} \subset \overline{\mathbb{C}}$, $k = \overline{1, n}$, $p = \overline{1, m}$, справедлива нерівність

$$\begin{aligned} r^\gamma(B_0, 0) \prod_{k=1}^n \prod_{p=1}^m r(B_{k,p}, a_{k,p}) &\leq (nm)^{-\frac{\gamma}{2}} \times \\ &\times \left(2^{nm} \cdot \left(\prod_{k=1}^n \alpha_k \right)^m \cdot \left(\prod_{k=1}^n \mu_k(R) \right)^{\frac{1}{2}} \cdot L_R(A_{n,m}) \right)^{1 - \frac{\gamma}{nm}} \times \\ &\times \left(\prod_{k=1}^n \prod_{p=1}^m |a_{k,p}| \right)^{\frac{2\gamma}{nm}}. \end{aligned} \tag{2.4}$$

Якщо у формулі (2.4) теореми 2.2 використати нерівності, отримані в [62], а саме: $\prod_{k=1}^n \alpha_k \leq \left(\frac{2}{n}\right)^n$, $\mu_k(R) \leq m^{-2m}$, то в якості наслідку отримаємо наступне твердження.

Теорема 2.3. [13] *Нехай $n, m \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, $\gamma \in (0, nm]$, $R \in \mathbb{R}^+$. Тоді для довільної фіксованої (n, m) -променевої системи точок $A_{n,m} = \{a_{k,p}\}$, $k = \overline{1, n}$, $p = \overline{1, m}$, і довільного набору областей, що взаємно не перетинаються, B_0 , $\{B_{k,p}\}$, $a_0 = 0 \in B_0 \subset \overline{\mathbb{C}}$, $a_{k,p} \in B_{k,p} \subset \overline{\mathbb{C}}$, $k = \overline{1, n}$,*

$p = \overline{1, m}$, справедлива нерівність

$$\begin{aligned} r^\gamma(B_0, 0) \prod_{k=1}^n \prod_{p=1}^m r(B_{k,p}, a_{k,p}) &\leq \\ &\leq \frac{4^{nm-\gamma} \cdot (L_R(A_{n,m}))^{1-\frac{\gamma}{nm}}}{nm^{nm-\frac{\gamma}{2}}} \cdot \left(\prod_{k=1}^n \prod_{p=1}^m |a_{k,p}| \right)^{\frac{2\gamma}{nm}} \end{aligned} \quad (2.5)$$

Використовуючи попередні теореми і розглядаючи ті (n, m) -променеві системи точок $A_{n,m}$, для яких $L_R(A_{n,m}) = 1$, ми отримуємо оцінку зверху у деякій задачі з вільними полюсами. А саме, справедливе твердження.

Теорема 2.4 ([13]). *Нехай $n, m \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, $\gamma \in (0, nm]$, $R \in \mathbb{R}^+$. Тоді для довільної (n, m) -променевої системи точок $A_{n,m} = \{a_{k,p}\}$, $k = \overline{1, n}$, $p = \overline{1, m}$, такої, що $L_R(A_{n,m}) = 1$ і довільного набору областей B_0 , $\{B_{k,p}\}$ що взаємно не перетинаються і таких, що $a_0 = 0 \in B_0 \subset \overline{\mathbb{C}}$, $a_{k,p} \in B_{k,p} \subset \overline{\mathbb{C}}$, $k = \overline{1, n}$, $p = \overline{1, m}$, справедлива нерівність*

$$\begin{aligned} r^\gamma(B_0, 0) \prod_{k=1}^n \prod_{p=1}^m r(B_{k,p}, a_{k,p}) &\leq \\ &\leq (nm)^{-\frac{\gamma}{2}} \left(2^{nm} \cdot \left(\prod_{k=1}^n \alpha_k \right)^m \cdot \left(\prod_{k=1}^n \mu_k(R) \right)^{\frac{1}{2}} \right)^{1-\frac{\gamma}{nm}} \end{aligned} \quad (2.6)$$

Знову використаємо нерівності $\prod_{k=1}^n \alpha_k \leq \left(\frac{2}{n}\right)^n$, $\mu_k(R) \leq m^{-2m}$ і в якості наслідку отримуємо таке твердження.

Теорема 2.5 ([13]). *Нехай $n, m \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, $\gamma \in (0, nm]$, $R \in \mathbb{R}^+$. Тоді для довільної (n, m) -променевої системи точок $A_{n,m} = \{a_{k,p}\}$, $k = \overline{1, n}$, $p = \overline{1, m}$, такої, що $L_R(A_{n,m}) = 1$ і довільного набору областей B_0 , $\{B_{k,p}\}$, що взаємно не перетинаються і таких, що $a_0 = 0 \in B_0 \subset \overline{\mathbb{C}}$, $a_{k,p} \in B_{k,p} \subset \overline{\mathbb{C}}$, $k = \overline{1, n}$, $p = \overline{1, m}$, справедлива нерівність*

$$r^\gamma(B_0, 0) \prod_{k=1}^n \prod_{p=1}^m r(B_{k,p}, a_{k,p}) \leq \frac{4^{nm-\gamma}}{nm^{nm-\frac{\gamma}{2}}}. \quad (2.7)$$

При $m = 1$ із вище вказаних теорем, отримуємо наступні результати.

Теорема 2.6 ([8]). *Нехай $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, $\gamma \in (0, n]$. Тоді для будь-якої фіксованої системи попарно різних точок $\{a_k\}_{k=1}^n \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ та будь-*

яких областей $\{B_k\}_{k=0}^n$, які взаємно не перетинаються і $a_k \in B_k \subset \overline{\mathbb{C}}$, $k = \overline{0, n}$, $a_0 = 0$, справедлива нерівність

$$I_n(\gamma) \leq n^{-\frac{\gamma}{2}} (I_n(0))^{1-\frac{\gamma}{n}} \left(\prod_{k=1}^n |a_k| \right)^{\frac{2\gamma}{n}}, \quad (2.8)$$

де $I_n(0) = \prod_{k=1}^n r(B_k, a_k)$.

Якщо $\gamma = n$ та $\prod_{k=1}^n |a_k| = 1$, тоді із вище сформульованої теореми 2.6, маємо нерівність

$$r^n(B_0, 0) \prod_{k=1}^n r(B_k, a_k) \leq n^{-\frac{n}{2}}.$$

В теоремі 2.6 за умов $\gamma = n$ і $\prod_{k=1}^n |a_k| = \rho^n$, маємо нерівність

$$r^n(B_0, 0) \prod_{k=1}^n r(B_k, a_k) \leq n^{-\frac{n}{2}} \rho^{2n}.$$

Нерівність (2.8), а також перераховані наслідки при $\gamma = n$ є суттєвим узагальненням відомої теореми М. О. Лаврентьєва і раніше не були відомі.

У випадку вільних полюсів, тобто коли система точок $A_n = \{a_k\}_{k=1}^n$ є n -променевою системою точок такою, що $\mathcal{N}^{(\gamma)}(A_n) = 1$, з теореми 2.6 випливає наступне твердження, яке є новим.

Теорема 2.7 ([8]). *Нехай $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, $\gamma \in (0, n]$. Тоді для довільної n -променевої системи точок $A_n = \{a_k\}_{k=1}^n$ такої, що $\mathcal{N}^{(\gamma)}(A_n) = 1$ і довільного набору областей $\{B_k\}_{k=0}^n$, що взаємно не перетинаються, $a_k \in B_k \subset \overline{\mathbb{C}}$, $k = \overline{0, n}$, $a_0 = 0$, справедлива нерівність*

$$r^\gamma(B_0, 0) \prod_{k=1}^n r(B_k, a_k) \leq n^{-\frac{\gamma}{2}} \cdot (I_n(0))^{1-\frac{\gamma}{n}} \left(\prod_{k=1}^n |a_k| \right)^{\frac{2\gamma}{n}}. \quad (2.9)$$

Якщо на вільні полюси, які розглядаються у теоремі 2.7 накласти додаткове обмеження, а саме $\mathcal{N}^{(0)}(A_n) = 1$, то справедливе таке твердження.

Теорема 2.8 ([8]). *Нехай $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, $\gamma \in (0, n]$. Тоді для довільної n -променевої системи точок $A_n = \{a_k\}_{k=1}^n$ такої, що*

$$\mathcal{N}^{(\gamma)}(A_n) = \mathcal{N}^{(0)}(A_n) = 1$$

і довільного набору областей $\{B_k\}_{k=0}^n$, що взаємно не перетинаються, $a_k \in B_k \subset \overline{\mathbb{C}}$, $k = \overline{0, n}$, $a_0 = 0$, справедлива нерівність

$$r^\gamma(B_0, 0) \prod_{k=1}^n r(B_k, a_k) \leq n^{-\frac{\gamma}{2}} \cdot (I_n(0))^{1-\frac{\gamma}{n}}. \quad (2.10)$$

Використовуючи результат роботи [62], а саме, що то за умов теореми 2.7 виконується нерівність

$$I_n(0) = \prod_{k=1}^n r(B_k, a_k) \leq 2^n \prod_{k=1}^n \alpha_k,$$

отримаємо такий результат.

Теорема 2.9 ([8]). *Нехай $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, $\gamma \in (0, n]$. Тоді для довільної n -променевої системи точок $A_n = \{a_k\}_{k=1}^n$ такої, що*

$$\mathcal{N}^{(\gamma)}(A_n) = \mathcal{N}^{(0)}(A_n) = 1$$

і довільного набору областей $\{B_k\}_{k=0}^n$, що взаємно не перетинаються, $a_k \in B_k \subset \overline{\mathbb{C}}$, $k = \overline{0, n}$, $a_0 = 0$, справедлива нерівність

$$r^\gamma(B_0, 0) \prod_{k=1}^n r(B_k, a_k) \leq n^{-\frac{\gamma}{2}} \cdot 2^{n-\gamma} \left(\prod_{k=1}^n \alpha_k \right)^{1-\frac{\gamma}{n}}. \quad (2.11)$$

Якщо використати нерівність $\prod_{k=1}^n \alpha_k \leq \left(\frac{2}{n}\right)^n$, то отримаємо наступний результат.

Теорема 2.10 ([8]). *Нехай $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, $\gamma \in (0, n]$. Тоді для довільної n -променевої системи точок $A_n = \{a_k\}_{k=1}^n$ такої, що*

$$\mathcal{N}^{(\gamma)}(A_n) = \mathcal{N}^{(0)}(A_n) = 1$$

і довільного набору областей $\{B_k\}_{k=0}^n$, що взаємно не перетинаються, $a_k \in B_k \subset \overline{\mathbb{C}}$, $k = \overline{0, n}$, $a_0 = 0$, справедлива нерівність

$$r^\gamma(B_0, 0) \prod_{k=1}^n r(B_k, a_k) \leq n^{-\frac{\gamma}{2}} \cdot \left(\frac{4}{n}\right)^{n-\gamma}. \quad (2.12)$$

Вище згаданий метод отримання оцінок зверху для функціонала (2.1) дає змогу також отримати наступне твердження.

Теорема 2.11 ([29]). *Нехай $n \geq 2$, $\gamma \in (0, n)$, $\Delta \in \mathbb{R}^+$ і $A_n = \{a_k\}_{k=1}^n$ – довільна система попарно різних точок на $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. Тоді для будь-якого набору областей $\{B_k\}_{k=0}^n$, які попарно не перетинаються, і задовольняють умови $a_k \in B_k \subset \overline{\mathbb{C}}$, $k = \overline{0, n}$, $a_0 = 0$ і $I_n(\gamma) > \Delta$, справедлива нерівність*

$$r(B_0, 0) \leq \left(n^{-\frac{n}{2}} \cdot \Delta^{-1} \cdot \left(\prod_{k=1}^n |a_k| \right)^2 \right)^{\frac{1}{n-\gamma}} \quad (2.13)$$

Ця теорема узагальнює результат, отриманий в роботі [63].

Тепер переходимо до задач про оцінки функціоналів, в яких отримано точні результати. Сформулюємо цю задачу.

Задача 2. Для кожного фіксованого $\gamma \in (0, n]$ знайти максимум функціонала

$$I_n(\gamma) = r^\gamma(B_0, 0) \prod_{k=1}^n r(B_k, a_k), \quad (2.14)$$

та описати екстремалі, де $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, $A_n = \{a_k\}$, $k = \overline{1, n}$, – довільна n -променева система точок така, що $\mathcal{N}^{(\gamma)}(A_n) \leq 1$, $\mathcal{N}^{(0)}(A_n) \leq 1$, $\{B_k\}_{k=0}^n$ – довільна система областей, що взаємно не перетинаються, таких, що $a_0 = 0$, $a_k \in B_k \subset \overline{\mathbb{C}}$ при $k = \overline{0, n}$.

В цьому напрямку отримано наступний результат.

Теорема 2.12 ([13]). *Нехай $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$, $\gamma \in (1, \gamma_n]$, $\gamma_n = \sqrt{n}$. Тоді для будь-якої n -променевої системи точок $A_n = \{a_k\}_{k=1}^n$ такої, що $\mathcal{N}^{(\gamma)}(A_n) \leq 1$, $\mathcal{N}^{(0)}(A_n) \leq 1$, і будь-якого набору областей $\{B_k\}_{k=0}^n$, що взаємно не перетинаються, $a_0 = 0 \in B_0 \subset \overline{\mathbb{C}}$, $a_k \in B_k \subset \overline{\mathbb{C}}$, $k = \overline{1, n}$, справедлива нерівність*

$$r^\gamma(B_0, 0) \prod_{k=1}^n r(B_k, a_k) \leq r^\gamma(D_0, 0) \prod_{k=1}^n r(D_k, d_k),$$

де d_k, D_k , $k = \overline{0, n}$, $d_0 = 0$, ϵ , відповідно, полюсами і круговими областями квадратичного диференціала

$$Q(w)dw^2 = -\frac{(n^2 - \gamma)w^n + \gamma}{w^2(w^n - 1)^2} dw^2.$$

Наступна теорема узагальнює ряд результатів, раніше отриманих у роботах (див. напр. [5]) в задачі 2. А саме справедливе твердження.

Теорема 2.13 ([21]). *Нехай $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Тоді для довільного $\beta \in (0; \frac{1}{2}]$ існує $n_0(\beta)$ таке, що при всіх $n \geq n_0(\beta)$ і для кожного $\gamma \in (1, n^\beta]$, для будь-якої n -променевої системи точок $A_n = \{a_k\}_{k=1}^n$ такої, що $\mathcal{N}^{(\gamma)}(A_n) \leq 1$, $\mathcal{N}^{(0)}(A_n) \leq 1$, і будь-якого набору взаємно неперетинних областей $\{B_k\}_{k=0}^n$, $a_k \in B_k \subset \overline{\mathbb{C}}$, $k = \overline{0, n}$, $a_0 = 0$, справедлива нерівність*

$$r^\gamma(B_0, 0) \prod_{k=1}^n r(B_k, a_k) \leq \left(\frac{4}{n}\right)^n \frac{\left(\frac{4\gamma}{n^2}\right)^{\frac{\gamma}{n}}}{\left(1 - \frac{\gamma}{n^2}\right)^{n+\frac{\gamma}{n}}} \left(\frac{1 - \frac{\sqrt{\gamma}}{n}}{1 + \frac{\sqrt{\gamma}}{n}}\right)^{2\sqrt{\gamma}}. \quad (2.15)$$

Знак рівності в нерівності (2.15) досягається, коли точки a_k і області B_k , $k = \overline{0, n}$, є, відповідно, полюсами і круговими областями квадратичного диференціала

$$Q(w)dw^2 = -\frac{(n^2 - \gamma)w^n + \gamma}{w^2(w^n - 1)^2} dw^2. \quad (2.16)$$

Розглянемо послідовність чисел $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_8$. Нехай

$$\begin{aligned} \beta_1 &= 0, & \beta_2 &= 0.36, & \beta_3 &= 0.44, & \beta_4 &= 0.472, \\ \beta_5 &= 0.486, & \beta_6 &= 0.493, & \beta_7 &= 0.4982, & \beta_8 &= 0.5. \end{aligned}$$

Позначимо напівінтервали $\Delta_k = (\beta_{k-1}, \beta_k]$, $k = \overline{2, 8}$. Тоді $(0, \frac{1}{2}] = \bigcup_{k=2}^8 \Delta_k$.

Номер $n_0(\beta)$, вказаний в теоремі 2.13, можна конкретизувати наступним чином.

Теорема 2.14 ([21]). *При умовах теореми 2.13 справедливі твердження. Якщо $\beta \in \Delta_k$, то $n_0(\beta) = k$, $k = \overline{2, 8}$.*

Поєднуючи результати двох попередніх теорем, маємо наступний результат.

Теорема 2.15 ([21]). *Для довільного $\beta \in \Delta_k$ і $n \geq k$, $k = \overline{2, 8}$, для кожного $\gamma \in (1, n^\beta]$, а також для будь-якої n -променевої системи точок $A_n = \{a_k\}_{k=1}^n$ такої, що $\mathcal{N}^{(\gamma)}(A_n) \leq 1$, $\mathcal{N}^{(0)}(A_n) \leq 1$, і будь-якого набору взаємно неперетинних областей $\{B_k\}_{k=0}^n$, $a_k \in B_k \subset \overline{\mathbb{C}}$, $k = \overline{0, n}$, $a_0 = 0$, справедлива нерівність*

$$r^\gamma(B_0, 0) \prod_{k=1}^n r(B_k, a_k) \leq \left(\frac{4}{n}\right)^n \frac{\left(\frac{4\gamma}{n^2}\right)^{\frac{\gamma}{n}}}{\left(1 - \frac{\gamma}{n^2}\right)^{n+\frac{\gamma}{n}}} \left(\frac{1 - \frac{\sqrt{\gamma}}{n}}{1 + \frac{\sqrt{\gamma}}{n}}\right)^{2\sqrt{\gamma}}. \quad (2.17)$$

Знак рівності в нерівності (2.17) досягається, коли точки a_k і області B_k , $k = \overline{0, n}$, є, відповідно, полюсами і круговими областями квадратичного диференціала (2.16).

Якщо величину $r(B_0, 0)$ обмежити певним чином, то при цій умові отримано розв'язок задачі 2. А саме, справедливий наступний результат.

Теорема 2.16 ([13]). *Нехай $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 4$, $\gamma \in (1, n]$ і*

$$K(n, \gamma) = [I_n^0(\gamma) \cdot \mu_n(\gamma)]^{\frac{1}{\gamma}},$$

де

$$I_n^0(\gamma) = \left(\frac{4}{n}\right)^n \frac{\left(\frac{4\gamma}{n^2}\right)^{\frac{\gamma}{n}}}{\left(1 - \frac{\gamma}{n^2}\right)^{n+\frac{\gamma}{n}}} \left(\frac{1 - \frac{\sqrt{\gamma}}{n}}{1 + \frac{\sqrt{\gamma}}{n}}\right)^{2\sqrt{\gamma}},$$

а

$$\mu_n(\gamma) = \left[\frac{4^n}{(n-1)^{n-1}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\gamma}} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{\gamma}}\right)^{n-1} \right]^{-1}.$$

Тоді для будь-якої n -променевої системи точок $A_n = \{a_k\}_{k=1}^n$ такої, що $\mathcal{N}^{(\gamma)}(A_n) \leq 1$, $\mathcal{N}^{(0)}(A_n) \leq 1$, і будь-якого набору областей $\{B_k\}_{k=0}^n$, що взаємно не перетинаються, $a_0 = 0 \in B_0 \subset \overline{\mathbb{C}}$, $a_k \in B_k \subset \overline{\mathbb{C}}$, $k = \overline{1, n}$, таких, що

$$r(B_0, 0) \leq K(n, \gamma),$$

справедлива нерівність

$$r^\gamma(B_0, 0) \prod_{k=1}^n r(B_k, a_k) \leq \left(\frac{4}{n}\right)^n \frac{\left(\frac{4\gamma}{n^2}\right)^{\frac{\gamma}{n}}}{\left(1 - \frac{\gamma}{n^2}\right)^{n+\frac{\gamma}{n}}} \left(\frac{1 - \frac{\sqrt{\gamma}}{n}}{1 + \frac{\sqrt{\gamma}}{n}}\right)^{2\sqrt{\gamma}}. \quad (2.18)$$

Знак рівності в (2.18) досягається тоді, коли a_k і B_k , $k = \overline{0, n}$, є, відповідно, полюсами і круговими областями квадратичного диференціала

$$Q(w)dw^2 = -\frac{(n^2 - \gamma)w^n + \gamma}{w^2(w^n - 1)^2} dw^2.$$

Розглянемо вище згадану задачу 2 при деяких обмеженнях на величини α_k . В цьому напрямку отримані наступні результати.

Теорема 2.17 ([19]). *Нехай $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 4$, $\gamma \in (1, \gamma_n]$,*

$$\begin{aligned} \gamma_4 &= 4.17, & \gamma_5 &= 5.71, & \gamma_6 &= 7.5, \\ \gamma_7 &= 9.53, & \gamma_8 &= 11.81, & \gamma_n &= 0.1215 n^2, \quad (n \geq 9). \end{aligned}$$

Тоді для довільної n -променевої системи точок $A_n = \{a_k\}_{k=1}^n$ такої, що $\mathcal{N}^{(\gamma)}(A_n) = 1$ і $0 < \alpha_k \leq 2/\sqrt{\gamma}$, $k = \overline{1, n}$, і довільної системи взаємно неперетинних областей B_k , $a_k \in B_k \subset \overline{\mathbb{C}}$, $k = \overline{0, n}$, справедлива нерівність

$$r^\gamma(B_0, 0) \prod_{k=1}^n r(B_k, a_k) \leq \left(\frac{4}{n}\right)^n \frac{\left(\frac{4\gamma}{n^2}\right)^{\frac{\gamma}{n}}}{\left(1 - \frac{\gamma}{n^2}\right)^{n + \frac{\gamma}{n}}} \left(\frac{1 - \frac{\sqrt{\gamma}}{n}}{1 + \frac{\sqrt{\gamma}}{n}}\right)^{2\sqrt{\gamma}}. \quad (2.19)$$

Знак рівності досягається, коли a_k і B_k , $k = \overline{0, n}$, є, відповідно, полюсами і круговими областями квадратичного диференціала

$$Q(w)dw^2 = -\frac{(n^2 - \gamma)w^n + \gamma}{w^2(w^n - 1)^2} dw^2.$$

Відмітимо, що теорема 2.17, суттєво доповнює і посилює відомий результат [47].

Нехай y_0 є коренем рівняння $\ln \frac{4y^2}{4-y^2} = \frac{2}{y^2}$, $y_0 \approx 1.3246$. Тоді справедливе наступне твердження.

Теорема 2.18 ([3]). *Нехай $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, $\gamma \in (1, y_n]$, $y_n = 0.4386 n^2$ для $n \geq 9$. Тоді для довільної n -променевої системи точок $A_n = \{a_k\}_{k=1}^n$, $\mathcal{N}^{(\gamma)}(A_n) = 1$ і при умові, що $0 < \alpha_k \leq y_0/\sqrt{\gamma}$, $y_0 \approx 1.3246$, $k = \overline{1, n}$ і довільної системи взаємно неперетинних областей B_k , $a_k \in B_k \subset \overline{\mathbb{C}}$, $k = \overline{0, n}$, справедлива нерівність*

$$r^\gamma(B_0, 0) \prod_{k=1}^n r(B_k, a_k) \leq \left(\frac{4}{n}\right)^n \frac{\left(\frac{4\gamma}{n^2}\right)^{\frac{\gamma}{n}}}{\left(1 - \frac{\gamma}{n^2}\right)^{n + \frac{\gamma}{n}}} \left(\frac{1 - \frac{\sqrt{\gamma}}{n}}{1 + \frac{\sqrt{\gamma}}{n}}\right)^{2\sqrt{\gamma}} \quad (2.20)$$

Знак рівності досягається, коли a_k і B_k , $k = \overline{0, n}$, є, відповідно, полюсами і круговими областями квадратичного диференціала

$$Q(w)dw^2 = -\frac{(n^2 - \gamma)w^n + \gamma}{w^2(w^n - 1)^2} dw^2.$$

Якщо розглянути задачу 2 у випадку, коли система попарно різних точок $A_n = \{a_k\}_{k=1}^n$, розташована на одиничному колі, то отримуємо наступні результати.

Теорема 2.19 ([60]). *Для довільного натурального n , $n \geq 126$ і числа $\gamma \in (1; \sqrt{n}]$ правильна нерівність*

$$r^\gamma(B_0, a_0) \prod_{k=1}^n r(B_k, a_k) \leq r^\gamma(D_0, d_0) \cdot \prod_{k=1}^n r(D_k, d_k),$$

де $B_0, B_1, B_2, \dots, B_n, (n \geq 2)$ – попарно неперетинні області в $\overline{\mathbb{C}}$, $a_0 = 0$, $|a_k| = 1, a_1 = 1, k = \overline{1, n}$, а d_k, D_k , – відповідно полюси і кругові області квадратичного диференціала

$$Q(w)dw^2 = -\frac{(n^2 - \gamma)w^n + \gamma}{w^2(w^n - 1)^2}dw^2.$$

Використовуюючи оцінки зверху, отримані вище, вдалося отримати наступну теорему, яка значно посилює попередній результат.

Теорема 2.20 ([12]). *Нехай $n \in \mathbb{N}, n \geq 3, \gamma \in (1, \gamma_n], \gamma_n = \sqrt{n}$. Тоді для будь-якої системи попарно різних точок $A_n = \{a_k\}_{k=1}^n$ одиничного кола і будь-якого набору областей $\{B_k\}_{k=0}^n$, що взаємно не перетинаються, $a_0 = 0, a_k \in B_k \subset \overline{\mathbb{C}}, k = \overline{0, n}$, справедлива нерівність*

$$r^\gamma(B_0, 0) \prod_{k=1}^n r(B_k, a_k) \leq r^\gamma(D_0, 0) \prod_{k=1}^n r(D_k, d_k),$$

де $d_k, D_k, k = \overline{0, n}, d_0 = 0$, e , відповідно, полюсами і круговими областями квадратичного диференціала

$$Q(w)dw^2 = -\frac{(n^2 - \gamma)w^n + \gamma}{w^2(w^n - 1)^2}dw^2.$$

У випадку $n = 2$ і систем точок, розташованих на одиничному колі, завдяки отриманим вище оцінкам зверху вдалося повністю розв'язати відкриту проблему В. М. Дубініна [39]. А саме, справедлива теорема.

Теорема 2.21 ([12]). *Нехай $n = 2, \gamma \in (1, 2]$. Тоді для довільних різних точок a_1 і a_2 одиничного кола і довільних областей B_0, B_1, B_2 , що взаємно не перетинаються, і таких, що $a_0 = 0 \in B_0 \subset \overline{\mathbb{C}}, a_1 \in B_1 \subset \overline{\mathbb{C}}, a_2 \in B_2 \subset \overline{\mathbb{C}}$, справедлива нерівність*

$$r^\gamma(B_0, 0) r(B_1, a_1) r(B_2, a_2) \leq I_2^0(\gamma) \left(\frac{1}{2}|a_1 - a_2|\right)^{2-\gamma},$$

де

$$I_2^0(\gamma) = 4 \frac{(\gamma)^{\frac{\gamma}{2}}}{(1 - \frac{\gamma}{4})^{2+\frac{\gamma}{2}}} \left(\frac{1 - \frac{\sqrt{\gamma}}{2}}{1 + \frac{\sqrt{\gamma}}{2}}\right)^{2\sqrt{\gamma}},$$

Знак рівності в цій нерівності досягається, коли точки a_0, a_1, a_2 і області B_0, B_1, B_2, e , відповідно, полюсами і круговими областями квадратичного диференціала

$$Q(w)dw^2 = -\frac{(4 - \gamma)w^2 + \gamma}{w^2(w^2 - 1)^2}dw^2.$$

Теорема 2.21 вперше реалізує повне доведення відомої гіпотези В. М. Дубініна при $n = 2$.

В якості наслідку теореми 2.7 у випадку систем точок, розташованих на одиничному колі, отримуємо наступне твердження, яке теж раніше не було відоме.

Теорема 2.22 ([10]). *Нехай $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, $\gamma \in (1, n]$. Тоді для будь-якої системи попарно різних точок $\{a_k\}_{k=1}^n$ одиничного кола та будь-яких областей, що взаємно не перетинаються, B_k , $a_k \in B_k \subset \overline{\mathbb{C}}$, $k = \overline{0, n}$, $a_0 = 0$, справедлива нерівність*

$$r^\gamma(B_0, 0) \prod_{k=1}^n r(B_k, a_k) \leq n^{-\frac{\gamma}{2}} \left(\prod_{k=1}^n r(B_k, a_k) \right)^{1-\frac{\gamma}{n}}.$$

Якщо $\gamma = n$, тоді із теореми 2.22, маємо нерівність

$$r^n(B_0, 0) \prod_{k=1}^n r(B_k, a_k) \leq n^{-\frac{n}{2}}.$$

Ця нерівність, яка раніше не була відома, є істотним узагальненням відомої нерівності теореми М. О. Лаврентьєва, яка впливає з цієї нерівності при $n = 1$.

Наступна теорема посилює результат роботи [5], а саме маємо результат.

Теорема 2.23 ([21]). *Нехай $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Тоді для довільного $\beta \in (0; \frac{1}{2}]$ існує $n_0(\beta)$ таке, що при всіх $n \geq n_0(\beta)$ і для кожного $\gamma \in (1, n^\beta]$, для будь-якої системи попарно різних точок $A_n = \{a_k\}_{k=1}^n$ одиничного кола і будь-якого набору взаємно неперетинних областей $\{B_k\}_{k=0}^n$, $a_k \in B_k \subset \overline{\mathbb{C}}$, $k = \overline{0, n}$, $a_0 = 0$, справедлива нерівність*

$$r^\gamma(B_0, 0) \prod_{k=1}^n r(B_k, a_k) \leq \left(\frac{4}{n}\right)^n \frac{\left(\frac{4\gamma}{n^2}\right)^{\frac{\gamma}{n}}}{\left(1 - \frac{\gamma}{n^2}\right)^{n+\frac{\gamma}{n}}} \left(\frac{1 - \frac{\sqrt{\gamma}}{n}}{1 + \frac{\sqrt{\gamma}}{n}}\right)^{2\sqrt{\gamma}} \quad (2.21)$$

Знак рівності в нерівності (2.21) досягається, коли точки a_k і області B_k , $k = \overline{0, n}$, є, відповідно, полюсами і круговими областями квадратичного диференціала

$$Q(w)dw^2 = -\frac{(n^2 - \gamma)w^n + \gamma}{w^2(w^n - 1)^2} dw^2. \quad (2.22)$$

Справедливий наступний результат.

Теорема 2.24 ([21]). Для довільного $\beta \in \Delta_k$ і $n \geq k$, $k = \overline{2, 8}$ для кожного $\gamma \in (1, n^\beta]$, для будь-якої системи попарно різних точок одиничного кола і будь-якого набору взаємно неперетинних областей B_k , $a_k \in B_k \subset \overline{\mathbb{C}}$, $a_0 = 0 \in B_0 \subset \overline{\mathbb{C}}$ ($k = \overline{1, n}$), справедлива нерівність

$$r^\gamma(B_0, 0) \prod_{k=1}^n r(B_k, a_k) \leq \left(\frac{4}{n}\right)^n \frac{\left(\frac{4\gamma}{n^2}\right)^{\frac{\gamma}{n}}}{\left(1 - \frac{\gamma}{n^2}\right)^{n+\frac{\gamma}{n}}} \left(\frac{1 - \frac{\sqrt{\gamma}}{n}}{1 + \frac{\sqrt{\gamma}}{n}}\right)^{2\sqrt{\gamma}} \quad (2.23)$$

Знак рівності в нерівності (2.23) досягається, коли точки a_k і області B_k , $k = \overline{0, n}$, є, відповідно, полюсами і круговими областями квадратичного диференціала (2.22).

Якщо накласти обмеження на величину $r(B_0, 0)$, то в задачі 2 для точок одиничного кола справедлива така теорема.

Теорема 2.25 ([12]). Нехай $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 4$, $\gamma \in (1, n]$ і

$$K(n, \gamma) = [I_n^0(\gamma) \cdot \mu_n(\gamma)]^{\frac{1}{\gamma}},$$

де

$$I_n^0(\gamma) = \left(\frac{4}{n}\right)^n \frac{\left(\frac{4\gamma}{n^2}\right)^{\frac{\gamma}{n}}}{\left(1 - \frac{\gamma}{n^2}\right)^{n+\frac{\gamma}{n}}} \left(\frac{1 - \frac{\sqrt{\gamma}}{n}}{1 + \frac{\sqrt{\gamma}}{n}}\right)^{2\sqrt{\gamma}},$$

а

$$\mu_n(\gamma) = \left[\frac{4^n}{(n-1)^{n-1}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\gamma}} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{\gamma}}\right)^{n-1} \right]^{-1}.$$

Тоді для будь-якої системи попарно різних точок $A_n = \{a_k\}_{k=1}^n$ одиничного кола і будь-якого набору областей, що взаємно не перетинаються, B_0, B_k , $a_0 = 0 \in B_0 \subset \overline{\mathbb{C}}$, $a_k \in B_k \subset \overline{\mathbb{C}}$, $k = \overline{1, n}$, таких, що

$$r(B_0, 0) \leq K(n, \gamma),$$

справедлива нерівність

$$r^\gamma(B_0, 0) \prod_{k=1}^n r(B_k, a_k) \leq \left(\frac{4}{n}\right)^n \frac{\left(\frac{4\gamma}{n^2}\right)^{\frac{\gamma}{n}}}{\left(1 - \frac{\gamma}{n^2}\right)^{n+\frac{\gamma}{n}}} \left(\frac{1 - \frac{\sqrt{\gamma}}{n}}{1 + \frac{\sqrt{\gamma}}{n}}\right)^{2\sqrt{\gamma}}.$$

Знак рівності в цій нерівності досягається коли a_k і B_k , $k = \overline{0, n}$, є, відповідно, полюсами та круговими областями квадратичного диференціала

$$Q(w)dw^2 = -\frac{(n^2 - \gamma)w^n + \gamma}{w^2(w^n - 1)^2} dw^2.$$

Якщо замість обмеження на величину $r(B_0, 0)$, розглянути обмеження на кути α_k , $k = \overline{1, n}$, то справедливий такий результат.

Теорема 2.26 ([18]). *Нехай $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 4$, $\gamma \in (1, \gamma_n]$,*

$$\begin{aligned} \gamma_4 &= 4.17, & \gamma_5 &= 5.71, & \gamma_6 &= 7.5, \\ \gamma_7 &= 9.53, & \gamma_8 &= 11.81, & \gamma_n &= 0.1215 n^2, \quad (n \geq 9). \end{aligned}$$

Тоді для довільної системи $A_n = \{a_k\}_{k=1}^n$ попарно різних точок одиничного кола і при умові, що $0 < \alpha_k \leq 2/\sqrt{\gamma}$, $k = \overline{1, n}$ і довільної системи взаємно неперетинних областей $\{B_k\}_{k=0}^n$, $a_k \in B_k \subset \mathbb{C}$, $k = \overline{0, n}$, $a_0 = 0$ справедлива нерівність

$$r^\gamma(B_0, 0) \prod_{k=1}^n r(B_k, a_k) \leq \left(\frac{4}{n}\right)^n \frac{\left(\frac{4\gamma}{n^2}\right)^{\frac{\gamma}{n}}}{\left(1 - \frac{\gamma}{n^2}\right)^{n + \frac{\gamma}{n}}} \left(\frac{1 - \frac{\sqrt{\gamma}}{n}}{1 + \frac{\sqrt{\gamma}}{n}}\right)^{2\sqrt{\gamma}} \quad (2.24)$$

Знак рівності досягається, коли a_k і B_k , $k = \overline{0, n}$, є, відповідно, полюсами і круговими областями квадратичного диференціала

$$Q(w)dw^2 = -\frac{(n^2 - \gamma)w^n + \gamma}{w^2(w^n - 1)^2} dw^2.$$

Якщо розглянути систему областей, які задовольняють умову часткового налягання (означення дивись вище) та обмеження на кути виду $0 < \alpha_k \leq 2/\sqrt{\gamma}$, то справедливий такий результат.

Теорема 2.27 ([57]). *Нехай $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 4$, $\gamma \in (1, \gamma_n]$,*

$$\begin{aligned} \gamma_4 &= 4.17, & \gamma_5 &= 5.71, & \gamma_6 &= 7.5, \\ \gamma_7 &= 9.53, & \gamma_8 &= 11.81, & \gamma_n &= 0.1215 n^2, \quad (n \geq 9). \end{aligned}$$

Тоді для довільної системи попарно різних точок одиничного кола $|a_k| = 1$ такої, що $0 < \alpha_k \leq 2/\sqrt{\gamma}$, $k = \overline{1, n}$ та для довільної системи областей D_k , $a_k \in D_k \subset \mathbb{C}$, $k = \overline{0, n}$, $a_0 = 0$, які задовольняють умову часткового налягання відносно точок одиничного кола, справедлива наступна нерівність

$$r^\gamma(D_0, 0) \prod_{k=1}^n r(D_k, a_k) \leq \left(\frac{4}{n}\right)^n \frac{\left(\frac{4\gamma}{n^2}\right)^{\frac{\gamma}{n}}}{\left(1 - \frac{\gamma}{n^2}\right)^{n + \frac{\gamma}{n}}} \left(\frac{1 - \frac{\sqrt{\gamma}}{n}}{1 + \frac{\sqrt{\gamma}}{n}}\right)^{2\sqrt{\gamma}} \quad (2.25)$$

Рівність досягається якщо a_k і D_k , $k = \overline{0, n}$, є, відповідно, полюсами та круговими областями квадратичного диференціалу

$$Q(w)dw^2 = -\frac{(n^2 - \gamma)w^n + \gamma}{w^2(w^n - 1)^2} dw^2.$$

Дана теорема, яка була отримана у 2017 році у публікації [57] є суттєвим посиленням відомого результату Л. В. Ковальова [47].

Повертаючись до випадку, коли $n = 2$ і $\gamma \in (0, 2]$, але для довільних фіксованих точок $a_1, a_2 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, маємо наступний результат.

Теорема 2.28 ([12]). *Нехай $n = 2$, $\gamma \in (0, 2]$. Тоді для довільних попарно різних точок $A_2 = \{a_1, a_2\} \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ таких, що*

$$|a_1 a_2| \leq 1, \quad \left(\frac{1}{2} |a_1 - a_2| \right)^{2-\gamma} \leq 1,$$

і будь-яких областей B_0, B_1, B_2 , що взаємно не перетинаються, причому $a_0 = 0 \in B_0 \subset \overline{\mathbb{C}}$, $a_1 \in B_1 \subset \overline{\mathbb{C}}$, $a_2 \in B_2 \subset \overline{\mathbb{C}}$, справедлива нерівність

$$r^\gamma(B_0, 0) r(B_1, a_1) r(B_2, a_2) \leq \frac{4\gamma^{\frac{\gamma}{2}}}{(1 - \frac{\gamma}{4})^{2+\frac{\gamma}{2}}} \left(\frac{1 - \frac{\sqrt{\gamma}}{2}}{1 + \frac{\sqrt{\gamma}}{2}} \right)^{2\sqrt{\gamma}}.$$

Знак рівності в цій нерівності досягається, коли точки a_0, a_1, a_2 і області B_0, B_1, B_2 , є, відповідно, полюсами і круговими областями квадратичного диференціала

$$Q(w)dw^2 = -\frac{(4 - \gamma)w^2 + \gamma}{w^2(w^2 - 1)^2} dw^2.$$

3. ЗАДАЧА ДРУГОГО ТИПУ ПРО МАКСИМУМ ДОБУТКУ ВНУТРІШНІХ РАДІУСІВ ОБЛАСТЕЙ

В цьому розділі наведені результати, які стосуються наступної задачі.

Задача 3. Для кожного фіксованого $\gamma \in (0, nm]$ знайти максимум функціонала

$$Y_{n,m}(\gamma) = r^\gamma(B_\infty, \infty) \prod_{k=1}^n \prod_{p=1}^m r(B_{k,p}, a_{k,p}), \quad (3.1)$$

та описати екстремалі, де $n, m \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, $A_{n,m} = \{a_{k,p}\}$, $k = \overline{1, n}$, $p = \overline{1, m}$, – довільна фіксована (n, m) -променева система точок, B_∞ , $B_{k,p}$ – довільна система областей, що взаємно не перетинаються, таких, що $\infty \in B_\infty \subset \overline{\mathbb{C}}$, $a_{k,p} \in B_{k,p} \subset \overline{\mathbb{C}}$ при $k = \overline{1, n}$, $p = \overline{1, m}$.

Завдяки запропонованому в роботі [13] методу оцінки зверху функціоналів (2.1) та (3.1) в наступній теоремі отриману деяку еволюційну нерівність, яка раніше не була відома. А саме справедлива така теорема.

Теорема 3.1 ([13]). *Нехай $n, m \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, $\gamma \in (0, nm]$. Тоді для довільної фіксованої (n, m) -променевої системи точок $A_{n,m} = \{a_{k,p}\}$, $k = \overline{1, n}$, $p = \overline{1, m}$, і довільного набору областей, що взаємно не перетинаються, $B_\infty, \{B_{k,p}\}$, $\infty \in B_\infty \subset \overline{\mathbb{C}}$, $a_{k,p} \in B_{k,p} \subset \overline{\mathbb{C}}$, $k = \overline{1, n}$, $p = \overline{1, m}$, справедлива нерівність*

$$Y_{n,m}(\gamma) \leq (nm)^{-\frac{\gamma}{2}} (Y_{n,m}(0))^{1-\frac{\gamma}{nm}},$$

де

$$Y_{n,m}(0) = \prod_{k=1}^n \prod_{p=1}^m r(B_{k,p}, a_{k,p}).$$

Якщо $\gamma = nm$, то за умов теореми 3.1 має місце наступне співвідношення

$$r^{nm}(B_\infty, \infty) \prod_{k=1}^n \prod_{p=1}^m r(B_{k,p}, a_{k,p}) \leq (nm)^{-\frac{nm}{2}}.$$

Ця нерівність є результатом, який раніше не був відомий, причому структура точок і областей є неважливою.

З теореми 3.1, одержуємо наступні три твердження.

Теорема 3.2 ([13]). *Нехай $n, m \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, $\gamma \in (0, nm]$, $R \in \mathbb{R}^+$. Тоді для довільної фіксованої (n, m) -променевої системи точок $A_{n,m} = \{a_{k,p}\}$, $k = \overline{1, n}$, $p = \overline{1, m}$, і довільного набору областей, що взаємно не перетинаються, $B_\infty, \{B_{k,p}\}$, $\infty \in B_\infty \subset \overline{\mathbb{C}}$, $a_{k,p} \in B_{k,p} \subset \overline{\mathbb{C}}$, $k = \overline{1, n}$, $p = \overline{1, m}$, справедлива нерівність*

$$\begin{aligned} r^\gamma(B_\infty, \infty) \prod_{k=1}^n \prod_{p=1}^m r(B_{k,p}, a_{k,p}) &\leq \\ &\leq (nm)^{-\frac{\gamma}{2}} \left(2^{nm} \cdot \left(\prod_{k=1}^n \alpha_k \right)^m \cdot \left(\prod_{k=1}^n \mu_k(R) \right)^{\frac{1}{2}} \cdot L_R(A_{n,m}) \right)^{1-\frac{\gamma}{nm}}. \end{aligned}$$

Теорема 3.3 ([13]). *Нехай $n, m \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, $\gamma \in (0, nm]$, $R \in \mathbb{R}^+$. Тоді для довільної фіксованої (n, m) -променевої системи точок $A_{n,m} = \{a_{k,p}\}$, $k = \overline{1, n}$, $p = \overline{1, m}$, і довільного набору областей, що взаємно не перетинаються, $B_\infty, \{B_{k,p}\}$, $\infty \in B_\infty \subset \overline{\mathbb{C}}$, $a_{k,p} \in B_{k,p} \subset \overline{\mathbb{C}}$, $k = \overline{1, n}$, $p = \overline{1, m}$, справедлива нерівність*

$$Y_{n,m}(\gamma) \leq \frac{4^{nm-\gamma} \cdot (L_R(A_{n,m}))^{1-\frac{\gamma}{nm}}}{nm^{nm-\frac{\gamma}{2}}}.$$

У випадку вільних полюсів маємо наступний результат.

Теорема 3.4 ([13]). *Нехай $n, m \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, $\gamma \in (0, nm]$, $R \in \mathbb{R}^+$. Тоді для довільної (n, m) -променевої системи точок $A_{n,m} = \{a_{k,p}\}$, $k = \overline{1, n}$, $p = \overline{1, m}$, такої, що $L_R(A_{n,m}) = 1$ і довільного набору областей, що взаємно не перетинаються, $B_\infty, \{B_{k,p}\}$, $\infty \in B_\infty \subset \overline{\mathbb{C}}$, $a_{k,p} \in B_{k,p} \subset \overline{\mathbb{C}}$, $k = \overline{1, n}$, $p = \overline{1, m}$, справедлива нерівність*

$$Y_{n,m}(\gamma) \leq nm^{-\frac{\gamma}{2}} \left(\frac{4}{nm} \right)^{nm-\gamma}.$$

Розглянемо випадок, коли $m = 1$ у задачі 3. Тоді з теореми 3.1 випливає наступний результат.

Теорема 3.5 ([13]). *Нехай $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, $\gamma \in (0, n]$. Тоді для довільної фіксованої n -променевої системи точок $A_n = \{a_k\}$, $k = \overline{1, n}$, і довільного набору областей, що взаємно не перетинаються, $B_\infty, \{B_k\}$, $\infty \in B_\infty \subset \overline{\mathbb{C}}$, $a_k \in B_{k,p} \subset \overline{\mathbb{C}}$, $k = \overline{1, n}$, справедлива нерівність*

$$Y_n(\gamma) \leq (n)^{-\frac{\gamma}{2}} (Y_n(0))^{1-\frac{\gamma}{n}},$$

де

$$Y_n(0) = \prod_{k=1}^n r(B_k, a_k).$$

Якщо $\gamma = n$, то за умов теореми 3.5 має місце наступне співвідношення

$$r^n(B_\infty, \infty) \prod_{k=1}^n r(B_k, a_k) \leq (n)^{-\frac{n}{2}}.$$

Ця нерівність є результатом, який раніше не був відомий, причому структура точок і областей є неважливою.

З теореми 3.5, одержуємо наступні три твердження.

Теорема 3.6 ([13]). *Нехай $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, $\gamma \in (0, n]$, $R \in \mathbb{R}^+$. Тоді для довільної фіксованої n -променевої системи точок $A_n = \{a_k\}$, $k = \overline{1, n}$, і довільного набору областей, що взаємно не перетинаються, $B_\infty, \{B_k\}$, $\infty \in B_\infty \subset \overline{\mathbb{C}}$, $a_k \in B_k \subset \overline{\mathbb{C}}$, $k = \overline{1, n}$, справедлива нерівність*

$$\begin{aligned} r^\gamma(B_\infty, \infty) \prod_{k=1}^n r(B_k, a_k) &\leq \\ &\leq (n)^{-\frac{\gamma}{2}} \left(2^n \cdot \left(\prod_{k=1}^n \alpha_k \right) \cdot \left(\prod_{k=1}^n \mu_k(R) \right)^{\frac{1}{2}} \cdot L_R(A_n) \right)^{1-\frac{\gamma}{n}}. \end{aligned}$$

Теорема 3.7 ([13]). *Нехай $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, $\gamma \in (0, n]$, $R \in \mathbb{R}^+$. Тоді для довільної фіксованої n -променевої системи точок $A_n = \{a_k\}$, $k = \overline{1, n}$, і довільного набору областей, що взаємно не перетинаються, $B_\infty, \{B_k\}$, $\infty \in B_\infty \subset \overline{\mathbb{C}}$, $a_k \in B_k \subset \overline{\mathbb{C}}$, $k = \overline{1, n}$, справедлива нерівність*

$$Y_n(\gamma) \leq \frac{4^{n-\gamma} \cdot (L_R(A_n))^{1-\frac{\gamma}{n}}}{n^{n-\frac{\gamma}{2}}}.$$

У випадку вільних полюсів маємо наступний результат.

Теорема 3.8 ([13]). *Нехай $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, $\gamma \in (0, n]$, $R \in \mathbb{R}^+$. Тоді для довільної n -променевої системи точок $A_n = \{a_k\}$, $k = \overline{1, n}$, такої, що $L_R(A_n) = 1$ і довільного набору областей, що взаємно не перетинаються, $B_\infty, \{B_k\}$, $\infty \in B_\infty \subset \overline{\mathbb{C}}$, $a_k \in B_k \subset \overline{\mathbb{C}}$, $k = \overline{1, n}$, справедлива нерівність*

$$Y_n(\gamma) \leq n^{-\frac{\gamma}{2}} \left(\frac{4}{n}\right)^{n-\gamma}.$$

4. ЗАДАЧА ПЕРШОГО ТИПУ З ДОДАТКОВОЮ УМОВОЮ СИМЕТРІЇ

Задача 4. Для кожного фіксованого $\gamma \in (0, n]$ знайти максимум функціонала

$$J_n(\gamma) = r^\gamma(B_0, a_0) \prod_{k=1}^n r(B_k, a_k)$$

де $B_0, B_1, B_2, \dots, B_n$, ($n \geq 2$) – довільна система попарно неперетинних області в $\overline{\mathbb{C}}$, причому області B_1, B_2, \dots, B_n , симетричні відносно одиничного кола, $A_n = \{a_k\}_{k=1}^n$ – система точок така, що $|a_k| = 1$, $k = \overline{1, n}$, $a_0 = 0$, $a_k \in B_k \subset \overline{\mathbb{C}}$, $k = \overline{0, n}$.

Вище вказану задачу 4 сформулював як відкриту проблему В. М. Дубінін у роботі [39], але лише при $\gamma = 1$. У частинному випадку коли $B_0 \subset U$ і $\gamma = 1$ задача 4 була розв'язана у роботі [39] і названа задачею Г. П. Бахтіної. В 2000 році Л. В. Ковальов розв'язав задачу 4 при $\gamma = 1$ у роботах [48, 75].

При $\gamma \in (0, 1]$ і $n \geq 2$ задачу 4 вдалося розв'язати у роботі [61] лише у 2017 році. У 2018 році було доведено, що для довільного $\gamma > 1$ існує наперед невідомий номер (залежний від γ), починаючи з якого отримано розв'язок задачі 4 (див. [58]). При $\gamma \in (1; n^{\frac{1}{3}}]$ і $n \geq 14$ розв'язок задачі 4 отримано у [20]. Також у 2018 році було запропоновано більш загальне формулювання задачі 4, розв'язок якої отримано для $\gamma \in (1, \frac{3}{2}]$ і $n \geq 9$ (див. [42]). І, нарешті, задачу 4 у 2019 році вдалося розв'язати при $\gamma \in (1, \sqrt{n}]$ і $n \geq 8$ у роботі [12] завдяки отриманим ефективним

оцінкам зверху функціонала $J_n(\gamma)$. Ці ефективні оцінки наведені у наступних теоремах.

Теорема 4.1 ([30]). *Нехай $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, $\gamma \in (1, n]$. Тоді для будь-якої системи попарно різних точок $A_n = \{a_k\}_{k=1}^n$ одиничного кола та будь-якого набору областей $\{B_k\}_{k=0}^n$, що взаємно не перетинаються, $a_k \in B_k \subset \overline{\mathbb{C}}$, $k = \overline{0, n}$, $a_0 = 0$, і, крім того, області B_k , $k = \overline{1, n}$, — симетричні відносно одиничного кола, справедлива нерівність*

$$r^\gamma(B_0, 0) \prod_{k=1}^n r(B_k, a_k) \leq n^{-\frac{\gamma}{2}} \left(\prod_{k=1}^n r(B_k, a_k) \right)^{1-\frac{\gamma}{n}}.$$

При $\gamma = n$, з теореми 4.1 випливає нерівність

$$r^n(B_0, 0) \prod_{k=1}^n r(B_k, a_k) \leq n^{-\frac{n}{2}}.$$

Використовуючи, як і раніше, нерівність $\prod_{k=1}^n r(B_k, a_k) \leq 2^n \prod_{k=1}^n \alpha_k$, тоді із теореми 4.1, маємо наступну оцінку з «плаваючою» мажорантою, а саме маємо наступне твердження.

Теорема 4.2 ([30]). *Нехай $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, $\gamma \in (1, n]$. Тоді для довільної системи попарно різних точок $\{a_k\}_{k=1}^n$ одиничного кола та будь-якого набору областей $\{B_k\}_{k=0}^n$, які взаємно не перетинаються, причому $a_k \in B_k \subset \overline{\mathbb{C}}$, $k = \overline{0, n}$, $a_0 = 0$, а області B_k , $k = \overline{1, n}$, — симетричні відносно одиничного кола, справедлива нерівність*

$$r^\gamma(B_0, 0) \prod_{k=1}^n r(B_k, a_k) \leq 2^{n-\gamma} \cdot n^{-\frac{\gamma}{2}} \cdot \left(\prod_{k=1}^n \alpha_k \right)^{1-\frac{\gamma}{n}}.$$

Як і раніше, застосовуючи нерівність $\prod_{k=1}^n \alpha_k \leq \left(\frac{2}{n}\right)^n$ з теореми 4.2, маємо оцінку зі «сталюю» мажорантою, а саме:

Теорема 4.3 ([30]). *Нехай $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, $\gamma \in (1, n]$. Тоді при всіх умовах теореми 4.2, має місце наступна нерівність*

$$r^\gamma(B_0, 0) \prod_{k=1}^n r(B_k, a_k) \leq n^{-\frac{\gamma}{2}} \left(\frac{4}{n} \right)^{n-\gamma}.$$

У роботі [61] було отримано розв'язок задачі 4 для довільного натурального $n \geq 2$ і $\gamma \in (0, 1)$.

Теорема 4.4 ([61]). *Нехай $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, $\gamma \in (0, 1)$. Тоді для довільного набору попарно різних точок одиничного кола a_k , таких, що $a_0 = 0$, $|a_k| = 1$, $a_1 = 1$, $k = \overline{1, n}$, і довільного набору взаємно неперетинних областей $\{B_k\}_{k=0}^n$, $a_0 = 0$, $a_k \in B_k \subset \mathbb{C}$, $k = \overline{1, n}$, причому області B_k , $k = \overline{1, n}$, симетричні відносно одиничного кола, виконується нерівність*

$$r^\gamma(B_0, 0) \prod_{k=1}^n r(B_k, a_k) \leq \left(\frac{4}{n}\right)^n \cdot \frac{\left(\frac{2\gamma}{n^2}\right)^{\frac{\gamma}{n}}}{\left(1 - \frac{2\gamma}{n^2}\right)^{\frac{n+\gamma}{2} + \frac{\gamma}{n}}} \cdot \left(\frac{1 - \frac{\sqrt{2\gamma}}{n}}{1 + \frac{\sqrt{2\gamma}}{n}}\right)^{\sqrt{2\gamma}}.$$

Знак рівності в цій нерівності досягається, коли a_k і B_k , $k = \overline{0, n}$, є, відповідно, полосами і круговими областями квадратичного диференціала

$$Q(w)dw^2 = -\frac{\gamma w^{2n} + 2(n^2 - \gamma)w^n + \gamma}{w^2(w^n - 1)^2} dw^2. \quad (4.1)$$

В роботі [6] отримано аналог для випадку симетричних областей відомого результату В. М. Дубініна про максимум добутку внутрішніх радіусів двох неперетинних областей відносно точок 1 і -1 на деяку додатну степінь області відносно початку координат.

Теорема 4.5 ([6]). *Нехай $\gamma \in (0, 2]$. Тоді для будь-якого фіксованого набору областей, що взаємно не перетинаються B_0, B_1, B_2 , такого, що $0 \in B_0 \subset \mathbb{C}$, $1 \in B_1 \subset \mathbb{C}$, $-1 \in B_2 \subset \mathbb{C}$, і, крім того, області B_1, B_2 – симетричні відносно одиничного кола, справедлива нерівність*

$$r^\gamma(B_0, 0) r(B_1, 1) r(B_2, -1) \leq \leq 2^{1-\gamma} \left[\frac{2^{2\gamma+6} \cdot (2\gamma)^\gamma}{(2 - \sqrt{2\gamma})^{\frac{1}{2}(2-\sqrt{2\gamma})^2} \cdot (2 + \sqrt{2\gamma})^{\frac{1}{2}(2+\sqrt{2\gamma})^2}} \right]^{\frac{1}{2}}.$$

Знак рівності в цій нерівності досягається тоді, коли області B_0, B_1, B_2 , є круговими областями квадратичного диференціала

$$Q(w)dw^2 = -\frac{\gamma w^4 + 2(4 - \gamma)w^2 + \gamma}{w^2(w^2 - 1)^2} dw^2.$$

Цей результат роботи [6] дозволяє отримати низку результатів у задачі 4.

У випадку, коли $\gamma > 1$, зокрема, доведено справедливість такого результату.

Теорема 4.6 ([56]). *Для довільного $\gamma > 1$ існує таке $n_0(\gamma) \in \mathbb{N}$, що для кожного $n \geq n_0(\gamma)$, для довільної системи попарно різних точок*

$A_n = \{a_k\}_{k=1}^n$, $|a_k| = 1$ і для довільного набору попарно неперетинних областей $\{B_k\}_{k=0}^n$, $0 \in B_0 \subset \overline{\mathbb{C}}$, $a_k \in B_k \subset \mathbb{C}$, $k = \overline{1, n}$, причому області $\{B_k\}_{k=1}^n$ симетричні відносно одиничного кола, виконується нерівність

$$r^\gamma(B_0, 0) \prod_{k=1}^n r(B_k, a_k) \leq r^\gamma(B_0^{(0)}, 0) \prod_{k=1}^n r(B_k^{(0)}, a_k^{(0)}),$$

де $a_k^{(0)}$ і $B_k^{(0)}$, $k = \overline{0, n}$, – полюси і кругові області квадратичного диференціала (4.1).

Теорема 4.6, як і переважна більшість наведених вище результатів, може бути застосована для вивчення систем однолистих функцій, які відображають одиничний круг на взаємно неперетинні області.

Нехай клас $T = \{f_k\}_{k=0}^n$ множина систем однолистих функцій, які відображають одиничний круг $U = \{z : |z| < 1\}$ на взаємно неперетинні області $\{B_k\}_{k=0}^n$ (причому області $\{B_k\}_{k=1}^n$ симетричні відносно одиничного кола) так, що

$$f_0(0) = 0, \quad |f_k(0)| = 1, \quad k = \overline{1, n}.$$

Тоді з теореми 4.6 для класа T справедливий наступний результат.

Теорема 4.7 ([56]). *Для довільного $\gamma > 1$ існує таке $n_0(\gamma) \in \mathbb{N}$, що для кожного $n \geq n_0(\gamma)$, та для довільної системи функцій $\{f_k\}_{k=0}^n \in T$ справедлива нерівність*

$$|f_0'(0)|^\gamma \prod_{k=1}^n |f_k'(0)| \leq |f_0^{(0)'}(0)|^\gamma \prod_{k=1}^n |f_k^{(0)'}(0)|.$$

Знак рівності досягається для системи функцій $\{f_k\}_{k=0}^n \in T$, такої, що $f_k^{(0)}(U) = B_k^{(0)}$, $f_k^{(0)}(0) = a_k^{(0)}$, $a_0^{(0)} = 0$, $(B_k^{(0)}, a_k^{(0)})$ – кругові області і полюси квадратичного диференціала (4.1), відповідно.)

Тут було використано той факт, що кругові області $B_k^{(0)}$ є однозв'язними областями квадратичного диференціала.

У роботі [20] одержано розв'язок задачі 4 при $n \geq 14$ і $\gamma \in (1, n^{\frac{1}{3}}]$. А саме, справедлива теорема.

Теорема 4.8 ([20]). *Нехай $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 14$, $\gamma \in (1, \gamma_n]$, $\gamma_n = n^{\frac{1}{3}}$. Тоді для довільних різних точок одиничного кола і будь-якого набору взаємно неперетинних областей $\{B_k\}_{k=0}^n$, $a_k \in B_k \subset \overline{\mathbb{C}}$, $k = \overline{0, n}$, $a_0 = 0$,*

причому області $\{B_k\}_{k=1}^n$, симетричні відносно одиничного кола, справедлива нерівність

$$r^\gamma(B_0, 0) \prod_{k=1}^n r(B_k, a_k) \leq \left(\frac{4}{n}\right)^n \frac{\left(\frac{2\gamma}{n^2}\right)^{\frac{\gamma}{n}}}{\left(1 - \frac{2\gamma}{n^2}\right)^{\frac{n}{2} + \frac{\gamma}{n}}} \left(\frac{n - \sqrt{2\gamma}}{n + \sqrt{2\gamma}}\right)^{\sqrt{2\gamma}}.$$

Знак рівності в нерівності досягається, коли a_k і B_k , $k = \overline{0, n}$, є, відповідно, полюсами і круговими областями квадратичного диференціала (4.1).

Якщо розглянути випадок фіксованих полюсів $a_k = e^{\frac{2\pi ki}{n}}$, $k = \overline{1, n}$, то в роботі [58] у задачі 4 можна отримати більш потужний результат.

Теорема 4.9 ([58]). *Нехай $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, $\gamma \in (1, 0, 5n^2]$. Тоді для системи точок $A_n = \{e^{\frac{2\pi ki}{n}}\}_{k=1}^n$, та довільного набору взаємно неперетинних областей $\{B_k\}_{k=0}^n$, $a_0 = 0$, $a_k \in B_k \subset \mathbb{C}$, $k = \overline{0, n}$, причому області $\{B_k\}_{k=1}^n$ – симетричні відносно одиничного кола, справедлива нерівність*

$$r^\gamma(B_0, 0) \prod_{k=1}^n r(B_k, a_k) \leq \left(\frac{4}{n}\right)^n \frac{\left(\frac{2\gamma}{n^2}\right)^{\frac{\gamma}{n}}}{\left(1 - \frac{2\gamma}{n^2}\right)^{\frac{n}{2} + \frac{\gamma}{n}}} \left(\frac{n - \sqrt{2\gamma}}{n + \sqrt{2\gamma}}\right)^{\sqrt{2\gamma}},$$

знак рівності досягається коли a_k і $B_k^{(0)}$, $k = \overline{0, n}$, є, відповідно, полюсами і круговими областями квадратичного диференціала (4.1).

Якщо розглянути випадок, коли області $\{B_k\}_{k=1}^n$ симетричні відносно кола радіуса R , тоді справедливе таке твердження.

Теорема 4.10 ([58]). *Нехай $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, $\gamma \in (1, 0, 5n^2]$. Тоді для довільної системи точок $A_n = \{Re^{\frac{2\pi ki}{n}}\}_{k=1}^n$, та довільного набору взаємно неперетинних областей $\{B_k\}_{k=0}^n$, $a_0 = 0$, $a_k \in B_k \subset \mathbb{C}$, $k = \overline{1, n}$, причому області $\{B_k\}_{k=1}^n$ – симетричні відносно кола радіуса R , справедлива нерівність*

$$\begin{aligned} r^\gamma(B_0, 0) \prod_{k=1}^n r(B_k, a_k) &\leq \\ &\leq \left(\frac{4}{n}\right)^n \frac{\left(\frac{2\gamma}{n^2}\right)^{\frac{\gamma}{n}}}{\left(1 - \frac{2\gamma}{n^2}\right)^{\frac{n}{2} + \frac{\gamma}{n}}} \left(\frac{n - \sqrt{2\gamma}}{n + \sqrt{2\gamma}}\right)^{\sqrt{2\gamma}} \cdot R^{\gamma+n}, \end{aligned}$$

знак рівності досягається коли a_k і $B_k^{(0)}$, $k = \overline{0, n}$, є, відповідно, полюсами і круговими областями квадратичного диференціала

$$Q(w)dw^2 = -\frac{\gamma w^{2n} + 2(n^2 - \gamma)R^n w^n + R^{2n}\gamma}{w^2(w^n - R^n)^2} dw^2 \quad (4.2)$$

Нехай U_R – відкритий круг радіуса R . Тоді у випадку задачі Г. П. Бахтіної, коли область $B_0 \in U_R$, маємо наступне твердження.

Теорема 4.11 ([58]). *Нехай $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, $\gamma \in (1, 0, 5n^2]$. Тоді для системи точок $A_n = \{Re^{\frac{2\pi ki}{n}}\}_{k=1}^n$, та довільного набору взаємно неперетинних областей $\{B_k\}_{k=0}^n$, $a_0 = 0 \in B_0 \in U_R \subset \mathbb{C}$, $a_k \in B_k \subset \overline{\mathbb{C}}$, $k = \overline{1, n}$, причому області $\{B_k\}_{k=1}^n$ – симетричні відносно кола радіуса R , справедлива нерівність*

$$\begin{aligned} r^\gamma(B_0, 0) \prod_{k=1}^n r(B_k, a_k) &\leq \\ &\leq \left(\frac{4}{n}\right)^n \frac{\left(\frac{2\gamma}{n^2}\right)^{\frac{\gamma}{n}}}{\left(1 - \frac{2\gamma}{n^2}\right)^{\frac{n+\gamma}{2} + \frac{\gamma}{n}}} \left(\frac{n - \sqrt{2\gamma}}{n + \sqrt{2\gamma}}\right)^{\sqrt{2\gamma}} \cdot R^{\gamma+n}, \end{aligned}$$

знак рівності досягається коли a_k і $B_k^{(0)}$, $k = \overline{0, n}$, є, відповідно, полюсами і круговими областями квадратичного диференціала (4.2).

Завдяки оцінкам теореми 4.1 вдалося довести дуже цікавий результат.

Теорема 4.12 ([12]). *Нехай $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 8$, $\gamma \in (1, \gamma_n]$, $\gamma_n = \sqrt{n}$. Тоді для довільної системи попарно різних точок $A_n = \{a_k\}_{k=1}^n$ одиничного кола і будь-якого набору областей $\{B_k\}_{k=0}^n$, що взаємно не перетинаються, $a_0 = 0$, $a_k \in B_k \subset \overline{\mathbb{C}}$, $k = \overline{0, n}$, причому області $\{B_k\}_{k=1}^n$, – симетричні відносно одиничного кола, справедлива нерівність*

$$r^\gamma(B_0, 0) \prod_{k=1}^n r(B_k, a_k) \leq r^\gamma(D_0, 0) \prod_{k=1}^n r(D_k, d_k),$$

де d_k , D_k , $k = \overline{0, n}$, $d_0 = 0$, є, відповідно, полюси та кругові області квадратичного диференціала (4.1).

В роботах [14, 22] при додаткових обмеженнях на кутові параметри $\{\alpha_k\}_{k=1}^n$ отримано значно більш сильні результати. Наведемо ці твердження.

Теорема 4.13 ([22]). *Нехай $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, $\gamma \in (0, \gamma_n]$,*

$$\gamma_2 = 1.49, \quad \gamma_3 = 3.01, \quad \gamma_n = 0.25n^2, \quad (n \geq 4).$$

Тоді для довільних різних точок одиничного кола таких, що

$$0 < \alpha_k \leq 2/\sqrt{2\gamma}, \quad k = \overline{1, n}$$

і для довільного набору областей $\{B_k\}_{k=0}^n$, що взаємно не перетинаються, $a_0 = 0$, $a_k \in B_k \subset \mathbb{C}$, $k = \overline{0, n}$, і, крім того, області $\{B_k\}_{k=1}^n$, – симетричні відносно одиничного кола, справедлива нерівність

$$r^\gamma(B_0, 0) \prod_{k=1}^n r(B_k, a_k) \leq \left(\frac{4}{n}\right)^n \frac{\left(\frac{2\gamma}{n^2}\right)^{\frac{\gamma}{n}}}{\left(1 - \frac{2\gamma}{n^2}\right)^{\frac{n}{2} + \frac{\gamma}{n}}} \left(\frac{n - \sqrt{2\gamma}}{n + \sqrt{2\gamma}}\right)^{\sqrt{2\gamma}}.$$

Знак рівності в цій нерівності досягається тоді, коли точки a_k і області B_k , $k = \overline{0, n}$, є, відповідно, полюсами і круговими областями квадратичного диференціала (4.1).

У роботі [14] на кутові параметри $\{\alpha_k\}_{k=1}^n$ накладені більш жорсткі обмеження, завдяки чому вдалося отримати найбільш сильний результат. ехай y_0 – корінь рівняння $\ln\left(\frac{x^2}{4-x^2}\right) - \frac{4}{x^2} = 0$ із проміжку $0 < x \leq 2$, тоді справедливо твердження.

Теорема 4.14 ([14]). *Нехай $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, $\gamma \in (0, \gamma_n]$, $\gamma_n = 0,38n^2$. Тоді для довільних різних точок одиничного кола таких, що*

$$0 < \alpha_k \leq y_0/\sqrt{2\gamma},$$

$y_0 \approx 1.76$, $k = \overline{1, n}$ і довільного набору взаємно неперетинних областей $\{B_k\}_{k=0}^n$, $a_0 = 0 \in B_0$, $a_k \in B_k \subset \mathbb{C}$, $k = \overline{0, n}$, причому області $\{B_k\}_{k=1}^n$, симетричні відносно одиничного кола, справедлива нерівність

$$r^\gamma(B_0, 0) \prod_{k=1}^n r(B_k, a_k) \leq \left(\frac{4}{n}\right)^n \frac{\left(\frac{2\gamma}{n^2}\right)^{\frac{\gamma}{n}}}{\left(1 - \frac{2\gamma}{n^2}\right)^{\frac{n}{2} + \frac{\gamma}{n}}} \left(\frac{n - \sqrt{2\gamma}}{n + \sqrt{2\gamma}}\right)^{\sqrt{2\gamma}}.$$

Знак рівності досягається, коли a_k і B_k , $k = \overline{0, n}$, є, відповідно, полюсами і круговими областями квадратичного диференціала (4.1).

В задачі 4 надзвичайно важко отримати результат при $\gamma > 1$, якщо $n = 2$. Але для $n = 3$ в роботі [23] вдалося отримати точну оцінку функціонала задачі 4 при $\gamma > 1$. Справедливий наступний результат.

Теорема 4.15 ([23]). *Нехай $0 < \gamma \leq 1.233$. Тоді для довільного набору попарно різних точок одиничного кола a_1, a_2, a_3 , занумерованих в*

порядку зростання аргументу і довільного набору взаємно неперетинних областей $\{B_k\}_{k=0}^3$, $a_0 = 0 \in B_0$, $a_k \in B_k \subset \mathbb{C}$, $k = \overline{0, 3}$, причому області $\{B_k\}_{k=1}^3$, симетричні відносно одиничного кола, справедлива нерівність

$$r^\gamma(B_0, 0) \prod_{k=1}^3 r(B_k, a_k) \leq \left(\frac{4}{3}\right)^3 \cdot \frac{(2\gamma)^{\frac{7}{3}}}{27(9-2\gamma)^{\frac{3}{2}+\frac{7}{3}}} \cdot \left(\frac{3-\sqrt{2\gamma}}{3+\sqrt{2\gamma}}\right)^{\sqrt{2\gamma}}.$$

Знак рівності в цій нерівності досягається, зокрема, у випадку, якщо $a_k = a_k^{(0)}$, $B_k = B_k^{(0)}$, $k = \overline{0, 3}$, де $a_k^{(0)}$ і $B_k^{(0)}$, $k = \overline{0, 3}$, є, відповідно, полюсами і круговими областями квадратичного диференціалу

$$Q(w)dw^2 = -\frac{\gamma w^6 + 2(9-\gamma)w^3 + \gamma}{w^2(w^3-1)^2} dw^2.$$

Вдалося значно узагальнити постановку задачі 4.

Вважатимемо, що область D_0 належить до класу Λ , якщо $0 \in D_0 \subset \overline{\mathbb{C}}$ і $\overline{\mathbb{C}} \setminus \{D_0 \cup D_0^*\}$ – відкрита множина, яка має не порожній перетин з одиничним колом, де D_0^* – область, симетрична D_0 відносно одиничного кола. Вважатимемо, що область D_0 належить до класу Δ , якщо $0 \in D_0 \subset \overline{\mathbb{C}}$ і $\overline{\mathbb{C}} \setminus \{D_0 \cup \overline{D_0^*}\}$ є деяка відкрита множина, D_0^* – область, симетрична D_0 відносно одиничного кола.

Систему непересічних областей $\{D_{k,p}\}$, $k = \overline{1, n}$, $p = \overline{1, m}$, будемо називати системою областей, що взаємно не перетинаються, з додатковою умовою симетрії, яка визначається областю D_0 , якщо має місце наступне співвідношення

$$\bigcup_{k=1}^n \bigcup_{p=1}^m D_{k,p} \subset \overline{\mathbb{C}} \setminus \{D_0 \cup D_0^*\}.$$

Очевидно, що D_0 , $D_{k,p}$, $k = \overline{1, n}$, $p = \overline{1, m}$, – система областей, що взаємно не перетинаються.

Наведені вище міркування дозволяють суттєво узагальнити задачу Г. П. Бахтіної, яка виникла із загальної ідеї П. М. Тамразова про екстремальні задачі з вільними полюсами. Тобто, в цій задачі, яку ми пропонуємо, замість точок одиничного кола можна розглядати довільні (n, m) -променеві системи точок. Сформулюємо задачу, яка значно узагальнює постановку задачі 4.

Задача 5. Нехай $n, m \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Тоді для кожного фіксованого $\gamma \in (0, nm]$ показати, що максимум функціонала

$$J_{n,m}(\gamma) = r^\gamma(B_0, 0) \prod_{k=1}^n \prod_{p=1}^m r(B_{k,p}, a_{k,p}), \quad (4.3)$$

досягається для деякої конфігурації областей і точок, яка має n -кратну симетрію, де B_0 належить до класу Λ , система областей $B_{k,p}$, $k = \overline{1, n}$, $p = \overline{1, m}$ є системою взаємно неперетинних областей з додатковою умовою симетрії, яка визначається областю B_0 , а $A_{n,m} = \{a_{k,p}\}$, $k = \overline{1, n}$, $p = \overline{1, m}$, – довільна (n, m) -променева система точок така, що $a_0 \in B_0$, $a_{k,p} \in B_{k,p} \subset \overline{\mathbb{C}}$ при $k = \overline{1, n}$, $p = \overline{1, m}$, $L_R(A_{n,m}) = 1$.

Розроблений в роботі [12] метод отримання ефективних оцінок зверху для функціоналів типу задачі 5 дозволяє довести наступне твердження.

Теорема 4.16 ([11]). *Нехай $n, m \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, $\gamma \in \mathbb{R}^+$. Тоді для будь-якої фіксованої (n, m) -променевої системи точок $A_{n,m} = \{a_{k,p}\} \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $k = \overline{1, n}$, $p = \overline{1, m}$, та будь-якого фіксованого набору областей D_0 , $\{D_{k,p}\}$, $a_0 = 0 \in D_0 \subset \overline{\mathbb{C}}$, $a_{k,p} \in D_{k,p} \subset \overline{\mathbb{C}}$, $k = \overline{1, n}$, $p = \overline{1, m}$, де $\{D_{k,p}\}$ – система областей, що взаємно не перетинаються, з додатковою умовою симетрії, яка визначається областю $D_0 \in \Lambda$, справедлива нерівність*

$$J_{n,m}(\gamma) \leq (nm)^{-\frac{\gamma}{2}} \left(\prod_{k=1}^n \prod_{p=1}^m r(D_{k,p}, a_{k,p}) \right)^{1 - \frac{\gamma}{nm}} \left(\prod_{k=1}^n \prod_{p=1}^m |a_{k,p}| \right)^{\frac{2\gamma}{nm}}.$$

Якщо в теоремі 4.16 покласти $\gamma = nm$ і $\prod_{k=1}^n \prod_{p=1}^m |a_{k,p}| \leq 1$, тоді отримаємо нерівність

$$r^{nm}(D_0, 0) \prod_{k=1}^n \prod_{p=1}^m r(D_{k,p}, a_{k,p}) \leq (nm)^{-\frac{nm}{2}}.$$

Ця нерівність раніше не була відома. У цьому випадку структура точок і областей є неважливою.

Як і раніше, використовуючи відомі нерівності, згадані вище, отримаємо твердження.

Теорема 4.17 ([11]). *Нехай $n, m \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, $\gamma \in (0, nm]$, $R \in \mathbb{R}^+$. Тоді для довільної фіксованої (n, m) -променевої системи точок*

$$A_{n,m} = \{a_{k,p}\}, \quad k = \overline{1, n}, \quad p = \overline{1, m},$$

і довільного набору областей D_0 , $\{D_{k,p}\}$ таких, що $a_0 = 0 \in D_0 \subset \overline{\mathbb{C}}$, $a_{k,p} \in D_{k,p} \subset \overline{\mathbb{C}}$, $k = \overline{1, n}$, $p = \overline{1, m}$, причому $\{D_{k,p}\}$ – система областей, що взаємно не перетинаються і задовольняють додаткову умову симетрії, яка визначається областю $D_0 \in \Lambda$, справедлива нерівність

$$r^\gamma(D_0, 0) \prod_{k=1}^n \prod_{p=1}^m r(D_{k,p}, a_{k,p}) \leq (nm)^{-\frac{\gamma}{2}} \times \\ \times \left(2^{nm} \cdot \left(\prod_{k=1}^n \alpha_k \right)^m \cdot \left(\prod_{k=1}^n \mu_k(R) \right)^{\frac{1}{2}} \cdot L_R(A_{n,m}) \right)^{1-\frac{\gamma}{nm}} \times \\ \times \left(\prod_{k=1}^n \prod_{p=1}^m |a_{k,p}| \right)^{\frac{2\gamma}{nm}}.$$

Нерівність, отримана в теоремі 4.17 має «плаваючу» мажоранту, яка не є сталою і реагує на внутрішню будову (n, m) -променевої системи точок. Якщо використати відомі нерівності, отримаємо твердження.

Теорема 4.18 ([11]). *Нехай $n, m \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, $\gamma \in (0, nm]$ і $R \in \mathbb{R}^+$. Тоді для довільної фіксованої (n, m) -променевої системи точок*

$$A_{n,m} = \{a_{k,p}\}, \quad k = \overline{1, n}, \quad p = \overline{1, m},$$

і довільного набору областей $D_0, \{D_{k,p}\}$ які взаємно не перетинаються, задовольняють додаткову умову симетрії, яка визначається областю $D_0 \in \Lambda$, і такі, що $a_0 = 0 \in D_0 \subset \overline{\mathbb{C}}$, $a_{k,p} \in D_{k,p} \subset \overline{\mathbb{C}}$, $k = \overline{1, n}$, $p = \overline{1, m}$, справедлива нерівність

$$I_{n,m}(\gamma) \leq \frac{4^{nm-\gamma} \cdot (L_R(A_{n,m}))^{1-\frac{\gamma}{nm}}}{nm^{nm-\frac{\gamma}{2}}} \cdot \left(\prod_{k=1}^n \prod_{p=1}^m |a_{k,p}| \right)^{\frac{2\gamma}{nm}}.$$

Якщо розглянути задачу 5 у випадку вільних полюсів, то справедливе таке твердження.

Теорема 4.19 ([11]). *Нехай $n, m \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, $\gamma \in (0, nm]$, $R \in \mathbb{R}^+$. Тоді для довільної (n, m) -променевої системи точок*

$$A_{n,m} = \{a_{k,p}\}, \quad k = \overline{1, n}, \quad p = \overline{1, m},$$

такої, що

$$L_R(A_{n,m}) = 1$$

і довільного набору областей $D_0, \{D_{k,p}\}$, таких, що $a_0 = 0 \in D_0 \subset \overline{\mathbb{C}}$, $a_{k,p} \in D_{k,p} \subset \overline{\mathbb{C}}$, $k = \overline{1, n}$, $p = \overline{1, m}$, причому $\{D_{k,p}\}$ – система областей, що взаємно не перетинаються і задовольняють додаткову умову симетрії, яка визначається областю $D_0 \in \Lambda$, справедлива нерівність

$$I_{n,m}(\gamma) \leq nm^{-\frac{\gamma}{2}} \left(\frac{4}{nm} \right)^{nm-\gamma}.$$

5. ЗАДАЧІ ТРЕТЬОГО ТИПУ

В цьому розділі вивчається наступна задача.

Задача 6. При всіх значеннях параметра $\gamma \in \mathbb{R}^+$ показати, що максимум функціонала

$$J_{n,m}(\gamma) = [r(B_0, 0) r(B_\infty, \infty)]^\gamma \prod_{k=1}^n \prod_{p=1}^m r(B_{k,p}, a_{k,p}),$$

де $A_{n,m} = \{a_{k,p}\}$, $k = \overline{1, n}$, $p = \overline{1, m}$, – довільна (n, m) -променева система точок, $B_0, B_\infty, B_{k,p}$, $k = \overline{1, n}$, $p = \overline{1, m}$ – сукупність областей, що взаємно не перетинаються, $a_{k,p} \in B_{k,p} \subset \mathbb{C}$ при $k = \overline{1, n}$, $p = \overline{1, m}$, $0 \in B_0 \subset \mathbb{C}$, $\infty \in B_\infty \subset \mathbb{C}$, досягається для деякої конфігурації із областей $B_{k,p}, B_0, B_\infty$ і точок $a_{k,p}, 0, \infty$, $k = \overline{0, n}$, $p = \overline{1, m}$ які володіють n -кратною симетрією.

В 1988 році В. М. Дубініним [38] була вперше отримана оцінка для функціонала $J_{n,m}(\gamma)$ при $m = 1$ в задачі 6 при $\gamma = \frac{1}{2}$ і $n \geq 2$ для систем неперетинних областей методом симетризації, у випадку, коли точки лежать на одиничному колі. Г. В. Кузьміна за допомогою методу екстремальних метрик [52, с. 267] посилила результат роботи [38] і отримала у випадку однозв'язних неперетинних областей оцінку функціонала $J_{n,m}(\gamma)$ при $m = 1$ для $\gamma \in \left(0, \frac{n^2}{8}\right]$, $n \geq 2$.

О. К. Бахтін в роботах [62, 66] запропонував метод «керуючих» функціоналів, який дає можливість послабити умови на геометрію розташування систем точок.

Для довільної n -променевої системи точок $A_n = \{a_k\}_{k=1}^n$ розглянемо наступний «керуючий» функціонал:

$$\mathcal{N}^{(0)}(A_n) := \prod_{k=1}^n \chi \left(\left| \frac{a_k}{a_{k+1}} \right|^{\frac{1}{2\alpha_k}} \right) |a_k|.$$

Даний розділ присвячений отриманню ефективних оцінок зверху при будь-яких значеннях параметра $\gamma \in \mathbb{R}^+$ для функціонала

$$J_{n,m}(\gamma) = [r(B_0, 0) r(B_\infty, \infty)]^\gamma \prod_{k=1}^n \prod_{p=1}^m r(B_{k,p}, a_{k,p}),$$

де $n, m \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, $A_{n,m} = \{a_{k,p}\}$, $k = \overline{1, n}$, $p = \overline{1, m}$, – довільна фіксована (n, m) -променева система точок, $B_0, B_\infty, B_{k,p}$ – довільна система областей, що взаємно не перетинаються, таких, що $a_0 = 0 \in B_0 \subset \mathbb{C}$, $\infty \in B_\infty \subset \mathbb{C}$, $a_{k,p} \in B_{k,p} \subset \mathbb{C}$ при $k = \overline{1, n}$, $p = \overline{1, m}$.

У цьому напрямку, за допомогою методу, який розроблено у [12, 13] у цей період, отримано наступний результат.

Теорема 5.1 ([11, 13, 30]). *Нехай $n, m \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, $\gamma \in \mathbb{R}^+$. Тоді для довільної фіксованої (n, m) -променевої системи точок $A_{n,m} = \{a_{k,p}\}$, $k = \overline{1, n}$, $p = \overline{1, m}$, і довільного набору областей, що взаємно не перетинаються, $B_0, B_\infty, \{B_{k,p}\}$, $0 \in B_0 \subset \overline{\mathbb{C}}$, $\infty \in B_\infty \subset \overline{\mathbb{C}}$, $a_{k,p} \in B_{k,p} \subset \overline{\mathbb{C}}$, $k = \overline{1, n}$, $p = \overline{1, m}$, справедлива нерівність*

$$J_{n,m}(\gamma) \leq \begin{cases} (nm + 1)^{-\gamma \frac{nm+1}{nm+2}} \left[\prod_{k=1}^n \prod_{p=1}^m r(B_{k,p}, a_{k,p}) \right]^{1 - \frac{2\gamma}{nm+2}} \prod_{k=1}^n \prod_{p=1}^m |a_{k,p}|^{\frac{2\gamma}{nm+2}}, & \text{якщо } \gamma \in \left(0, \frac{nm+2}{2}\right], \\ (nm + 1)^{-\frac{nm+1}{2}} \prod_{k=1}^n \prod_{p=1}^m |a_{k,p}|, & \text{якщо } \gamma > \frac{nm+2}{2}. \end{cases}$$

Якщо $\gamma \geq \frac{1}{2}(nm + 2)$ і $\prod_{k=1}^n \prod_{p=1}^m |a_{k,p}| \leq R$, то за умов теореми 5.1, має місце наступне співвідношення

$$[r(B_0, 0) r(B_\infty, \infty)]^\gamma \prod_{k=1}^n \prod_{p=1}^m r(B_{k,p}, a_{k,p}) \leq (nm + 1)^{-\frac{nm+1}{2}} \cdot R.$$

В теоремі 5.1 за умов $\gamma \geq \frac{1}{2}(nm + 2)$ і $\prod_{k=1}^n \prod_{p=1}^m |a_{k,p}| \leq R$ структура точок і областей є неважливою.

Використовуючи результат роботи [66, с.95], із теореми 5.1 одержуємо наступне твердження в задачі 6, але у випадку вільних полюсів.

Теорема 5.2 ([11, 13, 30]). *Нехай $n, m \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, $\gamma \geq \frac{1}{2}(nm + 2)$ і $R \in \mathbb{R}^+$. Тоді для довільної фіксованої (n, m) -променевої системи точок $A_{n,m} = \{a_{k,p}\}$, $k = \overline{1, n}$, $p = \overline{1, m}$, такої, що $L_R(A_{n,m}) = 1$, і довільного набору областей $B_0, B_\infty, \{B_{k,p}\}$, що взаємно не перетинаються, причому $a_0 = 0 \in B_0 \subset \overline{\mathbb{C}}$, $\infty \in B_\infty \subset \overline{\mathbb{C}}$, $a_{k,p} \in B_{k,p} \subset \overline{\mathbb{C}}$, $k = \overline{1, n}$, $p = \overline{1, m}$, справедлива нерівність*

$$J_{n,m}(\gamma) \leq (nm + 1)^{-\frac{nm+1}{2}}.$$

У випадку коли $m = 1$ отримуємо наступний результат.

Теорема 5.3 ([11, 13, 30]). *Нехай $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, $\gamma \in \mathbb{R}^+$. Тоді для будь-якої фіксованої системи попарно різних точок*

$$A_n = \{a_k\}_{k=1}^n \in \overline{\mathbb{C}} \setminus \{0, \infty\}$$

та будь-яких областей B_0, B_∞, B_k , що взаємно не перетинаються, причому $0 \in B_0 \subset \mathbb{C}$, $\infty \in B_\infty \subset \mathbb{C}$, $a_k \in B_k \subset \mathbb{C}$, $k = \overline{1, n}$, справедлива нерівність

$$J_n(\gamma) \leq \begin{cases} (n+1)^{-\gamma \frac{n+1}{n+2}} \left[\prod_{k=1}^n r(B_k, a_k) \right]^{1-\frac{2\gamma}{n+2}} \prod_{k=1}^n |a_k|^{\frac{2\gamma}{n+2}}, & \text{при } \gamma \in \left(0, \frac{n+2}{2}\right]; \\ (n+1)^{-\frac{n+1}{2}} \prod_{k=1}^n |a_k|, & \text{при } \gamma > \frac{n+2}{2}. \end{cases}$$

Якщо $\gamma \geq \frac{n+2}{2}$ і $\prod_{k=1}^n |a_k| \leq 1$, то з теореми 5.3 одержуємо наступну нерівність

$$[r(B_0, 0) r(B_\infty, \infty)]^\gamma \prod_{k=1}^n r(B_k, a_k) \leq (n+1)^{-\frac{n+1}{2}}.$$

Ця нерівність раніше не була відома. В теоремі 5.3 за умов $\gamma \geq \frac{n+2}{2}$ і $\prod_{k=1}^n |a_k| \leq 1$ структура точок і областей є неважливою.

З теореми 5.3 у випадку n -променевої системи точок слідує наступні твердження.

Теорема 5.4 ([11, 13, 30]). *Нехай $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, $\gamma \in \mathbb{R}^+$. Тоді для будь-якої фіксованої n -променевої системи точок $A_n = \{a_k\}_{k=1}^n \in \overline{\mathbb{C}} \setminus \{0, \infty\}$ та будь-яких областей B_0, B_∞, B_k , що взаємно не перетинаються, причому $0 \in B_0 \subset \mathbb{C}$, $\infty \in B_\infty \subset \mathbb{C}$, $a_k \in B_k \subset \mathbb{C}$, $k = \overline{1, n}$, справедлива нерівність*

$$J_n(\gamma) \leq \begin{cases} (n+1)^{-\gamma \frac{n+1}{n+2}} \left[\prod_{k=1}^n r(B_k, a_k) \right]^{1-\frac{2\gamma}{n+2}} \prod_{k=1}^n |a_k|^{\frac{2\gamma}{n+2}}, & \text{при } \gamma \in \left(0, \frac{n+2}{2}\right]; \\ (n+1)^{-\frac{n+1}{2}} \prod_{k=1}^n |a_k|, & \text{при } \gamma > \frac{n+2}{2}. \end{cases}$$

Оцінка, отримана у теоремі 5.4 навіть у випадку n -променевої системи точок не була раніше відома.

Далі в цьому розділі наведемо дещо інші задачі, пов'язані з оцінками функціонала на системах взаємно неперетинних областей. Якщо розглянути систему точок, розташовану на дійсній осі, то маємо наступні оцінки функціоналів.

Теорема 5.5 ([12]). *Нехай $p, q \in \mathbb{N}$, $p + q \geq 3$, $\gamma \in (0, p + q]$. Тоді для будь-яких фіксованих точок дійсної осі a_k , $k = \overline{1, p+q}$, $a_k \in \mathbb{R}^+$, $k = \overline{1, p}$, $a_k \in \mathbb{R}^-$, $k = \overline{p+1, p+q}$, та будь-якого набору областей B_0 , B_k , що взаємно не перетинаються, причому $0 \in B_0 \subset \mathbb{C}$, $a_k \in B_k \subset \mathbb{C}$, $k = \overline{1, p+q}$, справедлива нерівність*

$$\begin{aligned} r^\gamma(B_0, 0) \prod_{k=1}^{p+q} r(B_k, a_k) &\leq \\ &\leq (p+q)^{-\frac{\gamma}{2}} \left(\prod_{k=1}^{p+q} r(B_k, a_k) \right)^{1-\frac{\gamma}{p+q}} \left(\prod_{k=1}^{p+q} |a_k| \right)^{\frac{2\gamma}{p+q}}. \end{aligned}$$

Якщо $\gamma = p + q$ і $|a_k| \leq R$, то за умов теореми 5.5, маємо співвідношення

$$r^{p+q}(B_0, 0) \prod_{k=1}^{p+q} r(B_k, a_k) \leq (p+q)^{-\frac{p+q}{2}} \cdot R^{2(p+q)}.$$

Цей наслідок теореми 5.5 був раніше невідомим.

Якщо систему точок дійсної осі використати в задачі 6, тоді справедлива наступна теорема.

Теорема 5.6 ([12]). *Нехай $p, q \in \mathbb{N}$, $p + q \geq 3$, $\gamma \in \mathbb{R}^+$. Тоді для будь-яких фіксованих точок дійсної осі a_k , $k = \overline{1, p+q}$, $a_k \in \mathbb{R}^+$, $k = \overline{1, p}$, $a_k \in \mathbb{R}^-$, $k = \overline{p+1, p+q}$, і будь-якого набору областей B_0 , B_∞ , B_k , що взаємно не перетинаються, причому $0 \in B_0 \subset \mathbb{C}$, $\infty \in B_\infty \subset \mathbb{C}$, $a_k \in B_k \subset \mathbb{C}$, $k = \overline{1, p+q}$, справедлива нерівність*

$$\begin{aligned} [r(B_0, 0) r(B_\infty, \infty)]^\gamma \prod_{k=1}^{p+q} r(B_k, a_k) &\leq \\ &\leq ((p+q) + 1)^{-\gamma \frac{(p+q)+1}{(p+q)+2}} \left[\prod_{k=1}^{p+q} r(B_k, a_k) \right]^{1-\frac{2\gamma}{(p+q)+2}} \left(\prod_{k=1}^{p+q} |a_k| \right)^{\frac{2\gamma}{(p+q)+2}}. \end{aligned}$$

Якщо $\gamma = \frac{1}{2}(p+q+2)$ і $|a_k| \leq R$, то за умов теореми 5.6, маємо співвідношення

$$[r(B_0, 0)r(B_\infty, \infty)]^{p+q} \prod_{k=1}^{p+q} r(B_k, a_k) \leq (p+q+1)^{-\frac{p+q+1}{2}} \cdot R^{(p+q)}.$$

Ця теорема також є новою. Якщо систему точок дійсної осі використати в задачі 3, тоді справедлива наступна теорема.

Теорема 5.7. *Нехай $p, q \in \mathbb{N}$, $p+q \geq 3$, $\gamma \in (0, p+q]$. Тоді для будь-яких фіксованих точок дійсної осі a_k , $k = \overline{1, p+q}$ ($a_k \in \mathbb{R}^+$, $k = \overline{1, p}$, $a_k \in \mathbb{R}^-$, $k = \overline{p+1, p+q}$), і будь-якого набору областей, що взаємно не перетинаються, B_∞, B_k , $\infty \in B_\infty \subset \overline{\mathbb{C}}$, $a_k \in B_k \subset \overline{\mathbb{C}}$, $k = \overline{1, p+q}$, справедлива нерівність*

$$r^\gamma(B_\infty, \infty) \prod_{k=1}^{p+q} r(B_k, a_k) \leq (p+q)^{-\frac{\gamma}{2}} \left[\prod_{k=1}^{p+q} r(B_k, a_k) \right]^{1 - \frac{\gamma}{(p+q)}}.$$

Якщо $\gamma = p+q$, то за умов теореми 5.7, маємо співвідношення

$$r^{p+q}(B_\infty, \infty) \prod_{k=1}^{p+q} r(B_k, a_k) \leq (p+q)^{-\frac{p+q}{2}}.$$

Цей наслідок також є новим.

Що стосується результатів про точне вирішення задачі 6, то можна навести наступну теорему.

Теорема 5.8 ([15]). *Нехай $0 < \gamma \leq \gamma_n$,*

$$\begin{aligned} \gamma_2 = 0.72, \quad \gamma_3 = 1.40, \quad \gamma_4 = 2.27, \quad \gamma_5 = 3.33, \quad \gamma_6 = 4.64, \\ \gamma_n = 0.0845n^2 + 0.088n + 0.0229, \quad (n \geq 7). \end{aligned}$$

Тоді для $\gamma \in (0, \gamma_n]$, довільної n -променевої системи точок

$$A_n = \{a_k\}_{k=1}^n$$

такої, що $\mathcal{N}^{(0)}(A_n) = 1$, і будь-якого набору взаємно неперетинних областей $\{B_k\}_{k=0}^n, B_\infty$ ($0 \in B_0 \subset \mathbb{C}$, $\infty \in B_\infty \subset \overline{\mathbb{C}}$, $a_k \in B_k \subset \overline{\mathbb{C}}$, $k = \overline{1, n}$), справедлива нерівність

$$\begin{aligned} [r(B_0, 0)r(B_\infty, \infty)]^\gamma \prod_{k=1}^n r(B_k, a_k) \leq \\ \leq [r(\Lambda_0, 0)r(\Lambda_\infty, \infty)]^\gamma \prod_{k=1}^n r(\Lambda_k, \lambda_k), \end{aligned}$$

де області $\Lambda_0, \Lambda_\infty, \Lambda_k$, і точки $0, \infty, \lambda_k$, ($k = \overline{1, n}$, $n \geq 2$) є, відповідно, круговими областями і полюсами квадратичного диференціала

$$Q(w)dw^2 = -\frac{\gamma w^{2n} + (n^2 - 2\gamma)w^n + \gamma}{w^2(w^n - 1)^2} dw^2.$$

Для n -вимірного комплексного простору $\overline{\mathbb{C}}^n$, $n \geq 2$ було отримано деякі узагальнення раніше отриманих результатів. Наведемо один з них.

Нехай

$$F_\delta(x) = 2^{x^2+6} \cdot x^{x^2+2-2\delta} \cdot (2-x)^{-\frac{1}{2}(2-x)^2} (2+x)^{-\frac{1}{2}(2+x)^2},$$

$x \in (0, 2]$, $0 \leq \delta \leq 0.7$. Тоді справедливе наступне твердження.

Теорема 5.9 ([35]). *Нехай $m, n \in \mathbb{N}$, $m \geq 7$,*

$$\gamma \in (0, \gamma_0], \quad \gamma_0 = \sqrt[3]{m},$$

$0 \leq \delta \leq 0.7$, $\mathbb{A}_0 = [0]^n = (0, 0, \dots, 0)$. Тоді для довільної променевої системи точок

$$\{\mathbb{A}_k\}_{k=1}^m = \{a_p^{(k)}\}_{k=1}^m \in \overline{\mathbb{C}}^n, \quad p = \overline{1, n},$$

такої, що $\{a_p^{(k)}\}_{k=1}^m = 1$, і довільного набору взаємно неперетинних поліциліндричних областей $\mathbb{B}_k, \mathbb{A}_k \in \mathbb{B}_k \subset \overline{\mathbb{C}}^n$, $k = \overline{0, m}$, $\mathbb{A}_0 \in \mathbb{B}_0 \subset \overline{\mathbb{C}}^n$, правильна нерівність

$$\left[R^\gamma(\mathbb{B}_0, \mathbb{A}_0) \prod_{k=1}^m R(\mathbb{B}_k, \mathbb{A}_k) \right]^{\frac{1}{n}} \leq \gamma^{-\frac{\delta \cdot n}{2}} \cdot \left(\prod_{k=1}^m \alpha_k \right)^\delta \cdot \left[F_\delta \left(\frac{2}{n} \sqrt{\gamma} \right) \right]^{\frac{n}{2}}.$$

Знак рівності досягається для системи поліциліндричних областей

$$\{\mathbb{B}_k\}_{k=0}^m = \left\{ [B_0^{(0)}]^n, [B_1^{(0)}]^n, [B_2^{(0)}]^n, \dots, [B_m^{(0)}]^n \right\},$$

і точок

$$\{\mathbb{A}_k\}_{k=0}^m = \left\{ [0]^n, [b_1^{(0)}]^n, [b_2^{(0)}]^n, \dots, [b_m^{(0)}]^n \right\},$$

де області $B_k^{(0)}$ і точки $b_k^{(0)}$, $k = \overline{1, m}$, є, відповідно, круговими областями і полюсами квадратичного диференціала

$$Q(w)dw^2 = -\frac{(n^2 - \gamma)w^n + \gamma}{w^2(w^n - 1)^2} dw^2,$$

де $R(\mathbb{B}, \Omega)$ – узагальнений внутрішній радіус, введений раніше.

ЛІТЕРАТУРА

- [1] A. T. Aliyev, A. Golberg, M. L. de Cristoforis, S. A. Plaksa. Promarz M. Tamrazov: mathematical ideas and results. *Complex Var. Elliptic Eq.*, 59(1):1–17, 2014, doi: 10.1080/17476933.2013.859254.
- [2] A. K. Bakhtin. Inequalities for the inner radii of nonoverlapping domains and open sets. *Ukr. Mat. Zh.*, 61(5):596–610, 2009.
- [3] A. K. Bakhtin. Extremal decomposition of the complex plane with restrictions for the free poles. *Ukr. Mat. Visn.*, 14(3):309–329, 452, 2017, doi: 10.1007/s10958-018-3801-5.
- [4] A. K. Bakhtin. A separating transformation and extremal problems on nonoverlapping simply connected domains. *Ukr. Mat. Visn.*, 14(4):456–471, 605, 2017, doi: 10.1007/s10958-018-3976-9.
- [5] A. K. Bakhtin. A problem on the extremal decomposition of the complex plane with free poles. *Ukrain. Mat. Zh.*, 71(10):1299–1320, 2019.
- [6] A. K. Bakhtin, G. P. Bakhtina, I. V. Denega. Extremal decomposition of a complex plane with fixed poles. *Zb. Pr. Inst. Mat. NAN Ukr.*, 14(1):34–38, 2017.
- [7] A. K. Bakhtin, I. V. Denega. Some properties of functionals for N -array systems of points. *Zb. Pr. Inst. Mat. NAN Ukr.*, 8(1):12–21, 2011.
- [8] A. K. Bakhtin, I. V. Denega. Inequalities for the inner radii of nonoverlapping domains. *Ukrain. Mat. Zh.*, 71(7):996–1002, 2019.
- [9] A. K. Bakhtin, I. V. Denega. Sharp estimates of products of inner radii of non-overlapping domains in the complex plane. *Probl. Anal. Issues Anal.*, 8(26)(1):1–15, 2019.
- [10] A. K. Bakhtin, I. V. Denega. Weakened problem on extremal decomposition of the complex plane. *Mat. Stud.*, 51(1):35–40, 2019, doi: 10.15330/ms.51.1.35-40.
- [11] A. K. Bakhtin, I. V. Denega. Estimation of the maximum product of inner radii of mutually disjoint domains. *Ukrainian Math. J.*, 72(2):191–202, 2020, doi: 10.1007/s11253-020-01775-0.
- [12] A. K. Bakhtin, I. V. Denega. Extremal decomposition of the complex plane with free poles. *Journal of Math. Sci.*, 246(1):1–17, 2020, doi: 10.1007/s10958-020-04718-z.
- [13] A. K. Bakhtin, I. V. Denega. Extremal decomposition of the complex plane with free poles II. *Journal of Math. Sci.*, 246(5):602–616, 2020, doi: 10.1007/s10958-020-04766-5.
- [14] A. K. Bakhtin, I. V. Denega, L. V. Vygovskaya. Inequalities for the inner radii of symmetric nonoverlapping domains. *Ukrain. Mat. Zh.*, 70(9):1282–1288, 2018, doi: 10.1007/s11253-019-01581-3.
- [15] A. K. Bakhtin, I. Ya. Dvorak. The problem of extreme decomposition of the plane. *Proc. of the Institute of Appl. Math. and Mech. NAS of Ukraine*, 32:3–9, 2018, doi: 10.37069/1683-4720-2018-32-1.
- [16] A. K. Bakhtin, I. Ya. Dvorak, I. V. Denega. Separating transformation and extremal decomposition of the complex plane. *Bull. Soc. Sci. Lett. Łódź Sér. Rech. Déform.*, 66(2):13–20, 2016.
- [17] A. K. Bakhtin, Ju. Lawrynowicz, S. A. Plaksa, Yu. B. Zelinskii. Late Professor Promaz Tamrazov (1933–2012) and 20 years of scientific cooperation łódź-Kyiv. *Bull. Soc. Sci. Lett. Łódź Sér. Rech. Déform.*, 62(2):7–28, 2012.
- [18] A. K. Bakhtin, L. V. Vygivska, I. V. Denega. Inequalities for the internal radii of non-overlapping domains. *J. Math. Sci.*, 220(5):584–590, 2017.
- [19] A. K. Bakhtin, L. V. Vygivska, I. V. Denega. N -radial systems of points and problems for non-overlapping domains. *Lobachevskii J. Math.*, 38(2):229–235, 2017, doi: 10.1134/S1995080217020044.

- [20] A. K. Bakhtin, L. V. Vygovskaya. Estimates for the inner radii of symmetric nonoverlapping domains. *Ukr. Mat. Visn.*, 15(3):298–320, 442, 2018.
- [21] A. K. Bakhtin, L. V. Vyhivska. Problem on extremal decomposition of the complex plane with free poles. *Journal of Math. Sci.*, 248(2):145–165, 2020, doi: 10.1007/s10958-020-04865-3.
- [22] A. K. Bakhtin, L. V. Vyhivska, I. V. Denega. Inequality for the inner radii of symmetric non-overlapping domains. *Bull. Soc. Sci. Lett. Łódź Sér. Rech. Déform.*, 68(2):37–44, 2018, doi: 10.26485/0459-6854.
- [23] A. K. Bakhtin, Ya. V. Zabolotnyi. The problem of the product of inner radii of four nonoverlapping domains, some of there are symmetric about unit circle. *Proc. of the Institute of Appl. Math. and Mech. NAS of Ukraine*, 33:27–32, 2019, doi: 10.37069/1683-4720-2019-33-2.
- [24] A. K. Bakhtin, Ya. V. Zabolotnyi, I. Ya. Dvorak. Estimates for the product of inner radii of five nonoverlapping domains. *Ukr. Math. J.*, 69(2):304–311, 2017.
- [25] G. P. Bakhtina. On the extremization of some functionals in a problem on nonoverlapping regions. *Ukr. Math. J.*, 27:159–161, 1975.
- [26] G. P. Bakhtina. Conformal radii of symmetric nonoverlapping domains. In *Current problems in real and complex analysis*, pages 21–27, 149. 1984.
- [27] I. V. Denega. Some inequalities for inner radii of partially non-overlapping domains. *Dopov. Nats. Akad. Nauk Ukr., Mat. Pryr. Tekh. Nauky*, 2012(5):19–22, 2012.
- [28] I. V. Denega. Generalization of some extremal problems on non-overlapping domains with free poles. *Ann. Univ. Mariae Curie-Skłodowska Sect. A*, 67(1):11–22, 2013, doi: 10.2478/v10062-012-0018-9.
- [29] I. V. Denega. Some estimates for extremal decomposition of the complex plane. *Proc. of the Institute of Applied Math. and Mech. NAS of Ukraine*, 32:42–47, 2018, doi: 10.37069/1683-4720-2018-32-5.
- [30] I. V. Denega. Estimates of the inner radii of non-overlapping domains. *Journal of Math. Sci.*, 242(6):787–795, 2019, doi: 10.1007/s10958-019-04516-2.
- [31] I. V. Denega. Estimation of the products of the inner radii of domains with an additional symmetry condition. *Proc. of the Institute of Appl. Math. and Mech.. NAS of Ukraine*, 33:83–90, 2019, doi: 10.37069/1683-4720-2019-33-6.
- [32] I. V. Denega, A. L. Targonskij. Separating transformation in a problem on extremal decomposition of the complex plane. *Zb. Pr. Inst. Mat. NAN Ukr.*, 14(1):147–155, 2017.
- [33] I. V. Denega, Ya. V. Zabolotnii. Estimates of products of inner radii of non-overlapping domains in the complex plane. *Complex Var. Elliptic Eq.*, 62(11):1611–1618, 2017, doi: 10.1080/17476933.2016.1265952.
- [34] I. V. Denega, Ya. V. Zabolotnii. Estimates of products of inner radii of non-overlapping domains in the complex plane. *Complex Var. Elliptic Eq.*, 62(11):1611–1618, 2017.
- [35] I. V. Denega, Ya. V. Zabolotnyi. Problem of nonoverlapping polycylindrical domains with poles on the boundary of a polydisk. *J. Math. Sci.*, 227(1):26–32, 2017.
- [36] I. V. Denega, Ya. V. Zabolotnyi. Problem on extremal decomposition of the complex plane. *An. Ştiinţ. Univ. “Ovidius” Constanţa Ser. Mat.*, 27(1):61–77, 2019, doi: 10.2478/auom-2019-0004.
- [37] V. N. Dubinin. The product of internal radii of “partially nonoverlapping” domains. pages 24–31, 181. Kiev: Naukova Dumka, 1978.
- [38] V. N. Dubinin. The separating transformation of domains and problems on the extremal partition. *Zap. Nauchn. Semin. Leningr. Otd. Mat. Inst. Steklova*, 1988.

- [39] V. N. Dubinin. Symmetrization in the geometric theory of functions of a complex variable. *Russ. Math. Surv.*, 49(1):1, 1994.
- [40] V. N. Dubinin. Methods of geometric function theory in classical and modern problems for polynomials. *Russ. Math. Surv.*, 67(4):599–684, 2012.
- [41] V. N. Dubinin. *Condenser capacities and symmetrization in geometric function theory*. Basel: Birkhäuser, 2014.
- [42] I. Ya. Dvorak. Estimates for the products of inner radii for partially nonoverlapping domains of the complex plane. *Ukr. Mat. Visn.*, 15(3):345–357, 2018.
- [43] E. G. Emel'yanov. On problems on the extremal decomposition. *Zap. Nauchn. Semin. Leningr. Otd. Mat. Inst. Steklova*, 154:76–89, 1986.
- [44] E. G. Emel'yanov. On the connection of two problems on extremal partitioning. *Zap. Nauchn. Semin. Leningr. Otd. Mat. Inst. Steklova*, 160:91–98, 1987.
- [45] E. G. Emel'yanov. Conformally invariant functionals on the riemann sphere. *J. Math. Sci.*, 118(1):4808–4821, 2001.
- [46] E. G. Emel'yanov. On the problem of maximizing the product of powers of conformal radii nonoverlapping domains. *J. Math. Sci.*, 122(6):3641–3647, 2002.
- [47] L. V. Kovalev. On the problem of extremal partition with free poles on the circle. *Dal'nevost. Mat. Sb.*, 2:96–98, 1996.
- [48] L. V. Kovalev. Interior radii of symmetric not leaning domains. *Russ. Math.*, 44(6):77–78, 2000.
- [49] G. V. Kuz'mina. To the problem on the maximum of the product of conformal radii of non-overlapping domains. *Zap. Nauchn. Semin. Leningr. Otd. Mat. Inst. Steklova*, 100:131–145, 1980.
- [50] G. V. Kuz'mina. Methods of geometric function theory. I. *St. Petersburg. Math. J.*, 9(3):1, 1997.
- [51] G. V. Kuz'mina. Methods of geometric function theory. II. *St. Petersburg. Math. J.*, 9(5):1, 1997.
- [52] G. V. Kuz'mina. Problems on extremal decomposition of the Riemann sphere. *J. Math. Sci.*, 118(1):4880–4894, 2001.
- [53] G. V. Kuz'mina. The method of extremal metric in extremal decomposition problems with free parameters. *J. Math. Sci.*, 129(3):3843–3851, 2005.
- [54] A. L. Targonskij. Extremal problems on partially nonoverlapping domains on a Riemann sphere. *Dopov. Nats. Akad. Nauk Ukr., Mat. Pryr. Tekh. Nauky*, 2008(9):31–36, 2008.
- [55] A. L. Targonskij. Some inequalities for inner radii of pair-wise disjoint domains and open sets (in ukrainian). *Matematychni Studii*, 43(1), 2013, doi: 10.15330/ms.43.1.51-60.
- [56] L. V. Vygovskaya. On a problem of V. N. Dubinin for symmetric multiply connected domains. *Ukr. Mat. Visn.*, 14(2):295–302, 305, 2017.
- [57] L. V. Vyhivska. Some inequalities for inner radii of partially overlapping domains. *Zb. Pr. Inst. Mat. NAN Ukr.*, 14(1):82–89, 2017.
- [58] L. V. Vyhivska. The problem of extreme decomposition of a complex plane with fixed poles on a circle. *Proc. of the Institute of Appl. Math. and Mech. NAS of Ukraine*, 32:10–17, 2018, doi: 10.37069/1683-4720-2018-32-2.
- [59] Ya. V. Zabolotnyi. Estimates of the maximum of product of internal radii of mutually non-overlapping domains in \mathbb{N} . *Zb. Pr. Inst. Mat. NAN Ukr.*, 14(1):156–162, 2017.
- [60] Ya. V. Zabolotnyi, I. Ya. Dvorak. Some evaluation of maximum of the product of conformal radii for pairwise non-overlapping domains. *Lobachevskii J. Math.*, 38(3):554–559, 2017, doi: 10.1134/S1995080217030271.

- [61] Ya. V. Zabolotnyi, L. V. Vyhivska. On a product of the inner radii of symmetric multiply connected domains. *J. Math. Sci.*, 231(1):101–109, 2018.
- [62] А. К. Бахтин. Экстремальные задачи и квадратичные дифференциалы в геометрической теории функций комплексного переменного: дис. д-ра физ.-мат. наук. 2007.
- [63] А. К. Бахтин. Оценки внутренних радиусов для взаимно непересекающихся областей. *Зб. праць Ін-ту математики НАНУ*, 14(1):25–33, 2017.
- [64] А. К. Бахтин, Г. П. Бахтина. Экстремальные задачи о неналегающих областях и квадратичные дифференциалы. *Доп. НАН України*, 2005(8):7–9, 2005.
- [65] А. К. Бахтин, Г. П. Бахтина. Разделяющие преобразования и задачи о неналегающих областях. *Зб. праць Ін-ту математики НАНУ*, 3(4):273–281, 2006.
- [66] А. К. Бахтин, Г. П. Бахтина, Ю. Б. Зелинский. *Тополого-алгебраические структуры и методы в комплексном анализе*. Київ: Інститут математики НАН України, 2008.
- [67] А. К. Бахтин, В. Е. Вьюн, А. Л. Таргонский. Неравенства для внутренних радиусов взаимно непересекающихся областей. *Зб. праць Ін-ту математики НАНУ*, 12(3):38–46, 2015.
- [68] А. К. Бахтин, И. Я. Дворак, И. В. Денег. Точные оценки произведений внутренних радиусов взаимно непересекающихся областей в комплексной плоскости. *Зб. праць Ін-ту математики НАНУ*, 12(4):29–38, 2015.
- [69] Г. П. Бахтина. Вариационные методы и квадратичные дифференциалы в задачах о неналегающих областях: автореф. дис. канд. физ.-мат. наук. 1975.
- [70] Г. П. Бахтина. Метод граничных вариаций в задачах о неналегающих областях. *Препр. / АН УССР. Ин-т математики*, 1975.
- [71] Г. П. Бахтина, В. Є. В'юн, І. Я. Дворак. Оцінки добутків внутрішніх радіусів областей в задачах про екстремальне розбиття комплексної площини. *Зб. праць Ін-ту математики НАНУ*, 12(3):24–30, 2015.
- [72] О. К. Бахтин, Ю. Б. Зелінський, О. С. Лимарченко, С. А. Плакса, Ю. Ю. Трохимчук. Тамразов Промарз Мелкович (до 80-річчя від дня народження). *Zb. Pr. Inst. Mat. NAN Ukr.*, 10(4-5):9–33, 2013.
- [73] Г. М. Голузин. *Геометрическая теория функций комплексного переменного*. "Наука", Москва, 1966.
- [74] Дж. А. Дженкинс. *Однолистные функции и конформные отображения*. М.: Изд-во иностр. лит., 1958.
- [75] Л. В. Ковалев. О трех непересекающихся областях. *Дальневосточный математический журнал*, 1(1):3–7, 2000.
- [76] Л. И. Колбина. Некоторые экстремальные задачи в конформном отображении. *Докл. АН СССР. Серия мат.*, 84:865–868, 1952.
- [77] Л. И. Колбина. Конформное отображение единичного круга на неналегающие области. *Вестник Ленингр. ун-та.*, 1955.
- [78] М. А. Лаврентьев. *К теории конформных отображений*. 1934.
- [79] Н. А. Лебедев. *Принцип площадей в теории однолистных функций*. М.: Наука, 1975.
- [80] П. М. Тамразов. Некоторые экстремальные задачи теории однолистных конформных отображений. *Мат. сб.*, 67:329–337, 1965.
- [81] П. М. Тамразов. Теоремы покрытия линий при конформном отображении. *Мат. сб.*, 66:502–524, 1965.
- [82] П. М. Тамразов. К общей теореме о коэффициентах. *Мат. сб.*, 72:59–71, 1967.

- [83] П. М. Тамразов. Экстремальные конформные отображения и полюсы квадратичных дифференциалов. *Известия АН СССР, серия мат.*, 32:1033–1043, 1968.
- [84] В. К. Хейман. *Многолистные функции*. М.: Изд-во иностр. лит., 1960.
- [85] Б. В. Шабат. *Введение в комплексный анализ, Ч. II*. М.: Наука, 1985.

О. К. Бахтін

ІНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ НАН УКРАЇНИ, М. КИЇВ

Email: alexanderbakhtin6@gmail.com

ORCID: orcid.org/0000-0003-0278-6177

І. В. Денєга

ІНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ НАН УКРАЇНИ, М. КИЇВ

Email: iradenega@gmail.com

ORCID: orcid.org/0000-0001-8122-4257

Л. В. Вигівська

ІНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ НАН УКРАЇНИ, М. КИЇВ

Email: liudmylavyhivska@ukr.net

ORCID: orcid.org/0000-0003-4046-2851

І. Я. Дворак

ІНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ НАН УКРАЇНИ, М. КИЇВ

Email: dvorakinna@gmail.com

Matrix problems and representations of algebras

Yu. A. Drozd

Abstract. This paper is devoted to the *theory of matrix problems*, a new branch of modern algebra created and developed to a large extent by the Kyiv algebraic school. It originated from the questions of the theory of representations, but now has proved its efficiency in many areas, such as algebraic geometry, algebraic topology, linear algebra, theory of groups etc.

Certainly, I could not embrace all achievements or even all directions of investigation, so their choice in the paper is rather subjective. Moreover, I only consider the “classical” results, not involving the new investigations and applications to algebraic geometry and algebraic topology (see surveys [20, 21]).

Анотація. Ця стаття присвячена *теорії матричних задач*, новій галузі сучасної алгебри, яка була створена й розвинена значною мірою Київською алгебричною школою. Вона виникла з проблем теорії зображень, але зараз вже довела свою ефективність у багатьох галузях, таких як алгебрична геометрія, алгебрична топологія, лінійна алгебра, теорія груп, тощо.

Звичайно, я не міг охопити всі досягнення або хоча б усі напрямки досліджень, тож їхній вибір у статті досить суб'єктивний. Більш того, я обмежився лише «класичними» результатами, не торкаючись новітніх досліджень і застосувань до алгебричної геометрії та алгебричної топології (дивись огляди [20, 21]).

2010 Mathematics Subject Classification: 16G20,16G60,15A21

UDC 512.64+512.552

Keywords: algebras, quivers, posets, representations, box, bimodule, tame, wild

1. INTRODUCTION

The new history of the representations theory of finite dimension algebras starts with the *Brauer-Thrall conjectures*. We give corresponding definitions and formulate these conjectures. In what follows \mathbb{k} denotes a field and we consider algebras over this field. If the opposite is not stated, all algebras and modules are supposed to be finite dimensional. By $r(d, A)$ we denote the number of isomorphism classes of indecomposable A -modules of dimension d (possibly $r(d, A) = \infty$). Recall that for finite dimensional representations the Krull-Schmidt theorem holds true [22], that is every representations decomposes into a direct sum of indecomposables and this decomposition is unique up to isomorphism and permutation of summands.

Definition 1.1. *They say that an algebra A is*

- of **finite representations type** if it only has finitely many non-isomorphic indecomposable modules;
- of **bounded representations type** if the dimensions of indecomposable A -modules are bounded, i.e. there is an integer d_0 such that $r(d, A) = 0$ for $d > d_0$;
- of **strongly unbounded representations type** if there are infinitely many d such that $r(d, A) = \infty$.

Obviously, if the field \mathbb{k} is finite, bounded representation type is the same as finite representation type and the strictly unbounded representation type is impossible.

Conjecture 1.2 (see [9, 28, 49]).

- 1st. *If an algebra A is of bounded representation type, it is actually of finite representation type.*
- 2nd. *If an algebra A over an infinite field \mathbb{k} is of unbounded representation type, it is actually of strictly unbounded representation type.*

These conjectures we proved by Yoshii [50] if $(\text{rad } A)^2 = 0$. There were more papers devoted to these conjectures, until in 1968 A. Roiter proved the 1st Brauer-Thrall conjecture completely [42]. It was, in some sense, a sensation which gave a wide publicity to the Kyiv school of the theory of representations.

The 2nd Brauer-Thrall conjecture turned out to be much more difficult. To approach it, L. Nazarova and A. Roiter started in 1970-es to develop a new branch of the representation theory, namely, the theory of *matrix problems*. The idea was completely clear and evident. Every representation of an algebra is a set of matrices. Isomorphic representations correspond to conjugate sets. One knows, from the standard course of linear algebra,

how to deal with one matrix: there is the Jordan or Frobenius normal form. Why not to reduce one of the matrices to this normal form, fix it and consider only conjugations that do not disturb it.

Though the idea was so simple, its realization was far from being so. The thing is that there are relations between the matrices defining a representation and it is usually very troublesome to follow them during the described process of reduction. Actually, it seemed to be non-realistic. A countermeasure was first found in homological algebra, a powerful tool of linearization non-linear problems. Indeed, if we fix an ideal $I \subset A$ and consider its annihilator J , we can include any module M into an exact sequence $0 \rightarrow N \rightarrow M \rightarrow L \rightarrow 0$, where $N = MI$ and $L = M/MI$. Then N is a module over the quotient A/J and L is a module over the quotient A/I . These new algebras are of smaller dimensions (at least if $I \subseteq \text{rad } A$), so one can suppose that the conjecture holds true for them and try to use induction.

A problem is that non-equivalent extensions (in the sense of homological algebra) can produce isomorphic modules. On the level of the group $\text{Ext}_A^1(L, N)$ it is always so if the corresponding elements can be transformed to one another by automorphisms of N and L . Moreover, usually one can choose the ideal I in such a way that this condition is also necessary in order that two extensions produce isomorphic modules.

The new problem looks much better, since $\text{Ext}_A^1(L, N)$ is vector space and there are no relations between its elements. If we know a decomposition of L and N into a direct sum of indecomposable modules, the elements of $\text{Ext}_A^1(L, N)$ are presented by sets of matrices (with no relations).

The automorphisms of N and L are linear algebraic groups, so we just have to find orbits of their action. The realization of this idea gave origin to the theory of matrix problems. Roughly speaking, it is the study of some specific actions of special algebraic groups on special vector spaces. In what follows I will try to explain, what do the words ‘specific’ and ‘special’ mean in this context.

In [38] L. Nazarova and A. Roiter announced that this method was applied to prove the 2nd Brauer-Thrall conjecture, the details were contained in their preprint [40]. Unfortunately, it was never published in a journal paper. So the first such papers with a complete proof of the 2nd Brauer-Thrall conjecture only appeared in 1985 [1, 7, 25].

2. REPRESENTATIONS OF QUIVERS AND POSETS

The first two papers on matrix problems appeared almost simultaneously. They were the paper of P. Gabriel [26] and that of L. Nazarova and A. Roiter [39].

P. Gabriel introduced the notion of *representations of quivers*. Actually, a quiver is an oriented graph Γ , perhaps with multiple edges and loops. We denote by Γ_0 the set of its vertices, by Γ_1 the set of its arrows and suppose that both Γ_0 and Γ_1 are finite. We write $a : i \rightarrow j$ if i is the source and j is the target of the arrow a .

Definition 2.1. (1) A **representation of the quiver** Γ over a field \mathbb{k} is a map V that maps every vertex i to a vector space $V(i)$ over \mathbb{k} and every arrow $a : i \rightarrow j$ to a linear map $V(a) : V(i) \rightarrow V(j)$.

(2) A **morphism** of a representation V to a representation W is a map φ that maps every vertex i to a linear map $\varphi(i) : V(i) \rightarrow W(i)$ so that $\varphi(j)V(a) = W(a)\varphi(i)$ for each arrow $a : i \rightarrow j$.

In particular, the representations V and W are isomorphic if and only if there are isomorphisms of vector spaces $\varphi(i) : V(i) \rightarrow W(i)$ such that $W(a) = \varphi(j)V(a)\varphi(i)^{-1}$ for every arrow $a : i \rightarrow j$.

(3) The **dimension** $\mathbf{dim} V$ of the representation V is the vector

$$\mathbf{d} = (d_i)_{i \in \Gamma_0},$$

where $d_i = \dim V(i)$.

In other words, a representation of quiver is a set of linear maps between vector spaces, and two representations are isomorphic if one can choose bases in these spaces in two ways so that the matrices of the first set of operators with respect to the first choice are the same as the matrices of the second set of operators with respect to the second choice. Thus it is a rather general problem of linear algebra and the classification of such representations can be considered as the problem of finding canonical forms of matrices of such sets of linear maps. For the simplest quiver $\bullet \rightarrow \bullet$ it is one linear map $A : V \rightarrow W$. For the loop $\bullet \curvearrowright \bullet$ it is one linear map $A : V \rightarrow V$, when the classification of representations is given by the Jordan or the Frobenius normal form. For the *Kronecker quiver* $\mathbf{K} : \bullet \rightleftarrows \bullet$ it is the problem on *matrix pencils* solved by Kronecker.

Obviously, one can define the *representations type* of a quiver in the same way as for an algebra. In [26] P. Gabriel proved both Brauer-Thrall conjectures for quivers. Moreover, he gave a criterion for a quiver to be of finite representation type and described the indecomposable representations in the finite case. Namely, he considered the quadratic form

$$Q_\Gamma = \sum_{i \in \Gamma_0} x_i^2 - \sum_{\substack{a \in \Gamma_1 \\ a: i \rightarrow j}} x_i x_j,$$

known now as the *Tits form* of the quiver Γ , and proved the following theorem.

Theorem 2.2. (1) A quiver Γ is of finite representation type if and only if the form Q_Γ is positive definite, i.e. $Q_\Gamma(x) > 0$ for every non-zero vector \mathbf{x} . If not, it is of strictly unbounded representation type.

(2) In this case there is an indecomposable representation V of the quiver Γ such that $\dim V(i) = \mathbf{d}$ if and only if $Q_\Gamma(\mathbf{d}) = 1$. Moreover, for such dimensions there is only one, up to isomorphism, indecomposable representation.

Actually, (2) was obtained from an explicit description of all indecomposable representations.

Note that the orientation of the arrows play no role in this theorem, since it does not imply the Tits form. So the answer only depends on the underlying non-oriented quiver $|\Gamma|$. The list of connected non-oriented graphs with positive definite Tits form had been known for years and was closely related to the theory of Lie algebras and groups. They are the so called *Dynkin graphs* (see Table 2.1). Moreover, the integral vectors \mathbf{d} such that $Q_\Gamma(\mathbf{d}) = 1$ are just the *roots* corresponding to these graphs, which are also of great importance in Lie theory.

$$A_n : 1 - 2 - 3 \cdots (n - 1) - n$$

$$D_n : \begin{array}{c} 1 \\ \diagdown \\ 3 - 4 \cdots (n - 1) - n \\ \diagup \\ 2 \end{array} \quad (n \geq 4)$$

$$E_6 : \begin{array}{c} 6 \\ | \\ 1 - 2 - 3 - 4 - 5 \end{array}$$

$$E_7 : \begin{array}{c} 7 \\ | \\ 1 - 2 - 3 - 4 - 5 - 6 \end{array}$$

$$E_8 : \begin{array}{c} 8 \\ | \\ 1 - 2 - 3 - 4 - 5 - 6 - 7 \end{array}$$

TABLE 2.1. Dynkin graphs

L. Nazarova and A. Roiter considered another class of matrix problems, the so called *representations of posets (partially ordered sets)*. We give the version of their definition proposed by P. Gabriel.

Definition 2.3. Let \mathfrak{S} be a finite poset.

- (1) A **representation of the poset** \mathfrak{S} over the field \mathbb{k} is a map V that maps every element $i \in \mathfrak{S}$ to a subspace $V(i)$ of a vector space $V(0)$ over \mathbb{k} so that $V(i) \subseteq V(j)$ if $i \leq j$ in \mathfrak{S} .
- (2) A **morphism** of a representation V to a representation W is a linear map $\varphi : V(0) \rightarrow W(0)$ such that $\varphi(V(i)) \subseteq W(i)$ for every $i \in \mathfrak{S}$.
 In particular, the representations V and W are isomorphic if and only if there is an isomorphism of vector spaces $\varphi : V(0) \rightarrow W(0)$ such that $\varphi(V(i)) = W(j)$ for every element $i \in \mathfrak{S}$.

- (3) The **dimension** $\mathbf{dim} V$ of the representation V is the vector

$$\mathbf{d} = (d_0, d_i)_{i \in \mathfrak{S}},$$

where $d_i = \dim V(i)$.

It is very easy to translate this definition to the original matrix one of [39]. Choose a basis v_1, v_2, \dots, v_n of the space $V(0)$ and for every $i \in \mathfrak{S}$ choose a basis $u_1^i, u_2^i, \dots, u_{m_i}^i$ of $V(i)$ modulo $\sum_{j < i} V(j)$. Let $u_k^i = \sum_{j=1}^n a_{jk}^i v_j$. Then V is given by the set of matrices A_1, A_2, \dots, A_s , where $A_i = (a_{jk}^i)_{n \times m_i}$. If we change the basis of $V(0)$, the matrix A_i changes to $S(0)A_i$ for an invertible $n \times n$ matrix $S(0)$. A bit more complicated is the change of the basis $u_1^i, u_2^i, \dots, u_{m_i}^i$, since we can also add to every u_k^i the vectors from $V(j)$ for $j < i$. Therefore, under such changes A_i is transformed to

$$A_i S(i) + \sum_{j < i} A_j S_{ij}.$$

Altogether, two such matrix representations $\{A_i\}$ and $\{B_i\}$ are isomorphic if and only if there are invertible matrices $S(0)$ (of size $n \times n$) and $S(i)$ (of size $m_i \times m_i$) and matrices S_{ij} (of size $m_i \times m_j$) for $j < i$ such that

$$B_i = S(0)^{-1} (A_i S(i) + \sum_{j < i} S(j) S_{ij}).$$

It is just the matrix definition of representations of posets from [39].

The paper [39] was devoted to the proof of the Brauer-Thrall conjecture for representations of posets.

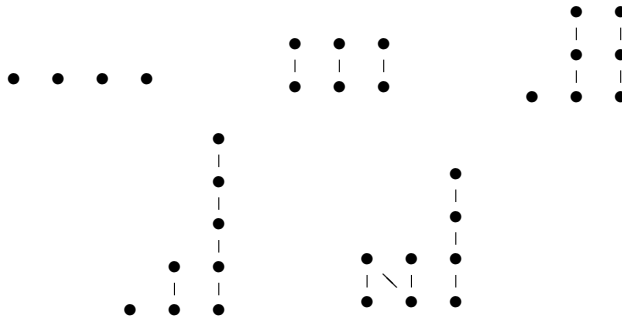
Theorem 2.4. *Every poset is either of finite representation type or of strictly unbounded representation type.*

The proof rested upon an algorithm of reduction. Namely, choosing a maximal element $i \in \mathfrak{S}$, they constructed, for every representation V , a new representation V' of a new poset \mathfrak{S}' (derived poset) such that the correspondence $V \mapsto V'$ reflected isomorphisms and was one-to-one, except

several “trivial” representations. In particular, representations type of \mathfrak{S}' was the same as that of \mathfrak{S} . Afterwords, they proved that after several steps the iterated derived poset becomes either trivial or of width 4 (i.e. containing 4 non-comparable elements). In the first case \mathfrak{S} is of finite representation type, in the second case it is of strictly unbounded representation type.

This paper did not contain neither a criterion for a poset to be of finite representation type nor a description of indecomposable representations. These problems were solved by M. Kleiner [29, 30]. In the first paper he gave the following criterion.

Theorem 2.5. *A poset \mathfrak{S} is of finite representation type if and only if it does not contain subposets of the following forms:*



These posets are called *critical* and usually named, respectively, $\{1, 1, 1, 1\}$, $\{2, 2, 2\}$, $\{1, 3, 3\}$, $\{1, 2, 5\}$ and $\{N, 4\}$.

A simpler proof of this result was proposed by A. Roiter in [45].

Note that, contrary to the case of quivers, there is no “good” list of posets of finite representation type and their number grows rapidly with the growth of the number of elements.

In the second paper M. Kleiner gave a complete description of indecomposable representations. It was possible, since, as he proved, there is only a finite number of posets of finite representation type which have *sincere* indecomposable representations, that is such that all matrices A_i are non-empty, i.e. $\sum_{j < i} V(j) \neq V(i)$. As this list is rather big, we do not present it here.

As M. Kleiner remarked (oral communication on a seminar), these results could also be formulated in terms of some quadratic form. Namely, define the *Tits form* of the poset \mathfrak{S} as

$$Q_{\mathfrak{S}} = x_0^2 + \sum_{i \in \mathfrak{S}} x_i^2 + \sum_{j < i} x_i x_j - \sum_{i \in \mathfrak{S}} x_0 x_i.$$

- (2) If \mathbf{d} is of finite type, the following conditions are equivalent:
- (a) there is an indecomposable representation of dimension \mathbf{d} ;
 - (b) $Q_{\mathfrak{S}}(\mathbf{d}) = 1$.

Moreover, in this case there is a unique (up to isomorphism) indecomposable representation V of dimension \mathbf{d} and $\text{End } V \simeq \mathbb{k}$.

Obviously, this theorem implies the Kleiner's criterion (Theorem 2.5) as well as his remark (Remark 2.6). An analogous result for quivers was obtained by P. Magyar, J. Weyman and A. Zelevinsky [34].

Remark 2.8. Note that in all theorems 2.2-2.7 the ground field \mathbb{k} plays no role. The answer does not depend on this field.

3. REFLECTIONS AND COXETER FUNCTORS

The proofs of Theorems 2.2-2.5 rested on some matrix calculations. Actually, as J. Tits remarked, rather simple geometrical considerations show that if a quiver Q_{Γ} is of finite type, then Q_{Γ} is positive definite, as well as if a poset \mathfrak{S} is of finite type, then $Q_{\mathfrak{S}}$ is weakly positive. One only has to compare the dimension of the space of representations of a prescribed dimension and the dimension of the group of transformations that define isomorphisms of representations. Since there was also a one-to-one correspondence between dimensions of representations and positive roots of the quiver, one could presume that there must be an *a priori* way to establish this correspondence as well as to prove that the positive definiteness of the Tits form implies finite representation type. This presumption was realized by I. Bernstein, I. Gelfand and A. Ponomarev [4]. Their idea was the *categorification* of reflections, which played an important role in the study of Lie algebras and Coxeter groups.

Namely, let Q be a quadratic form on \mathbb{R}^n , B be the corresponding symmetric bilinear form $\mathbf{e} \in \mathbb{R}^n$ be a vector with $Q(\mathbf{e}) \neq 0$. The *reflection with respect to \mathbf{e}* is defined as the linear map

$$s_{\mathbf{e}} : \mathbf{x} \mapsto \mathbf{x} - 2 \frac{B(\mathbf{x}, \mathbf{e})}{Q(\mathbf{e})} \mathbf{e}.$$

This map is *isometric*: $Q(s_{\mathbf{e}}\mathbf{x}) = Q(\mathbf{x})$, and *involutive*: $s_{\mathbf{e}}^2 = \text{id}$. If $Q = Q_{\Gamma}$ is the Tits form of a quiver Γ and \mathbf{e}_i ($i \in \Gamma_0$) are the basic vectors (the i -th coordinate equals 1, all other coordinates are 0), set $s_i = s_{\mathbf{e}_i}$. The subgroup $W \subseteq \text{GL}(n, \mathbb{R})$ generated by these reflections is called the *Weyl group* of the quiver. It is known (and rather easy to prove) that if Q_{Γ} is positive definite, every root is of the form $w\mathbf{e}_i$ for some i and some $w \in W$. Moreover, in this case W is finite, so there are finitely many roots.

I. Benstein, I. Gelfand and A. Ponomarev categorified these reflections. Namely, if the vertex i is either a source (or a sink) in the quiver Γ , they defined the action of s_i on representations. Actually, if V is a representation of Γ , $s_i V$ is a representation of the quiver $s_i \Gamma$ obtained by reversing all arrows that starts (or ends) at i . Moreover, except trivial cases,

$$\mathbf{dim} s_i V = s_i \mathbf{dim} V.$$

Using this categorification, they proved the following theorem. They used a numeration of the vertices i_1, i_2, \dots, i_n such that i_1 is a source, i_2 is a source in $s_{i_1} \Gamma$, i_3 is a source in $s_{i_2} s_{i_1} \Gamma$ etc. The crucial role in their proof played the Coxeter transformation $C = s_{i_n} \dots s_{i_2} s_{i_1}$.

Theorem 3.1. *Let Q_Γ be positive definite. For every indecomposable representation V there is an integer m such that $V = s_{i_1} s_{i_2} \dots s_{i_m} \mathbf{e}_{i_{m+1}}$ (here we set $i_{k+nq} = i_k$). The integer m is uniquely defined by $\mathbf{dim} V$. On the contrary, all such representations are indecomposable.*

Obviously, it implies that Γ is of finite representation type and there is a one-to-one correspondence between indecomposable representations and positive roots.

The Kleiner's remark 2.6 gave a hint that something similar could be done for representations of posets. Indeed, in [14] Yu. Drozd constructed an analogue C of the Coxeter transformation for representations of posets and proved the following result.

Lemma 3.2. *Let $Q_\mathfrak{S}$ is weakly positive. Then every indecomposable representation is of the form $C^k U$, where either U is not sincere or $U = U_0$, where $U_0(0) = \mathbb{k} = U_0(i)$ for all $i \in \mathfrak{S}$.*

It implies the main theorem.

Theorem 3.3. *Let $Q_\mathfrak{S}$ is weakly positive.*

- (1) \mathfrak{S} is of finite representation type.
- (2) There is an indecomposable representation of dimension \mathbf{d} if and only if $Q_\mathfrak{S}(\mathbf{d}) = 1$. Moreover, in this case there is a unique (up to isomorphism) indecomposable representation of dimension \mathbf{d} .

The weakness of this paper was that the author could not construct all reflections. Actually, only two operations, σ and ρ , were constructed, where ρ could be considered as the reflection s_0 , while σ replaced the product of all reflections s_i ($i \in \mathfrak{S}$). To improve this defect, in the paper [17] a generalization of representations of posets was considered.

Definition 3.4. (1) A **bisected poset** is a poset \mathfrak{S} together with a partition $\mathfrak{S} = \mathfrak{S}^+ \sqcup \mathfrak{S}^-$ such that if $i \in \mathfrak{S}^-$ and $j < i$, then also $j \in \mathfrak{S}^-$.

We set $\hat{\mathfrak{S}} = \mathfrak{S} \cup \{0\}$, where $0 \notin \mathfrak{S}$ is a new symbol.

(2) A **representation** V of such a bisected poset consists of vector spaces $V(i)$ ($i \in \hat{\mathfrak{S}}$) and linear maps $v(i)$ ($i \in \mathfrak{S}$), where $v(i) : V(i) \rightarrow V(0)$ if $i \in \mathfrak{S}^-$ and $v(i) : V(0) \rightarrow V(i)$ if $i \in \mathfrak{S}^+$, such that $V(i)V(j) = 0$ if $j < i$, $j \in \mathfrak{S}^-$, $i \in \mathfrak{S}^+$.

(3) A **morphism** φ of a representation V to a representation W is a set of linear maps $\varphi(i) : V(i) \rightarrow W(i)$ ($i \in \hat{\mathfrak{S}}$) and $\varphi(ij) : V(i) \rightarrow W(j)$, where $i < j$ and either $i, j \in \mathfrak{S}^+$ or $i, j \in \mathfrak{S}^-$, such that

$$\begin{aligned} \varphi(0)v(i) &= w(i)\varphi(i) + \sum_{j < i} w(j)\varphi(j) \quad \text{if } i \in \mathfrak{S}^-, \\ w(i)\varphi(0) &= \varphi(i)v(i) + \sum_{i < j} \varphi(ij)v(j) \quad \text{if } i \in \mathfrak{S}^+. \end{aligned}$$

One easily checks that φ is an isomorphism if and only if all $\varphi(i)$ are so.

Remark 3.5. (1) If $\mathfrak{S}^+ = \emptyset$, this definition becomes equivalent to the usual definition of representations of a poset.

(2) This definition can be naturally formulated in the language of *boxes* (see Section 4), as it was done in [17].

The Tits form for a bisected poset does not depend on the partition, it is the same form

$$Q_{\mathfrak{S}} = x_0^2 + \sum_{i \in \mathfrak{S}} x_i^2 + \sum_{j < i} x_i x_j - \sum_{i \in \mathfrak{S}} x_0 x_i.$$

An element $i \in \hat{\mathfrak{S}}$ is called *positive* if either i is minimal in \mathfrak{S}^+ or $i = 0$ and $\mathfrak{S}^+ = \emptyset$. It is called *negative* if either i is maximal in \mathfrak{S}^- or $i = 0$ and $\mathfrak{S}^- = \emptyset$. In [17] all reflections s_i are defined for positive or negative $i \in \hat{\mathfrak{S}}$. Just as before, when doing reflections, the bisposet also changes. Namely, the positive (respectively, negative) vertex i is displaced from \mathfrak{S}^+ to \mathfrak{S}^- (respectively, from \mathfrak{S}^- to \mathfrak{S}^+), becoming negative (respectively, positive). It is proved that, if $Q_{\mathfrak{S}}$ is weakly positive and V is sincere (that is all $V(i) \neq 0$), then $\mathbf{dim} s_i V = s_i \mathbf{dim} V$ and $s_i^2 V \simeq V$. It gives the proof of the following theorem.

Theorem 3.6. \mathfrak{S} is of finite representation type if and only if $Q_{\mathfrak{S}}$ is weakly positive. In this case

(1) every indecomposable representation is of the form $s_{i_1} s_{i_2} \dots s_{i_m} W$ for some m and some non-sincere indecomposable representation W ;

- (2) *there is an indecomposable representation of dimension \mathbf{d} if and only if $Q_{\mathfrak{S}}(\mathbf{d}) = 1$. Moreover, such representation is unique up to isomorphism.*

4. BOXES, BIMODULES AND REDUCTION

In [31] A. Roiter and M. Kleiner gave a very general definition that had to cover most cases of matrix problems known at that time. It was formulated in terms of *differential graded categories*. An equivalent, but more easy-to-use formulation was proposed by A. Roiter in [44] in terms of *boxes* (or *boces*, ukrainian *боксу*, from *bimodule over a category with coalgebra structure*).

Definition 4.1. (1) A **box** is quadruple $\mathfrak{A} = (\mathcal{A}, \mathcal{V}, \mu, \varepsilon)$, where \mathcal{A} is a category, \mathcal{V} is an \mathcal{A} -bimodule, i.e. an additive bifunctor $\mathcal{A}^{\text{op}} \times \mathcal{A} \rightarrow \mathbf{Vec}$ (the category of vector spaces), $\mu : \mathcal{V} \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}$ (**comultiplication**) and $\varepsilon : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{A}$ (**counit**) are morphisms of \mathcal{A} -bimodules furnishing \mathcal{V} with the structure of \mathcal{A} -**coalgebra**. Recall that it means that the following diagrams are commutative:

$$\begin{array}{ccc}
 \mathcal{V} & \xrightarrow{\mu} & \mathcal{V} \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{V} \\
 \mu \downarrow & & \downarrow \mu \otimes \text{id} \\
 \mathcal{V} \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{V} & \xrightarrow{\text{id} \otimes \mu} & \mathcal{V} \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{V} \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{V}
 \end{array}
 \quad (\text{coassociativity})$$

$$\begin{array}{ccccc}
 & & \mathcal{V} & & \\
 & \swarrow \sim & \downarrow \mu & \searrow \sim & \\
 \mathcal{V} \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{A} & \xleftarrow{\text{id} \otimes \varepsilon} & \mathcal{V} \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{V} & \xrightarrow{\varepsilon \otimes \text{id}} & \mathcal{A} \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{V}
 \end{array}
 \quad (\text{counit axiom})$$

(\sim marks the natural isomorphisms).

- (2) A **representation** of the box \mathfrak{A} is an \mathcal{A} -module, i.e. a functor

$$M : \mathcal{A} \rightarrow \mathbf{Vec}.$$

- (3) A **morphism** of a representation M to a representation N is a morphism of \mathcal{A} -modules $\varphi : \mathcal{V} \otimes_{\mathcal{A}} M \rightarrow N$.
- (4) The **product** $\varphi\psi$ of morphisms $\varphi : M \rightarrow N$ and $\psi : L \rightarrow N$ is the composition

$$\mathcal{V} \otimes_{\mathcal{A}} L \xrightarrow{\mu \otimes \text{id}} \mathcal{V} \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{V} \otimes_{\mathcal{A}} L \xrightarrow{\text{id} \otimes \psi} \mathcal{V} \otimes_{\mathcal{A}} M \xrightarrow{\varphi} N.$$

We denote by $\text{Rep } \mathfrak{A}$ the category of representations of the box \mathfrak{A} .

In most applications they use special classes of boxes.

Definition 4.2. Let $\mathfrak{A} = (\mathcal{A}, \mathcal{V}, \mu, \varepsilon)$ be a box. Denote by $\bar{\mathcal{V}}$ the kernel $\ker \varepsilon$. A **section** is a morphism of (left) \mathcal{A} -modules (usually not of bimodules) $\omega : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{V}$. Then $\mathcal{V} = \text{Im } \omega \oplus \bar{\mathcal{V}}$ as \mathcal{A} -module. The box \mathfrak{A} is called

- **free** if \mathcal{A} is a **free category** (i.e. isomorphic to the category of parths of a quiver Γ) and $\bar{\mathcal{V}}$ is a **free \mathcal{A} -bimodule**, i.e. a direct sum of bimodules of the form $\mathcal{A}e_i\mathcal{A}$, where e_i is the trivial path at a vertex i .

In other words it means that there are sets of generators \mathbf{A}_0 of morphisms of the category \mathcal{A} and \mathbf{A}_1 of the \mathcal{A} -bimodule $\bar{\mathcal{V}}$ such that there are no nontrivial relations between them. They say that $\mathbf{A} = \mathbf{A}_0 \cup \mathbf{A}_1$ is a **set of free generators** of the box \mathfrak{A} .

- **normal** if there is a **section** ω such that $\mu(\omega_i) = \omega_i \otimes \omega_i$ for every vertex $i \in \Gamma$, where $\omega_i = \omega(e_i)$.

In this case we set $\partial a = a\omega_i - \omega_j a$ for a morphism $a : i \rightarrow j$ and $\partial v = \mu(v) - v \otimes \omega_i - \omega_j \otimes v$, where $v \in \bar{\mathcal{V}}(i, j)$. Note that $\partial a \in \bar{\mathcal{V}}$ and $\partial v \in \bar{\mathcal{V}} \otimes_{\mathcal{A}} \bar{\mathcal{V}}$.

- **triangular** or **Roiter box** if it is free, normal and the set \mathbf{A} of free generators of \mathcal{A} can be linear ordered so that, for every $a \in \mathbf{A}$, ∂a is contained in the subbox generated by the set $\{b \in \mathbf{A} \mid b < a\}$. Such set of generators is called **triangular**.

Remark 4.3. If $\mathcal{V} = \mathcal{A}$, the box \mathfrak{A} is called the *principal box* over the category \mathcal{A} . It is quite obvious that in this case $\text{Rep } \mathfrak{A}$ coincides with the category $\mathcal{A}\text{-mod}$ of \mathcal{A} -modules.

The category of representations $\text{Rep } \mathfrak{A}$ of a Roiter box \mathfrak{A} has “usual” properties of the categories of modules, as was proved in [31]. Namely, for a morphism $\varphi : M \rightarrow N$ and an element $\xi \in \mathcal{V}(i, j)$ we denote by $\varphi(\xi) : M(j) \rightarrow N(i)$ the map sending $x \in M(j)$ to $\varphi(\xi \otimes x) \in N(i)$.

Theorem 4.4. Let \mathfrak{A} is a Roiter box, $M, N \in \text{Rep } \mathfrak{A}$.

- (1) A morphism $\varphi : M \rightarrow N$ is an isomorphism if and only if $\varphi(\omega_i)$ is an isomorphism for every i .
- (2) $\text{Rep } \mathfrak{A}$ is **fully additive** (or **Karubian**, or **idempotent complete**), that is, for every idempotent endomorphism e of M there are morphisms

$$M \begin{array}{c} \xrightarrow{\pi} \\ \xleftarrow{\iota} \end{array} M' \text{ such that } e = \iota\pi \text{ and } \pi\iota = \text{id}_{M'}.$$

(Then $M \simeq M' \oplus M''$, where M'' is the object constructed in the same way from the idempotent $\text{id}_M - e$.)

A lot of applications of boxes appear through another categorical construction, namely, *bimodule categories*, first considered in [12].

Definition 4.5. Let \mathcal{B} be a bimodule over a category \mathcal{A} . The **bimodule category** $\text{El}(\mathcal{B})$ or the **category of elements** of the bimodule \mathcal{B} is defined as follows.

- Its set of objects is $\bigcup_{i \in \text{Ob } \mathcal{A}} \mathcal{B}(i, i)$.
- If $A \in \mathcal{B}(i, i)$, $B \in \mathcal{B}(j, j)$, a morphism $A \rightarrow B$ is a morphism $\varphi : i \rightarrow j$ such that $\varphi A = B\varphi$ (note that both paths are in $\mathcal{B}(i, j)$).
- The bimodule \mathcal{B} is called **locally finite dimentional** if all spaces $\mathcal{A}(i, j)$ and $\mathcal{B}(i, j)$ are finite dimensional.

For instance, such a bimodule category appeared in the Introduction, where \mathcal{A} was the product of the categories of A/I -modules and A/J -modules, while $\mathcal{B}(X, Y) = \text{Ext}_A^1(X, Y)$.

Another application of the bimodule categories was proposed by Y. Drozd in [16]. Let A be a finite dimensional algebra, $A\text{-pro}$ be the category of projective A -modules, $\mathcal{A} = A\text{-pro} \times A\text{-pro}$, \mathcal{B} be the \mathcal{A} -bimodule such that

$$\mathcal{B}(Q, P) = \text{Hom}_A(Q, \text{rad } P),$$

$I \subset \text{El}(\mathcal{B})$ be the ideal generated by the objects which are homomorphisms of the form $Q \rightarrow 0$ and $C : \text{El}(\mathcal{B})/I \rightarrow A\text{-mod}$ be the functor that maps a homomorphism α to its cokernel.

Proposition 4.6. The functor C is an equivalence of the categories

$$\text{El}(\mathcal{B})/I \xrightarrow{\sim} A\text{-mod}.$$

Note that the indecomposable objects of $\text{El}(\mathcal{B})/I$ are the same as in \mathcal{B} , except the “trivial” objects $Q \rightarrow 0$, where Q is an indecomposable projective A -module.

Example 4.7. Let \mathbb{k} be algebraically closed and $(\text{rad } A)^2 = 0$. If

$$P_1, P_2, \dots, P_n$$

are all pairwise non-isomorphic indecomposable modules, the indecomposable objects of \mathcal{A} are the pairs (P_i, P_j) and if $a \in \text{End}_A P$ is in radical, it acts trivially on \mathcal{B} . Therefore, we can factor out such morphisms. Reduced in this way, the bimodule category $\text{El}(\mathcal{B})$ can be considered as that of representations of the quiver Γ whose vertices are

$$\{1, 2, \dots, n, 1', 2', \dots, n'\}$$

and there are c_{ij} arrows $i \rightarrow j'$, where $c_{ij} = \dim \text{Hom}_A(P_i, P_j)$.

This approach was used by P. Gabriel in [26], who deduced from his result on representations of quivers a criterion for an algebra A with

$$(\text{rad } A)^2 = 0$$

to be of finite representation type.

The same approach was used by S. Kruglyak [33]. In fact, he also proved the Gabriel's Theorem 2.2 for this specific sort of quivers and obtained the same finiteness criterion for algebras with $(\text{rad } A)^2 = 0$.

There is a close relation of bimodule categories to representations of boxes. Namely, in [16] the following result was proved.

Theorem 4.8. *Suppose that \mathbb{k} is algebraically closed and the bimodule \mathcal{B} is locally finite dimensional. There is a Roiter box \mathfrak{A} such that the categories $\text{Rep } \mathfrak{A}$ and $\text{El}(\mathcal{B})$ are equivalent.*

The box \mathfrak{A} and this equivalence were explicitly constructed.

Together with Proposition 4.6, it gives a tool to replace the study of modules over an algebra A by representations of boxes.

The language of boxes has a powerful advantage. Namely, it allows to make *change of rings* easily. Note that if $\gamma : A \rightarrow B$ is a homomorphism of rings, every B -module can be considered as A -module, which defines a functor $\gamma^* : B\text{-mod} \rightarrow A\text{-mod}$. Unfortunately, this functor is far from being full, or faithful, or dense (essentially surjective). On the contrary, on the level of boxes an analogous change of rings can be done perfectly, as shown in [16] (see also [18]).

Theorem 4.9. *Let $\mathfrak{A} = (\mathcal{A}, \mathcal{V}, \mu, \varepsilon)$ be a box and $F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ be a functor. Set $\mathcal{W} = \mathcal{B} \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{V} \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{B}$.*

- (1) *There are natural morphisms $\nu : \mathcal{W} \otimes_{\mathcal{B}} \mathcal{W} \rightarrow \mathcal{W}$ and $\theta : \mathcal{W} \rightarrow \mathcal{B}$ such that $\mathfrak{A}^F = (\mathcal{B}, \mathcal{W}, \nu, \theta)$ is a box.*

Actually, ν arises from the map $\mathcal{V} \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V} \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{B} \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{V}$ that maps $a \otimes b$ to $a \otimes 1 \otimes b$ and θ is the composition

$$\mathcal{B} \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{V} \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{B} \xrightarrow{1 \otimes \mu \otimes 1} \mathcal{B} \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{A} \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{B} \simeq \mathcal{B} \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{B} \xrightarrow{\text{mult}} \mathcal{B},$$

where mult is the multiplication.

- (2) *The natural map $F^* : \text{Rep } \mathfrak{A}^F \rightarrow \text{Rep } \mathfrak{A}$ gives a fully faithful functor which establishes an equivalence of the category $\text{Rep } \mathfrak{A}^F$ and the full subcategory of $\text{Rep } \mathfrak{A}$ consisting of representations of the form MF , where M is a \mathcal{B} -module.*

Often one can choose F such that every representation of \mathfrak{A} is isomorphic to such composition. Then F^ is an equivalence $\text{Rep } \mathfrak{A}^F \xrightarrow{\sim} \text{Rep } \mathfrak{A}$.*

Usually, the functor F is constructed as follows [18]. We choose a “simple” subcategory $\mathcal{A}' \subset \mathcal{A}$ such that the \mathcal{A}' -modules can be easily described. It gives rise to a functor $F' : \mathcal{A}' \rightarrow \mathcal{B}'$ such that every \mathcal{A}' -module of some class \mathcal{C} is isomorphic to $M'F'$ for some \mathcal{B}' -module. Then we take for \mathcal{B} the pullback $\mathcal{A} \amalg_{\mathcal{A}'} \mathcal{B}'$ of \mathcal{A} and \mathcal{B}' over \mathcal{A}' and for F the extension of F' onto \mathcal{A} . In this case the image of F^* contains all representations such that their restrictions onto \mathcal{A}' are from the class \mathcal{C} . Note that there is a rather simple algorithm that calculates the box \mathfrak{A}^F . One can see [18, Sec. 6] for examples of explicit calculations.

5. TAME AND WILD ALGEBRAS

When studying the algebras of infinite representation type, they found out that there are two completely different sorts of them. The first paper where it was remarked was, perhaps, that of S. Krugluak [32]. Namely, he considered representations of the group P of type (p, p) :

$$G = \langle a, b \mid a^p = b^p = 1, ab = ba \rangle,$$

for prime $p > 2$. He noticed that for any n -tuple of square matrices X_1, X_2, \dots, X_n one can construct a representation $M(X_1, X_2, \dots, X_n)$ of the group P depending on this tuple so that

$$M(X_1, X_2, \dots, X_n) \simeq M(Y_1, Y_2, \dots, Y_n)$$

if and only if there is an invertible matrix S such that $Y_i = S^{-1}X_iS$ for all i . Thus, to classify all representations of G one has to classify all tuples of matrices up to conjugation. Quite another story is if $p = 2$, when, for each dimension, there is either finitely many indecomposable representations or they form a 1-parameter family [2].

An analogous effect was noticed by I. Gelfand and V. Ponimarev [27] who considered pairs of commuting operators, or, the same, representations of the polynomial algebra $\mathbb{k}[x, y]$. Again, they constructed representations

$$M(X_1, X_2, \dots, X_n)$$

with the same property as above. On the other hand, they have classified all pairs (A, B) of mutually annihilating matrices, i.e. such that

$$AB = BA = 0.$$

In 1972 Yu. Drozd divided all commutative finitely generated algebras over an algebraically closed field into two types [13], whose representations behaved just as representations of the (p, p) group, respectively, for $p = 2$ and for $p > 2$.

In their paper [11] P. Donovan and M. R. Freislich conjectured that all finite dimensional algebras of infinite representation type can be split into two classes, which they called *tame* and *wild*. Formal definitions of these two classes were proposed by Yu. Drozd in [15]. We present here a bit changed but equivalent version of this definition.

Definition 5.1. *An algebra A over an algebraically closed field \mathbb{k} is called*

- **tame** if, for every dimension d its indecomposable representations form a finite set of algebraic families parametrized by an open subset of the projective line;

(Note that it is allowed that some of these families are *trivial*, i.e. consist of isomorphic representations. Thus representation finite algebras are also tame according to this definition.)

- **wild** if for every finitely generated algebra B there is an exact functor $F : B\text{-mod} \rightarrow A\text{-mod}$ such that

- ★ $FM \simeq FN$ if and only if $M \simeq N$;
- ★ FM is indecomposable if and only if so is M .

In the same paper it was proved that neither algebra can be both tame and wild.

By this time a lot of examples were already known when the “*tame-wild dichotomy*” took place. For representations of quivers P. Donovan and M. R. Freislich [10] and, independently, L. Nazarova [36] proved that a quiver Γ is tame if and only if its underlying graph is a disjoint union of *Euclidean* (or *extended Dynkin*) graphs presented in Table 5.1. Otherwise Γ is wild. Moreover, they gave an explicit description of representations of Euclidean quivers. We only present the qualitative part of this description.

Theorem 5.2. *Let Γ be a Euclidean quiver, Q_Γ be its Tits form and \mathbf{d} be a dimension for its representations.*

- (1) *There is an indecomposable representation of dimension \mathbf{d} if and only if $Q_\Gamma(\mathbf{d}) \leq 1$.*
- (2) *If $Q_\Gamma(\mathbf{d}) = 1$, there is exactly one indecomposable representation of dimension \mathbf{d} (up to isomorphism).*

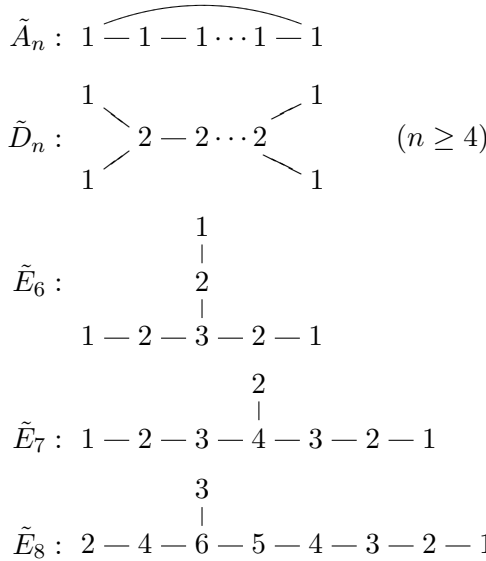


TABLE 5.1. Euclidean graphs

(3) If $Q_\Gamma(\mathbf{d}) = 0$, there are infinitely many non-isomorphic indecomposable representations of dimension \mathbf{d} that form an algebraic family of such representations parametrized by the projective line.

Note that every dimension \mathbf{d} with $Q_\Gamma(\mathbf{d}) = 0$ is an integral multiple of the smallest one. The coordinates of such smallest dimensions are also given in Table 5.1.

In [37] L. Nazarova proved that a poset \mathfrak{S} is tame if and only if it does not contain *supercritical subsets* listed in Table 5.2. Otherwise \mathfrak{S} is wild.

Finally, in [16] Yu. Drozd proved the result known now as “tame-wild dichotomy”.

Theorem 5.3. *Every box, as well as every finite dimensional algebra over an algebraically closed field is either tame or wild.*

The proof for boxes was based on the reduction procedure described in Theorem 4.9. Using this procedure it turned necessary to consider a bit bigger class of boxes obtained from Roiter boxes by a localization with respect to a polynomial $f(a)$, where $a \in \mathbf{A}_0$ was a loop such that

$$\partial a = 0.$$

Then this result was extended to finite dimensional algebras using Proposition 4.6 and Theorem 4.8.

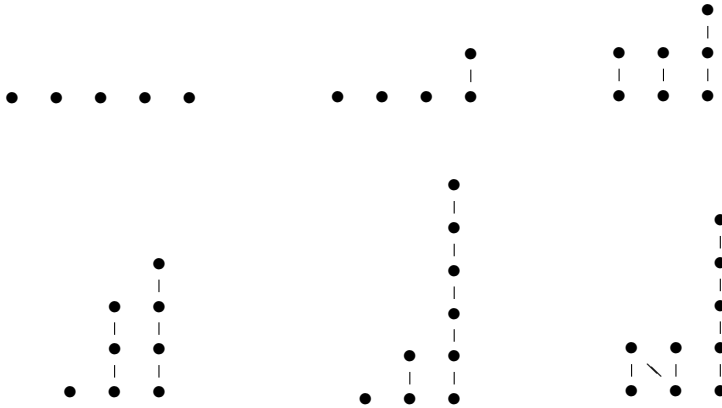


TABLE 5.2. Supercritical posets
 These posets are called, respectively,
 $(1, 1, 1, 1, 1)$, $(1, 1, 1, 2)$, $(2, 2, 3)$, $(1, 3, 4)$, $(1, 2, 6)$ and $(N, 5)$.

The same approach was used by V. Bekkert and Yu. Drozd [3, 19] to prove that tame-wild dichotomy also holds true for *derived categories* of modules over finite dimensional algebras. Another important result was obtained by Yu. Drozd and S. Ovsienko [24] who proved that tameness is preserved in *Galois coverings* with torsion free Galois groups. Note that coverings introduced by K. Bongartz and P. Gabriel [8] are now a powerful tool in the representation theory of algebras and in the study of matrix problems. Again, in these papers they had to widen the considered class of boxes.

Perhaps, the first paper, where the “tame-wild dichotomy” was effectively used, was that of V. Bondarenko and Yu. Drozd [6] devoted to the representation type of finite groups. Let G a finite group and \mathbb{k} be a field of characteristic $p > 0$. By that time it had been known that the group algebra $\mathbb{k}G$ is representation finite if and only if the Sylow p -subgroup of G is cyclic. The result of Kruglyak [32] cited above had shown that, if $p > 2$, all other group algebras are wild. If $p = 2$, V. Bondarenko [5] and C. Ringel [41] described the representations of *dihedral* groups and actually showed that they are tame. It was also known that there were at most two more classes of 2-groups that are not wild. They were *quasi-dihedral* and *generalized quaternion* groups. In [6] the representations of quasi-dihedral groups were classified. From the tame-wild dichotomy it followed that any subgroup of a tame group is tame and if the Sylow p -subgroup is tame, so is the group G . Since generalized quaternion groups are subgroups of quasi-dihedral ones, the following result was proved.

Theorem 5.4. *The group algebra $\mathbb{k}G$ is tame if and only if either the Sylow subgroup G_p of G is cyclic or $p = 2$ and G_p is dihedral, quasi-dihedral or generalized quaternion. In all other cases $\mathbb{k}G$ is wild.*

6. INVOLUTION

Papers [43] and [48] initiated the study of matrix problems with involution. Namely, in [43] A. Roiter introduced the general notion of *boxes with involution* and proved an important result, which was a far-reaching generalization of [35, § 23.2, Thm. 3].

Theorem 6.1. *Let \mathfrak{A} be a box with involution over an algebraically closed field \mathbb{k} of characteristic $\neq 2$, M, N be its self-adjoint representations in the involutive category of vector spaces with the standard involution*

$$V \mapsto V^* = \text{Hom}_{\mathbb{k}}(V, \mathbb{k}).$$

*If $M \simeq N$ in the category $\text{Rep } \mathfrak{A}$, they are **congruent**, i.e. there is an isomorphism $\phi : M \xrightarrow{\sim} N$ such that $\phi^{-1} = \phi^*$.*

In [48] this approach was applied to *simple involutive quivers*, i.e. such quivers with involution $*$ that $a \neq a^*$ for any vertex a . The simplest example of such a quiver is

$$1 \begin{array}{c} \xrightarrow{\alpha} \\ \xleftarrow{\beta} \end{array} 2; \quad 1^* = 2, \quad \alpha^* = \beta. \tag{6.1}$$

A self-adjoint representation of this quiver is actually given by a linear map $V \rightarrow V^*$ or, the same, by a bilinear form in the space V . The Roiter's Theorem 6.1 shows that to classify such forms one has to classify self-adjoint representations of the Kronecker quiver (6.1). Just in the same way, self-adjoint representations of a simple involutive quiver can be identified with systems of linear maps and bilinear forms. In [48] V. Sergeichuk defined the *scheme* of a simple involutive quiver Γ as the (non-oriented) graph whose vertices are in one-to-one correspondence with the pairs a, a^* of vertices of Γ and the edges between a, a^* and b, b^* are in one-to-one correspondence with the arrows¹.

$$a \rightarrow b, \quad a \rightarrow b^*, \quad a^* \rightarrow b, \quad a^* \rightarrow b^*$$

For instance, the scheme of the involutive quiver (6.1) is just a loop $\bullet \circlearrowright$

In [48] V. Sergeichuk proved the following criterion.

Theorem 6.2. *With respect to the classification of self-adjoint representations a simple involutive quiver with the scheme \mathbf{B} is*

¹ Actually, the definition in [48] was a bit different but equivalent to this one.

- *representation finite if and only if \mathbf{B} is Dynkin;*
- *tame if and only if \mathbf{B} is Euclidean;*
- *wild otherwise.*

In the paper [47] V. Sergeichuk developed a general theory of representations of categories with involution. Namely, let \mathbb{k} be a field with involution $\lambda \mapsto \bar{\lambda}$ (maybe, trivial). An *involution* $*$ on a \mathbb{k} -linear category \mathcal{C} maps objects to objects, morphisms to morphisms so that

$$a^{**} = a, \quad (\alpha\beta)^* = \beta^*\alpha^*, \quad (\alpha + \beta)^* = \alpha^* + \beta^*, \quad (\lambda\alpha)^* = \bar{\lambda}\alpha^*.$$

for $\lambda \in \mathbb{k}$. For a vector space V over \mathbb{k} denote by V^* the space of semilinear maps $V \rightarrow \mathbb{k}$ and by $\varphi^* : W^* \rightarrow V^*$ the adjoint map for the linear map $\varphi : V \rightarrow W$.

If $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathbf{Vec}_{\mathbb{k}}$ is a representation of \mathcal{C} over \mathbb{k} , the *adjoint representation* F^* is such that $F^*(a) = F(a^*)^*$ for any object or morphism a .

Suppose that the involution $*$ is *simple*, i.e. $a \not\cong a^*$ for every object a . Then there is a bisection

$$\text{Ob } \mathcal{C} = \text{Ob}_0 \sqcup \text{Ob}_1$$

such that if $b \cong a^*$ the objects a and b are in different parts of this bisection. The following procedure was proposed in [47] for the description of self-adjoint representations of \mathcal{C} . Let $\text{ind}_0 \mathcal{C}$ be a full set of representatives of isomorphism classes of indecomposable *self-adjoint* representations (i.e. such that $F^* = F$) and $\text{ind}_1 \mathcal{C}$ be a full set of representatives of isomorphism classes of indecomposable representations which are not isomorphic to any self-adjoint one. For any representation $F \in \text{ind}_1 \mathcal{C}$ define the self-adjoint representation F^+ as follows.

- If $a \in \text{Ob}_0$, then

$$F^+(a) = F(a) \oplus F^*(a);$$

if $a \in \text{Ob}_1$, then

$$F^+(a) = F^*(a) \oplus F(a).$$

- If $\alpha : a \rightarrow b$, then the matrix presentation of $F^+(a)$ with respect to the preceding decompositions of $F^+(a)$ and $F^+(a)$ is

$$\star \begin{pmatrix} F(\alpha) & 0 \\ 0 & F^*(\alpha) \end{pmatrix} \text{ if } a, b \in \text{Ob}_0;$$

$$\star \begin{pmatrix} F^*(\alpha) & 0 \\ 0 & F(\alpha) \end{pmatrix} \text{ if } a, b \in \text{Ob}_1;$$

$$\star \begin{pmatrix} 0 & F^*(\alpha) \\ F(\alpha) & 0 \end{pmatrix} \text{ if } a \in \text{Ob}_0, b \in \text{Ob}_1;$$

$$\star \begin{pmatrix} 0 & F(\alpha) \\ F^*(\alpha) & 0 \end{pmatrix} \text{ if } a \in \text{Ob}_1, b \in \text{Ob}_0.$$

Obviously, $F^+ \simeq F \oplus F^*$, but the latter representation is not self-adjoint.

Let now

$$F \in \text{ind}_0 \mathcal{C}, \quad \Lambda(F) = \text{End } F, \quad \Delta(F) = \Lambda(F) / \text{rad } \Lambda(F).$$

Note that $\Lambda(F)$ is an algebra with involution $*$ and $\Delta(F)$ is a skewfield with the induced involution, which we denote by $\bar{}$. If $\phi \in \Lambda(F)$ is invertible and $\phi = \phi^*$, set $\tilde{\phi}(a) = 1_{F(a)}$ for $a \in \text{Ob}_0$, $\tilde{\phi}(a) = \phi(a)$ for $a \in \text{Ob}_1$ and define the representation F^ϕ as follows.

- $F^\phi(a) = F(a)$ for any object a .
- $F^\phi(\alpha) = \tilde{\phi}(b)^{-1} F(a) \tilde{\phi}(a)$ for $\alpha : a \rightarrow b$.

One easily sees that $\tilde{\phi}$ is an isomorphism $A^\phi \xrightarrow{\sim} A$ (though not a congruence). For a self-adjoint element $\xi \neq 0$ of the skewfield $\Delta(F)$ choose a self-adjoint preimage $\phi \in \Lambda(F)$ and set $F^\xi = F^\phi$. For a vector

$$\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m) \in \Delta(F)^m$$

with invertible components set

$$F^\xi = \bigoplus_{i=1}^m F^{\xi_i}, \quad Q_\xi = \sum_{i=1}^m \bar{x}_i \xi_i x_i$$

(it is a Hermitian form over the skewfield $\Delta(F)$).

The following theorem (see [47, Thm 1]) gives a complete description of self-adjoint representations.

Theorem 6.3. *Let \mathbb{k} be a field of characteristic $\neq 2$, \mathcal{C} be a \mathbb{k} -category with a simple involution. Every self-adjoint representation of \mathcal{C} is congruent to a direct sum*

$$F_1^+ \oplus F_2^+ \oplus \dots \oplus F_k^+ \oplus F_{k+1}^{\xi_1} \oplus F_{k+2}^{\xi_2} \oplus \dots \oplus F_n^{\xi_{n-k}},$$

where $F_i \in \text{ind}_1 \mathcal{C}$ for $1 \leq i \leq k$ and $F_i \in \text{ind}_0 \mathcal{C}$ for $k < i \leq n$. This decomposition is unique up to permutation of summands and replacing $F_{k+l}^{\xi_l}$ by $F_{k+l}^{\xi'_l}$ such that the Hermitian forms Q_{ξ_l} and $Q_{\xi'_l}$ are equivalent over the skewfield $\Delta(F_{k+l})$.

This description becomes simpler if one knows the classification of hermitian forms, for instance, if $\mathbb{k} = \mathbb{C}$ (either with trivial or with non-trivial involution), or \mathbb{R} , or a finite field (see [47, Thm. 2]).

Applying this theorem to the representations of simple involutive quivers, one obtains classification results for a lot of problems of linear algebra such as classification of bilinear forms, some sorts of operators in spaces with bilinear metric etc. See, for instance, the book [46] for some results of this sort.

REFERENCES

- [1] R. Bautista. On algebras of strongly unbounded representation type. *Comment. Math. Helv.*, 60(3):392–399, 1985, doi: 10.1007/BF02567422.
- [2] V. A. Bašev. Representations of the group $Z_2 \times Z_2$ in a field of characteristic 2. *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 141:1015–1018, 1961.
- [3] V. I. Bekkert, Yu. A. Drozd. Tame-wild dichotomy for derived categories. arXiv:math.RT/0310352, 2003.
- [4] I. N. Bernštein, I. M. Gelfand, V. A. Ponomarev. Coxeter functors, and Gabriel’s theorem. *Uspehi Mat. Nauk*, 28(2(170)):19–33, 1973.
- [5] V. M. Bondarenko. Representations of dihedral groups over a field of characteristic 2. *Mat. Sb. (N.S.)*, 96(138):63–74, 167, 1975.
- [6] V. M. Bondarenko, Yu. A. Drozd. The representation type of finite groups. *Zap. Naučn. Sem. Leningrad. Otdel. Mat. Inst. Steklov. (LOMI)*, 71:24–41, 282, 1977. Modules and representations.
- [7] K. Bongartz. Indecomposables are standard. *Comment. Math. Helv.*, 60(3):400–410, 1985, doi: 10.1007/BF02567423.
- [8] K. Bongartz, P. Gabriel. Covering spaces in representation-theory. *Invent. Math.*, 65(3):331–378, 1981/82, doi: 10.1007/BF01396624.
- [9] R. Brauer. On the indecomposable representations of algebras. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 47:684, 1941.
- [10] P. Donovan, M. R. Freislich. *The representation theory of finite graphs and associated algebras*. Carleton University, Ottawa, Ont., 1973. Carleton Mathematical Lecture Notes, No. 5.
- [11] P. Donovan, M. R. Freislich. Some evidence for an extension of the Brauer-Thrall conjectures. *Sonderforschungsbereich Theor. Math., Bonn*, 40, 1973.
- [12] Yu. A. Drozd. Matrix problems, and categories of matrices. *Zap. Naučn. Sem. Leningrad. Otdel. Mat. Inst. Steklov. (LOMI)*, 28:144–153, 1972. Investigations on the theory of representations.
- [13] Yu. A. Drozd. Representations of commutative algebras. *Funkcional. Anal. i Priložen.*, 6(4):41–43, 1972.
- [14] Yu. A. Drozd. Coxeter transformations and representations of partially ordered sets. *Funkcional. Anal. i Priložen.*, 8(3):34–42, 1974.
- [15] Yu. A. Drozd. On tame and wild matrix problems. In *Matrix problems (Russian)*, pages 104–114. Akad. Nauk Ukrain. SSR, Inst. Mat., Kiev, 1977.
- [16] Yu. A. Drozd. Tame and wild matrix problems. In *Representations and quadratic forms (Russian)*, pages 39–74, 154. Akad. Nauk Ukrain. SSR, Inst. Mat., Kiev, 1979.
- [17] Yu. A. Drozd. Representations of bisected posets and reflection functors. In *Algebras and modules, II (Geiranger, 1996)*, volume 24 of *CMS Conf. Proc.*, pages 153–165. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1998.
- [18] Yu. A. Drozd. Reduction algorithm and representations of boxes and algebras. *C. R. Math. Acad. Sci. Soc. R. Can.*, 23(4):97–125, 2001.
- [19] Yu. A. Drozd. Derived tame and derived wild algebras. *Algebra Discrete Math.*, 3(1):57–74, 2004.
- [20] Yu. A. Drozd. Vector bundles and Cohen-Macaulay modules. In *Representations of finite dimensional algebras and related topics in Lie theory and geometry*, volume 40 of *Fields Inst. Commun.*, pages 189–222. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2004.

- [21] Yu. A. Drozd. Matrix problems, triangulated categories and stable homotopy types. *São Paulo J. Math. Sci.*, 4(2):209–249, 2010, doi: 10.11606/issn.2316-9028.v4i2p209-249.
- [22] Yu. A. Drozd, V. V. Kirichenko. *Finite-dimensional algebras*. Springer-Verlag, Berlin, 1994, doi: 10.1007/978-3-642-76244-4. Translated from the 1980 Russian original and with an appendix by Vlastimil Dlab.
- [23] Yu. A. Drozd, E. A. Kubichka. Dimensions of finite type for representations of partially ordered sets. *Algebra Discrete Math.*, (3):21–37, 2004.
- [24] Yu. A. Drozd, S. A. Ovsienko. Coverings of tame boxes and algebras. Preprint MI 00-26, 2000. Max-Planck-Institut für Mathematik.
- [25] U. Fischbacher. Une nouvelle preuve d’un théorème de Nazarova et Roïter. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, 300(9):259–262, 1985.
- [26] P. Gabriel. Unzerlegbare Darstellungen. I. *Manuscripta Math.*, 6:71–103; correction, *ibid.* 6 (1972), 309, 1972, doi: 10.1007/BF01298413.
- [27] I. M. Gelfand, V. A. Ponomarev. Remarks on the classification of a pair of commuting linear transformations in a finite-dimensional space. *Funkcional. Anal. i Priložen.*, 3(4):81–82, 1969.
- [28] J. P. Jans. On the indecomposable representations of algebras. *Ann. of Math. (2)*, 66:418–429, 1957, doi: 10.2307/1969899.
- [29] M. M. Kleïner. Faithful representations of partially ordered sets of finite type. *Zap. Naučn. Sem. Leningrad. Otdel. Mat. Inst. Steklov. (LOMI)*, 28:42–59, 1972. Investigations on the theory of representations.
- [30] M. M. Kleïner. Partially ordered sets of finite type. *Zap. Naučn. Sem. Leningrad. Otdel. Mat. Inst. Steklov. (LOMI)*, 28:32–41, 1972. Investigations on the theory of representations.
- [31] M. M. Kleïner, A. V. Roïter. Representations of differential graded categories. In *Matrix problems (Russian)*, pages 5–70. Akad. Nauk Ukrain. SSR, Inst. Mat., Kiev, 1977.
- [32] S. A. Krugljak. Representations of the group (p, p) over a field of characteristic p . *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 153:1253–1256, 1963.
- [33] S. A. Krugljak. Representations of algebras for which the square of the radical equals zero. *Zap. Naučn. Sem. Leningrad. Otdel. Mat. Inst. Steklov. (LOMI)*, 28:60–68, 1972. Investigations on the theory of representations.
- [34] Peter Magyar, Jerzy Weyman, Andrei Zelevinsky. Multiple flag varieties of finite type. *Adv. Math.*, 141(1):97–118, 1999, doi: 10.1006/aima.1998.1776.
- [35] A. I. Malcev. *Foundations of Linear Algebra (Russian)*. Izdat. “Nauka”, Moscow, 1970.
- [36] L. A. Nazarova. Representations of quivers of infinite type. *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.*, 37:752–791, 1973.
- [37] L. A. Nazarova. Partially ordered sets of infinite type. *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.*, 39(5):963–991, 1219, 1975.
- [38] L. A. Nazarova, A. V. Roïter. Matrix questions and the Brauer-Thrall conjectures on algebras with an infinite number of indecomposable representations. In *Representation theory of finite groups and related topics (Proc. Sympos. Pure Math., Vol. XXI, Univ. Wisconsin, Madison, Wis., 1970)*, pages 111–115, 1971.
- [39] L. A. Nazarova, A. V. Roïter. Representations of partially ordered sets. *Zap. Naučn. Sem. Leningrad. Otdel. Mat. Inst. Steklov. (LOMI)*, 28:5–31, 1972. Investigations on the theory of representations.
- [40] L. A. Nazarova, A. V. Roïter. *Categorical matrix problems and the Brauer-Thrall conjecture (Russian)*. Izdat. “Naukova Dumka”, Kiev, 1973.

- [41] Claus Michael Ringel. The indecomposable representations of the dihedral 2-groups. *Math. Ann.*, 214:19–34, 1975, doi: 10.1007/BF01428252.
- [42] A. V. Roïter. Unboundedness of the dimensions of the indecomposable representations of an algebra which has infinitely many indecomposable representations. *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.*, 32:1275–1282, 1968.
- [43] A. V. Roïter. BOCSs with involution. In *Representations and quadratic forms (Russian)*, pages 124–126, 155. Akad. Nauk Ukrain. SSR, Inst. Mat., Kiev, 1979.
- [44] A. V. Roïter. Matrix problems and representations of BOCSs. In *Representations and quadratic forms (Russian)*, pages 3–38, 154. Akad. Nauk Ukrain. SSR, Inst. Mat., Kiev, 1979.
- [45] A. V. Roïter. Representations of posets and tame matrix problems. In *Representations of algebras (Durham, 1985)*, volume 116 of *London Math. Soc. Lecture Note Ser.*, pages 91–107. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1986.
- [46] V. V. Sergeichuk. *Canonical matrices and related questions*. Kyïv: Instytut Matematyky NAN Ukraïny, 2006 (in English).
- [47] V. V. Sergeïchuk. Classification problems for systems of forms and linear mappings. *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.*, 51(6):1170–1190, 1358, 1987, doi: 10.1070/IM1988v031n03ABEH001086.
- [48] V. V. Sergeïčuk. Representations of simple involutive quivers. In *Representations and quadratic forms (Russian)*, pages 127–148, 156. Akad. Nauk Ukrain. SSR, Inst. Mat., Kiev, 1979.
- [49] R. M. Thrall. On ahdir algebras. Preliminary report. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 53:49, 1947.
- [50] Tensho Yoshii. On algebras of bounded representation type. *Osaka Math. J.*, 8:51–105, 1956.

Yu. A. Drozd

INSTITUTE OF MATHEMATICS NAS OF UKRAINE, KYIV

Email: y.a.drozd@gmail.com, drozd@imath.kiev.ua

ORCID: orcid.org/0000-0002-4766-8791

Нелінійні кінетичні рівняння квантових систем

В. І. Герасименко

Abstract. The article overviews some achievements in the mathematical understanding of the nature of kinetic equations of quantum many-particle systems. The fundamental equations of modern mathematical physics, in particular, the hierarchies of evolutionary equations of quantum systems and their asymptotic behavior, which is described by nonlinear kinetic equations, are studied.

Анотація. У статті розглядаються деякі досягнення в математичному розумінні природи кінетичних рівнянь квантових систем багатьох частинок. Вивчаються фундаментальні рівняння сучасної математичної фізики, зокрема, ієрархії еволюційних рівнянь квантових систем та їх асимптотична поведінка, яка описується нелінійними кінетичними рівняннями.

1. ПЕРЕДНЄ СЛОВО: ХРОНОЛОГІЯ ТЕОРІЇ КІНЕТИЧНИХ РІВНЯНЬ

Математично колективні властивості систем багатьох частинок в кінетичній теорії описуються за допомогою кінетичних рівнянь - нелінійних рівнянь, якими описується еволюція стану системи частинок в термінах стану типової частинки. Генератор таких еволюційних рівнянь складається з доданка, який описує вільну еволюцію (рух за інерцією) типової частинки системи та нелінійного доданка, який моделює самозаємодію типової частинки (інтеграл зіткнень). За допомогою розв'язку кінетичного рівняння визначаються середні значення спостережуваних величин системи частинок. Загальновідомим прикладом кінетичного рівняння є рівняння Больцмана, яким описується процес зіткнення частинок в розріджених газах. Квантові кінетичні рівняння є відповідними узагальненнями кінетичних рівнянь класичних систем частинок.

2010 Mathematics Subject Classification: 82C05, 82C40, 35Q20, 46N55, 47J35
УДК 517.9; 531.19

З фізичної точки зору кінетичними рівняннями описується певний етап процесу переходу (релаксації) з нерівноважного стану у стан термодинамічної рівноваги системи багатьох частинок. А саме, в загальному випадку в процесі релаксації довільний нерівноважний стан системи частинок прямує до стану, який цілком описується в термінах одночастинкової функції розподілу ймовірності (для квантових систем – одночастинковим статистичним оператором, ядро якого відоме як одночастинкова матриця густини), яка визначається з відповідного кінетичного рівняння в залежності від потенціалу взаємодії частинок. На наступному етапі релаксації такий стан системи частинок прямує до локально-рівноважного стану, який характеризується гідродинамічними параметрами. Еволюція гідродинамічних параметрів своєю чергою описується за допомогою рівнянь суцільного середовища (рівнянь гідродинаміки, дифузії).

Свої джерела сто п'ятдесят річна історія кінетичних рівнянь бере з праць Дж. Максвелла (J. C. Maxwell, 1860 р., 1867 р.), та Л. Больцмана (L. E. Boltzmann, 1872 р.). У 1972 р. Л. Больцман сформулював еволюційне рівняння для одночастинкової функції розподілу і показав, що максвеллівський розподіл описує лише рівноважний стан газу. Він довів так звану “Н-теорему” (про зростання ентропії) – властивість розв'язку цього рівняння, яка пояснювала незворотність макроскопічної динаміки. Таким чином, з цього часу почався період розвитку теорії кінетичних рівнянь, в основу якого було покладено феноменологічні моделі кінетичних явищ.

Пізніше з метою узагальнення рівняння Больцмана на густі гази або рідини для системи багатьох пружних куль було сформульовано кінетичне рівняння Енскоґа (D. Enskog, 1922 р.); для виділеної (броунівської) частинки в системі багатьох частинок (термостаті) – рівняння Фоккера-Планка (A. D. Fokker, 1914 р., M. Planck, 1917 р.) і його частковий випадок - рівняння Смолуховського (M. Smoluchowski, 1906 р.); для стохастичної динаміки системи частинок – рівняння Леонтовича (M. A. Леонтович, 1935 р.). Для систем заряджених частинок (іонізовані гази, плазма) в цей період розвитку кінетичної теорії були також сформульовані: рівняння Ландау (Л. Д. Ландау, 1936 р.), рівняння Власова (А. А. Власов, 1937 р.), пізніше – рівняння Ленарда-Балеску (A. Lenard, R. Balescu, R. L. Guernsey, 1960 р.)

З початком розвитку квантової теорії було сформульовано квантовий аналог рівняння Больцмана – кінетичне рівняння Улінґа-Уленбека (L. W. Nordheim, 1928 р.; E. A. Uehling, G. E. Uhlenbeck, 1933 р.), як наближення середнього (самоузгодженого) поля для чистих квантових

станів - рівняння Хартрі (D.R. Hartree, 1928 р.) або систем ферміонів і бозонів – рівняння Хартрі-Фока (В. А. Фок, 1930 р.). Пізніше в наближенні середнього поля для далекосяжних потенціалів взаємодії частинок було сформульовано квантове кінетичне рівняння Власова (А. А. Власов, 1947 р.), для квантових систем в конденсованих станах – кінетичне рівняння Боголюбова (М. М. Боголюбов, 1947 р.) та рівняння Гросса-Пітаєвського (Е. Р. Gross, L. D. Pitaevskii, 1961 р.).

З другої половини 40-х років ХХ століття починається новий етап у розвитку кінетичної теорії, а саме, створення формалізованої теорії кінетичних явищ. У 1946 р. в Києві (Інститут математики) у відомій монографії [4] М. М. Боголюбов сформулював послідовний підхід до виведення кінетичних рівнянь з динаміки систем багатьох частинок, а саме, фундаментальних рівнянь, якими описується еволюція всіх можливих станів систем частинок – ієрархії еволюційних рівнянь ББГКІ (Боголюбов-Борн-Грін-Кірквуд-Івон) або ланцюжка рівнянь Боголюбова. За допомогою методів теорії збурень було розроблено метод побудови узагальнення рівняння Больцмана (кінетичне рівняння Боголюбова), кінетичних рівнянь Власова та Ландау. Завдяки цій роботі став зрозумілим механізм виникнення незворотності макроскопічної еволюції систем багатьох частинок, динаміка яких в мікроскопічному масштабі описується зворотними у часі рівняннями руху.

Згодом в працях Г. Греда (H. Grad, 1958 р.) було сформульовано підхід до обґрунтування кінетичних рівнянь, як еволюційних рівнянь, якими описується асимптотика розв'язку ієрархії рівнянь ББГКІ у скейлінговій границі за відповідним малим параметром. В останні десятиріччя такий підхід використовується як загальноприйнятий метод строгого виведення кінетичних рівнянь складних систем різноманітної природи. В цілому проблема строгого виведення кінетичних рівнянь з динаміки систем багатьох частинок залишається відкритою проблемою кінетичної теорії.

На сучасному етапі розвитку кінетичної теорії найбільш розвинутою є математична теорія нелінійного рівняння Больцмана, що бере свої джерела з праць А. Пуанкаре (H. Poincaré, 1906 р.), який привернув увагу математиків до необхідності обґрунтування кінетичної теорії та Д. Гільберта (D. Hilbert, 1912 р.), який встановив зв'язок розв'язку рівняння Больцмана з рівняннями гідродинаміки (шоста проблема Д. Гільберта сформульована на Міжнародному конгресі математики в 1900 р.), а також праці Т. Карлемана (T. Carleman, 1932 р.) з математичного аналізу просторово однорідного рівняння Больцмана.

Математична теорія нелінійних кінетичних рівнянь почала інтенсивно розвиватися з початку 80-х років ХХ століття. Одним з досягнень

цього періоду було строге виведення рівняння Больцмана з динаміки нескінченної кількості твердих куль в границі Больцмана - Греда [33,36]. Строгі результати з теорії кінетичних рівнянь та їх обґрунтування наприкінці ХХ століття було підсумовано в монографіях [5, 6, 38].

За останнє десятиліття математичні результати з виведення кінетичного рівняння Больцмана для класичних систем частинок з короткодіючим потенціалом взаємодії були узагальнені в монографії [8] та розвинуто нові методи виведення рівняння Больцмана [9] та Енскога [20] з динаміки частинок із зіткненнями [21] (більш детально див. посилання в цих роботах).

У останні два десятиліття також було досягнуто значного прогресу в проблемі виведення квантових кінетичних рівнянь в скейлінгових границях розв'язку ієрархії рівнянь ББГКІ побудованого методами теорії збурень [2, 31, 35], зокрема, квантового рівняння Больцмана [1] в границі слабкого зв'язку, нелінійного рівняння Шредінгера [3, 37] та рівняння Гросса-Пітаєвського [7] в границі середнього (самоузгодженого) поля.

Нижче вивчаються фундаментальні рівняння, якими описується природа речей, а саме ієрархії еволюційних рівнянь квантових систем багатьох частинок, та непертурбативні методи побудови їх розв'язків. На основі цього розглянуто два нових підходи до опису кінетичної еволюції квантових систем [13]. Один з них полягає в описі еволюції квантових систем частинок в скейлінговій границі самоузгодженого поля за допомогою ієрархії еволюційних рівнянь для спостережуваних [30] та підхід, який ґрунтується на немарковському узагальненні квантових кінетичних рівнянь [27].

2. ІЄРАРХІЇ ЕВОЛЮЦІЙНИХ РІВНЯНЬ КВАНТОВИХ СИСТЕМ

Як відомо, квантові системи описуються за допомогою таких понять, як спостережувані та стан. Функціонал середнього значення (математичне сподівання) спостережуваної визначає двоїстість (дуальність) спостережуваної та стану. Внаслідок цього існує два підходи до опису еволюції квантової системи скінченної кількості частинок, а саме, в термінах спостережуваних, еволюція яких визначаються рівнянням Гейзенберга, або в термінах стану, еволюція якого визначається рівнянням фон Неймана (квантового рівняння Ліувілля) для оператора густини (статистичного оператора), ядро якого відоме, як матриця густини, відповідно.

Еквівалентний підхід до опису еволюції систем багатьох частинок, як скінченної й нескінченної кількості частинок, полягає в описі еволюції або в термінах спостережуваних за допомогою послідовності операторів

відомих як s -частинкові спостережувані (оператори редукованих спостережуваних), еволюція яких визначається дуальною ієрархією рівнянь ББГКІ (Боголюбова – Борна – Гріна – Кирквуда – Івона) [13, 18], або в термінах стану за допомогою послідовності так званих s -частинкових операторів густини (редуковані оператори густини), еволюція якої визначається ієрархією рівнянь ББГКІ квантових систем [4].

Альтернативний метод опису еволюції стану квантової системи скінченної кількості частинок полягає в описі стану за допомогою операторів, які визначаються кластерними розкладами оператора густини. Такі оператори інтерпретуються як кореляції стану, та їх еволюція описується ієрархією рівнянь фон Неймана для послідовності кореляційних операторів [16, 23, 26].

2.1. Еволюційні рівняння систем багатьох частинок. Для загальності надалі розглядаються квантові системи нефіксованої кількості однакових безспінових частинок, тобто довільної, але скінченної середньої кількості частинок, у просторі \mathbb{R}^ν , $\nu \geq 1$, які задовольняють статистиці Максвелла – Больцмана, і використовується система одиниць де $\hbar = 2\pi\hbar = 1$ – стала Планка, $m = 1$ – маса частинок.

Позначимо n -частинковий гільбертів простір як $\mathcal{H}_n = \mathcal{H}^{\otimes n}$ та $\mathcal{H}^{\otimes 0} = \mathbb{C}$. Простір Фока над простором \mathcal{H} позначимо $\mathcal{F}_{\mathcal{H}} = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \mathcal{H}_n$. Самоспряжений оператор f_n визначений на просторі $\mathcal{H}_n = \mathcal{H}^{\otimes n}$ будемо надалі також позначати символом $f_n(1, \dots, n)$. Нехай $\mathfrak{L}(\mathcal{H}_n)$ – простір обмежених операторів $g_n \equiv g_n(1, \dots, n) \in \mathfrak{L}(\mathcal{H}_n)$ з операторною нормою $\|\cdot\|_{\mathfrak{L}(\mathcal{H}_n)}$. Відповідно, простір $\mathfrak{L}^1(\mathcal{H}_n)$ – простір ядерних операторів $f_n \equiv f_n(1, \dots, n) \in \mathfrak{L}^1(\mathcal{H}_n)$ з нормою:

$$\|f_n\|_{\mathfrak{L}^1(\mathcal{H}_n)} = \text{Tr}_{1, \dots, n} |f_n(1, \dots, n)|,$$

де символом $\text{Tr}_{1, \dots, n}$ позначено частинні сліди оператора f_n . Підпростір фінітних послідовностей вироджених операторів із нескінченно диференційованими ядрами з компактними носіями позначимо $\mathfrak{L}_0^1(\mathcal{F}_{\mathcal{H}})$.

Для квантової системи нефіксованої кількості частинок спостережувані описуються послідовностями $A = (A_0, A_1(1), \dots, A_n(1, \dots, n), \dots)$ самоспряжених операторів $A_n \in \mathfrak{L}(\mathcal{H}_n)$. Еволюція спостережуваних $A(t) = (A_0, A_1(t, 1), \dots, A_n(t, 1, \dots, n), \dots)$, де $t \in \mathbb{R}$, визначається задачею Коші для послідовності рівнянь Гейзенберга:

$$\frac{\partial}{\partial t} A(t) = \mathcal{N}A(t), \quad (2.1)$$

$$A(t)|_{t=0} = A(0), \quad (2.2)$$

де послідовність $A(0) = (A_0, A_1^0(1), \dots, A_n^0(1, \dots, n), \dots)$ – початкова спостережувана, генератор $\mathcal{N} = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \mathcal{N}_n$ визначається такою формулою

$$\mathcal{N}_n g_n \doteq -i (g_n H_n - H_n g_n), \quad (2.3)$$

та самоспряжений оператор $H_n = \sum_{j=1}^n K(j) + \epsilon \sum_{j_1 < j_2=1}^n \Phi(j_1, j_2)$ – гамільтоніан системи n частинок, тобто оператор $K(j)$ – оператор кінетичної енергії j частинки, Φ обмежений оператор парного потенціалу взаємодії, $\epsilon > 0$ – скейлінговий параметер.

Якщо $A(0) \in \mathfrak{L}(\mathcal{F}_{\mathcal{H}})$, тоді для довільних $t \in \mathbb{R}$ в просторі $\mathfrak{L}(\mathcal{F}_{\mathcal{H}})$ єдиний розв'язок задачі Коші (2.1), (2.2) зображується за допомогою однопараметричної сім'ї відображень $\mathcal{G}(t) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \mathcal{G}_n(t)$:

$$A(t) = \mathcal{G}(t)A(0),$$

де відображення $\mathcal{G}_n(t)$ визначається такою формулою

$$\mathbb{R}^1 \ni t \mapsto \mathcal{G}_n(t)g_n \doteq e^{itH_n}g_n e^{-itH_n}. \quad (2.4)$$

У просторі $\mathfrak{L}(\mathcal{H}_n)$ однопараметричне відображення (2.4) утворює *слабко неперервну групу операторів, інфінітезімальний генератор якої співпадає з оператором (2.3) на області його визначення.

Середнє значення (математичне сподівання) спостережуваної $A(t)$ в момент часу $t \in \mathbb{R}$ визначається неперервним лінійним функціоналом, який зображується таким розкладом в ряд:

$$\langle A \rangle(t) = (I, D(0))^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \text{Tr}_{1, \dots, n} A_n(t) D_n^0, \quad (2.5)$$

де послідовність $D(0) = (I, D_1^0, \dots, D_n^0, \dots)$ позитивних самоспряжених операторів $D_n^0 \in \mathfrak{L}^1(\mathcal{H}_n)$ – послідовність операторів густини, якою описуються всі можливі стани квантової системи нефіксованої кількості частинок в початковий момент часу, та $(I, D(0)) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \text{Tr}_{1, \dots, n} D_n^0$ – нормуючий множник. Функціонал (2.5), яким визначається двоїстість спостережуваних і станів, існує для $D_n^0 \in \mathfrak{L}^1(\mathcal{H}_n)$ та $A_n(t) \in \mathfrak{L}(\mathcal{H}_n)$.

Для нормуючого множника справедлива рівність

$$(I, D(0)) = (I, \mathcal{G}^*(t)D(0)), \quad (2.6)$$

на просторі $\mathfrak{L}^1(\mathcal{F}_{\mathcal{H}})$ визначено спряжене до групи (2.4) однопараметричне відображення $\mathcal{G}^*(t) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \mathcal{G}_n^*(t)$:

$$\mathbb{R}^1 \ni t \mapsto \mathcal{G}_n^*(t)f_n \doteq e^{-itH_n}f_n e^{itH_n}, \quad (2.7)$$

утворює сильно неперервну ізометричну групу операторів, яка зберігає позитивність та самоспряженість операторів.

Внаслідок рівності (2.6) для функціонала (2.5) справедливе таке зображення:

$$\begin{aligned} (A(t), D(0)) &= (I, D(0))^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \text{Tr}_{1, \dots, n} \mathcal{G}_n(t) A_n^0 D_n^0 = \\ &= (I, \mathcal{G}^*(t) D(0))^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \text{Tr}_{1, \dots, n} A_n^0 \mathcal{G}_n^*(t) D_n^0 \equiv \\ &= (I, D(t))^{-1} (A(0), D(t)), \end{aligned}$$

тобто еволюція квантових систем багатьох частинок в еквівалентний спосіб може бути описана як еволюція стану. Дійсно, еволюція всіх можливих станів, тобто послідовність $D(t) = (1, D_1(t), \dots, D_n(t), \dots) \in \mathcal{L}^1(\mathcal{F}_{\mathcal{H}})$ операторів густини $D_n(t)$, $n \geq 1$, описується задачею Коші для послідовності рівнянь фон Неймана (квантових рівнянь Ліувілля):

$$\frac{\partial}{\partial t} D(t) = \mathcal{N}^* D(t), \quad (2.8)$$

$$D(t)|_{t=0} = D(0), \quad (2.9)$$

де генератор $\mathcal{N}^* = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \mathcal{N}_n^*$ рівняння фон Неймана (2.8) є оператором спряженим до генератора (2.3) рівняння Гейзенберга (2.1) і визначається такою формулою

$$\mathcal{N}_n^* f_n \doteq -i (H_n f_n - f_n H_n). \quad (2.10)$$

Оператор (2.10) має таку структуру:

$$\mathcal{N}_n^* = \sum_{j=1}^n \mathcal{N}^*(j) + \epsilon \sum_{j_1 < j_2=1}^n \mathcal{N}_{\text{int}}^*(j_1, j_2),$$

де оператор $\mathcal{N}^*(j)$ – генератор рівняння фон Неймана не взаємодіючих частинок та оператор $\mathcal{N}_{\text{int}}^*$ визначається через оператор взаємодії частинок: $\mathcal{N}_{\text{int}}^*(j_1, j_2) f_n \doteq -i (\Phi(j_1, j_2) f_n - f_n \Phi(j_1, j_2))$.

Таким чином, єдиний розв'язок задачі Коші (2.8), (2.9) зображується групою операторів (2.4)

$$D(t) = \mathcal{G}^*(t) D(0). \quad (2.11)$$

Зауважимо, що оператор густини зображується опуклою лінійною комбінацією проєкторів першого рангу. Оператор густини, який є проєктором першого рангу $D_n(t) = P_{\psi_n}(t)$, $\psi_n \in \mathcal{H}_n$, відомий як чистий стан, а довільний стан інтерпретується як змішаний стан. Внаслідок справедливості для проєктора рівності: $P_{\psi_n}(t) = P_{\psi_n(t)}$, де $\psi_n(t) = e^{-itH_n} \psi_n$,

еволюція чистого стану також може бути описана задачею Коші для послідовності рівнянь Шредінгера:

$$i \frac{\partial}{\partial t} \psi_n(t) = H_n \psi_n(t),$$

$$\psi(t)_n|_{t=0} = \psi_n^0, \quad n \geq 1,$$

де оператор H_n – гамільтоніан системи n частинок.

2.2. Динаміка кореляцій станів. Альтернативний підхід до опису стану квантової системи скінченної середньої кількості частинок полягає в описі стану за допомогою кумулянтів операторів густини, які трактуються як кореляції стану [17].

Введемо послідовність кореляційних операторів $g(t) = (I, g_1(t, 1), \dots, g_s(t, 1, \dots, s), \dots)$ за допомогою кластерних розкладів операторів густини $D(t) = (I, D_1(t, 1), \dots, D_n(t, 1, \dots, n), \dots)$:

$$D_n(t, 1, \dots, n) = g_n(t, 1, \dots, n) + \sum_{\substack{P: (1, \dots, n) = \cup_i X_i, \\ |P| > 1}} \prod_{X_i \subset P} g_{|X_i|}(t, X_i), \quad (2.12)$$

де $n \geq 1$ та символом $\sum_{P: (1, \dots, n) = \cup_i X_i, |P| > 1}$ позначено суму за всіма можливими розбиттями P множини індексів $(1, \dots, n)$ на $|P| > 1$ неперожних підмножин $X_i \subset (1, \dots, n)$, які взаємно не перетинаються.

Розв'язки рекурентних співвідношень (2.12) визначаються такими розкладами:

$$g_s(t, 1, \dots, s) = D_s(t, 1, \dots, s) + \sum_{\substack{P: (1, \dots, s) = \cup_i X_i, \\ |P| > 1}} (-1)^{|P|-1} (|P| - 1)! \prod_{X_i \subset P} D_{|X_i|}(t, X_i), \quad (2.13)$$

де $s \geq 1$. Структура розкладів (2.13) така, що кореляційні оператори можна трактувати як кумулянти (напівінваріанти) операторів густини (2.11).

Якщо $g_s^0 \in \mathfrak{L}^1(\mathcal{H}_s)$, $s \geq 1$, тоді для $t \in \mathbb{R}$ послідовність кореляційних операторів (2.13) є єдиним розв'язком задачі Коші для ієрархії рівнянь фон Неймана [23, 26]:

$$\frac{\partial}{\partial t} g_s(t, 1, \dots, s) = \mathcal{N}_s^* g_s(t, 1, \dots, s) + \sum_{P: (1, \dots, s) = X_1 \cup X_2} \sum_{i_1 \in X_1} \sum_{i_2 \in X_2} \epsilon \mathcal{N}_{\text{int}}^*(i_1, i_2) g_{|X_1|}(t, X_1) g_{|X_2|}(t, X_2), \quad (2.14)$$

$$g_s(t, 1, \dots, s) \Big|_{t=0} = g_s^0(1, \dots, s), \quad s \geq 1, \quad (2.15)$$

де символом $\sum_{P: (1, \dots, s) = X_1 \cup X_2}$ позначено суму за всіма можливими розбиттями P множини $(1, \dots, s)$ на дві непорожні підмножини X_1 та X_2 , які взаємно не перетинаються, та оператори \mathcal{N}_s^* , $\mathcal{N}_{\text{int}}^*(i_1, i_2)$ визначаються формулою (2.10). Підкреслимо, що ієрархія рівнянь фон Неймана (2.14) – це система рекурентних еволюційних рівнянь.

Якщо початковий стан описується послідовністю кореляційних операторів $g(0) = (I, g_1^0(1), \dots, g_n^0(1, \dots, n), \dots) \in \bigoplus_{n=0}^{\infty} \mathcal{L}^1(\mathcal{H}_n)$, тоді еволюція всіх можливих станів квантової системи багатьох частинок, тобто послідовність $g(t) = (I, g_1(t, 1), \dots, g_s(t, 1, \dots, s), \dots)$ кореляційних операторів $g_s(t)$, $s \geq 1$, визначається групою нелінійних операторів [23]:

$$g_s(t, 1, \dots, s) = \mathcal{G}(t; 1, \dots, s | g(0)) \doteq \sum_{P: (1, \dots, s) = \bigcup_j X_j} \mathfrak{A}_{|P|}(t, \{X_1\}, \dots, \{X_{|P|}\}) \prod_{X_j \subset P} g_{|X_j|}^0(X_j), \quad s \geq 1, \quad (2.16)$$

де $\sum_{P: (1, \dots, s) = \bigcup_j X_j}$ – сума за всіма можливими розбиттями P множини індексів $(1, \dots, s)$ на $|P|$ непорожніх підмножин X_j , які взаємно не перетинаються, множина $(\{X_1\}, \dots, \{X_{|P|}\})$ складається з елементів, які є підмножинами $X_j \subset (1, \dots, s)$, тобто $|(\{X_1\}, \dots, \{X_{|P|}\})| = |P|$. Твірний оператор $\mathfrak{A}_{|P|}(t)$ розкладу (2.16) є кумулянтотом груп операторів (2.7) $|P|$ -го порядку, який визначається таким розкладом:

$$\mathfrak{A}_{|P|}(t, \{X_1\}, \dots, \{X_{|P|}\}) \doteq \sum_{P': (\{X_1\}, \dots, \{X_{|P|}\}) = \bigcup_k Z_k} (-1)^{|P'| - 1} (|P'| - 1)! \prod_{Z_k \subset P'} \mathcal{G}_{|\theta(Z_k)|}^*(t, \theta(Z_k)), \quad (2.17)$$

де θ – відображення декластеризації: $\theta(\{X_1\}, \dots, \{X_{|P|}\}) \doteq (1, \dots, s)$.

У разі відсутності кореляцій між частинками в початковий момент часу (початковий стан задовольняє умові хаосу [2, 38]), тобто послідовності початкових кореляційних операторів $g^{(c)}(0) = (0, g_1^0(1), 0, \dots)$ (у разі статистики Максвелла – Больцмана в термінах послідовності операторів густини такий стан описується послідовністю $D^{(c)}(0) = (I, D_1^0(1), \dots, \prod_{i=1}^n D_1^0(i), \dots)$), розклади (2.16) набувають такого вигляду:

$$g_s(t, 1, \dots, s) = \mathfrak{A}_s(t, 1, \dots, s) \prod_{i=1}^s g_1^0(i), \quad s \geq 1,$$

де кумулянт $\mathfrak{A}_s(t)$ груп операторів (2.7) s -го порядку визначається розкладом

$$\mathfrak{A}_s(t, 1, \dots, s) = \sum_{P: (1, \dots, s) = \cup_i X_i} (-1)^{|P|-1} (|P| - 1)! \prod_{X_i \subset P} \mathcal{G}_{|X_i|}^*(t, X_i), \quad (2.18)$$

і де використано позначення прийняті в формулі (2.16).

Таким чином, кумулянтна природа кореляційних операторів (2.13) індукує кумулянтну структуру відображення (2.16).

Підкреслимо, що динаміка кореляцій, тобто ієрархія фундаментальних рівнянь (2.14) якою описується еволюція кореляцій станів, може бути використана як основа опису еволюції станів системи скінченної, так і нескінченної кількості частинок замість рівнянь фон Неймана (2.8) для операторів густини.

2.3. Ієрархії еволюційних рівнянь ББГКІ. Для опису квантових систем як скінченної, так і нескінченної кількості частинок використовується інший підхід до опису станів і спостережуваних, який еквівалентний підходу, сформульованому вище у разі систем скінченної середньої кількості частинок [5, 39].

Дійсно, функціонал середніх значень спостережуваних (2.5) може бути зображений ще в такій формі

$$\begin{aligned} \langle A \rangle(t) &= (I, D(0))^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \text{Tr}_{1, \dots, n} A_n(t) D_n^0 = \\ &= \sum_{s=0}^{\infty} \frac{1}{s!} \text{Tr}_{1, \dots, s} B_s(t, 1, \dots, s) F_s^0(1, \dots, s), \end{aligned} \quad (2.19)$$

де для опису спостережуваних і стану введено послідовності операторів редукованих (s -частинкових) спостережуваних $B(t) = (B_0, B_1(t, 1), \dots, B_s(t, 1, \dots, s), \dots)$ та редукованих (s -частинкових) операторів густини $F(0) = (I, F_1^0(1), \dots, F_s^0(1, \dots, s), \dots)$, відповідно [38, 39]. Отже редуковані спостережувані визначаються в термінах спостережуваних такими розкладами [18, 30]:

$$\begin{aligned} B_s(t, 1, \dots, s) &\doteq \\ &= \sum_{n=0}^s \frac{(-1)^n}{n!} \sum_{j_1 \neq \dots \neq j_n = 1}^s A_{s-n}(t, (1, \dots, s) \setminus (j_1, \dots, j_n)), \end{aligned} \quad (2.20)$$

де $s \geq 1$, та редуковані оператори густини визначаються операторами густини в такий спосіб [5]:

$$F_s^0(1, \dots, s) \doteq (I, D)^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \text{Tr}_{s+1, \dots, s+n} D_{s+n}^0(1, \dots, s+n). \quad (2.21)$$

Підкреслимо, що можливість опису спостережуваних і стану за допомогою відповідних редукованих операторів закономірно виникає в результаті ділення ряду у виразі (2.5) на ряд нормувального множника, тобто внаслідок перевизначення зображення функціоналу середніх значень спостережуваних (2.19).

Якщо в початковий момент часу спостережувана визначена послідовністю редукованих спостережуваних $B(0) = (B_0, B_1^0(1), \dots, B_s^0(1, \dots, s), \dots) \in \mathfrak{L}(\mathcal{F}_{\mathcal{H}})$, тоді для довільних $t \in \mathbb{R}$ послідовність $B(t) = (B_0, B_1(t, 1), \dots, B_s(t, 1, \dots, s), \dots)$ редукованих спостережуваних (2.20) задовольняє задачу Коші для дуальної ієрархії рівнянь ББГКІ [10, 13, 30]:

$$\frac{\partial}{\partial t} B_s(t, 1, \dots, s) = \left(\sum_{j=1}^s \mathcal{N}(j) + \epsilon \sum_{j_1 < j_2 = 1}^s \mathcal{N}_{\text{int}}(j_1, j_2) \right) B_s(t, 1, \dots, s) + \quad (2.22)$$

$$\epsilon \sum_{j_1 \neq j_2 = 1}^s \mathcal{N}_{\text{int}}(j_1, j_2) B_{s-1}(t, 1, \dots, j_1 - 1, j_1 + 1, \dots, s),$$

$$B_s(t, 1, \dots, s)|_{t=0} = B_s^0(1, \dots, s), \quad s \geq 1, \quad (2.23)$$

де використано позначення прийняті в формулі (2.3). Зауважимо, що ієрархія рівнянь (2.22) має структуру рекурентних еволюційних рівнянь, наприклад,

$$\frac{\partial}{\partial t} B_1(t, 1) = \mathcal{N}(1) B_1(t, 1),$$

$$\frac{\partial}{\partial t} B_2(t, 1, 2) = \left(\sum_{j=1}^2 \mathcal{N}(j) + \epsilon \mathcal{N}_{\text{int}}(1, 2) \right) B_2(t, 1, 2) +$$

$$\epsilon \mathcal{N}_{\text{int}}(1, 2) (B_1(t, 1) + B_1(t, 2)).$$

Розв'язок задачі Коші (2.22), (2.23) зображується такими розкладами [18, 30]:

$$B_s(t, 1, \dots, s) = \quad (2.24)$$

$$\sum_{n=0}^s \frac{1}{n!} \sum_{j_1 \neq \dots \neq j_n = 1}^s \mathfrak{A}_{1+n}(t, \{(1, \dots, s) \setminus (j_1, \dots, j_n)\}),$$

$$(j_1, \dots, j_n) B_{s-n}^0(1, \dots, j_1 - 1, j_1 + 1, \dots, j_n - 1, j_n + 1, \dots, s),$$

де $s \geq 1$, а твірний оператор розкладу є $(1+n)$ -го порядку кумулянтном груп операторів (2.4):

$$\mathfrak{A}_{1+n}(t, \{(1, \dots, s) \setminus (j_1, \dots, j_n)\}, (j_1, \dots, j_n)) \doteq \sum_{P: (\{(1, \dots, s) \setminus (j_1, \dots, j_n)\}, (j_1, \dots, j_n)) = \cup_i X_i} (-1)^{|P|-1} (|P| - 1)! \prod_{X_i \subset P} \mathcal{G}_{|\theta(X_i)|}(t, \theta(X_i)),$$

і використано позначення аналогічні до формули (2.17). Зауважимо, що розклад (2.24) для розв'язку може бути зображений у вигляді ряду ітерацій (теорії збурень) рекурентних еволюційних рівнянь (2.22) внаслідок застосування аналогів рівняння Дюамеля до твірних операторів, тобто кумулянтів груп операторів (2.4).

Згідно визначення (2.20) спостережуваним адитивного типу відповідають однокомпонентні послідовності $B^{(1)}(0) = (0, b_1^0(1), 0, \dots)$ редукованих спостережуваних, а послідовності $B^{(k)}(0) = (0, \dots, 0, b_k^0(1, \dots, k), 0, \dots)$ відповідають k -арного типу спостережуваним. Тоді для певного типу спостережуваних структура розкладу (2.24) набуває відповідної форми

$$B_s^{(1)}(t, 1, \dots, s) = \mathfrak{A}_s(t, 1, \dots, s) \sum_{j=1}^s b_1^0(j), \quad s \geq 1, \quad (2.25)$$

де твірний оператор $\mathfrak{A}_s(t)$ - кумулянт s -го порядку груп операторів (2.4), і, якщо $s \geq k$,

$$B_s^{(k)}(t, 1, \dots, s) = \frac{1}{(s-k)!} \sum_{j_1 \neq \dots \neq j_{s-k}=1}^s \mathfrak{A}_{1+s-k}(t, \{(1, \dots, s) \setminus (j_1, \dots, j_{s-k})\}, j_1, \dots, j_{s-k}) b_k^0(1, \dots, j_1 - 1, j_1 + 1, \dots, j_{s-k} - 1, j_{s-k} + 1, \dots, s), \quad (2.26)$$

та, якщо $1 \leq s < k$, маємо: $B_s^{(k)}(t) = 0$.

Традиційно еволюція систем багатьох частинок описується в термінах еволюції станів за допомогою ієрархії рівнянь ББГКІ для редукованих операторів густини [2, 5, 38, 39].

Дійсно, для функціонала (2.19) справедливе таке зображення:

$$(B(t), F(0)) = (B(0), F(t)),$$

тобто еволюція квантових систем багатьох частинок в еквівалентний спосіб може бути описана як еволюція стану за допомогою редукованих операторів густини (2.21).

Якщо $F(0) \in \mathfrak{L}^1(\mathcal{F}_H)$, тоді для довільного $t \in \mathbb{R}$ послідовність $F(t) = (I, F_1(t, 1), \dots, F_s(t, 1, \dots, s), \dots)$ редукованих операторів густини (2.21) задовольняє задачу Коші для ієрархії квантових рівнянь ББГКІ [5, 39]:

$$\frac{\partial}{\partial t} F_s(t, 1, \dots, s) = \mathcal{N}_s^* F_s(t, 1, \dots, s) + \quad (2.27)$$

$$\begin{aligned} & \in \sum_{j=1}^s \text{Tr}_{s+1} \mathcal{N}_{\text{int}}^*(j, s+1) F_{s+1}(t, 1, \dots, s, s+1), \\ F_s(t, 1, \dots, s) |_{t=0} &= F_s^0(1, \dots, s), \quad s \geq 1, \end{aligned} \quad (2.28)$$

де використано позначення формули (2.10).

Розв'язок задачі Коші (2.27), (2.28) для ієрархії рівнянь ББГКІ зображується такими рядами [24, 25]:

$$\begin{aligned} F_s(t, 1, \dots, s) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \text{Tr}_{s+1, \dots, s+n} \mathfrak{A}_{1+n}(t, \{1, \dots, s\}, \\ & \quad s+1, \dots, s+n) F_{s+n}^0(1, \dots, s+n), \quad s \geq 1, \end{aligned} \quad (2.29)$$

де твірний оператор ряду (2.29)

$$\begin{aligned} & \mathfrak{A}_{1+n}(t, \{1, \dots, s\}, s+1, \dots, s+n) = \\ & = \sum_{P: (\{1, \dots, s\}, s+1, \dots, s+n) = \bigcup_i X_i} (-1)^{|P|-1} (|P|-1)! \prod_{X_i \subset P} \mathcal{G}_{|\theta(X_i)|}^*(t, \theta(X_i)) \end{aligned} \quad (2.30)$$

є $(1+n)$ -го порядку кумулянтю груп операторів (2.7). У розкладі (2.30) символ \sum_P означає суму за всіма можливими розбиттями P множини індексів $(\{1, \dots, s\}, s+1, \dots, s+n)$ на $|P|$ непорожніх підмножини $X_i \subset (\{1, \dots, s\}, s+1, \dots, s+n)$, які взаємно не перетинаються, та використано позначення введені в формулі (2.16).

Зауважимо, що один з методів побудови розв'язків (2.29) та (2.24) ґрунтується на застосуванні кластерних розкладів [13, 25] до груп операторів (2.7) та (2.4), які є твірними операторами рядів (2.21) для редукованих операторів густини та розкладів (2.20) для редукованих спостережуваних відповідно.

Відзначимо, що поширеною формою зображення розв'язку задачі Коші для ієрархії рівнянь ББГКІ є його зображення як ряд теорії збурень (ряд ітерацій ієрархії рівнянь ББГКІ) [34, 39] (див. також [2, 5] та посилання в них):

$$\begin{aligned} F_s(t, 1, \dots, s) &= \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^t dt_1 \dots \int_0^{t_{n-1}} dt_n \text{Tr}_{s+1, \dots, s+n} \mathcal{G}_s^*(t - t_1) \times \\ & \quad \sum_{j_1=1}^s \mathcal{N}_{\text{int}}^*(j_1, s+1) \mathcal{G}_{s+1}^*(t_1 - t_2) \dots \mathcal{G}_{s+n-1}^*(t_{n-1} - t_n) \times \\ & \quad \sum_{j_n=1}^{s+n-1} \mathcal{N}_{\text{int}}^*(j_n, s+n) \mathcal{G}_{s+n}^*(t_n) F_{s+n}^0(1, \dots, s+n), \end{aligned} \quad (2.31)$$

де $s \geq 1$ та використано позначення з виразу (2.10). Зображення розв'язку рядом (2.29) еквівалентно до ряду (2.31) внаслідок справедливості за відповідних умов на початкові дані і потенціал взаємодії частинок аналогів рівнянь Дюамеля для твірних операторів (2.30) ряду (2.29), тобто для кумулянтів груп операторів (2.4).

Таким чином, існує два підходи до опису еволюції квантових систем багатьох частинок, а саме, в термінах спостережуваних, еволюція яких описується дуальною ієрархією рівнянь ББГКІ (2.22), або в термінах стану, еволюція якого описується ієрархією рівнянь ББГКІ (2.27). Для систем скінченної кількості частинок ці ієрархії еволюційних рівнянь еквівалентні рівнянню Гейзенберга (2.1) та рівнянню фон Неймана (2.8) відповідно. У роботі [13] зазначені ієрархії еволюційних рівнянь узагальнені для систем частинок з багаточастинковим потенціалом взаємодії.

Альтернативний підхід, як зазначено вище, до опису еволюції стану квантових систем, які складаються як зі скінченної, так і з нескінченної кількості частинок, може бути сформульовано за допомогою операторів, які визначаються кластерними розкладами редукованих операторів густини, а саме:

$$G_s(t, 1, \dots, s) = \sum_{P: (1, \dots, s) = \cup_i X_i} (-1)^{|P|-1} (|P| - 1)! \prod_{X_i \subset P} F_{|X_i|}(t, X_i), \quad s \geq 1, \quad (2.32)$$

де використано позначення формули (2.13). Такі кумулянти редукованих операторів густини інтерпретуються як редуковані кореляції стану [39].

У мікроскопічному масштабі макроскопічні характеристики флуктуацій спостережуваних безпосередньо визначаються за допомогою редукованих кореляційних операторів, наприклад, функціонал дисперсії адитивного типу спостережуваних, тобто послідовності $A^{(1)} = (0, a_1(1), \dots, \sum_{i_1=1}^n a_1(i_1), \dots)$, зображується такою формулою

$$\langle (A^{(1)} - \langle A^{(1)} \rangle)^2 \rangle(t) = \text{Tr}_1 (a_1^2(1) - \langle A^{(1)} \rangle^2(t)) G_1(t, 1) + \text{Tr}_{1,2} a_1(1) a_1(2) G_2(t, 1, 2),$$

де $\langle A^{(1)} \rangle(t) = \text{Tr}_1 a_1(1) G_1(t, 1)$ – функціонал середніх значень спостережуваних адитивного типу.

Якщо $G(0) \in \mathfrak{L}^1(\mathcal{F}_{\mathcal{H}})$, тоді для довільних $t \in \mathbb{R}$ послідовність редукованих кореляційних операторів (2.32) задовольняє задачу Коші для

ієрархії нелінійних еволюційних рівнянь (ієрархія квантових нелінійних рівнянь ББГКІ) [39]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} G_s(t, 1, \dots, s) &= \mathcal{N}_s^* G_s(t, 1, \dots, s) + \\ &\sum_{P: (1, \dots, s) = X_1 \cup X_2} \sum_{i_1 \in X_1} \sum_{i_2 \in X_2} \epsilon \mathcal{N}_{\text{int}}^*(i_1, i_2) G_{|X_1|}(t, X_1) G_{|X_2|}(t, X_2) + \\ &\text{Tr}_{s+1} \sum_{i \in (1, \dots, s)} \epsilon \mathcal{N}_{\text{int}}^*(i, s+1) (G_{s+1}(t, 1, \dots, s+1) + \\ &\sum_{P: (1, \dots, s+1) = X_1 \cup X_2,} G_{|X_1|}(t, X_1) G_{|X_2|}(t, X_2)), \end{aligned} \quad (2.33)$$

$$i \in X_1; s+1 \in X_2$$

$$G_s(t, 1, \dots, s) \Big|_{t=0} = G_s^0(1, \dots, s), \quad s \geq 1, \quad (2.34)$$

де використано позначення ієрархії рівнянь (2.14).

У разі початкового стану за відсутності кореляцій між частинками, тобто стану, який описується послідовністю $G^{(c)} = (0, G_1^0, 0, \dots, 0, \dots)$, розв'язок задачі Коші (2.33), (2.34) зображується такими рядами:

$$G_s(t, 1, \dots, s) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \text{Tr}_{s+1, \dots, s+n} \mathfrak{A}_{s+n}(t; 1, \dots, s+n) \prod_{i=1}^{s+n} G_1^0(i), \quad (2.35)$$

де $s \geq 1$, а твірний оператор $\mathfrak{A}_{s+n}(t) \in (s+n)$ -го порядку кумулянт (2.18) груп операторів (2.7). Підкреслимо, що для зазначеного початкового стану, вирази для редукованих операторів густини (2.29) і редукованих кореляційних операторів (2.35) відрізняються лише порядком твірного оператора для відповідних членів рядів, якими вони зображуються.

Для довільного початкового стану (2.34) розв'язок задачі Коші для ієрархії нелінійних рівнянь ББГКІ (2.33) побудовано в роботі [15] (див. також [17]).

Відзначимо, що в основу опису еволюції стану квантових систем багатьох частинок за допомогою як редукованих операторів густини, так і редукованих кореляційних операторів, може бути покладено підхід, який ґрунтується на динаміці кореляцій, яка визначається ієрархією рівнянь фон Неймана (2.14) для кореляційних операторів. При такому підході редуковані оператори густини визначаються такими рядами:

$$\begin{aligned} F_s(t, 1, \dots, s) &\doteq \\ &\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \text{Tr}_{s+1, \dots, s+n} g_{1+n}(t, \{1, \dots, s\}, s+1, \dots, s+n), \end{aligned} \quad (2.36)$$

де $s \geq 1$, а кореляційні оператори $g_{1+n}(t)$, $n \geq 0$, кластера частинок і частинок зображується розкладами:

$$g_{1+n}(t, \{1, \dots, s\}, s+1, \dots, s+n) = \sum_{P: (\{1, \dots, s\}, s+1, \dots, s+n) = \cup_i X_i} \mathfrak{A}_{|P|}(t, \{\theta(X_1)\}, \dots, \{\theta(X_{|P|})\}) \prod_{X_i \subset P} g_{|X_i|}^0(X_i), \quad (2.37)$$

$n \geq 0$, в яких використано позначення формули (2.16). Редуковані кореляційні оператори визначаються відповідними рядами:

$$G_s(t, 1, \dots, s) \doteq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \text{Tr}_{s+1, \dots, s+n} g_{s+n}(t, 1, \dots, s+n), \quad (2.38)$$

де $s \geq 1$, та кореляційні оператори $g_{s+n}(t)$, $n \geq 0$, зображуються розкладами (2.16).

Таким чином, внаслідок визначень (2.36) та (2.38) встановлюємо, що кумулянтна структура твірних операторів розкладів для кореляційних операторів (2.16), або більш загальних розкладів (2.37), індукує кумулянтну структуру твірних операторів рядів для редукованих операторів густини (2.29) та редукованих кореляційних операторів (2.35), тобто фактично еволюція стану системи нескінченної кількості частинок породжується динамікою кореляцій стану.

Зауважимо, в роботі [19] ієрархії еволюційних рівнянь (2.14), (2.22), (2.27), (2.33) вивчаються як еволюційні рівняння в функціональних похідних.

3. УЗАГАЛЬНЕНЕ КІНЕТИЧНЕ РІВНЯННЯ

У цьому розділі викладено підхід до опису еволюції стану за допомогою стану типової частинки квантової системи багатьох частинок, або, іншими словами, розглядаються основи опису еволюції стану за допомогою квантових кінетичних рівнянь [12, 22, 27].

3.1. Про походження кінетичної еволюції станів. Розглянемо систему багатьох частинок, які задовольняють статистику Максвелла – Больцмана, у разі відсутності кореляцій між частинками в початковий момент часу, тобто початковий стан якої визначається одночастинковим оператором густини, а саме, такою послідовністю редукованих операторів густини $F^{(c)} = (0, F_1^0(1), \dots, \prod_{i=1}^n F_1^0(i), \dots)$. Підкреслимо, що сформульоване припущення стосовно початкового стану притаманне кінетичній теорії систем багатьох частинок [2, 13, 32].

Зважаючи на той факт, що початковий стан визначається одночастинковим оператором густини, для функціонала середнього значення спостережуваних (2.19) справедливе таке зображення

$$(B(t), F^{(c)}) = (B(0), F(t | F_1(t))),$$

тобто еволюція всіх можливих станів описується послідовністю $F(t | F_1(t)) = (1, F_1(t), F_2(t | F_1(t)), \dots, F_s(t | F_1(t)), \dots)$ редукованих функціоналів стану $F_s(t, x_1, \dots, x_s | F_1(t))$, $s \geq 2$, які зображуються рядами:

$$F_s(t, 1, \dots, s | F_1(t)) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \text{Tr}_{s+1, \dots, s+n} \mathfrak{A}_{1+n}(t, \{1, \dots, s\}, s+1, \dots, s+n) \prod_{i=1}^{s+n} F_1(t, i), \quad (3.1)$$

$s \geq 2$, відносно одночастинкового оператора густини

$$F_1(t, 1) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \text{Tr}_{2, \dots, 1+n} \mathfrak{A}_{1+n}(t, 1, \dots, n+1) \prod_{i=1}^{n+1} F_1^0(i), \quad (3.2)$$

яким описується еволюція стану типової частинки квантової системи багатьох частинок. Твірними операторами ряду (3.2) є кумулянти (2.30) груп операторів (2.7) відповідного порядку.

Редуковані функціонали стану $F_s(t | F_1(t))$, $s \geq 2$, описують всі можливі кореляції, які виникають в процесі еволюції квантової системи багатьох частинок в термінах стану типової частинки. Твірний оператор $(1+n)$ -го порядку ряду (3.1) визначається таким розкладом [27]

$$\begin{aligned} \mathfrak{A}_{1+n}(t, \{1, \dots, s\}, s+1, \dots, s+n) &= n! \sum_{k=0}^n (-1)^k \sum_{n_1=1}^n \dots \\ &\sum_{n_k=1}^{n-n_1-\dots-n_{k-1}} \frac{1}{(n-n_1-\dots-n_k)!} \widehat{\mathfrak{A}}_{1+n-n_1-\dots-n_k}(t, \{1, \dots, s\}, s+1, \\ &\dots, s+n-n_1-\dots-n_k) \prod_{j=1}^k \sum_{\substack{D_j: Z_j = \bigcup_{l_j} X_{l_j}, \\ |D_j| \leq s+n-n_1-\dots-n_j}} \frac{1}{|D_j|!} \times \quad (3.3) \\ &\sum_{i_1 \neq \dots \neq i_{|D_j|=1}}^{s+n-n_1-\dots-n_j} \prod_{X_{l_j} \subset D_j} \frac{1}{|X_{l_j}|!} \widehat{\mathfrak{A}}_{1+|X_{l_j}|}(t, i_{l_j}, X_{l_j}), \end{aligned}$$

де символом $\sum_{D_j: Z_j = \bigcup_{l_j} X_{l_j}}$ позначено суму за всіма розсіченнями лінійно впорядкованої множини $Z_j \equiv (s+n-n_1-\dots-n_j+1, \dots, s+n-$

$n_1 - \dots - n_{j-1}$) на не більше ніж $s + n - n_1 - \dots - n_j$ лінійно впорядкованих підмножин та твірний оператор розкладу $\widehat{\mathfrak{A}}_{1+n}(t)$ – кумулянт $(1 + n)$ -го порядку (2.30) груп операторів розсіяння

$$\widehat{\mathcal{G}}_n(t) \doteq \mathcal{G}_n^*(t, 1, \dots, n) \prod_{i=1}^n (\mathcal{G}_1^*(t, i))^{-1}, \quad n \geq 1,$$

Наведемо найпростіші приклади твірних операторів розкладу (3.3):

$$\begin{aligned} \mathfrak{W}_1(t, \{1, \dots, s\}) &= \widehat{\mathfrak{A}}_1(t, \{1, \dots, s\}), \\ \mathfrak{W}_{1+1}(t, \{1, \dots, s\}, s+1) &= \widehat{\mathfrak{A}}_2(t, \{1, \dots, s\}, s+1) - \\ &\quad - \widehat{\mathfrak{A}}_1(t, \{1, \dots, s\}) \sum_{i=1}^s \widehat{\mathfrak{A}}_2(t, i, s+1). \end{aligned}$$

Таким чином, унаслідок визначення (2.36) кумулянтна структура твірних операторів розкладів для кореляційних операторів (2.37) індукує узагальнену кумулянтну структуру твірних операторів рядів для редукованих функціоналів стану (3.1).

Зауважимо, у разі початкового стану який визначається одночастинковим оператором густини $F^{(c)}$, наприклад, задача Коші (2.33), (2.34) не є цілком коректною, оскільки початкові дані не є незалежними для кожного невідомого редукованого оператора густини ієрархії рівнянь ББГКІ. Як наслідок, таку задачу Коші можна переформулювати як нову задачу Коші для одночастинкового оператора густини з незалежною початковою умовою і послідовністю явно визначених функціоналів від розв'язку задачі Коші еволюційного рівняння для одночастинкового оператора густини (кінетичного рівняння). У цьому випадку метод побудови редукованих функціоналів стану (3.1) ґрунтується на застосуванні різновиду кластерних розкладів, так званих кінетичних кластерних розкладів [27], до твірних операторів (2.30) рядів, якими зображуються редуковані оператори густини (2.29).

3.2. Узагальнене квантове кінетичне рівняння. Якщо початковий стан $F_1^0 \in \mathcal{L}^1(\mathcal{H})$, тоді для довільного $t \in \mathbb{R}$ одночастинковий оператор густини (3.2) задовольняє задачу Коші для узагальненого квантового кінетичного рівняння [27]:

$$\frac{\partial}{\partial t} F_1(t, 1) = \mathcal{N}^*(1) F_1(t, 1) + \epsilon \text{Tr}_2 \mathcal{N}_{\text{int}}^*(1, 2) F_2(t, 1, 2 | F_1(t)), \quad (3.4)$$

$$F_1(t, 1)|_{t=0} = F_1^0(1), \quad (3.5)$$

де інтеграл зіткнень визначається двочастинковим функціоналом стану (3.1) та використано позначення (2.10).

У роботі [27] доведено існування розв'язку задачі Коші (3.4), (3.5) в просторі ядерних операторів.

Таким чином, для початкового стану за відсутності кореляцій між частинками, тобто стану який задано одночастинковим оператором густини, еволюція всіх можливих станів квантової системи багатьох частинок може бути описана без будь-яких наближень в термінах одночастинкового оператора густини, еволюція якого визначається немарковським кінетичним рівнянням (3.4) і послідовністю функціоналів стану (3.1) від його розв'язку (3.2).

3.3. Скейлінгові властивості еволюції станів. Загальноприйнята філософія опису еволюції кінетичними рівняннями полягає в наступному [4, 32]. Якщо початковий стан визначається за допомогою стану типової частинки системи, тобто в початковий момент відсутні кореляції між частинками (умова хаосу), тоді в певному скейлінговому наближенні [2, 7, 13, 31] еволюція стану системи багатьох частинок може бути ефективно описана за допомогою стану типової частинки, тобто одночастинкового оператора густини, який визначається відповідним нелінійним кінетичним рівнянням.

Надалі розглядається скейлінгова асимптотична поведінка редукованих функціоналів стану $F(t | F_1(t))$ в конкретному випадку границі середнього (самоузгодженого) поля [28].

Нехай існує границя самоузгодженого поля початкового одночастинкового оператора густини в такому сенсі

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left\| \epsilon F_1^0 - f_1^0 \right\|_{\mathcal{L}^1(\mathcal{H})} = 0, \quad (3.6)$$

де $\epsilon > 0$ – скейлінговий параметр.

Оскільки для довільного скінченного інтервалу часу для асимптотично збуреного першого порядку кумулянта груп операторів (2.7), тобто для сильно неперервної групи (2.7), справедлива така рівність

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left\| \mathcal{G}_s^*(t, 1, \dots, s) f_s - \prod_{j=1}^s \mathcal{G}_1^*(t, j) f_s \right\|_{\mathcal{L}^1(\mathcal{H}_s)} = 0.$$

тоді для $(1+n)$ -го порядку, $n \geq 1$, кумулянта асимптотично збурених груп операторів (2.7) справедливі рівності:

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left\| \frac{1}{\epsilon^n} \frac{1}{n!} \mathfrak{A}_{1+n}(t, \{1, \dots, s\}, s+1, \dots, s+n) f_{s+n} - \int_0^t dt_1 \dots \int_0^{t_{n-1}} dt_n \prod_{j=1}^s \mathcal{G}_1^*(t-t_1, j) \sum_{i_1=1}^s \mathcal{N}_{\text{int}}^*(i_1, s+1) \times \right. \quad (3.7)$$

$$\prod_{j_1=1}^{s+1} \mathcal{G}_1^*(t_1 - t_2, j_1) \cdots \prod_{j_{n-1}=1}^{s+n-1} \mathcal{G}_1^*(t_{n-1} - t_n, j_{n-1}) \times \sum_{i_n=1}^{s+n-1} \mathcal{N}_{\text{int}}^*(i_n, s+n) \prod_{j_n=1}^{s+n} \mathcal{G}_1^*(t_n, j_n) f_{s+n} \Big|_{\mathcal{L}^1(\mathcal{H}_{s+n})} = 0,$$

де $n \geq 1$. Останні рівності є наслідком справедливості для обмеженого потенціалу взаємодії аналогів рівняння Дюамеля для кумулянтів (2.30) груп операторів (2.7).

Згідно з рівностями (3.7) для одночастинкового оператора густини (3.2) справедлива така гранична теорема.

Якщо виконується умова (3.6), тоді для ряду (3.2) справедлива рівність

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \|\epsilon F_1(t) - f_1(t)\|_{\mathcal{L}^1(\mathcal{H})} = 0,$$

де для довільного скінченного інтервалу часу граничний одночастинковий оператор густини $f_1(t)$ визначається збіжним за нормою простору $\mathcal{L}^1(\mathcal{H})$ рядом

$$\begin{aligned} f_1(t, 1) &= \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^t dt_1 \cdots \int_0^{t_{n-1}} dt_n \text{Tr}_{2, \dots, n+1} \mathcal{G}_1^*(t - t_1, 1) \mathcal{N}_{\text{int}}^*(1, 2) \times \\ &\prod_{j_1=1}^2 \mathcal{G}_1^*(t_1 - t_2, j_1) \cdots \prod_{i_n=1}^n \mathcal{G}_1^*(t_n - t_n, i_n) \times \\ &\sum_{k_n=1}^n \mathcal{N}_{\text{int}}^*(k_n, n+1) \prod_{j_n=1}^{n+1} \mathcal{G}_1^*(t_n, j_n) \prod_{i=1}^{n+1} f_1^0(i). \end{aligned} \quad (3.8)$$

Для обмежених потенціалів взаємодії ряд (3.8) збігається за нормою простору $\mathcal{L}^1(\mathcal{H})$ за умови: $t < t_0 \equiv (2 \|\Phi\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H}_2)} \|f_1^0\|_{\mathcal{L}^1(\mathcal{H})})^{-1}$.

Для початкового стану $f_1^0 \in \mathcal{L}^1(\mathcal{H})$ граничний оператор (3.8) задовольняє задачу Коші для квантового кінетичного рівняння Власова

$$\frac{\partial}{\partial t} f_1(t, 1) = \mathcal{N}_1^*(1) f_1(t, 1) + \text{Tr}_2 \mathcal{N}_{\text{int}}^*(1, 2) f_1(t, 1) f_1(t, 2), \quad (3.9)$$

$$f_1(t)|_{t=0} = f_1^0. \quad (3.10)$$

Зауважимо, що для чистих станів, тобто $f_1(t) = |\psi(t)\rangle\langle\psi(t)|$ або в термінах ядра такого оператора $f_1(t, q, q') = \psi(t, q)\psi^*(t, q')$, квантове кінетичне рівняння Власова (3.9) зводиться до рівняння Хартрі

$$i \frac{\partial}{\partial t} \psi(t, q) = -\frac{1}{2} \Delta_q \psi(t, q) + \int dq' \Phi(q - q') |\psi(q')|^2 \psi(t, q).$$

Зокрема, якщо ядро потенціалу взаємодії $\Phi(q) = \delta(q)$ є мірою Дірака, тоді кінетичне рівняння Хартрі перетворюється в нелінійне рівняння Шредінгера з кубичною нелінійністю

$$i \frac{\partial}{\partial t} \psi(t, q) = -\frac{1}{2} \Delta_q \psi(t, q) + |\psi(t, q)|^2 \psi(t, q).$$

Згідно властивості (3.7) для кумулянтів асимптотично збурених груп операторів для твірних операторів (3.3) справедливі рівності:

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left\| \left(\mathfrak{Y}_1(t, \{1, \dots, s\}) - I \right) f_s \right\|_{\mathcal{L}^1(\mathcal{H}_s)} = 0,$$

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left\| \frac{1}{\epsilon^n} \mathfrak{Y}_{1+n}(t, \{1, \dots, s, s+1, \dots, s+n\}) f_{s+n} \right\|_{\mathcal{L}^1(\mathcal{H}_{s+n})} = 0, \quad n \geq 1.$$

Внаслідок таких рівностей і збіжності в границі самоузгодженого поля розв'язку задачу Коші для узагальненого квантового кінетичного рівняння (3.4), (3.5) до розв'язку задачу Коші для квантового кінетичного рівняння Власова (3.9), (3.10) для редукованих функціоналів стану (3.1) справедливі такі рівності:

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left\| \epsilon^s F_s(t, 1, \dots, s \mid F_1(t)) - \prod_{j=1}^s f_1(t, j) \right\|_{\mathcal{L}^1(\mathcal{H}_s)} = 0, \quad s \geq 2,$$

де граничний оператор $f_1(t)$ визначається рядом (3.8), яким зображується розв'язок квантового рівняння Власова (3.9).

Останнє твердження описує процес поширення початкового хаосу в границі самоузгодженого поля, тобто, якщо в початковий момент часу в системі відсутні кореляції, тоді в цьому наближенні в процесі еволюції кореляції станів частинок не народжуються.

Зазначимо, що традиційний підхід до проблеми поширення початкового хаосу ґрунтується на встановленні асимптотичної поведінки розв'язку квантової ієрархії ББГКІ для редукованих операторів густини, побудованого методами теорії збурень [2, 31].

4. СКЕЙЛІНГОВА ЕВОЛЮЦІЯ СПОСТЕРЕЖУВАНИХ

У цьому розділі розглядається скейлінгова асимптотична поведінка розв'язку (2.24) задачі Коші для дуальної ієрархії рівнянь ББГКІ (2.22), (2.23) у випадку границі середнього (самоузгодженого) поля [30] або, іншими словами, розглядаються основи опису еволюції квантових систем багатьох частинок за допомогою кінетичних рівнянь для спостережуваних.

4.1. Ієрархія кінетичних рівнянь для спостережуваних. Нехай в початковий момент часу існує границя самоузгодженого поля для редукованих спостережуваних (2.23) в сенсі *-слабкої збіжності простору $\mathfrak{L}(\mathcal{H}_s)$ обмежених операторів

$$w^* - \lim_{\epsilon \rightarrow 0} (\epsilon^{-s} B_s^{\epsilon; 0} - b_s^0) = 0, \quad (4.1)$$

де $\epsilon > 0$ – скейлінговий параметр. Тоді для редукованих спостережуваних (2.24), які є розв’язком дуальної ієрархії рівнянь ББГКІ (2.22) справедлива така гранична теорема [14, 30].

Якщо виконується умова (4.1), тоді для довільного скінченного інтервалу часу існує границя самоузгодженого поля для послідовності редукованих спостережуваних (2.24) в такому сенсі

$$w^* - \lim_{\epsilon \rightarrow 0} (\epsilon^{-s} B_s(t) - b_s(t)) = 0, \quad (4.2)$$

де граничні спостережувані $b_s(t)$, $s \geq 1$, визначаються такими розкладами:

$$\begin{aligned} b_s(t, 1, \dots, s) &= \sum_{n=0}^{s-1} \int_0^t dt_1 \dots \int_0^{t_{n-1}} dt_n \mathcal{G}_s^0(t - t_1) \times \\ &\sum_{i_1 \neq j_1=1}^s \mathcal{N}_{\text{int}}(i_1, j_1) \mathcal{G}_{s-1}^0(t_1 - t_2) \dots \mathcal{G}_{s-n+1}^0(t_{n-1} - t_n) \times \\ &\sum_{\substack{i_n \neq j_n=1, \\ i_n, j_n \neq (j_1, \dots, j_{n-1})}}^s \mathcal{N}_{\text{int}}(i_n, j_n) \mathcal{G}_{s-n}^0(t_n) b_{s-n}^0((1, \dots, s) \setminus (j_1, \dots, j_n)), \end{aligned} \quad (4.3)$$

та для групи операторів невзаємодіючих частинок використано позначення

$$\mathcal{G}_{s-n+1}^0(t_{n-1} - t_n) \equiv \prod_{j \in (1, \dots, s) \setminus (j_1, \dots, j_{n-1})} \mathcal{G}_1(t_{n-1} - t_n, j).$$

Для певного типу спостережуваних структура розкладу (4.3) набуває спеціальної форми, наприклад, у разі k -арного типу спостережуваних маємо:

$$\begin{aligned} b_s^{(k)}(t, 1, \dots, s) &= \int_0^t dt_1 \dots \int_0^{t_{s-k-1}} dt_{s-k} \mathcal{G}_s^0(t - t_1) \times \\ &\sum_{i_1 \neq j_1=1}^s \mathcal{N}_{\text{int}}(i_1, j_1) \mathcal{G}_{s-1}^0(t_1 - t_2) \dots \mathcal{G}_{s-n+1}^0(t_{s-k-1} - t_{s-k}) \times \end{aligned} \quad (4.4)$$

$$\sum_{\substack{s \\ i_{s-k} \neq j_{s-k} = 1, \\ i_{s-k}, j_{s-k} \neq (j_1, \dots, j_{s-k-1})}} \mathcal{N}_{\text{int}}(i_{s-k}, j_{s-k}) \mathcal{G}_{s-n}^0(t_{s-k}) b_k^0((1, \dots, s) \setminus (j_1, \dots, j_{s-k})), \quad 1 \leq s \leq k.$$

Якщо $b^0 \in \mathfrak{L}(\mathcal{F}_{\mathcal{H}})$, тоді послідовність $b(t) = (b_0, b_1(t), \dots, b_s(t), \dots)$ граничних спостережуваних (4.3) задовольняє задачі Коші для дуальної ієрархії рівнянь Власова:

$$\frac{\partial}{\partial t} b_s(t, 1, \dots, s) = \sum_{j=1}^s \mathcal{N}(j) b_s(t, 1, \dots, s) + \sum_{j_1 \neq j_2=1}^s \mathcal{N}_{\text{int}}(j_1, j_2) b_{s-1}(t, (1, \dots, s) \setminus (j_1)), \quad (4.5)$$

$$b_s(t, 1, \dots, s) |_{t=0} = b_s^0(1, \dots, s), \quad s \geq 1. \quad (4.6)$$

Наведемо приклади рівнянь дуальної ієрархії Власова (4.5) в термінах ядер операторів граничних редукованих спостережуваних:

$$\begin{aligned} i \frac{\partial}{\partial t} b_1(t, q_1; q'_1) &= -\frac{1}{2} (-\Delta_{q_1} + \Delta_{q'_1}) b_1(t, q_1; q'_1), \\ i \frac{\partial}{\partial t} b_2(t, q_1, q_2; q'_1, q'_2) &= \left(-\frac{1}{2} \sum_{i=1}^2 (-\Delta_{q_i} + \Delta_{q'_i}) + \right. \\ &\quad \left. (\Phi(q'_1 - q'_2) - \Phi(q_1 - q_2)) \right) b_2(t, q_1, q_2; q'_1, q'_2) + \\ &\quad (\Phi(q'_1 - q'_2) - \Phi(q_1 - q_2)) (b_1(t, q_1; q'_1) + b_1(t, q_2; q'_2)). \end{aligned}$$

Зазначимо, що система рівнянь (4.5) має структуру рекурентних еволюційних рівнянь.

Таким чином, в скейлінговій границі середнього поля колективна поведінка (кінетична еволюція) квантової системи багатьох частинок описується в термінах послідовності граничних редукованих спостережуваних (4.3), зокрема, послідовності (4.4), еволюція яких визначається задачею Коші для дуальної ієрархії рівнянь Власова (4.5), (4.6).

4.2. Властивість поширення хаосу. Встановимо зв'язок колективної поведінки в границі самоузгодженого поля квантової системи багатьох частинок, яка описується дуальною ієрархією рівнянь Власова (4.5) для граничних редукованих спостережуваних, і нелінійним кінетичним рівнянням Власова (3.9) для стану типової частинки системи.

Нехай початковий стан задовольняє умові хаосу, тобто в початковий момент часу відсутні кореляції поміж частинками (статистично незалежні частинки), а саме, такою послідовністю граничних (у границі самоузгодженого поля) редукованих операторів густини (статистика Максвелла-Больцмана)

$$f^{(c)} \equiv (I, f_1^0(1), \dots, \prod_{i=1}^s f_1^0(i), \dots). \quad (4.7)$$

Як зазначалося вище, таке припущення стосовно початкового стану характерно для кінетичного опису газу, оскільки в цьому випадку стан цілком визначається за допомогою одночастинкового оператора густини.

Для функціонала середніх значень (2.19) граничних спостережуваних адитивного типу (4.4) і початкового стану (4.7) на скінченному проміжку часу справедлива рівність

$$(b^{(1)}(t), f^{(c)}) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{1}{s!} \text{Tr}_{1, \dots, s} b_s^{(1)}(t, 1, \dots, s) \prod_{i=1}^s f_1^0(i) = \text{Tr}_1 b_1^0(1) f_1(t, 1),$$

де одночастинковий оператор густини зображується таким рядом

$$f_1(t, 1) = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^t dt_1 \dots \int_0^{t_{n-1}} dt_n \text{Tr}_{2, \dots, n+1} \prod_{i=1}^1 \mathcal{G}_1^*(t - t_1, i_1) \times \mathcal{N}_{\text{int}}^*(1, 2) \prod_{j=1}^2 \mathcal{G}_1^*(t_1 - t_2, j_1) \dots \prod_{i_n=1}^n \mathcal{G}_1^*(t_n - t_n, i_n) \times \sum_{k_n=1}^n \mathcal{N}_{\text{int}}^*(k_n, n+1) \prod_{j_n=1}^{n+1} \mathcal{G}_1^*(t_n, j_n) \prod_{i=1}^{n+1} f_1^0(i). \quad (4.8)$$

Одночастинковий оператор густини (4.8) задовольняє задачу Коші для квантового кінетичного рівняння Власова (3.9), (3.10).

Таким чином, ієрархія еволюційних рівнянь (4.5) для граничних редукованих спостережуваних адитивного типу і початкового стану (4.7) описує еволюцію квантової системи багатьох частинок в еквівалентний спосіб до кінетичного рівняння Власова (3.9).

Відповідно, для функціоналів середніх значень граничних спостережуваних неадитивного типу (4.4) і початкового стану (4.7) на скінченному проміжку часу справедливі рівності:

$$(b^{(k)}(t), f^{(c)}) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{1}{s!} \text{Tr}_{1, \dots, s} b_s^{(k)}(t, 1, \dots, s) \prod_{i=1}^s f_1^0(i) = \frac{1}{k!} \text{Tr}_{1, \dots, k} b_k^0(1, \dots, k) \prod_{i=1}^k f_1(t, i), \quad k \geq 2, \quad (4.9)$$

де одночастинковий оператор густини зображується рядом (4.8), тобто задовольняє задачу Коші для квантового кінетичного рівняння Власова (3.9), (3.10).

Рівність (4.9) описує процес поширення початкового хаосу (4.7) в границі самоузгодженого поля за допомогою розв'язку (4.8) квантового кінетичного рівняння Власова (3.9), а саме, на довільному скінченному проміжку часу стан зображується такою послідовністю граничних редукованих операторів:

$$f_k(t, 1, \dots, k) = \prod_{i=1}^k f_1(t, i), \quad k \geq 2, \quad (4.10)$$

тобто, якщо в початковий момент часу в системі частинок відсутні кореляції, тоді в цьому наближенні в процесі еволюції кореляції станів частинок не народжуються.

4.3. Кінетичні рівняння з початковими кореляціями. Зазначимо, що використаний вище підхід до виведення кінетичних рівнянь дозволяє сформулювати кінетичні рівняння у разі більш загальних початкових станів, якими описуються не лише гази квантових частинок (4.7), але й системи багатьох частинок в конденсованих станах [39].

Розглянемо початкові стани квантових систем багатьох частинок, які визначаються одночастинковим оператором густини та кореляційними операторами (статистика Максвелла – Больцмана) [14]

$$f^{(cc)} = (I, f_1^0(1), g_2^0(1, 2) \prod_{i=1}^2 f_1^0(i), \dots, g_n^0(1, \dots, n) \prod_{i=1}^n f_1^0(i), \dots), \quad (4.11)$$

де операторами $g_n^0(1, \dots, n) \equiv g_n^0 \in \mathfrak{L}_0^1(\mathcal{H}_n)$, $n \geq 2$, визначаються кореляції початкових станів частинок. Підкреслимо, що зазначене припущення (4.11) стосовно початкового стану є типовим для кінетичного опису систем багатьох частинок в конденсованих станах, які характеризуються кореляціями, наприклад, плинів частинок [39].

Тоді, використовуючи метод виведення кінетичних рівнянь на основі ієрархії кінетичних рівнянь для спостережуваних, на довільному скінченному проміжку часу встановлюємо, що стан описується послідовністю граничних редукованих операторів густини $f(t) = (I, f_1(t, 1), \dots, f_n(t, 1, \dots, n), \dots)$, де одночастинковий оператор густини зображується таким розкладом в ряд

$$\begin{aligned}
 f_1(t, 1) &= \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^t dt_1 \dots \int_0^{t_{n-1}} dt_n \text{Tr}_{2, \dots, n+1} \prod_{i_1=1}^1 \mathcal{G}_1^*(t - t_1, i_1) \times \\
 &\mathcal{N}_{\text{int}}^*(1, 2) \prod_{j_1=1}^2 \mathcal{G}_1^*(t_1 - t_2, j_1) \dots \prod_{i_n=1}^n \mathcal{G}_1^*(t_n - t_n, i_n) \times \\
 &\sum_{k_n=1}^n \mathcal{N}_{\text{int}}^*(k_n, n+1) \prod_{j_n=1}^{n+1} \mathcal{G}_1^*(t_n, j_n) g_{n+1}^0(1, \dots, n+1) \prod_{i=1}^{n+1} f_1^0(i).
 \end{aligned} \tag{4.12}$$

та граничні редуковані оператори густини $f_k(t, 1, \dots, k)$, $k \geq 2$, визначаються такою формулою [29]:

$$\begin{aligned}
 f_k(t, 1, \dots, k) &= \\
 &= \prod_{i_1=1}^k \mathcal{G}_1^*(t, i_1) g_k^0(1, \dots, k) \prod_{i_2=1}^k (\mathcal{G}_1^*)^{-1}(t, i_2) \prod_{j=1}^k f_1(t, j), \quad k \geq 2.
 \end{aligned} \tag{4.13}$$

Дійсно, для функціоналів середніх значень граничних спостережуваних (4.4) і початкового стану (4.11) на скінченному проміжку часу справедливі рівності:

$$(b^{(k)}(t), f^{(c)}) = \frac{1}{k!} \text{Tr}_{1, \dots, k} b_k^0(1, \dots, k) f_k(t, 1, \dots, k), \quad k \geq 1,$$

де послідовність $f(t)$ визначається розкладами (4.12) та (4.13). У статті [29] аналогічний результат отримано за допомогою узагальненого квантового кінетичного рівняння з початковими кореляціями.

У разі початкових станів, заданих послідовністю граничних кореляційних операторів (4.11), процес поширення початкових кореляцій описується наступною послідовністю кореляційних операторів (2.32)

$$\begin{aligned}
 g_n(t, 1, \dots, n) &= \\
 &= \prod_{i_1=1}^n \mathcal{G}_1^*(t, i_1) \sum_{P: (1, \dots, n) = \cup_i X_i} (-1)^{|P|-1} (|P| - 1)! \prod_{X_i \subset P} g_{|X_i|}^0(X_i) \times
 \end{aligned}$$

$$\prod_{i_2=1}^n (\mathcal{G}_1^*)^{-1}(t, i_2) \prod_{j=1}^n f_1(t, j), \quad n \geq 2.$$

Одночастинковий оператор густини (4.12) задовольняє задачі Коші для квантового кінетичного рівняння Власова з початковими кореляціями [29]:

$$\frac{\partial}{\partial t} f_1(t, 1) = \mathcal{N}^*(1) f_1(t, 1) + \quad (4.14)$$

$$+ \text{Tr}_2 \mathcal{N}_{\text{int}}^*(1, 2) \prod_{i_1=1}^2 \mathcal{G}_1^*(t, i_1) g_2^0(1, 2) \prod_{i_2=1}^2 (\mathcal{G}_1^*)^{-1}(t, i_2) f_1(t, 1) f_1(t, 2),$$

$$f_1(t)|_{t=0} = f_1^0, \quad (4.15)$$

де використано позначення (2.10) та групою операторів $(\mathcal{G}_1^*)^{-1}(t)$ позначено обернену групу операторів до групи (2.4).

Зазначимо, що кінетичне рівняння (4.14) є немарковським кінетичним рівнянням. Для чистих станів рівняння (4.14) зводиться до кінетичного рівняння Хартрі з початковими кореляціями. Для початкових станів системи статистично незалежних частинок кінетичне рівняння (4.14) співпадає з квантовим рівнянням Власова (3.9), а редуковані оператори густини (4.13) описують процес поширення початкового хаосу (4.10).

Зауважимо також, що в разі довільних початкових станів в границі самоузгодженого поля послідовність редукованих операторів густини, як й послідовність (4.12), (4.13), є розв'язком задачі Коші для ієрархії рівнянь Власова

$$\frac{\partial}{\partial t} f_s(t, 1, \dots, s) = \sum_{i=1}^s \mathcal{N}^*(i) f_s(t, 1, \dots, s) +$$

$$+ \sum_{i=1}^s \text{Tr}_{s+1} \mathcal{N}_{\text{int}}^*(i, s+1) f_{s+1}(t, 1, \dots, s+1),$$

$$f_s(t)|_{t=0} = f_s^0, \quad s \geq 1.$$

Таким чином, в разі початкових станів, які задаються одночастинковим оператором густини та кореляційними операторами (4.11), дуальна квантова ієрархія Власова (4.5) для редукованих спостережуваних адитивного типу описує еволюцію квантових систем багатьох частинок, так само як немарковське квантове кінетичне рівняння Власова з початковими кореляціями (4.14). У разі граничних редукованих спостережуваних неадитивного типу дуальна квантова ієрархія Власова (4.5)

в еквівалентний спосіб описує в сенсі рівності (4.13) процес поширення початкових кореляцій в термінах редукованих операторів густини (4.13). Іншими словами, альтернативний метод опису еволюції станів квантових систем багатьох частинок в наближенні самоузгодженого поля ґрунтується на немарковському кінетичному рівнянні Власова з початковими кореляціями (4.14).

5. Види на майбутнє

Вище розглянуто можливі підходи до опису еволюції квантових систем багатьох частинок, а саме, в термінах спостережуваних, еволюція яких описується дуальною ієрархією рівнянь ББГКІ (2.22), або в термінах стану, еволюція якого описується ієрархією рівнянь ББГКІ (2.27). Для систем скінченної кількості частинок ці ієрархії еволюційних рівнянь еквівалентні рівнянню Гейзенберга (2.1) та рівнянню фон Неймана (2.8) відповідно. Зокрема, розглянуто можливі способи опису еволюції станів за допомогою ієрархії фундаментальних рівнянь (2.14), якою описується еволюція кореляцій станів.

Було встановлено, що поняття кумулянта (2.18) груп операторів складає основу розкладів для розв'язків фундаментальних еволюційних рівнянь, якими описується еволюція квантових систем багатьох частинок, а саме: у разі груп операторів (2.4) – дуальної ієрархії рівнянь ББГКІ для редукованих спостережуваних, у разі груп операторів (2.7), відповідно, ієрархії фон Неймана (2.14) для кореляційних операторів, ієрархії рівнянь ББГКІ (2.27) для редукованих операторів густини та ієрархії нелінійних рівнянь ББГКІ (2.33) для редукованих кореляційних операторів, а також в основі кінетичного опису нескінченних систем частинок (3.1), (3.4).

Підкреслимо, що структура розкладів для кореляційних операторів (2.37), в яких твірними операторами є відповідного порядку кумулянти (2.17) груп операторів (2.7), індукує кумулянтну структуру розкладів в ряд для редукованих операторів густини (2.29), редукованих кореляційних операторів (2.38) та редукованих функціоналів стану (3.1). Таким чином, динаміка систем нескінченної кількості частинок породжується динамікою кореляцій станів частинок.

У статті також розглянуто два нових підходи до опису кінетичної еволюції квантових систем багатьох частинок. Один з них полягає в описі кінетичної еволюції квантової системи частинок за допомогою редукованих спостережуваних в скейлінговій границі самоузгодженого поля (4.5). Інший підхід заснований на немарковському узагальненні квантових кінетичних рівнянь (3.4).

Одна з переваг розглянутих підходів пов'язана з можливістю побудови кінетичних рівнянь в скейлінгових наближеннях з урахуванням кореляцій частинок в початковий момент часу, які характеризують конденсовані стани систем багатьох частинок. Інша перевага пов'язана з проблемою строгого виведення кінетичних рівнянь немарковського типу на основі динаміки квантових систем, які дозволяють описувати ефекти пам'яті в наноструктурах.

Зауважимо, що підхід до виведення квантового кінетичного рівняння Власова з динаміки систем багатьох частинок, який ґрунтується на узагальненому квантовому кінетичному рівнянні (3.4), дозволяє також побудувати поправки вищого порядку до еволюції самоузгодженого поля квантових систем.

Наведені вище результати можуть бути поширені на системи багатьох бозонів або ферміонів [11, 23].

ЛІТЕРАТУРА

- [1] D. Benedetto, F. Castella, R. Esposito, M. Pulvirenti. A short review on the derivation of the nonlinear quantum Boltzmann equations. *Commun. Math. Sci.*, (suppl. 1):55–71, 2007, doi: 10.4310/CMS.2007.v5.n5.a5.
- [2] N. Benedikter, M. Porta, B. Schlein. *Effective evolution equations from quantum dynamics*, volume 7 of *SpringerBriefs in Mathematical Physics*. Springer, Cham, 2016, doi: 10.1007/978-3-319-24898-1.
- [3] Ch. Boccato, S. Cenatiempo, B. Schlein. Quantum many-body fluctuations around nonlinear Schrödinger dynamics. *Ann. Henri Poincaré*, 18(1):113–191, 2017, doi: 10.1007/s00023-016-0513-6.
- [4] N. N. Bogolyubov. *Проблеми динамической теории в статистической физике*. ОГИЗ, Гос. изд. техн.-теорет. лит-ры, 1946, <https://books.google.com.ua/books?id=GUE6AQAIAAJ>.
- [5] C. Cercignani, V. Gerasimenko, D. Petrina. *Many-particle dynamics and kinetic equations*. Springer, (Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1st ed. 1997), 2012, doi: 10.1007/978-94-011-5558-8.
- [6] C. Cercignani, R. Illner, M. Pulvirenti. *The mathematical theory of dilute gases*. Springer-Verlag, New York, 1994, doi: 10.1007/978-1-4419-8524-8.
- [7] L. Erdős, B. Schlein, H.-T. Yau. Derivation of the Gross-Pitaevskii equation for the dynamics of Bose-Einstein condensate. *Ann. of Math.*, 172(1):291–370, 2010, doi: 10.4007/annals.2010.172.291.
- [8] I. Gallagher, L. Saint-Raymond, B. Texier. *From Newton to Boltzmann: hard spheres and short-range potentials*. Zurich Lectures in Advanced Mathematics. EMS, Zürich, 2013.
- [9] V. Gerasimenko, I. Gapyak. Low-density asymptotic behavior of observables of hard sphere fluids. *Advances in Math. Phys.*, 2018:1–11, 2018, doi: 10.1155/2018/6252919.
- [10] V. Gerasimenko, V. Shtyk, A. Zagorodny. Hydrodynamic equations for microscopic phase densities. *Cent. Eur. J. Phys.*, 9(1):71–77, 2011, doi: 10.2478/s11534-010-0033-9.
- [11] V. Gerasimenko, Zh.A. Tsvir. The generalized quantum kinetic equation for interacting particles with quantum statistics. *Math. Bulletin Sh. Sci. Soc.*, 7:351–367, 2010.

- [12] V. I. Gerasimenko. Approaches to derivation of quantum kinetic equations. *Ukr. J. Phys.*, 54(8-9):834–846, 2009.
- [13] V. I. Gerasimenko. Hierarchies of quantum evolution equations and dynamics of many-particle correlations. *Int. J. Evol. Equ.*, 7(2):109–163, 2012.
- [14] V. I. Gerasimenko. New approach to derivation of quantum kinetic equations with initial correlations. *Carpathian Math. Publ.*, 7(1):38–48, 2015, doi: 10.15330/cmp.7.1.38-48.
- [15] V. I. Gerasimenko. Evolution of correlation operators of large particle quantum systems. *Methods Funct. Anal. Topology*, 23(2):123–132, 2017.
- [16] V. I. Gerasimenko. Description of evolution of states in terms of operators originating by density matrix. In *Understanding Density Matrices*, pages 229–250. N.Y.: Nova Science Publ., Inc., 2019.
- [17] V. I. Gerasimenko. Processes of creation and propagation of correlations in large quantum particle system. In *Panorama of Contemporary Quantum Mechanics - Concepts and Applications*. IntechOpen, 2019, doi: 10.5772/intechopen.82836.
- [18] V. I. Gerasimenko, G. Borgioli. Initial-value problem of the quantum dual BBGKY hierarchy. *Il Nuovo Cimento C*, 33(1):71–78, 2010, doi: 10.1393/ncc/i2010-10564-6.
- [19] V. I. Gerasimenko, Yu. Yu. Fedchun. Nonperturbative solution expansions of hierarchies of evolution equations in functional derivatives. *Proceedings Inst. Math. NASU*, 9(2):347–375, 2012.
- [20] V. I. Gerasimenko, I. V. Gapyak. Hard sphere dynamics and the Enskog equation. *Kinetic & Related Models*, 5(3):459–484, 2012, doi: 10.3934/krm.2012.5.459.
- [21] V. I. Gerasimenko, I. V. Gapyak. Boltzmann–Grad asymptotic behavior of collisional dynamics. *Reviews in Math. Phys.*, 33(2):2130001, 2021, doi: 10.1142/s0129055x21300016.
- [22] V. I. Gerasimenko, D. Ya. Petrina. The generalized kinetic equation generated by the bbgky hierarchy. *Ukr. J. Phys.*, 43(6/7):697–702, 1998.
- [23] V. I. Gerasimenko, D. O. Polishchuk. Dynamics of correlations of Bose and Fermi particles. *Math. Methods Appl. Sci.*, 34(1):76–93, 2011, doi: 10.1002/mma.1336.
- [24] V. I. Gerasimenko, T. V. Ryabukha, M. O. Stashenko. On the structure of expansions for the BBGKY hierarchy solutions. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, 37(42):9861–9872, 2004, doi: 10.1088/0305-4470/37/42/002.
- [25] V. I. Gerasimenko, V. O. Shtyk. An initial-value problem for the Bogolyubov hierarchy for quantum systems of particles. *Ukrain. Mat. Zh.*, 58(9):1175–1191, 2006, doi: 10.1007/s11253-006-0136-z.
- [26] V. I. Gerasimenko, V. O. Shtyk. Evolution of correlations of quantum many-particle systems. *Journal of Stat. Mech.: Theory and Experiment*, 2008(03):P03007, 2008, doi: 10.1088/1742-5468/2008/03/p03007.
- [27] V. I. Gerasimenko, Zh. A. Tsvir. A description of the evolution of quantum states by means of the kinetic equation. *J. Phys. A*, 43(48):485203, 2010, doi: 10.1088/1751-8113/43/48/485203.
- [28] V. I. Gerasimenko, Zh. A. Tsvir. Mean field asymptotics of generalized quantum kinetic equation. *Rep. Math. Phys.*, 70(2):135–147, 2012, doi: 10.1016/S0034-4877(12)60034-2.
- [29] V. I. Gerasimenko, Zh. A. Tsvir. On quantum kinetic equations of many-particle systems in condensed states. *Physica A: Stat. Mech. and its Appl.*, 391(24):6362–6366, 2012, doi: 10.1016/j.physa.2012.07.061.
- [30] Viktor Gerasimenko. Heisenberg picture of quantum kinetic evolution in mean-field limit. *Kinet. Relat. Models*, 4(1):385–399, 2011, doi: 10.3934/krm.2011.4.385.

- [31] F. Golse. On the dynamics of large particle systems in the mean field limit. In *Macroscopic and Large Scale Phenomena: Coarse Graining, Mean Field Limits and Ergodicity*, pages 1–144. Springer Int. Publ., 2016, doi: 10.1007/978-3-319-26883-5_1.
- [32] H. Grad. Principles of the kinetic theory of gases. In *Handbuch der Physik (herausgegeben von S. Flügge), Bd. 12, Thermodynamik der Gase*, pages 205–294. Springer-Verlag, Berlin-Göttingen-Heidelberg, 1958.
- [33] O. E. Lanford, III. Time evolution of large classical systems. In *Dynamical systems, theory and applications*, pages 1–111. Lecture Notes in Phys., Vol. 38, 1975.
- [34] D. Ya. Petrina. Solutions of Bogoljubov’s kinetic equations. Quantum statistics. *Teoret. Mat. Fiz.*, 13(3):391–405, 1972.
- [35] D. Ya. Petrina. *Mathematical Foundations of Quantum Statistical Mechanics*. Springer Netherlands, 1995, doi: 10.1007/978-94-011-0185-1.
- [36] D. Ya. Petrina, V. I. Gerasimenko. Mathematical problems of statistical mechanics of a system of elastic balls. *Russian Math. Surveys*, 45(3):153–211, 1990, doi: 10.1070/rm1990v045n03abeh002360.
- [37] F. Pezzotti, M. Pulvirenti. Mean-field limit and semiclassical expansion of a quantum particle system. *Ann. Henri Poincaré*, 10(1):145–187, 2009, doi: 10.1007/s00023-009-0404-1.
- [38] H. Spohn. *Large Scale Dynamics of Interacting Particles*. Springer Berlin Heidelberg, 1991, doi: 10.1007/978-3-642-84371-6.
- [39] М. М. Боголюбов. *Лекції з квантової статистики. Проблеми статистичної механіки квантових систем*. Київ: Рад. Школа, 1949.

В. І. Герасименко

ІНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ НАН УКРАЇНИ, М. КИЇВ

Email: gerasym@imath.kiev.ua

ORCID: orcid.org/0000-0003-2577-2237

Формула конфліктної динаміки

Володимир Кошманенко

Abstract. We study various variants of the formula for conflict dynamics between two and several opponents which are represented by stochastic vectors or probability measures. A series of mathematical models of the conflict dynamical systems are discussed.

Анотація. Досліджуються різні варіанти формули конфліктної динаміки між двома та декількома опонентами, які представлені стохастичними векторами або ймовірнісними мірами. Дискутується ряд математичних моделей динамічних систем конфлікту.

1. ВСТУП

Конфліктна динаміка дає опис еволюції складної системи, яка містить у собі дві або декілька відносно незалежних динамічних підсистем конфліктно взаємодіючих між собою. Поведінку кожної окремої динамічної підсистеми можна розглядати, як вільну еволюцію збудовану інтерактивною взаємодією, притягальною, відштовхувальною чи навіть недетермінованою з іншими компонентами. Закон взаємодії є специфічним у кожному конкретному випадку. Він може бути досить складним, змінюватися з часом, враховувати випадкові та зовнішні обставини, залежати від тактик та стратегій конфліктуючих сторін. В літературі існує багато спроб запропонувати загальну формулу для опису взаємодії між конкуруючими підсистемами. Наведемо лише декілька публікацій, як теоретичного напрямку так і прикладного: [1, 7], [8], [10–13], [17–19], [20, 21], [22, 23, 25, 26], [30, 48]. Знайти універсальну формулу, яка б описувала закон конфліктної взаємодії у вигляді рівнянь чи явної математичної формули є нетривіальною задачею. Розв'язання такого типу проблеми завжди ставало деяким відкриттям, яке породжувало нову теорію. Так було із законом всесвітнього тяжіння, логістичним рівнянням, рівняннями Лотки-Вольтерри, рівнянням Шрьодінгера.

В цій статті ми аналізуємо різні варіанти формули конфліктної взаємодії між об'єктами, незалежна поведінка яких задана статистично, у вигляді ймовірностних розподілів на спільному просторі. Взаємодіючі

об'єкти в різній прикладній інтерпретації називаємо альтернативними сторонами, противниками, гравцями, опонентами, тенденціями, тощо. А взаємодію називаємо конфліктною, оскільки вона є причиною того, що вільна еволюція кожної із сторін деформується і, як наслідок, істотно змінюється незалежна статистична присутність сторін в різних регіонах простору існування. Зокрема, змінюються значення пріоритетів в конфліктних позиціях: збільшуються, зменшуються, коливаються або прямують до нуля.

Феномен конфліктної динаміки досліджуються вже давно і йому присвячено багато публікацій переважно в контексті теорії ігор, економічних процесів та боротьби біологічних популяцій [20, 21, 49, 50, 64], [51–53, 56]. Змістовний приклад одновимірної конфліктної динаміки відомий у формі логістичного рівняння

$$\frac{dP}{dt} = P(\alpha - \gamma P), \quad (1.1)$$

яке описує кількість $P(t)$ певної біологічної популяції з внутрішньою конкурентною боротьбою за ресурс існування. Тут $\gamma \geq 0$ – параметр міжвидової конфліктності, а $\alpha > 0$ – швидкість розмноження. Якби ресурс був необмежений і конкуренція втратила б сенс, $\gamma = 0$, тоді б популяція зростала за експонентою,

$$P(t) = \exp^{\alpha t} P_0, \quad P_0 = P(t = 0),$$

що можна спостерігати локально. Але звичайно, ресурс є обмеженим і неминуче виникає конкурентна боротьба, $\gamma > 0$. Тоді розв'язок рівняння (1.1) має вигляд

$$P(t) = \frac{\alpha \exp^{\alpha t} P_0}{\alpha + \gamma P_0 (\exp^{\alpha t} - 1)}, \quad t \geq 0. \quad (1.2)$$

З (1.2) видно, що при $t \rightarrow \infty$, максимальна кількість популяції стабілізується до обмеженої величини

$$\lim_{t \rightarrow \infty} P(t) = \alpha / \gamma. \quad (1.3)$$

Звичайно, це справедливо в припущенні, що параметр конкуренції γ є постійним і не залежить від зростання популяції, тобто, від значень $P(t)$. В реальних випадках це не так і динаміка відбувається за значно складнішими формулами (див. численні приклади в літературі [48–50]).

З математичної точки зору, навіть чисто абстрактний аналог логістичного рівняння,

$$\dot{x} = \lambda x(1 - x), \quad x \in [0, 1], 0 < \lambda < 4,$$

або його різницевий варіант,

$$x_{n+1} = \lambda x_n(1 - x_n), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

є досить нетривіальним (див. наприклад [15, 55, 63]). Завдяки нелінійності, і залежно від значень параметру λ , виникають типові ефекти нелінійної динаміки, такі, як існування циклів різних періодів, висока чутливість поведінки траєкторій до зміни початкового стану і, навіть, хаос.

Досить потужна гілка теорії конфлікту з прикладним аспектом ґрунтується на рівняннях Лотки-Вольтери,

$$\dot{P} = P(P + aR - bP), \quad \dot{R} = R(R + cP - dR), \quad a, b, c, d > 0. \quad (1.4)$$

Ці рівняння призначені для опису динаміки кількісних змін двох біологічних видів в результаті їх природної популяції, конкуренції та боротьби за виживання. Багато прикладів і моделей такого сорту наведено в монографіях [49, 50] (див. також [8]). Виявляється, що рівняння (1.4) є в певному сенсі універсальним. Вони працюють не лише в математичній біології, а і придатні до побудови моделей з конфліктною взаємодією у складних системах різної фізичної природи, в екології, в соціальних науках, процесах взаємодії мов, релігій, поширені політичних поглядів, економіці і навіть воєнних баталіях (див., наприклад, доповіді [31, 32, 35] та дискусії на подібні теми в лекціях І. Ерштейна [17]).

Важливо, що рівняння (1.4) описують динаміку кількісних змін опонентів. Звичайно, у застосуваннях саме кількісні характеристики сторін конфлікту мають вирішальне значення. Інформація про кількість суттєво впливає на вибір стратегії ведення конфліктної боротьби. Використання рівнянь Лотки-Вольтерри дозволяє визначати переможця в кожен момент часу та контролювати, щонайменше, виживання для однієї із сторін. Питання про встановлення рівноваги чи компромісу між опонентами як правило не ставиться.

Але завдяки природному принципу множинної повторюваності, будь-яка ігрова ситуація конфліктної боротьби відбувається багатократно з невеликими змінами. Тому досконала теорія конфлікту має ґрунтуватися на статистичному аналізі величезної кількості актів конфліктної боротьби. Отже, застосування методів теорії ймовірностей є неминучим. Для адекватного опису конфліктної динаміки, необхідно використовувати рівняння в термінах станів складної системи, заданих розподілами випадкових величин пов'язаних з опонентами. Тут можна провести деяку аналогію між переходом від рівнянь Лотки-Вольтерри до рівнянь в термінах імовірнісних розподілів з подібного сорту переходом

від рівнянь класичної фізики до рівнянь квантової фізики в термінах функцій в нескінченновимірному гільбертовому просторі.

Опишемо коротко постановку задачі в термінах ймовірнісних розподілів. Нехай $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_n\}$, $n > 1$ – скінчений дискретний простір конфліктних позицій, за окупацію яких сперечаються опоненти А та В. Стартова, на момент $t = 0$, оцінка належності кожної з позицій ω_i , $i \in \{1, n\}$, опонентам А та В є випадковою і визначається числами:

$$p_i^{t=0} = \mathbf{P}(\omega_i \sim A), \quad r_i^{t=0} = \mathbf{P}(\omega_i \sim B), \quad 0 \leq p_i, r_i \leq 1,$$

де $\mathbf{P}(\cdot)$ позначає ймовірність належності позицій ω_i до А чи В. Отже, початковий стан системи визначається парою стохастичних векторів:

$$\mathbf{p}^{t=0} = (p_1^0, \dots, p_n^0), \quad \mathbf{r}^{t=0} = (r_1^0, \dots, r_n^0).$$

Вважаємо, що конфліктна взаємодія відбувається у моменти дискретного часу, $t = 1, 2, \dots$. Пошук закону, за яким формуються вектори \mathbf{p}^t , \mathbf{r}^t є проблемою. Один із варіантів її розв'язку описано далі.

Аназа формули для координат вектора $\mathbf{p}^{t=1}$ має вигляд

$$p_i^{t=1} \approx \mathbf{P}(\omega_i \sim A) - \mathbf{P}(\omega_i \sim A) \cdot \mathbf{P}(\omega_i \sim B) \quad i \in \{1, n\}.$$

Ймовірність приналежності позиції ω_i опоненту А після конфліктної взаємодії з В, пропорційна початковій ймовірності p_i^0 , мінус ймовірність одночасної належності ω_i до обох опонентів, яка є добутком початкових ймовірностей (мінус, оскільки опоненти конфліктують). Цю формулу переписуємо так:

$$p_i^{t=1} = 1/z_p \mathbf{P}(\omega_i \sim A) \cdot \mathbf{P}(\omega_i \sim B) \equiv 1/z_p p_i^0 \cdot (1 - r_i^0),$$

де коефіцієнт $1/z_p$ забезпечує стохастичність нового вектора $\mathbf{p}^{t=1}$. Аналогічно для координат $\mathbf{r}^{t=1}$:

$$r_i^{t=1} = 1/z_r \mathbf{P}(\omega_i \sim B) \cdot \mathbf{P}(\omega_i \sim A) \equiv 1/z_r r_i^0 \cdot (1 - p_i^0).$$

Для довільного моменту часу координати векторів \mathbf{P}^t , \mathbf{r}^t визначаються за ітераційним законом:

$$p_i^t = \frac{1}{z_p^{t-1}} p_i^{t-1} (1 - r_i^{t-1}), \quad r_i^t = \frac{1}{z_r^{t-1}} r_i^{t-1} (1 - p_i^{t-1}), \quad t \geq 1. \quad (1.5)$$

Саме ці формули є основою подальших уточнень та узагальнень.

Відзначимо, що вперше, найпростіший варіант формули конфліктної взаємодії між парою дискретних динамічних систем заданих стохастичними векторами розглянуто в роботі автора [37] (див. також [4, 14, 33, 38, 59, 60]), а для пари дискретних ймовірнісних мір, в роботах [2, 5, 6, 43]. В декількох публікаціях, спільних з С. Альбергеріо та І. Самойленко [3, 40, 47] досліджувались різні моделі складних динамічних систем прикладного характеру, які описують спрощені процеси

типу міграції робочої сили, чи нелінійних взаємозалежностей між тріадою типу «ресурс - виробництво - споживання».

Пошук формули конфліктної взаємодії для опонентів представлених довільними (не дискретними) мірами становило деяку проблему. Справа у тому, що формули (1.5) неможливо переписати в термінах мір безпосередньо, бо добуток мір не є адитивною функцією. Для подолання цієї проблеми замість добутку $p_i^t r_i^t$ пропонується ставити мінімальне значення p_i^t або r_i^t . Тоді виявляється, що гранична асимптотика при $t \rightarrow \infty$ не змінюється, а дискретні міри можна замінити і неперервним (див. далі формули (2.2)-(2.7)).

2. ТЕОРЕМА ПРО КОНФЛІКТ. ІСНУВАННЯ РІВНОВАЖНИХ АТРАКТОРІВ

Нехай Ω позначає компакт з деякого топологічного простору, на якому задана σ -алгебра борелевських підмножин \mathcal{B} .

Позначимо через $\mathcal{M}^+(\Omega)$ сім'ю всіх σ -адитивних додатних мір на Ω . Підклас ймовірностних мір позначаємо $\mathcal{M}_1^+(\Omega)$.

Довільну пару мір $\mu, \nu \in \mathcal{M}_1^+(\Omega)$ називаємо станом складної системи конфлікту між двома опонентами, початкові розподіли яких на Ω задані цими мірами. Конфліктній взаємодії між опонентами ми ставимо у відповідність деяке бінарне відображення $*$ у прямому добутку $\mathcal{M}_1^+(\Omega) \times \mathcal{M}_1^+(\Omega)$, яке називаємо композицією конфлікту. Для кожної пари мір $\mu = \mu^{t=0}, \nu = \nu^{t=0} \in \mathcal{M}_1^+(\Omega)$, відображення $*$ породжує траєкторію:

$$\left\{ \begin{array}{c} \mu^0 \\ \nu^0 \end{array} \right\} \xrightarrow{*, t} \left\{ \begin{array}{c} \mu^t \\ \nu^t \end{array} \right\}, \quad t > 0. \quad (2.1)$$

Трійку $\{\Omega, \mathcal{M}_1^+(\Omega), *\}$ звемо динамічною системою конфлікту з траєкторіями (2.1).

Далі, відправляючись від формул (1.5) ми розглядаємо різні варіанти задання відображення $*$ різницевиими або диференціальними рівняннями в дискретному чи неперервному часі:

$$\mu^{t+1} \simeq \mu^t(\theta^t + 1 - \nu^t), \quad \nu^{t+1} = \nu^t(\theta^t + 1 - \mu^t), \quad (2.2)$$

$$\mu^{t+1} \simeq \mu^t(\theta^t + 1) - \eta^t, \quad \nu^{t+1} = \nu^t(\theta^t + 1) - \eta^t, \quad t = 0, 1, \dots, \quad (2.3)$$

$$\frac{d}{dt}\mu \simeq \mu(\theta - \nu), \quad \frac{d}{dt}\nu = \nu(\theta - \mu), \quad (2.4)$$

$$\frac{d}{dt}\mu \simeq \mu\theta - \eta, \quad \frac{d}{dt}\nu = \nu\theta - \eta, \quad t \geq 0. \quad (2.5)$$

Тут $\theta^t \equiv \theta(t) = \theta(\mu, \nu)$ – додатній квадратичний функціонал на мірах $\mu^t \equiv \mu(t)$, $\nu^t \equiv \nu(t)$. Він визначає вільну еволюцію опонентів і його явний вигляд визначається конкретною моделлю. Міра $\eta^t \equiv \eta(t) = \eta(\mu, \nu)$

відповідає конфліктній взаємодії і називається показником конфронтації. Символ \simeq означає, що вирази у правих частинах формул (2.2)-(2.5) треба уточнити (наприклад, ввести нормувальний знаменник), щоб забезпечити належність мір μ^t , ν^t простору $\mathcal{M}_1^+(\Omega)$.

Основне питання – існування граничних рівноважних станів

$$\mu^\infty = \lim_{t \rightarrow \infty} \mu^t, \quad \nu^\infty = \lim_{t \rightarrow \infty} \nu^t$$

для динамічних систем конфлікту, які визначаються уточненими рівняннями виду (2.2)-(2.5). Поведінка траєкторій, існування циклічних орбіт та атракторів для складних моделей, опис басейнів притягання, стійкість нерухомих станів – ці питання розглянуті лише частково і потребують подальших досліджень.

2.1. Регіоналізація ресурсного простору. Як з математичної, так і для зручності застосувань, природно припускати, що простір Ω розбито в скінчену кількість регіонів:

$$\Omega = \Omega_1 \cup \dots \cup \Omega_i \cup \dots \cup \Omega_n, \quad n \geq 2$$

і задачу про конфліктний перерозподіл можна звести до першого порядку наближення, тобто з точністю до пошуку граничних значень

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mu^t(\Omega_i) = \mu^\infty(\Omega_i), \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \nu^t(\Omega_i) = \nu^\infty(\Omega_i), \quad i \in \overline{1, n},$$

без деталізації картини всередині регіонів Ω_i , тобто покладаючи всі міри рівномірно розподіленим на кожному регіоні Ω_i .

В таких випадках рівняння динаміки набувають такого вигляду:

$$p_i^{t+1} = p_i^t(\theta^t + 1 - r_i^t), \quad r_i^{t+1} = r_i^t(\theta^t + 1 - p_i^t), \quad (2.6)$$

$$p_i^{t+1} = \frac{p_i^t(\theta^t + 1) - \eta_i^t}{z^t}, \quad r_i^{t+1} = \frac{r_i^t(\theta^t + 1) - \eta_i^t}{z^t}, \quad (2.7)$$

$$(i \in \overline{1, n}, \quad t = 0, 1, \dots),$$

$$\frac{d}{dt} p_i = p_i(\theta - r_i), \quad \frac{d}{dt} r_i = r_i(\theta - p_i), \quad (2.8)$$

$$\frac{d}{dt} p_i = \frac{p_i \theta - \eta_i}{z}, \quad \frac{d}{dt} r_i = \frac{r_i \theta - \eta_i}{z}, \quad t \geq 0 \quad (2.9)$$

де $p_i^t \equiv p_i(t) = \mu^t(\Omega_i)$, $r_i^t \equiv r_i(t) = \nu^t(\Omega_i)$, а $z^t = \theta + 1 - \sum_i \eta_i^t$ в (2.7), та $z(t) = \theta - \sum_i \eta_i$ в (2.9). Функціонал θ та міру η визначаємо, як

$$\theta^t \equiv \theta(t) := \sum_{i=1}^n p_i^t r_i^t, \quad \eta^t \equiv \eta(t) := \min\{p_i^t, r_i^t\}.$$

Теорема 2.2 (Про конфлікт). *Кожна траєкторія (2.1) динамічної системи конфлікту*

$$\{\Omega, \mathcal{M}_1^+(\Omega), *\}$$

з початковим станом $\{\mu, \nu\}$, $\mu, \nu \in \mathcal{M}_1^+(\Omega)$ і композицією $*$ заданою одним із рівнянь (2.6)-(2.9) збігається до рівноважного стану $\{\mu^\infty, \nu^\infty\}$, який є нерухомою точкою системи. Якщо для усіх регіонів $\mu(\Omega_i) = \nu(\Omega_i) > 0$, то усі граничні значення $\mu^\infty(\Omega_i), \nu^\infty(\Omega_i)$ рівні:

$$\mu^\infty(\Omega_i) = \nu^\infty(\Omega_i) = 1/n \quad (2.10)$$

і цей стан є частково стійким (лише в множині пар тотожних початкових мір). Якщо $\mu \neq \nu$, то

$$\mu^\infty(\Omega_i) = \frac{\mu(\Omega_i) - \nu(\Omega_i)}{D}, \quad \nu^t(\Omega_i) = 0, \quad (i \in N^+), \quad (2.11)$$

$$\mu^\infty(\Omega_k) = 0, \quad \nu^\infty(\Omega_k) = \frac{\nu(\Omega_k) - \mu(\Omega_k)}{D}, \quad (k \in N^-), \quad (2.12)$$

$$\mu^\infty(\Omega_j) = 0 = \nu^\infty(\Omega_j), \quad (j \in N^0), \quad (2.13)$$

де

$$D := \sum_{i=1}^n (\mu(\Omega_i) - \nu(\Omega_i)),$$

і

$$N^+ = \{i : \mu(\Omega_i) > \nu(\Omega_i)\}, \quad N^- = \{k : \mu(\Omega_k) < \nu(\Omega_k)\},$$

$$N^0 = \{j : \mu(\Omega_j) = \nu(\Omega_j)\},$$

при цьому, $\mu^\infty \perp \nu^\infty$, (опоненти не конфліктують), але цей стан не є стійким.

Доведення. Воно зводиться до аналізу поведінки різниць та відношень

$$d_i^t := \mu^t(\Omega_i) - \nu^t(\Omega_i), \quad R_i^t := \mu^t(\Omega_i) / \nu^t(\Omega_i),$$

коли час прямує до нескінченності.

Неважко показати (докладніше див. [60]), що

$$d_i^t \rightarrow d_i^\infty > 0, \quad R_i^t \rightarrow \infty, \quad t \rightarrow \infty, \quad i \in N^+.$$

З цього випливає, що $\mu^\infty(\Omega_i) > 0$, а $\nu^\infty(\Omega_i) = 0$. Аналогічно доводимо, що

$$d_k^t \rightarrow -d_k^\infty > 0, \quad (R_k^t)^{-1} \rightarrow \infty, \quad t \rightarrow \infty, \quad k \in N^-.$$

Тому $\nu^\infty(\Omega_k) > 0$, та $\mu^\infty(\Omega_k) = 0$.

Для знаходження значень $\mu^\infty(\Omega_i)$, $i \in N^+$, та $\nu^\infty(\Omega_k)$, $k \in N^-$, які є строго додатними, потрібно розглядати поведінку відношень $d_{i_1}^t / d_{i_2}^t$,

$i_1, i_2 \in N^+$, та $d_{k_1}^t/d_{k_2}^t$, $k_1, k_2 \in N^-$. Виявляється, що ці відношення не залежать від часу. Тому граничні значення $\mu^\infty(\Omega_i)$ та $\nu^\infty(\Omega_k)$ пропорційні значенням початкових різниць d_i та d_k з коефіцієнтом пропорційності $1/D$.

Для доведення (2.10) використовується метод впорядкування значень $\mu^t(\Omega_i) = \nu^t(\Omega_i)$ по зростанню відносно індексу i і перевірки, що різниця між найменшим та найбільшим прямує до нуля при $t \rightarrow \infty$. Тоді (2.10) випливає з того, що $\mu^\infty(\Omega) = \nu^\infty(\Omega) = 1$. Часткова стійкість таких станів очевидна.

Рівність (2.13) доводиться припущенням від супротивного.

Нарешті нестійкість граничного стану в загальному випадку впливає прямо з формул (2.11), (2.12). Будь-яке збурення, яке змінює хоча б одну різницю d_i приводить до іншого граничного стану. \square

Варто відзначити, що в загальному випадку граничний стан $\{\mu^\infty, \nu^\infty\}$ є рівноважним у тому сенсі, що в цьому стані опоненти припиняють конфліктну взаємодію, граничні міри є інваріантними відносно композиції $*$, бо ці міри стають або тотожними, або ортогональними і зосередженими на різних територіях, відповідно:

$$\Omega^+ = \bigcup_{i \in N^+} \Omega_i, \quad \Omega^- = \bigcup_{k \in N^-} \Omega_k,$$

які не перетинаються. Множина $\Omega^0 = \bigcup_{j \in N^0} \Omega_j$ (на ній обидві граничні міри дорівнюють нулю) стає в певному сенсі незалежною.

2.3. ε -апроксимація та фрактальне подрібнення простору. Теорема 2.2 дає відповідь на питання про граничний по $t \rightarrow \infty$ стан системи при конфліктній взаємодії, яка враховується з точністю до розбиття простору Ω на регіони Ω_i . Що відбувається всередині цих регіонів – невідомо. Якщо початковий стан системи задано мірами μ, ν , які не є рівномірно розподіленими на Ω_i , то теорема 2.2 описує лише наближену картину перерозподілу ресурсного простору між альтернативними сторонами. Чи існує формула конфліктної динаміки незалежна від регіоналізації простору Ω ? Якщо так, то з якою точністю можна апроксимувати остаточний результат (якщо він існує) зменшуючи розміри регіонів Ω_i ? Відповідь на перше питання заявляється після спроб одержати відповідь на друге.

Зафіксуємо на Ω деяку імовірнісну міру λ , яку звемо основною. З прикладної точки зору важливим є таке питання. Які значення мають величини

$$\lambda(\Omega^+), \quad \lambda(\Omega^-), \quad \lambda(\Omega^0)?$$

Ці величини визначають, наскільки «справедливо» поділили опоненти ресурсний простір в результаті конфлікту. В попередньому підрозділі це питання можна вирішити з точністю до значень $\lambda(\Omega_i)$, $i \in \overline{1, n}$ – основної міри на окремих регіонах. Для точнішої відповіді на це питання, потрібно провести детальніше подрібнення регіонів, наприклад з точністю до деякого малого $\varepsilon > 0$:

$$\Omega_i = \bigcup_l \Omega_{i_l}, \quad \lambda(\Omega_{i_l}) \leq \varepsilon.$$

Щоб сформулювати точний результат потрібні додаткові умови та обмеження.

Припустимо, що початкові міри $\mu, \nu \in$ абсолютно неперервними відносно основної міри:

$$\mu(A) = \int_A m(x) d\lambda(x), \quad \nu(A) = \int_A n(x) d\lambda(x), \quad (2.14)$$

для $A \in \mathcal{B}$, $m, n \in C(\Omega)$. Тепер, використовуючи детальніше розбиття кожного регіону:

$$\Omega = \bigcup_{i=1}^n \bigcup_{k=1}^{m_i} \Omega_{i_k}, \quad n \leq \infty, \quad m_i < \infty \quad (2.15)$$

поставимо у відповідність початковим мірам μ, ν їх кусково рівномірно розподілені варіанти: $\tilde{\mu}, \tilde{\nu}$ за правилом:

$$\tilde{\mu}(\Omega_{i_k}) = \mu(\Omega_{i_k}), \quad \tilde{\nu}(\Omega_{i_k}) = \nu(\Omega_{i_k}). \quad (2.16)$$

Введемо умову на розбиття (2.15). Припустимо, що для наперед фіксованого $\varepsilon > 0$:

$$\sup_{\Omega_{i_k}} |M_{i_k} - m_{i_k}| < \varepsilon, \quad (2.17)$$

де

$$m_{i_k} := \inf_{x \in \Omega_{i_k}} h(x)/D, \quad M_{i_k} := \sup_{x \in \Omega_{i_k}} h(x)/D,$$

а

$$h(x) = m(x) - n(x), \quad D = \int_0^1 |h(x)| dx.$$

Теорема 2.4. *Нехай для пари мір μ, ν , абсолютно неперервних відносно міри λ , виконується умова (2.17). Тоді траєкторія динамічної системи з початковим станом $\{\tilde{\mu}, \tilde{\nu}\}$ і композицією \ast заданою одним із рівнянь (2.6)-(2.9), де $p_{i_k}^t \equiv p_{i_k}(t) = \tilde{\mu}^t(\Omega_{i_k})$, $r_{i_k}^t \equiv r_{i_k}(t) = \tilde{\nu}^t(\Omega_{i_k})$, збігається до рівноважного стану $\{\tilde{\mu}^\infty, \tilde{\nu}^\infty\}$ із значеннями:*

$$\tilde{\mu}^\infty(\Omega_{i_k}) = \tilde{\mu}_+(\Omega_{i_k}), \quad \tilde{\nu}^\infty(\Omega_{i'_k}) = \tilde{\nu}_-(\Omega_{i'_k}), \quad (2.18)$$

де $i_k \in N^+$, $i'_k \in N^-$, а $\tilde{\mu}_+$, $\tilde{\nu}_-$ – нормовані компоненти розкладу Гана-Жордана для заряду $\tilde{\omega} = \tilde{\mu} - \tilde{\nu}$. Тому

$$\begin{aligned}\tilde{\mu}^\infty(\Omega_{i_k}) &= 1/D \int_{\Omega_{i_k}} h(x) d\lambda(x), & \Omega_{i_k} \subset \Omega^+, \\ \tilde{\nu}^\infty(\Omega_{i'_k}) &= 1/D \int_{\Omega_{i'_k}} h(x) d\lambda(x), & \Omega_{i'_k} \subset \Omega^-, \end{aligned}$$

де Ω^+ , Ω^- позначають додатну та від'ємну підмножини розкладу Гана-Жордана.

Доведення теореми 2.4 нетривіальне, його можна знайти в роботі [39].

Позначимо через μ_+ , ν_- нормовані компоненти розкладу Гана-Жордана для заряду $\omega = \mu - \nu$. Тоді неважко зробити висновок, що згідно (2.18) значення мір $\tilde{\mu}^\infty$, μ_+ та $\tilde{\nu}^\infty$, ν_- тотожні на множинах Ω_{i_k} . Для довільних $A \in \mathcal{B}$ взагалі $\tilde{\mu}^\infty(A) \neq \mu_+(A)$ та $\tilde{\nu}^\infty(A) \neq \nu_-(A)$. Але вибираючи спосіб подрібнення простору Ω на регіони більш детальнішим, можна забезпечити, що відмінність між мірами $\tilde{\mu}^\infty$, μ_+ та $\tilde{\nu}^\infty$, ν_- ставала, як завгодно малою, тобто щоб для довільної борелевської множини були справедливими оцінки:

$$|\tilde{\mu}^\infty(A) - \mu_+(A)| < \varepsilon, \quad |\tilde{\nu}^\infty(A) - \nu_-(A)| < \varepsilon, \quad A \in \mathcal{B}. \quad (2.19)$$

Таким чином, з теореми 2.4 випливає, що граничні стани конфліктної динаміки (принаймні для абсолютно неперервних мір) припускають опис в термінах розкладів Гана-Жордана для мір. Ми використаємо цей факт для виведення більш досконалої формули динаміки у подальшому.

Цікаві факти зовсім іншого характеру можна одержати, якщо використовувати фрактальне подрібнення простору Ω . Почнемо з опису ітераційної побудови фрактального подрібнення простору Ω . А саме, нехай простір Ω підданий процедурі фрактальній регіоналізації. Це означає, що до Ω застосовано послідовність розбиттів на подібні регіони все меншого розміру:

$$\begin{aligned}\Omega &= \bigcup_{i_1=1}^n \Omega_{i_1}, \quad 2 \leq n < \infty, \\ \Omega_{i_1} &= \bigcup_{i_2=1}^n \Omega_{i_1 i_2}, & \Omega &= \bigcup_{i_1, i_2=1}^n \Omega_{i_1 i_2}, \dots \\ \Omega_{i_1 \dots i_{k-1}} &= \bigcup_{i_k=1}^n \Omega_{i_1 \dots i_k}, & \Omega &= \bigcup_{i_1, \dots, i_k=1}^n \Omega_{i_1 \dots i_k}, \dots\end{aligned}$$

з умовою: $|\Omega_{i_1 \dots i_k}| = \lambda(\Omega_{i_1 \dots i_k}) \rightarrow 0, k \rightarrow \infty$, де λ позначає основну міру на Ω , наприклад міру Лебега. Звичайно, таке подрібнення задається так званою ітераційною функціональною системою (див. [9, 24, 58]).

Нагадаємо, що сім'я стискуючих відображень

$$K = \{K_i\}_{i=1}^n, \quad 2 \leq n < \infty$$

в \mathbb{R}^d зветься *ітеруючою функціональною системою (IFS)* на Ω , якщо виконуються умови:

$$\Omega_i \subset \Omega, \quad \text{де } \Omega_i := K_i \Omega, \quad \forall i,$$

та

$$\text{Int}(\Omega_i) \cap \text{Int}(\Omega_j) = \emptyset, \quad i \neq j.$$

Зафіксувавши деяку ІТФ, можемо написати::

$$\Omega = \bigcup_{i_1, \dots, i_k=1}^n \Omega_{i_1 \dots i_k}, \quad \Omega_{i_1 \dots i_k} := K_{i_1} \circ \dots \circ K_{i_k} \Omega.$$

Тепер ми об'єднуємо ранг розбиття k та час t , тобто на кожному кроці подрібнення застосовуємо операцію конфліктної взаємодії між дискретними мірами. Опишемо акуратно цю процедуру.

Починаючи з довільної пари мір $\mu, \nu \in \mathcal{M}_1^+$ на Ω , на першому кроці, $t = 1$, побудуємо пару кусково рівномірно розподілених мір $\mu^{t=1}, \nu^{t=1}$ асоційованих із стохастичними векторами

$$\mathbf{p}^1 = (p_{i_1}^1) \quad \text{та} \quad \mathbf{r}^1 = (r_{i_1}^1), \quad i_1 = 1, \dots, n,$$

координати яких визначаються за формулами,

$$p_{i_1}^1 = \frac{p_{i_1}(1 - r_{i_1})}{1 - \sum_{i_1} p_{i_1} r_{i_1}}, \quad r_{i_1}^1 = \frac{r_{i_1}(1 - p_{i_1})}{1 - \sum_{i_1} p_{i_1} r_{i_1}}. \quad (2.20)$$

де

$$p_{i_1} = \mu(\Omega_{i_1}), \quad r_{i_1} = \nu(\Omega_{i_1}). \quad (2.21)$$

На другому кроці, $t = 2$, ми визначаємо міри μ^2, ν^2 , які пов'язані з розкладом другого рангу простору Ω та застосуванням конфліктної взаємодії другий раз:

$$\mu^{t=2}(\Omega_{i_1 i_2}) = p_{i_1 i_2}^2 := p_{i_1}^1 \cdot p_{i_2}^2, \quad \nu^{t=2}(\Omega_{i_1 i_2}) = r_{i_1 i_2}^2 := r_{i_1}^1 \cdot r_{i_2}^2,$$

де

$$p_{i_2}^2 = \frac{p_{i_2}^1(1 - r_{i_2}^1)}{1 - \sum_i p_i^1 r_i^1}, \quad r_{i_2}^2 = \frac{r_{i_2}^1(1 - p_{i_2}^1)}{1 - \sum_i p_i^1 r_i^1}.$$

За ітерацією,

$$\begin{aligned}\mu^{t=k}(\Omega_{i_1\dots i_k}) &= p_{i_1\dots i_k} := p_{i_1}^1 \cdots p_{i_k}^k, \\ \nu^{t=k}(\Omega_{i_1\dots i_k}) &= r_{i_1\dots i_k} := r_{i_1}^1 \cdots r_{i_k}^k, \quad k \geq 1.\end{aligned}$$

де

$$p_{i_k}^k = \frac{p_{i_{k-1}}^{k-1}(1 - r_{i_{k-1}}^{k-1})}{1 - \sum_i p_i^{k-1} r_i^{k-1}}, \quad r_{i_k}^k = \frac{r_{i_{k-1}}^{k-1}(1 - p_{i_{k-1}}^{k-1})}{1 - \sum_i p_i^{k-1} r_i^{k-1}}. \quad (2.22)$$

Формули (2.20)-(2.22) описують ітеративну конструкцію послідовності станів динамічної системи в термінах кусково рівномірно розподілених мір $\mu^{t=k}(\Omega_{i_1\dots i_k})$, $\nu^{t=k}(\Omega_{i_1\dots i_k})$, $t = 1, 2, \dots$. Неважко показати, що значення цих послідовностей майже завжди збігаються до нуля, $\lim_{t=k \rightarrow \infty} \mu^t(\Omega_{i_1\dots i_k}) = 0$. Отже, згідно [46, 61, 62], гранична міра μ^∞ є сингулярною неперервною.

Цікаво поставити питання, яка умова може забезпечити збіжність $\mu^{t=k}(\Omega_{i_1\dots i_k})$ або $\nu^{t=k}(\Omega_{i_1\dots i_k})$ до строго додатного значення, хоча б для деяких послідовностей i_1, \dots, i_k, \dots ?

Наступна теорема встановлює критерій виникнення точкового спектру в граничних розподілах динамічних систем конфлікту із відштовхувальною взаємодією задану формулами (2.20)-(2.22).

Теорема 2.5. *Для довільної пари початкових ймовірнісних мір μ та $\nu \in \mathcal{M}(\Omega)$, одна з граничних мір μ^∞ (або ν^∞), побудованих згідно формул (2.21)-(2.22) по послідовності кусково рівномірно розподілених мір $\mu^{t=k}, \nu^{t=k} \in \mathcal{M}(\Omega)$, $t = 1, 2, \dots$, є чисто точковою, $\mu^\infty \in \mathcal{M}_{\text{pp}}$ (або $\nu^\infty \in \mathcal{M}_{\text{pp}}$), тоді і тільки тоді, коли одна з умов*

$$\mu(\Omega_i) > \nu(\Omega_i), \quad (\mu(\Omega_i) < \nu(\Omega_i))$$

виконується для єдиного фіксованого індексу $1 \leq i \leq n$.

Доведення досить складне і ґрунтується на дослідженні поведінки величин виду

$$\mu_{i_1\dots i_k\dots} = \prod_{k=1}^{\infty} p_{i_k}^k = \lim_{k \rightarrow \infty} p_{i_1\dots i_k}, \quad \nu_{i_1\dots i_k\dots} = \prod_{k=1}^{\infty} r_{i_k}^k = \lim_{k \rightarrow \infty} r_{i_1\dots i_k}.$$

де

$$p_{i_1\dots i_k} := p_{i_1}^1 \cdots p_{i_k}^k, \quad r_{i_1\dots i_k} := r_{i_1}^1 \cdots r_{i_k}^k,$$

а $p_{i_k}^k, r_{i_k}^k$ визначенні згідно (2.22). Повний текст можна знайти в [36, 41, 42].

2.6. Рівноважний стан в термінах розкладу Гана-Жордана. Розглянемо довільну пару $\mu, \nu \in \mathcal{M}_1^+(\Omega)$, $\mu \neq \nu$. Згідно класичного результату з теорії міри (див, наприклад, [16]) для заряду $\omega = \mu - \nu$ існує розклад Гана множини Ω на дві частини:

$$\Omega = \Omega_+ \cup \Omega_-, \quad \Omega_+ \cap \Omega_- = \emptyset, \quad (2.23)$$

такий, що для ω має місце розклад Жордана:

$$\omega = \omega_+ - \omega_-, \quad \omega_+(\Omega_-) = 0 = \omega_-(\Omega_+), \quad (2.24)$$

де компоненти $\omega_+, \omega_- \in \mathcal{M}^+(\Omega)$ визначаються умовами:

$$\begin{aligned} \omega_+(A) &= \omega_+(A_+) = \sup_{B \subseteq A} \omega(B), & A_+ &= A \cap \Omega_+, \quad A, B \in \mathcal{B}, \\ \omega_-(A) &= \omega_-(A_-) = \sup_{B \subseteq A} -\omega(B), & A_- &= A \cap \Omega_-. \end{aligned}$$

Звичайно, розклад Гана (2.23) не єдиний, але додатні міри ω_+, ω_- в (2.24) фіксуються зарядом ω однозначно. Нормуючи їх на одиницю одержуємо дві імовірнісні міри з $\mathcal{M}_1^+(\Omega)$:

$$\mu_+ := \frac{\omega_+}{\omega_+(\Omega)}, \quad \nu_- := \frac{\omega_-}{\omega_-(\Omega)}. \quad (2.25)$$

Покладемо, що міра η в формулах (2.2)-(2.5) задається, як

$$\eta(A) := \min\{\mu(A), \nu(A)\}, \quad A \in \mathcal{B}. \quad (2.26)$$

Тоді справедлива наступна теорема.

Теорема 2.7. *Кожна траєкторія динамічної системи конфлікту з початковим станом $\mu, \nu \in \mathcal{M}_1^+(\Omega)$ і заданою однією з систем рівнянь (2.2)-(2.5), де міра η визначена згідно (2.26), збігається до рівноважного стану $\mu^\infty, \nu^\infty \in \mathcal{M}_1^+(\Omega)$. При цьому, виконується рівність*

$$\mu^\infty = \mu_+, \quad \nu^\infty = \nu_-, \quad (2.27)$$

де μ_+, ν_- визначені в (2.25).

Доведення цієї теореми встановлено для випадків, коли μ, ν – дискретні міри, кусково рівномірно розподілені, абсолютно неперервні на відрізьку $[0, 1]$. Доведення в загальній ситуації ще не опубліковане.

3. НЕРУХОМІ ТОЧКИ ДИНАМІЧНИХ СИСТЕМ ІЗ ВЗАЄМОДІЄЮ ПРИТЯГАННЯ

Тут розвинуто теорію (див. [34]) для випадку, коли конфліктна взаємодія має притягальний характер. Розглянемо випадок пари мір. Нехай $\mathcal{M}_1^+(\Omega) \times \mathcal{M}_1^+(\Omega)$, позначає прямиий добуток просторів абсолютно

неперервних ймовірнісних мір, де $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ - деякий компакт. Трійку

$$\{\Omega, \mathcal{M}_1^+(\Omega) \times \mathcal{M}_1^+(\Omega), *\} \quad (3.1)$$

називаємо динамічною системою конфлікту з притягальною взаємодією, якщо перетворення $*$ задано різницевиими рівняннями

$$\begin{aligned} \mu_{N+1} &= \frac{1}{z_N}(\mu_N(1 + \Theta_N) + \tau_N), \\ \nu_{N+1} &= \frac{1}{z_N}(\nu_N(1 + \Theta_N) + \tau_N), \end{aligned} \quad (3.2)$$

які генерують в дискретному часі $t = N$ траєкторії

$$\{\mu_N, \nu_N\} \rightarrow \{\mu_{N+1}, \nu_{N+1}\}, \quad N = 0, 1, \dots \quad (3.3)$$

з початковим станом заданим довільною парою мір $\mu_0 = \mu, \nu_0 = \nu$ з $\mathcal{M}_1^+(\Omega)$. Тут $\Theta_N = f(\mu_N, \nu_N)$, де f - деяка додатна обмежена функція, а притягальна взаємодія задана лінійною комбінацією,

$$\tau_N = \alpha\mu_N + \nu_N, \quad \alpha, \beta \geq 0, \quad \alpha \cdot \beta \neq 0.$$

Нормувальний знаменник вираховується за формулою:

$$z_N = 1 + \Theta_N + W_N,$$

де $\Theta_N = f(\mu_N(\Omega), \nu_N(\Omega))$, а

$$W_N = \tau_N(\Omega) = \alpha\mu_N(\Omega) + \beta\nu_N(\Omega) = \alpha + \beta.$$

Теорема 3.1. *Для будь-якої пари різних мір $\{\mu, \nu\}$, які належать простору $\mathcal{M}_1^+(\Omega) \times \mathcal{M}_1^+(\Omega)$, траєкторія (3.3) динамічної системи конфлікту з притягальною взаємодією (3.1) збігається до ω -граничної множини (рівноважного стану) $\{\mu_\infty, \nu_\infty\}$*

$$\mu_\infty(A) = \lim_{N \rightarrow \infty} \mu_N(A), \quad \nu_\infty(A) = \lim_{N \rightarrow \infty} \nu_N(A), \quad A \in \mathcal{B},$$

який складається з пари тотожних мір

$$\mu_\infty(A) = \nu_\infty(A) = \frac{\tau(A)}{W}, \quad A \in \mathcal{B}.$$

Доведення. Покажемо, що для будь-якої борелевської множини $A \in \mathcal{B}$ значення міри τ_N не залежить від часу:.

$$\tau(A) = \tau_N(A), \quad N = 0, 1, \dots \quad (3.4)$$

Дійсно, за означенням

$$\begin{aligned} \tau_{N+1}(A) &= \alpha\mu_{N+1}(A) + \beta\nu_{N+1}(A) = \\ &= \frac{1}{z_N} [(\alpha\mu_N(A) + \beta\nu_N(A))(1 + \Theta_N) + (\alpha + \beta)\tau_N(A)] = \\ &= \frac{1}{1 + \Theta_N + W_N} [\tau_N(A)(1 + \Theta_N + \alpha + \beta)] = \tau_N(A), \end{aligned}$$

оскільки

$$W_N = \alpha + \beta.$$

Позначимо $D_N(A) := \mu_N(A) - \frac{\tau(A)}{W}$. Використовуючи рівняння (3.2) та (3.4), одержуємо

$$\begin{aligned} D_{N+1}(A) &= \mu_{N+1}(A) - \frac{\tau(A)}{W} = \mu_{N+1}(A) - \frac{\tau_N(A)}{W_N} = \\ &= \frac{1}{1 + \Theta_N + W_N} \left[\mu_N(A)(1 + \Theta_N) + \tau_N(A) - \frac{\tau_N(A)(1 + \Theta_N + W_N)}{W_N} \right] = \\ &= \frac{1 + \Theta_N}{1 + \Theta_N + W_N} \left(\mu_N(A) - \frac{\tau_N(A)}{W_N} \right) = \frac{1 + \Theta_N}{1 + \Theta_N + W_N} \left(\mu_N(A) - \frac{\tau(A)}{W} \right). \end{aligned}$$

Отже,

$$D_{N+1}(A) = k_0 \cdot k_1 \cdot \dots \cdot k_N \cdot D(A),$$

де

$$k_N = \frac{1 + \Theta_N}{1 + \Theta_N + W_N} < 1.$$

Покажемо, що $k_N \not\rightarrow 1$, коли $N \rightarrow \infty$. Припустимо протилежне, тобто, що $k_N \rightarrow 1$. Тоді

$$\frac{1 + \Theta_N}{1 + \Theta_N + W_N} = \frac{1}{1 + \frac{W_N}{1 + \Theta_N}} \rightarrow 1,$$

а $\frac{W_N}{1 + \Theta_N} \rightarrow 0$. Це можливо, лише якщо $\Theta_N \rightarrow \infty$, що суперечить умові обмеженості функції f .

Завдяки попереднім фактам, можна стверджувати, що

$$\lim_{N \rightarrow \infty} D_N(A) = 0,$$

а, отже,

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \mu_N(A) = \frac{\tau(A)}{W}.$$

Аналогічним способом доводиться існування границі

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \nu_N(A) = \frac{\tau(A)}{W}. \quad \square$$

4. КОНФЛІКТНА ДИНАМІКА В ТЕРМІНАХ ЩІЛЬНОСТЕЙ

Нехай $\Omega = [0, 1]$, \mathcal{B} - борелевська σ -алгебра підмножин з Ω , $\mathcal{M}_1^+(\Omega)$ - простір ймовірнісних абсолютно неперервних відносно міри Лебега λ мір:

$$\mu(A) = \int_A \rho(x) d\lambda(x), \quad \nu(A) = \int_A \sigma(x) d\lambda(x), \quad A \in \mathcal{R}.$$

Ми припускаємо, що щільності є неперервними додатними функціями: $\rho(x), \sigma(x) \in C_+^1(\Omega)$.

Покладаємо, що еволюція динамічної системи задана в термінах щільностей пари мір такими різницевиими рівняннями:

$$\begin{cases} \rho_{N+1}(x) = \frac{1}{z_N}(\rho_N(x)(\Theta_N + 1) + \tau_N(x)), \\ \sigma_{N+1}(x) = \frac{1}{z_N}(\sigma_N(x)(\Theta_N + 1) + \tau_N(x)), \end{cases} \quad (4.1)$$

де $\rho_0 = \rho$, $\sigma_0 = \sigma$. Як і раніше, $\Theta_N = \Theta(\rho_N, \sigma_N)$, де Θ – обмежений неперервний функціонал, а

$$\tau_N(x) = \alpha\rho_N(x) + \beta\sigma_N(x), \alpha, \beta \geq 0.$$

Нормувальний знаменник

$$z_N = 1 + \Theta_N + W_N,$$

де $W_N = \int_{\Omega} \tau_N(x) d\lambda(x) = \alpha + \beta$.

Таким чином конфліктне перетворення $*$ задане формулами (4.1) генерує траєкторії динамічної системи в термінах щільностей:

$$\{\rho_N, \sigma_N\} \rightarrow \{\rho_{N+1}, \sigma_{N+1}\}, \quad N = 0, 1, \dots \quad (4.2)$$

Теорема 4.1. *Кожна траєкторія динамічної системи (4.1)-(4.2), яка стартує із стану заданого довільною парою щільностей*

$$\{\rho, \sigma\} \in C_1^+(\Omega) \times C_1^+(\Omega),$$

збігається поточково до граничного стану $\{\rho^\infty, \sigma^\infty\}$:

$$\rho^\infty(x) = \lim_{N \rightarrow \infty} \rho_N(x), \quad \sigma^\infty(x) = \lim_{N \rightarrow \infty} \sigma_N(x), \quad x \in \Omega.$$

При цьому,

$$\rho^\infty(x) = \sigma^\infty(x) = \frac{\tau(x)}{W}.$$

Доведення. Випадок, коли $\rho(x) = \sigma(x)$ для усіх $x \in \Omega$ є тривіальним. Розглянемо випадок, коли існують $x \in \Omega$ такі, що $\rho(x) \neq \sigma(x)$. Покажемо справедливість рівностей:

$$\tau(x) = \tau_N(x), \quad N = 1, 2, \dots \quad (4.3)$$

Дійсно,

$$\tau_{N+1}(x) = \frac{1}{z_N}((\alpha\rho_N(x) + \beta\sigma_N(x))(1 + \Theta_N) + (\alpha + \beta)\tau_N(x)).$$

Тому

$$\tau_{N+1}(x) = \frac{1}{z_N}\tau_N(x)(1 + \Theta_N + \alpha + \beta) = \tau_N(x).$$

Позначимо $D_N(x) = \rho_N(x) - \frac{\tau(x)}{W}$. Використовуючи (4.1), (4.3) легко бачити, що

$$D_{N+1}(x) = \rho_{N+1}(x) - \frac{\tau(x)}{W} = \frac{1 + \Theta_N}{1 + \Theta_N + W_N} \left(\rho_N(x) - \frac{\tau(x)}{W} \right).$$

Тоді

$$D_{N+1}(A) = k_0 \cdot k_1 \cdot \dots \cdot k_N \cdot D(A),$$

де

$$k_N = \frac{1 + \Theta_N}{1 + \Theta_N + W_N} < 1.$$

Стандартним чином переконуємося, що $k_N \not\rightarrow 1$ при $N \rightarrow \infty$. Тому

$$\lim_{N \rightarrow \infty} D_N(x) = 0,$$

або інакше:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} D_N(x) = \lim_{N \rightarrow \infty} \left(\rho_N(x) - \frac{\tau(x)}{W} \right) = 0.$$

Це означає, що

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \rho_N(x) = \frac{\tau(x)}{W}.$$

Аналогічно доводиться

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sigma_N(x) = \frac{\tau(x)}{W}. \quad \square$$

5. МОДЕЛЬ КОНФЛІКТНОГО СУСПІЛЬСТВА

Дослідження динаміки конфліктних процесів у суспільстві є темою багатьох проєктів, зокрема державних, бо існування, розквіт чи занепад кожної країни залежить від рівня таких досліджень та практичної реалізації наукових передбачень. Побудова та аналіз чисто математичних моделей економічної, політичної, соціальної динаміки є дуже нетривіальною проблемою. Головна трудність у знаходженні правильних формул та моделей для адекватного опису реальних явищ, особливо у моменти біфуркаційних змін або наближення до хаосу.

Навіть дуже спрощені постановки такої задачі, типу знаходження умов абсолютного пріоритету чи досягнення консенсусу є нетривіальними. Наведемо лише декілька посилань [10–13], [17–19], [22,23,25], [27], [31,32,35], [28], [30], [29,57,59], [53,54,56] з великої кількості публікацій на цю тему.

Поведінка індивіда чи суспільного кластера у значній мірі визначається пошуком оптимальної стратегії та прийняттям рішення, часто на основі інтуїтивною моделі. Але успішний результат забезпечує лише адекватна математична модель. Тому математичне моделювання є потужним інструментом для прогнозу соціального розвитку.

Математичні моделі соціальної динаміки можна поділити на два класи, детерміністичні та ймовірнісні. Моделі першого типу дають кількісне значення певних характеристик системи у фіксований момент часу. Другий тип моделей передбачає імовірнісну оцінку різним станам системи.

Більшість відомих моделей належить до першого класу і ґрунтуються на конкретних, часом досить складних формулах динаміки, які призначені дати явний опис явищу, що досліджується (див., наприклад, [17–19]). Вибір формул і рівнянь (законів), які описують динаміку конфліктних взаємодій між індивідами є головним пунктом при побудові моделей складних систем суспільства. Ці формули мають бути максимально простими, універсальними та одночасно адекватними реальній картині. Лише тоді їх використання, з одного боку, буде підтверджувати спостереження, а з другого, передбачати нові, навіть несподівані явища та ефекти.

Далі ми розвиваємо відносно просту математичну модель соціуму, як багатокомпонентної динамічної системи. Вона ґрунтується на основі теорії динамічних систем конфлікту розвинутої в роботах [28, 31–33, 35, 38–40, 43–45, 47]. Ця модель описує еволюцію змін імовірностей володіти певним запасом соціальної енергії для кожного індивіда конфліктного суспільства.

Ми розглядаємо декілька варіантів формули конфліктної взаємодії. В першу чергу ми досліджуємо стихійний (дикий) конфлікт між кожним окремим індивідом та конкурентним оточенням, де, як звичайно, перемагає найсильніший. Більш досконалий варіант моделі включає в себе урахування стратегічних параметрів, сили конфліктної взаємодії, зовнішнього впливу та зв'язків між індивідами. При цьому, модель настільки ускладнюється, що зараз можна говорити лише про деякі цікаві ефекти, а не про побудову повної теорії.

Тому тут ми обмежуємося лише частковими випадками. А саме, спочатку досліджуємо динаміку перерозподілу соціальної енергії між конфліктуючими індивідами без введення параметрів взаємодії та зв'язків (модель стихійного соціуму). В цьому варіанті моделі, як правило, виникає єдиний переможець, той хто був найсильнішим в початковий момент часу. Ми помічаємо, що на зростання (чи втрату) соціальної енергії впливає величина (сила) конфліктної активності індивіда. Зокрема, якщо цей параметр має нульове значення, то індивід взагалі не втрачає свою енергію, а лише накопичує. Параметр сили конфліктної активності є стратегічним. Можливість його вибору перетворює модель стихійного соціуму в модель керованого конфліктного процесу.

Встановлено, що в цьому випадку індивід з незначною початковою соціальною енергією може стати переможцем, якщо обере «правильну» стратегію регулювання параметром сили конфліктної активності. Зокрема, це веде до постановки та часткового розв'язана проблеми вибору стратегії виживання для індивіда з довільно малою початковою соціальною енергією. Основний результат – теорема про існування рівноважних станів. Опис басейнів притягання до нерухомих точок, умов їх стійкості, та ін., ці питання в загальній постановці потребують подальших удосконалень формули конфліктної динаміки.

5.1. Елементарна модель соціуму. Нехай

$$\mathcal{A} = \{a_i\}_{i=1}^m, \quad 1 < m < \infty,$$

– множина конкуруючих індивідів абстрактного суспільства, яке називаємо *соціумом*. Вважаємо, що соціум \mathcal{A} є повністю конфліктним у тому сенсі, що між усіма індивідами відбувається конкурентна боротьба за умовний ресурс, який звемо *соціальна енергія*. В найпростішому випадку кожному індивіду a_i в початковий момент поставлена у відповідність соціальна енергія (деякий життєвий ресурс):

$$a_i \sim P_i.$$

Значення P_i є додатними та обмеженими. Для спрощення припускаємо, що повний запас енергії $\sum_{i=1}^m P_i = P$ незалежний від часу: $P(t) = \text{const}$. Задача полягає у дослідженні динаміки перерозподілу соціальної енергії в моменти конфліктної взаємодії заданої різними законами (формулами).

Якщо $*$ позначає фіксований закон конфліктної взаємодії, то еволюцію перерозподілу можна символічно представити, як складну багатокомпонентну динамічну систему:

$$\{P_1, \dots, P_m\} \xrightarrow{*,t} \{P_1(t), \dots, P_m(t)\}, \quad t = 1, 2, \dots$$

В наступних підрозділах ми досліджуємо поведінку $P_i(t)$ в залежності від формули, яка задає відображення $*$. А саме, в ситуаціях:

- (1) стихійний конфлікт кожного з усіма (формула (5.1)),
- (2) із урахуванням сили конфліктної взаємодії та величин зовнішнього впливу (формули (5.6), (5.8), (5.9)).

Підкреслимо, що ми застосовуємо ймовірнісний підхід. Тому замість кількісних величин $P_i(t)$ використовуємо величини $p_i^t = P_i(t)/P$, які нормовані на одиницю. Відповідно, рівняння динаміки записані в термінах координат стохастичних векторів $\mathbf{P}^t = \{p_i^t\}_{i=1}^m$, для яких виконується умова, $\sum_{i=1}^m p_i^t = 1$, $t \geq 0$.

Оскільки ми вважаємо соціум \mathcal{A} повністю конфліктним, тобто виконується принцип – один проти всіх, або, кожен сам за себе, то для кожного індивіда a_i його конкуруюче оточення складається з множини усіх інших індивідів $\mathcal{A}_i^\perp := \{a_k\}_{k \neq i}$. Тоді соціальна енергія оточення для $a_i \in$ сумою енергій усіх індивідів з \mathcal{A}_i^\perp . Позначимо її $R_i = \sum_{k \neq i} P_i$. Набору величин R_i відповідає нормований на одиницю стохастичний вектор $\mathbf{r} = \{r_i\}_{i=1}^m$ з координатами $r_i := R_i/R$, де $R = \sum_{i=1}^m R_i$. Очевидно, $r_i \geq 0$ та $\sum_{i=1}^m r_i = 1$.

5.2. Найсильніший забирає все. Введемо закон конфліктної взаємодії між окремим індивідом a_i та оточенням \mathcal{A}_i^\perp у повністю конфліктному соціумі. Найпростіший варіант закону конфліктного перерозподілу соціальної енергії в дискретному часі (закон конфліктної взаємодії) в термінах координат має вигляд:

$$p_i^{t+1} = \frac{p_i^t(1 - r_i^t)}{z^t}, \quad r_i^t = \frac{1 - p_i^t}{m - 1}, \quad p_i^{t=0} \equiv p_i, \quad t = 0, 1, \dots \quad (5.1)$$

де нормувальний знаменник $z^t = 1 - \sum_{k=1}^m p_k^t r_k^t$. Тут p_i^t , $i \in \overline{1, m}$, позначають координати стохастичного вектора \mathbf{p}^t , який задає розподіл соціальної енергії між індивідами a_i після t актів конфліктної взаємодії.

Для кожного вектора $\mathbf{p}^0 \equiv \mathbf{p} \in \mathbb{R}_{+,1}^m$ ітерація закону (5.1) породжує деяку траєкторію динамічної системи в просторі $\mathbb{R}_{+,1}^m$:

$$\mathbf{p}^0 \xrightarrow{*,1} \mathbf{p}^1 \dots \mathbf{p}^t \xrightarrow{*,t+1} \mathbf{p}^{t+1} \dots \quad (5.2)$$

яку ми звемо *динамічною системою конфлікту із відштовхувальною взаємодією*.

Виявляється, що формула (5.1) еквівалентна такій,

$$p_i^{t+1} = p_i^t(1 + \theta^t - r_i^t)$$

де $\theta^t := \sum_{k=1}^m p_k^t r_k^t$. У свою чергу, її можна переписати у вигляді:

$$p_i^{t+1} = p_i^t \left(1 + \frac{p_i^t - \|\mathbf{p}^t\|^2}{m - 1}\right). \quad (5.3)$$

де $\|\mathbf{p}^t\|^2 := \sum_{k=1}^m (p_k^t)^2$.

Наступна теорема доводить, що динаміка у конфліктному суспільстві з відштовхувальною взаємодією завжди приводить до існування єдиного переможця.

Теорема 5.3. *Кожна траєкторія (5.2) з довільною початковою точкою $\mathbf{p}^0 = \mathbf{p} \in \mathbb{R}_{+,1}^m$, $\|\mathbf{p}\|^2 \neq 1/m$, збігається до вектора \mathbf{P}^∞ , у якого*

лише одна координата відмінна від нуля:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} p_{\max}^t = p_{\max}^\infty = 1, \quad p_{\max}^t := \max_i \{p_i^t\}.$$

Для усіх інших координат,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} p_i^t = p_i^\infty = 0, \quad p_i^t \neq p_{\max}^t.$$

Доведення. Позначимо

$$N^{+,t} = \{i \mid p_i^t > \|\mathbf{p}^t\|^2\}, \quad N^{-,t} = \{i \mid p_i^t < \|\mathbf{p}^t\|^2\}, \\ N^{0,t} = \{i \mid p_i^t = \|\mathbf{p}^t\|^2\}.$$

З (5.3) видно, що

- усі координати p_i^t , при $i \in N^{+,t}$, зростають, $p_i^{t+1} > p_i^t$,
- координати p_i^t , з $i \in N^{-,t}$, спадають, $p_i^{t+1} < p_i^t$,
- а p_i^t , $i \in N^{0,t}$, нерухомі, $p_i^{t+1} = p_i^t$.

Визначимо

$$d_i^t := p_i^t - r_i^t = p_i^t - \frac{1 - p_i^t}{m - 1} = \frac{1}{m - 1}(mp_i^t - 1). \quad (5.4)$$

Прямо з (5.4) одержуємо, що різниці $d_i^t > 0$, якщо $p_i^t > 1/m$, та $d_i^t < 0$, якщо $p_i^t < 1/m$. Якщо $p_i^t = 1/m$, то $d_i^t = 0$.

Оскільки $\|\mathbf{p}^t\|^2 \geq 1/m$ і $\|\mathbf{p}^t\|^2 = 1/m$ лише якщо усі $p_i^t = 1/m$, то ми робимо висновок, що для усіх $i \in N^{+,t}$ різниці d_i^t є строго додатними і зростають, $d_i^{t+1} > d_i^t$. Використовуючи цей факт проаналізуємо поведінку величин

$$D^{+,t} = \sum_{i \in N^{+,t} \cup N^{0,t}} d_i^t, \quad D^{-,t} = \sum_{k \in N^{-,t}} d_k^t.$$

При цьому, будемо враховувати, що

$$D^t := \sum_{i=1}^m d_i^t = D^{+,t} + D^{-,t} = 0,$$

та те, що $D^{+,t} = D^{-,t} = 0$, лише якщо $p_i^t = 1/m$, а також, те, що в іншому екстремальному випадку, $D^{+,t} = 1$, $D^{-,t} = -1$, лише якщо існує єдина координата $p_i^t = 1$, а усі інші $p_k^t = 0$, $k \neq i$. Отже, взагалі, виключаючі крайні випадки,

$$0 < D^{+,t} = -D^{-,t} < 1.$$

Ми хочемо показати, що $D^{+,t}$ зростає до 1 при $t \rightarrow \infty$. Завдяки (5.4), маємо

$$D^{+,t} = \frac{1}{m-1}(ma^t - |N^{+,t} \cup N^{0,t}|), \quad a^t = \sum_{i \in N^{+,t} \cup N^{0,t}} p_i^t$$

та

$$D^{-,t} = \frac{1}{m-1} \left(m \sum_{k \in N^{-,t}} p_k^t - |N^{-,t}| \right) = \frac{1}{m-1} (m(1-a^t) - |N^{-,t}|),$$

де ми використали рівність $\sum_{i=1}^m p_i^t = 1$. Тепер, завдяки

$$|N^{+,t} \cup N^{0,t}| \cup |N^{-,t}| = m$$

знаходимо

$$D^{-,t} = \frac{1}{m-1} (|N^{+,t} \cup N^{0,t}| - ma^t).$$

Використовуючи $D^{-,t} = -D^{+,t}$, маємо

$$D^{+,t} - D^{-,t} = 2D^{+,t} = \frac{2m}{m-1} a^t - \frac{2|N^{+,t} \cup N^{0,t}|}{m-1}.$$

Тепер розглянемо

$$D^{+,t+1} = \frac{m}{m-1} \sum_{i \in N^{+,t+1} \cup N^{0,t+1}} p_i^{t+1} - \frac{|N^{+,t+1} \cup N^{0,t+1}|}{m-1}.$$

Завдяки (5.3), маємо

$$D^{+,t+1} = \frac{m}{m-1} \sum_{i \in N^{+,t+1} \cup N^{0,t+1}} p_i^t \left(1 + \frac{p_i^t - \|\mathbf{p}^t\|^2}{m-1} \right) - \frac{|N^{+,t+1} \cup N^{0,t+1}|}{m-1}.$$

Відкидаючи в сумі доданки, які відповідають множині $N^{0,t+1}$, отримуємо нерівність

$$\begin{aligned} D^{+,t+1} &\geq \frac{m}{m-1} \sum_{i \in N^{+,t}} p_i^t + \frac{m}{m-1} \sum_{i \in N^{+,t}} p_i^t \left(\frac{p_i^t - \|\mathbf{p}^t\|^2}{m-1} \right) \\ &\quad - \frac{|N^{+,t} \cup N^{0,t}|}{m-1} + \frac{|N^{+,t} \cup N^{0,t}| - |N^{+,t+1} \cup N^{0,t+1}|}{m-1} \\ &= \frac{1}{m-1} (ma^t - |N^{+,t} \cup N^{0,t}|) + \frac{m}{m-1} \sum_{i \in N^{+,t}} p_i^t Q_i^t + \frac{c^t}{m-1} > D^{+,t}, \end{aligned}$$

де враховано, що $Q_i^t := \frac{p_i^t - \|\mathbf{p}^t\|^2}{m-1} > 0$ для усіх $i \in N^{+,t}$, та те, що

$$c^t := |N^{+,t} \cup N^{0,t}| - |N^{+,t+1} \cup N^{0,t+1}| \geq 0.$$

Цим доведено монотонне зростання величини $D^{+,t}$. Насправді, вона збігається до 1, оскільки припущення $\lim_{t \rightarrow \infty} D^{+,t} = D^{+,\infty} < 1$ є очевидно хибним. Згадуючи, що рівність $D^+ = 1$ виконується лише у випадку,

коли усі координати, за виключенням однієї, дорівнюють нулю, робимо висновок що для якоїсь координати

$$\lim_{t \rightarrow \infty} p_i^t = 1.$$

Насправді, цією координатою є p_{max}^t , оскільки з (5.3) видно, що вона зростає найшвидше в порівнянні з іншими зростаючими до певного моменту координатами, якщо такі є. \square

В системах з багатьма гравцями, які змагаються за єдиний одини-мірний ресурс граничний результат завжди є оптимальним виграшем: переможець забирає все.

5.4. Формула динаміки для моделі з ефектами зовнішнього впливу. В роботі [27] досліджувались математичних моделей, які описують перерозподіл соціальної енергії між індивідами абстрактного суспільства (соціуму) в результаті конфліктної боротьби. Тут додатково додаються ефекти зовнішнього впливу у вигляді систематичних зсувів (як додатних, так і від'ємних) величин, які визначають соціальний статус окремого індивіда. Показано, що при введенні нетривіальних параметрів зовнішнього впливу граничні розподіли істотно інші, ніж при суто внутрішній боротьбі. Описано різні режими поведінки в термінах траєкторій динамічних систем конфлікту та встановлено умови існування рівноважного (нерухомого) стану.

Нехай $\mathcal{A} = \{a_i\}_{i=1}^m$, $1 < m < \infty$ є множиною відносно подібних елементів в абстрактному суспільстві (соціумі). Елементи a_i відповідають або окремому індивіду, або деякому їх об'єднанню (соціальному кластеру індивідів). Кількість елементів m скінчена і як завгодно велика.

Покладаємо, що в загальному випадку динамікою системи керують різниці рівняння:

$$p_i^{t+1} = \frac{p_i^t(1 - r_i^t) + b_i^t}{z^t}, \quad p_i^0 = p_i, \quad t = 0, 1, \dots, \quad (5.5)$$

де

$$r_i^t = \frac{1 - p_i^t}{m - 1}, \quad z^t = 1 - \sum_k p_k^t r_k^t + \sum_k b_k^t.$$

Тут $0 \leq b_i^t < 1$ позначають параметри зовнішнього впливу (підживлення). Виключивши з (5.5) r_i^t , отримуємо еквівалентні рівняння:

$$p_i^{t+1} = \frac{p_i^t(1 + p_i^t - \|\mathbf{p}^t\|^2) + b_i^t}{z^t}, \quad t = 0, 1, \dots, \quad (5.6)$$

де

$$z^t = 1 + B^t, \quad B^t = \sum_k b_k^t.$$

Далі покладаємо, що зовнішній вплив є пропорційним індивідуальній енергії (звичайно, коефіцієнти пропорційності є різними):

$$b_i^t = b_i p_i^t, \quad 0 \leq b_i < 1, \quad \forall i = \overline{1, m}.$$

Тоді в (5.6) знаменник має вигляд $z = 1 + B^t = 1 + \sum_k b_k p_k^t$.

Розглянемо поведінку пари індивідів, які відповідають координатам p_i^t, p_k^t .

Твердження 5.5. *Припустимо, що $p_i^t > p_k^t$. Тоді ця нерівність посилюється, якщо*

$$p_i^t + b_i > p_k^t + b_k. \quad (5.7)$$

Доведення. Розглянемо відношення координат

$$R_{i,k}^{t+1} := \frac{p_i^{t+1}}{p_k^{t+1}} = R_{i,k}^t \frac{1 + p_i^t - \|\mathbf{p}^t\|^2 + b_i}{1 + p_k^t - \|\mathbf{p}^t\|^2 + b_k} = R_{i,k}^t c_{ik}^t,$$

$$c_{ik}^t = \frac{1 - \|\mathbf{p}^t\|^2 + p_i^t + b_i}{1 - \|\mathbf{p}^t\|^2 + p_k^t + b_k}.$$

Звідси видно, що $c_{ik}^t > 1$, лише якщо виконується умова (5.7). \square

Отже, при порівнянні еволюцій пари індивідів, для того, щоб k -індивід, який на момент t має меншу енергію, ніж i -індивід ($p_k^t < p_i^t$) з наступного моменту часу став зменшувати різницю $p_i^{t+1} - p_k^{t+1}$, необхідно, щоб параметр його зовнішнього підживлення задовольняв умову:

$$b_k > b_i + p_i^t - p_k^t.$$

Звичайно, це не гарантує йому виживання, бо цілком можливо, що інші індивіди мають значно більші значення параметрів зовнішнього підживлення.

Комп'ютерні симуляції показують, що типова траєкторія динамічної системи з формулою конфліктної взаємодії (5.6) завжди приводить до граничного стану з єдиним переможцем, як в Теоремі 5.3. Відмінність у тому, що перемагає індивід, у якого зовнішній вплив забезпечує абсолютний пріоритет над іншими індивідами. Для подальших досліджень цікавими є такі питання. Яка стратегія вибору значень параметрів зовнішнього впливу збереже пріоритет найсильнішого при умові, що усі $b_i > 0$? Зокрема, за якої умови індивід, який має другу позицію за ієрархією стартового пріоритету, стане єдиним переможцем? Коли декілька індивідів поділять перемогу?

Якщо формулу конфліктної динаміки із зовнішнім впливом змінити на таку

$$p_i^{t+1} = \frac{p_i^t(1 + p_i^t - \|\mathbf{p}^t\|^2) + b_i}{z^t}, \quad t = 0, 1, \dots,$$

де $b_i > 0$ не залежать від часу, то комп'ютерний аналіз відповідних траєкторій демонструє виживання усіх індивідів.

5.6. Існування нерухомого стану. Перепишемо рівняння (5.5) у вигляді

$$p_i^{t+1} = \frac{p_i^t \left(1 + \frac{p_i^t - \|\mathbf{p}^t\|^2}{m-1} + b_i \right)}{z^t}, \quad (5.8)$$

де припускається, що $b_i^t = b_i p_i^t$, $b_i > 0$. При яких значеннях p_i^* рівняння (5.8) перетворюються в тотожність, а, отже, динамічна система (5.2) ускладнена зовнішнім впливом перебуває у нерухомому стані? З рівності

$$p_i^* = \frac{p_i^* \left(1 + \frac{p_i^* - \|\mathbf{p}^*\|^2}{m-1} + b_i \right)}{z^*}$$

знаходимо, що координати нерухомого стану мають задовольняти умову:

$$\frac{p_i^* - \|\mathbf{p}^*\|^*}{m-1} + b_i = B^*, \quad B^* = \sum_k p_k^* b_k, \quad \forall i.$$

Оскільки виходить, що

$$\frac{p_i^*}{m-1} + b_i = B^* + \frac{1}{m-1} \|\mathbf{p}^*\|^2, \quad \forall i,$$

то

$$\frac{p_i^*}{m-1} + b_i = \frac{p_k^*}{m-1} + b_k, \quad \forall i, k.$$

Звідси знаходимо відповідь, тобто значення координат нерухомого стану:

$$p_i^* = (m-1) \sum_{k \neq i} b_k.$$

Цей стан може реалізуватися лише при досить екзотичній умові на зовнішній вплив. А саме, лише коли

$$B = \sum_k b_k = \frac{1}{(m-1)^2}.$$

Це є наслідком стохастичності вектора \mathbf{p}^* . Дійсно, оскільки

$$\sum_i p_i^\infty = 1 = \sum_i (m-1) \sum_{k \neq i} b_k,$$

то $1 = \sum_k (m-1)^2 b_k$.

Таким чином, для існування нерухомого стану, зовнішній вплив, заданий коефіцієнтами пропорційності b_i зсуву координат, не може бути занадто великими. Більш за те, при великій кількості індивідів, $m \rightarrow \infty$, нерухомий (рівноважний) стан можливий для дуже малих значеннях цих коефіцієнтів.

Нерухомий стан динамічної системи, яка моделює конфліктне суспільство із ефектами зовнішнього впливу є нестійким репелером. Це підтверджується комп'ютерними прикладами. Але якщо змінити знаки зовнішнього впливу з додатних на від'ємні, то це приводить до виникнення атракторів.

Значно складніший закон конфліктної динаміки у соціумі має вигляд

$$p_i^{t+1} = \frac{p_i^t - c_i \cdot (\sum_{k=1}^m s_{ik} p_k^t r_i^t) + b_i^t}{z^t}, \quad r_i^t = \frac{1 - p_i^t}{m - 1}, \quad t = 0, 1, \dots \quad (5.9)$$

Він враховує параметри c_i – сили конфліктної взаємодії, матрицю стратегічних зв'язків між індивідами $S = \{s_{ik}\}$ та ефекти зовнішнього впливу b_i . Математичний аналіз поведінки моделей на основі формули (5.9) є дуже нетривіальним. Комп'ютерні приклади демонструють широкий спектр варіантів різного сорту поведінки з багатьма ефектами нелінійної динаміки. В таких моделях з'являються не лише рівноважні стани, а і періодичні (циклічні) атрактори, біфуркаційні пороги, квазі-хаотичні траєкторії. Встановлення точних математичних тверджень в таких моделях є значно складнішою задачею.

6. ТЕОРЕМА ПРО КОНФЛІКТ ДЛЯ ДОВІЛЬНОЇ КІЛЬКОСТІ ОПОНЕНТІВ

Задача про компромісний розподіл спірної території між опонентами, яких більше двох істотно відрізняється від випадку з двома противниками. Відмінність задачі з багатьма опонентами від випадку двох дуже істотна. Принципова трудність полягає у некомутативності операції конфліктної взаємодії, яка виникає і приводить до невизначеності вже навіть для трьох гравців з парною взаємодією. Це типова проблема багатьох задач. Як математично коректно записати одночасну взаємодію кожного одного з усіма іншими, двома або кількома? Однозначний результат припускає взаємодія лише між двома противниками. Для системи з кількістю гравців більше двох попарна взаємодія завжди веде до неоднозначного результату. В реальній детермінованій дійсності напевно саме так і відбувається. І лише багаторазове повторення однієї і тієї ж конфліктної чи змагальної гри приводить до статистично найбільш ймовірного результату. Можна очікувати, що саме такий результат виникне, коли формула конфліктної динаміки буде виведена не на основі парної взаємодії, а з принципу, кожний один проти всіх

інших. Математичну формулу такого перетворення можна написати на основі добре відомого методу «середнього поля». Для одновимірних опонентів ми вже використовували найпростіший аналог цієї формули в роботі [28]. Далі ми узагальнюємо цей підхід на ситуацію з багатьма стохастичними векторами.

Нехай Ω позначає ресурсний простір, який є спільним для існування $m \geq 2$ альтернативних опонентів. Покладаємо, що Ω природним чином поділено на регіони без перетинів:

$$\Omega = \bigcup_{j=1}^n \Omega_j, \quad n \geq 2, \quad \Omega_j \cap \Omega_k = \emptyset, \quad j \neq k.$$

Кількість опонентів, $m \geq 2$, та кількість регіонів, $n \geq 2$, взагалі різна. Припустимо, що у початковий момент часу, присутність кожного з m опонентів в Ω_j , $j \in \overline{1, n}$ задана статистично, тобто i -му опоненту, $i \in \overline{1, m}$, ставиться у відповідність стохастичний вектор $\mathbf{p}_i \in \mathbb{R}_+^n$,

$$\mathbf{p}_i = (p_{i1}, \dots, p_{in}), \quad p_{ij} \geq 0, \quad p_{i1} + \dots + p_{in} = 1,$$

такий, що координата p_{ij} дорівнює ймовірності знаходження i -го опонента в регіоні Ω_j . У застосуваннях p_{ij} можна також інтерпретувати, як соціальний, політичний чи економічний статус i -го опонента в регіоні Ω_j .

Розглядаючи сімейство стохастичних векторів

$$\mathbf{p}_i = \{p_{ij}\}_{j=1}^n \in \mathbb{R}_{+,1}^n, \quad i \in \overline{1, m}, \quad n > 1,$$

припускаємо, що усі ці вектори є різними і, більш за те, усі їхні координати є різними і ненульовими:

$$0 \neq p_{ij} \neq p_{kl} \neq 0, \quad i, k \in \overline{1, m}, \quad j, l \in \overline{1, n}. \quad (6.1)$$

Це припущення не є істотним, але скорочує доведення теорем.

Асоціюємо методом середнього поля з кожним \mathbf{p}_i стохастичний вектор $\mathbf{r}_i = \{r_{ij}\}_{j=1}^n \in \mathbb{R}_{+,1}^n$, координати якого визначаються через множину усіх векторів \mathbf{p}_k , $k \neq i$:

$$0 < r_{ij} = 1/(m-1) \sum_{k \neq i} p_{kj} < 1.$$

Поведінка в часі динамічної системи:

$$\{\mathbf{p}_1^t, \dots, \mathbf{p}_m^t\} \xrightarrow{*} \{\mathbf{p}_1^{t+1}, \dots, \mathbf{p}_m^{t+1}\}, \quad \mathbf{p}_i^{t=0} \equiv \mathbf{p}_i, \quad t = 0, 1, \dots \quad (6.2)$$

як і раніше позначається відображенням \ast , яке відповідає конфліктній взаємодії між багатьма опонентами. В термінах координат це відображення задаємо такою формулою:

$$p_{ij}^{t+1} = \frac{p_{ij}^t(\Theta^t + 1) - \eta_{ij}^t}{z_i^t}, \quad (6.3)$$

де

$$\Theta^t = 1/2 \sum_{i,k=1;i \neq k}^m (\mathbf{p}_i^t, \mathbf{p}_k^t), \quad (6.4)$$

$$\eta_{ij} := \min_j \{p_{i,j}, r_{ij}\}, \quad (6.5)$$

а $z_i = \Theta^t + 1 - W_i^t$, де $W_i^t = \sum_j \eta_{ij}^t$.

Ідея введення саме такої величини η_{ij} обумовлена фактом неможливості втратити в конфлікті більше, ніж мінімальне значення ресурсу на даний момент, або ще меншого значення, яке є усередненням умовної сили опонентів в кожному фіксованому регіоні.

Введемо термін «територія пріоритету» i -го опонента, яку позначаємо Ω_i^+ . Вона складається з усіх регіонів Ω_j , $j \in \overline{1, n}$, в яких значення j -ї координати вектора \mathbf{p}_i перевищують значення j -х координат усіх інших $m - 1$ векторів:

$$\Omega_i^+ := \bigcup_{j \in N_i^+} \Omega_j, \quad N_i^+ := \{j \in \overline{1, n} \mid p_{ij} > p_{kj}, \forall k \neq i\}.$$

Очікуваний результат ми формулюємо у вигляді теореми, хоча її доведення не є бездоганим.

Теорема 6.1 (Теорема про конфлікт для багатьох опонентів). *Нехай динаміка системи (6.2) задана формулою (6.3). Тоді кожна траєкторія такої динамічної системи з довільним початковим станом*

$$\{\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_m\} \in \mathbb{R}_+^n \times \dots \times \mathbb{R}_+^n$$

збігається до нерухомої точки. Тобто, існують усі граничні вектори

$$\mathbf{p}_i^\infty = \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{p}_i^t$$

і вони інваріантні відносно дії відображення \ast :

$$\{\mathbf{p}_1^\infty, \dots, \mathbf{p}_m^\infty\} \xrightarrow{\ast} \{\mathbf{p}_1^\infty, \dots, \mathbf{p}_m^\infty\}.$$

При цьому, у векторів \mathbf{p}_i^∞ відмінні від нуля лише координати з регіонів пріоритету, $\Omega_j \in \Omega_i^+$:

$$p_{ij}^\infty = \lim_{t \rightarrow \infty} p_{ij}^t > 0, \quad j \in N_i^+,$$

усі інші координати прямують до нуля, $\lim_{t \rightarrow \infty} p_{ij}^t \rightarrow 0$, $j \notin N_i^+$.

Доведення. Розглянемо спочатку найпростішу ситуацію, яку назвемо *правильна модель*. Припустимо, що $m \leq n$, а також, що у кожного початкового вектора \mathbf{p}_i значення усіх пріоритетних координат, наприклад p_{ij} , настільки перевищують значення усіх інших координат, $p_{kj} < p_{ij}$, $\forall k \neq i$, що для кожного j виконуються усі нерівності

$$p_{kj} < \eta_{ij} = \frac{1}{m-1} \sum_{l \neq k} p_{lj}, \quad \forall k \neq i.$$

Покажемо, що $\lim_{t \rightarrow \infty} p_{ik}^t \rightarrow 0$, $\forall \Omega_k \not\subseteq \Omega_i^+$. Зафіксуємо i , для якого множина Ω_i^+ є не порожньою. Тоді усі координати p_{ij} з фіксованим $j \in \Omega_i^+$ є максимальними серед p_{kj} по першому індексу. Припустимо додатково, хоча це не зменшує загальності, що $\Omega_i^+ = \Omega_i^+$, де Ω_i^+ позначає додатну множину в розкладі Гана-Жордана заряду $\mathbf{w}_i := \mathbf{p}_i - \mathbf{r}_i$. Треба довести, що усі p_{ik}^t з $k \neq i$ прямують до нуля, коли $t \rightarrow \infty$. Позначимо $\Omega_i^- = \Omega \setminus \Omega_i^+$. Пізніше ми доведемо, що усі координати p_{ik}^t при $k \in \Omega_i^- \setminus \Omega_i^+$ також збігаються до нуля і у випадку, коли $\Omega_i^+ \subset \Omega_i^+$.

Розглянемо поведінку відношення між p_{ij}^t з $j \in \Omega_i^+$ та p_{ik}^t з $k \in \Omega_i^-$ для $t = 1, 2, \dots$:

$$R_{i,jk}^{t+1} := p_{ij}^{t+1}/p_{ik}^{t+1} = R_{i,jk}^t \cdot k_{i,jk}^t, \quad k_{i,jk}^t := \frac{\Theta^t + 1 - \eta_{ij}^t/p_{ij}}{\Theta^t + 1 - \eta_{ik}^t/p_{ik}^t}.$$

Завдяки припущенню про правильну модель з (6.5) випливає, що $\eta_{ik}^t = p_{ik}^t$, оскільки $k \in \Omega_i^-$. Тому

$$k_{j,ik}^t = \frac{\Theta^t + \varepsilon^t}{\Theta^t} > 1, \quad \varepsilon^t = 1 - \eta_{ij}^t/p_{ij} > 0,$$

де ми використали нерівність $\eta_{ij}^t < p_{ij}^t$. Це означає, що нерівність

$$R_{i,jk}^t < R_{i,jk}^{t+1}$$

буде виконуватися для усіх $t \geq 1$. Отже $p_{ij}^{t+1} \geq p_{ij}^t$ і $p_{ik}^{t+1} \leq p_{ik}^t$, причому одночасна рівність неможлива завдяки стохастичності вектора \mathbf{p}_i^{t+1} . Неважко переконатися, що $k_{j,ik}^{t+1} > k_{j,ik}^t$. Отже, з необхідністю $R_{j,ik}^t \rightarrow \infty$. Тому $p_{ik}^t \rightarrow 0$, оскільки p_{ij}^t може зростати лише до обмеженої границі.

Тепер відмовимося від припущення про правильність моделі. Нехай $\Omega_l^+ \setminus \Omega_l^+ \neq \emptyset$ для деякого $l \neq i$. Будемо доводити, що p_{lj}^t збігається до нуля, якщо $j \in \Omega_i^+ \cap \Omega_l^+$. Звичайно, зараз можливо, що $\Omega_i^+ \setminus \Omega_i^+ \neq \emptyset$ також.

Нехай \mathbf{w}_i , $i \in \overline{1, n}$ визначає знакозмінну дискретну міру (заряд)

$$\mathbf{w}_i = \mathbf{p}_i - \mathbf{r}_i$$

з координатами $w_{ij} = p_{ij} - r_{ij}$. Визначимо

$$\Omega_i^+ = \{j \in \overline{1, n} \mid w_{ij} > 0\}, \quad \Omega_i^- = \{j \in \overline{1, n} \mid w_{ij} < 0\}.$$

для зручності і коректності позначень будемо вважати, що зараз

$$\Omega = \{1, 2, \dots, n\}.$$

Згідно (6.1), зараз множина Ω_i^0 є порожньою. Тому

$$\Omega = \Omega_i^+ \cup \Omega_i^-, \quad \Omega_i^+ \cap \Omega_i^- = \emptyset$$

для кожного i .

Таким чином,

$$\eta_{ij} = r_{ij} = 1/(m-1) \sum_{k \neq i} p_{kj}, \quad j \in \Omega_i^+; \quad \eta_{ij} = p_{ij}, \quad j \in \Omega_i^-.$$

Формулу конфліктної динаміки можемо переписати у вигляді:

$$p_{ij}^{t+1} = \frac{p_{ij}^t (\Theta^t + 1) - \eta_{ij}^t}{z_i^t} = p_{ij}^t \cdot c_{ij}^t, \quad i = 1, \dots, m, \quad (6.6)$$

де

$$c_{ij}^t = \frac{\Theta^t + 1 - \eta_{ij}^t/p_{ij}^t}{\Theta^t + 1 - W_i^t} = 1 + \frac{W^t - \eta_{ij}^t/p_{ij}^t}{\Theta^t + 1 - W_i^t}.$$

Розглянемо відношення між p_{ij}^t та p_{lj}^t , тобто проаналізуємо поведінку величини $R_{il,j}^t := p_{ij}^t/p_{lj}^t$.

Згідно (6.6) маємо:

$$R_{il,j}^{t+1} := p_{ij}^{t+1}/p_{lj}^{t+1} = R_{il,j}^t \cdot z_i^t/z_l^t \cdot k_{il,j}^t, \quad k_{il,j}^t := \frac{\Theta^t + 1 - \eta_{ij}^t/p_{ij}^t}{\Theta^t + 1 - \eta_{lj}^t/p_{lj}^t}.$$

Порівнюючи вирази для η_{ij}^t/p_{ij}^t , η_{lj}^t/p_{lj}^t та беручи до уваги, що $p_{lj}^t < p_{ij}^t$, ми робимо висновок, що $\eta_{ij}^t/p_{ij}^t < \eta_{lj}^t/p_{lj}^t$. Тому $k_{il,j}^t > 1$. Далі, для величини z_i^t/z_l^t , яка є, очевидно, строго додатною і обмеженою, можемо написати: $c < z_i^t/z_l^t < M$. Тому вона не впливає на подальші висновки. Тепер з нерівності $k_{il,j}^{t+1} > k_{il,j}^t$ випливає, що $R_{il,j}^t \rightarrow \infty$, а отже $p_{lj}^t \rightarrow 0$, бо p_{ij}^t обмежене. \square

Розглянемо додатково деякі окремі випадки. Зрозуміло, що взагалі множина Ω_i^+ є лише частиною Ω_i^+ , тобто, $\Omega_i^+ \subseteq \Omega_i^+$, оскільки з

$$p_{ij} > 1/(m-1) \sum_{k \neq i} p_{kj}$$

не впливає $p_{ij} \in \Omega_i^+$. Окрім того, можлива ситуація, коли деякі регіони Ω_i^+ є порожніми, хоча усі $\Omega_i^+ \neq \emptyset$.

Покладемо $m = n$ та припустимо, що для кожного вектора \mathbf{p}_i існує лише єдиний пріоритетний регіон Ω_i^+ , де значення лише однієї з його координат, наприклад p_{ij} , перевищує значення координат p_{kj} усіх інших векторів з j -тим індексом, а також єдиний регіон, в якому одна з координат вектора \mathbf{p}_i , наприклад p_{il} , є найменшою серед координат p_{kl} усіх інших векторів. Тобто, кожен вектор \mathbf{p}_i , $i = 1, \dots, m$ має лише єдину максимальну та єдину мінімальну координату.

Позначимо

$$p_{\max,j} = \max_i \{p_{ij}\}, \quad p_{\min,j} = \min_k \{p_{kj}\} \quad (6.7)$$

Теорема 6.2. Для правильної моделі усі координати $p_{\max,j}^t = p_{ij}^t \in \Omega_i^+$ збігаються до строго додатних значень,

$$p_{ij}^\infty = \lim_{t \rightarrow \infty} p_{ij}^t > 0, \quad (6.8)$$

а усі інші координати, які не є максимальними у початковий момент часу, збігаються до нуля:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} p_{ij}^t \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad i \neq \max, \quad j = 1, \dots, n, \quad (6.9)$$

Зокрема, значення усіх η_{ij}^t прямують до нуля,

$$\eta_{ij}^t \rightarrow 0, \quad t \rightarrow \infty, \quad j = 1, \dots, n,$$

а отже $i W_i^t \rightarrow 0, t \rightarrow \infty$.

Доведення. Для доведення (6.9), з якого впливає (6.8), зафіксуємо деякий вектор \mathbf{p}_i і припустимо, що його максимальна координата має індекс s : $p_{i,\max} = p_{is}$. Розглянемо замість M^t, m^t їх усічені значення: $M_s^t := \sum_{k \neq s}^n p_{k,\max}^t$, та $m_s^t := \sum_{k \neq s}^n p_{k,\min}^t = W_s^t$. Окрім того введемо величину $P_s^t := \sum_{k \neq s} p_{ik}^t = 1 - p_{i,\max}^t = 1 - p_{is}$. Тепер використовуємо те, що зараз $m_s^t = W_s^t$, проаналізуємо поведінку відношення

$$\begin{aligned} \frac{M_s^{t+1}}{P_s^{t+1}} &:= R_{M_s, P_s}^{t+1} = R_{M_s, P_s}^t \cdot \frac{\Theta^t + 1 - W_s^t / M_s^t}{\Theta^t + 1 - W_s^t / P_s^t} = \\ &= R_{M_s, P_s}^t \cdot \frac{\Theta^t + \varepsilon_{M_s}^t}{\Theta^t + \delta_{P_s}^t} = R_{M_s, P_s}^t \cdot k_s^t. \end{aligned}$$

За побудовою, $\varepsilon_{M_s}^t > \delta_{P_s}^t$ та $k_{si}^t > 1$. Отже $R_{M_s, P_s}^{t+1} > R_{M_s, P_s}^t$. За індукцією нерівності $\varepsilon_{M_s}^t > \delta_{P_s}^t$ стають сильнішими на кожному кроці. З цього випливає, що R_{M_s, P_s}^t монотонно зростає до нескінченості. Тому $P^t \rightarrow 0$

оскільки M_s^t обмежене. Це означає, що усі координати $p_{ki}^t \rightarrow 0, k \neq s$ з $t \rightarrow \infty$. Отже, лише єдина координата $p_{si}^t = p_{\max,i} \rightarrow 1, t \rightarrow \infty$. \square

Твердження 6.3. *Нехай $\mathbf{r} \in \mathbb{R}_{+,1}^n, n > 2t$ є новим (додатковим до початкової множини $\mathbf{p}_k, k \in \overline{1, n}$) вектором правильної моделі. Для простоти припустимо, що він має лише дві ненульові координати, скажімо $r_i, r_j, r_i + r_j = 1$, які не перевищують максимальні координати з тими ж індексами, але водночас, є більшими за мінімальні координати з тими ж індексами:*

$$p_{\max,i} > r_i > p_{\min,i}, \quad p_{\max,j} > r_j > p_{\min,j}.$$

Тоді $r_i^t \rightarrow 0, r_j^t \rightarrow 1$, якщо $r_i \cdot p_{\min,j} < r_j \cdot p_{\min,i}$, і навпаки, $r_i^t \rightarrow 1, r_j^t \rightarrow 0$, якщо $r_i \cdot p_{\min,j} > r_j \cdot p_{\min,i}$. А якщо $r_i \cdot p_{\min,j} = r_j \cdot p_{\min,i}$, то вектор \mathbf{r}^t не змінюється з часом,

$$r_i^t = r_i, \quad r_j^t = r_j.$$

Доведення. Згідно (6.6) формула динаміки для \mathbf{r}^t має такий вигляд:

$$r_l^{t+1} = \frac{r_l^t(\Theta^t + 1) - p_{\min,l}}{z_r^t} = r_l^t \frac{\Theta^t + 1 - p_{\min,l}/r_l^t}{\Theta^t + 1 - W_r^t}, \quad l = i, k, t = 1, 2, \dots$$

де $W_r^t = r_i^t + r_j^t$. Використовуючи цю формулу, знаходимо відношення:

$$\frac{r_j^{t+1}}{r_i^{t+1}} = \frac{r_j^t}{r_i^t} \cdot \frac{\Theta^t + 1 - p_{\min,j}/r_j^t}{\Theta^t + 1 - p_{\min,i}/r_i^t}.$$

Бачимо, що ці відношення зростають, якщо $p_{\min,j}/r_j^t < p_{\min,i}/r_i^t$, або, еквівалентно, якщо $p_{\min,j} \cdot r_i^t < p_{\min,i} \cdot r_j^t$. Тобто, коефіцієнти пропорційності цих відношень збільшуються з часом. За ітерацією, відношення r_j^t/r_i^t зростає до нескінченності і, отже, $r_i^t \rightarrow 0$. Це доводить твердження в одну сторону.

Навпаки, якщо $p_{\min,j}/r_j^t > p_{\min,i}/r_i^t$, тоді, завдяки аналогічним аргументам, відношення r_i^t/r_j^t зростають до нескінченності і тому $r_j^t \rightarrow 0$. Це доводить твердження в інший бік. Нарешті, якщо $p_{\min,j}/r_j = p_{\min,i}/r_i$, тоді очевидно, що відношення $r_j^t/r_i^t = r_j/r_i$ і завдяки $r_j + r_i = 1$ це приводить до того, що координати r_j, r_i є постійними. \square

Припустімо, що кожен початковий вектор \mathbf{p}_i має лише єдину максимальну координату, тобто значення усіх його координат, окрім однієї, є меншими, ніж $p_{\max,j}$ (див. (6.7)). Зрозуміло, це неможливо, якщо $n > t$. Отже, нехай $n = t$. Тоді з попереднього твердження, завдяки нормованості на одиницю, впливає такий результат.

Теорема 6.4. *Нехай $n = m$ і кожна максимальна, у сенсі (6.7), координата $p_{\max,j}$ відповідає лише одному вектору \mathbf{p}_i . Тоді кожна траєкторія динамічної системи (6.2) заданої формулами (6.4), (6.5) збігається до нерухомого стану, в якому*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} p_{\max,j}^t = 1, \quad j = 1, \dots, n,$$

а усі інші координати дорівнюють нулеві, $\lim_{t \rightarrow \infty} p_{i,j}^t = 0$, $i \neq \max$.

На кінець розглянемо випадок $n > m$. Тепер можливо, що якийсь вектор має не одну, у сенсі (6.7), максимальну координату. Виникає питання, які саме граничні значення при цьому виникають?

Введемо нові позначення: координату p_{ij}^t будемо позначати $p_{ij}^{+,t}$, якщо вона є максимальною в сенсі, $p_{ij}^t \geq p_{kj}^t$, $k \neq i$, $k \in \overline{[1, m]}$, а також писати $p_{ij}^{-,t}$, якщо $p_{ij}^t < p_{kj}^t$ хоча б для одного $k \neq i$.

Теорема 6.5. *В загальному випадку динамічної системи (6.2), коли $n \geq m$, граничні координати p_{ij}^∞ векторів, які мають хоча б одну максимальну, у сенсі (6.7), координату, припускають такий опис:*

$$p_{ij}^\infty = \begin{cases} p_{ij}^{+, \infty} = w_{ij}^+ / z_i, & z_i = \sum_j w_{ij}^+ \\ p_{ij}^{-, \infty} = 0, \end{cases} \quad (6.10)$$

де w_{ij}^+ позначають додатні координати векторів $\mathbf{w}_i := \mathbf{p}_i - \mathbf{r}_i$,

$$\mathbf{r}_i = \{r_{ij}\}_{j=1}^m, \quad r_{ij} = \frac{1}{m-1} \sum_{l \neq i} p_{lj}.$$

Доведення. Якщо у вектора \mathbf{p}_i значення $p_{\max,j}$ досягається лише для однієї координати, тоді вже доведено, що $p_{\max,j}^\infty = 1$. Це частково підтверджує формулу (6.10). Припустімо тепер, що існує декілька, ну хоча б два індекса, скажімо j та k такі, що

$$p_{\max,j} = \max_i \{p_{ij}\} \quad \text{та} \quad p_{\max,k} = \max_i \{p_{ik}\}.$$

Тоді з рівності

$$\frac{p_{ij}^{t+1} - r_{ij}^{t+1}}{p_{ik}^{t+1} - r_{ik}^{t+1}} = \frac{(p_{ij}^t - r_{ij}^t)(\Theta^t + 1) - \eta_j^t + 1/(m-1)(\eta_j^t + \dots + \eta_j^t)}{(p_{ik}^t - r_{ik}^t)(\Theta^t + 1) - \eta_k^t + 1/(m-1)(\eta_k^t + \dots + \eta_k^t)}$$

впливає, що

$$\frac{p_{ij}^{t+1} - r_{ij}^{t+1}}{p_{ik}^{t+1} - r_{ik}^{t+1}} = \frac{p_{ij}^t - r_{ij}^t}{p_{ik}^t - r_{ik}^t},$$

тобто незалежність цього відношення від часу. При цьому ми скористалися тим, що поділ координат на $p_{ij}^{+,t}$ та $p_{ij}^{-,t}$ не залежить від часу.

Тому

$$\frac{p_{\max,j}^{\infty}}{p_{\max,k}^{\infty}} = \frac{p_{\max,j} - \frac{1}{m-1} \sum_{l \neq \max} p_{lj}}{p_{\max,k} - \frac{1}{m-1} \sum_{l \neq \max} p_{lk}} = \frac{w_{ij}^+}{w_{ik}^+}.$$

Звідси робимо висновок, що $p_{\max,j}^{\infty} = w_{ij}^+/z_i$, $p_{\max,k}^{\infty} = w_{ik}^+/z_i$, оскільки граничний вектор \mathbf{p}_i^{∞} є стохастичним, а усі його не максимальні стартові координати збігаються до нуля, $\lim_{t \rightarrow \infty} p_{il}^t = 0$, $l \neq j, k$. У випадку більшої, ніж два, кількості максимальних координат у якогось вектора, доведення йде за тією ж схемою. \square

ЛІТЕРАТУРА

- [1] Anna Agliari, Gian-Italo Bischi, Laura Gardini. Some methods for the global analysis of dynamic games represented by iterated noninvertible maps. In *Oligopoly Dynamics*, pages 31–83. Springer Berlin Heidelberg, 2002, doi: 10.1007/978-3-540-24792-0_3.
- [2] S. Albeverio, V. Koshmanenko, M. Pratsiovytyi, G. Torbin. On fine structure of singularly continuous probability measures and random variables with independent \tilde{Q} -symbols. *Methods Funct. Anal. Topology*, 17(2):97–111, 2011, <http://mfat.imath.kiev.ua/article/?id=570>.
- [3] S. Albeverio, V. Koshmanenko, I. Samoilenko. The conflict interaction between two complex systems: cyclic migration. *J. Interdiscip. Math.*, 11(2):163–185, 2008, doi: 10.1080/09720502.2008.10700552.
- [4] Sergio Albeverio, Maksym Bodnarchuk, Volodymyr Koshmanenko. Dynamics of discrete conflict interactions between non-annihilating opponents. *Methods Funct. Anal. Topology*, 11(4):309–319, 2005, <http://mfat.imath.kiev.ua/article/?id=330>.
- [5] Sergio Albeverio, Volodymyr Koshmanenko, Mykola Pratsiovytyi, Grygoriy Torbin. Spectral properties of image measures under the infinite conflict interaction. *Positivity*, 10(1):39–49, 2006, doi: 10.1007/s11117-005-0012-3.
- [6] Sergio Albeverio, Volodymyr Koshmanenko, Grygoriy Torbin. Fine structure of the singular continuous spectrum. *Methods Funct. Anal. Topology*, 9(2):101–119, 2003.
- [7] Robert Axelrod. The dissemination of culture. *Journal of Conflict Resolution*, 41(2):203–226, April 1997, doi: 10.1177/0022002797041002001.
- [8] M. Bandyopadhyay, J. Chattopadhyay. Ratio-dependent predator-prey model: effect of environmental fluctuation and stability. *Nonlinearity*, 18(2):913–936, 2005, doi: 10.1088/0951-7715/18/2/022.
- [9] M. F. Barnsley, S. Demko. Iterated function systems and the global construction of fractals. *Proc. Roy. Soc. London Ser. A*, 399(1817):243–275, 1985.
- [10] N. Bellomo, F. Brezzi, M. Pulvirenti. Modeling behavioral social systems. *Math. Models Methods Appl. Sci.*, 27(1):1–11, 2017, doi: 10.1142/S0218202517020018.
- [11] N. Bellomo, J. Soler. On the mathematical theory of the dynamics of swarms viewed as complex systems. *Math. Models Methods Appl. Sci.*, 22(suppl. 1):1140006, 29, 2012, doi: 10.1142/S0218202511400069.
- [12] Nicola Bellomo, Miguel A. Herrero, Andrea Tosin. On the dynamics of social conflicts: looking for the black swan. *Kinet. Relat. Models*, 6(3):459–479, 2013, doi: 10.3934/krm.2013.6.459.

- [13] G. I. Bischi, F. Tramontana. Three-dimensional discrete-time Lotka-Volterra models with an application to industrial clusters. *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.*, 15(10):3000–3014, 2010, doi: 10.1016/j.cnsns.2009.10.021.
- [14] M. V. Bodnarchuk, V. D. Koshmanenko, N. V. Kharchenko. Properties of the limit states of a conflict dynamical system. *Neliniĭniĭ Koliv.*, 7(4):446–461, 2004, doi: 10.1007/s11072-005-0023-9.
- [15] Wellington de Melo, Sebastian van Strien. *One-dimensional dynamics*, volume 25 of *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete (3) [Results in Mathematics and Related Areas (3)]*. Springer-Verlag, Berlin, 1993, doi: 10.1007/978-3-642-78043-1.
- [16] Nelson Dunford, Jacob T. Schwartz. *Linear operators. Part I*. Wiley Classics Library. John Wiley & Sons, Inc., New York, 1988. General theory, With the assistance of William G. Bade and Robert G. Bartle, Reprint of the 1958 original, A Wiley-Interscience Publication.
- [17] Joshua M. Epstein. *Nonlinear dynamics, mathematical biology, and social science*. Santa Fe Institute Studies in the Sciences of Complexity. Lecture Notes, IV. Addison-Wesley Publishing Company, Advanced Book Program, Reading, MA, 1997.
- [18] Joshua M. Epstein. Modeling civil violence: An agent-based computational approach. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 99(Supplement 3):7243–7250, May 2002, doi: 10.1073/pnas.092080199.
- [19] Joshua M. Epstein. Why model? *Journal of Artificial Societies and Social Simulation*, 11(4):12, 2008, <http://jasss.soc.surrey.ac.uk/11/4/12.html>.
- [20] Josef Hofbauer, Karl Sigmund. *The theory of evolution and dynamical systems*, volume 7 of *London Mathematical Society Student Texts*. Cambridge University Press, Cambridge, 1988. Mathematical aspects of selection, Translated from the German.
- [21] Josef Hofbauer, Karl Sigmund. *Evolutionary games and population dynamics*. Cambridge University Press, Cambridge, 1998, doi: 10.1017/CBO9781139173179.
- [22] Hai-Bo Hu, Xiao-Fan Wang. Discrete opinion dynamics on networks based on social influence. *J. Phys. A*, 42(22):225005, 16, 2009, doi: 10.1088/1751-8113/42/22/225005.
- [23] Haibo Hu. Competing opinion diffusion on social networks. *R. Soc. Open Sci.*, 4(11, November):171160, 13, 2017, doi: 10.1098/rsos.171160.
- [24] John E. Hutchinson. Fractals and self-similarity. *Indiana Univ. Math. J.*, 30(5):713–747, 1981, doi: 10.1512/iumj.1981.30.30055.
- [25] Mahdi Jalili. Social power and opinion formation in complex networks. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 392(4):959–966, February 2013, doi: 10.1016/j.physa.2012.10.013.
- [26] A. J. Jones. *Game theory: mathematical models of conflict*. Ellis Horwood Ltd., Chichester; Halsted Press [John Wiley & Sons], New York-Chichester-Brisbane, 1980. Mathematics and its Applications.
- [27] T. V. Karataĕva, V. D. Koshmanenko. Society, a mathematical model of a dynamical conflict system. *Neliniĭniĭ Koliv.*, 22(1):66–85, 2019, doi: 10.1007/s10951-018-0558-0.
- [28] Tatiana Karataieva, Volodymyr Koshmanenko, Małgorzata J. Krawczyk, Krzysztof Kuł akowski. Mean field model of a game for power. *Phys. A*, 525:535–547, 2019, doi: 10.1016/j.physa.2019.03.110.
- [29] Salam Md. Mahbubush Khan, Kazuyuki Ikko Takahashi. Segregation through conflict. *Advances in Applied Sociology*, 03(08):315–319, 2013, doi: 10.4236/aasoci.2013.38040.
- [30] Masahiro Kimura, Kazumi Saito, Kouzou Ohara, Hiroshi Motoda. Opinion formation by voter model with temporal decay dynamics. In *Machine Learning and Knowledge Discovery in Databases*, pages 565–580. Springer Berlin Heidelberg, 2012, doi: 10.1007/978-3-642-33486-3_36.

- [31] V. Koshmanenko, T. Karataieva. On personal strategies in conflict socium. In *Econophysics Colloquium, Warsaw, 5-7 July 2017*, page 32, 2017.
- [32] V. Koshmanenko, T. Karataieva, N. Kharchenko, I. Verygina. Models of the conflict redistribution of vital resources. In *Social Simulation Conference. Italy, Rome*, page 4, 2016.
- [33] V. Koshmanenko, N. Kharchenko. Spectral properties of image probability measures after conflict interactions. *Theory Stoch. Process.*, 10(3-4):74–81, 2004.
- [34] V. Koshmanenko, N. Kharchenko. Fixed points of complex systems with attractive interaction. *Methods Funct. Anal. Topology*, 23(2):164–176, 2017.
- [35] V. Koshmanenko, E. Pugacheva. Conflict interactions with external intervention. In *Social Simulation Conference. Italy, Rome*, page 4, 2016.
- [36] V. Koshmanenko, O. Satur, V. Voloshyna. Point spectrum in conflict dynamical systems with fractal partition. *Methods Funct. Anal. Topology*, 25(4):324–338, 2019.
- [37] V. D. Koshmanenko. A theorem on conflict for a pair of stochastic vectors. *Ukrain. Mat. Zh.*, 55(4):555–560, 2003, doi: 10.1023/B:UKMA.0000010167.63115.37.
- [38] V. D. Koshmanenko, N. V. Kharchenko. Invariant points of a dynamical system of conflict in the space of piecewise uniformly distributed measures. *Ukrain. Mat. Zh.*, 56(7):927–938, 2004, doi: 10.1007/s11253-005-0004-1.
- [39] V. D. Koshmanenko, S. M. Petrenko. The Hahn-Jordan decomposition as the equilibrium state of a conflict system. *Ukrain. Mat. Zh.*, 68(1):64–77, 2016, doi: 10.1007/s11253-016-1209-2.
- [40] V. D. Koshmanenko, I. V. Samoilenko. A dynamical system model for a conflict triad. *Nelineinī Koliiv.*, 14(1):55–75, 2011, doi: 10.1007/s11072-011-0141-5.
- [41] V. D. Koshmanenko, O. R. Satur. Sure event problem in multicomponent dynamical systems with attractive interaction. *Journal of Mathematical Sciences*, 249(4):629–646, August 2020, doi: 10.1007/s10958-020-04962-3.
- [42] V. D. Koshmanenko, V. O. Voloshina. Limit distributions of a conflict dynamical system with a point spectrum. *Ukrain. Mat. Zh.*, 70(12):1615–1624, 2018.
- [43] Volodymyr Koshmanenko. Theorem of conflicts for a pair of probability measures. *Math. Methods Oper. Res.*, 59(2):303–313, 2004, doi: 10.1007/s001860300330.
- [44] Volodymyr Koshmanenko. The infinite direct products of probability measures and structural similarity. *Methods Funct. Anal. Topology*, 17(1):20–28, 2011.
- [45] Volodymyr Koshmanenko. Existence theorems of the ω -limit states for conflict dynamical systems. *Methods Funct. Anal. Topology*, 20(4):379–390, 2014.
- [46] Volodymyr Koshmanenko, Mykola Dudkin. *The method of rigged spaces in singular perturbation theory of self-adjoint operators*, volume 253 of *Operator Theory: Advances and Applications*. Birkhäuser/Springer, [Cham], 2016, doi: 10.1007/978-3-319-29535-0.
- [47] Volodymyr Koshmanenko, Igor Samoilenko. The conflict triad dynamical system. *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.*, 16(7):2917–2935, 2011, doi: 10.1016/j.cnsns.2010.10.028.
- [48] Robert M. May. Biological populations obeying difference equations: Stable points, stable cycles, and chaos. *Journal of Theoretical Biology*, 51(2):511–524, 1975, doi: [https://doi.org/10.1016/0022-5193\(75\)90078-8](https://doi.org/10.1016/0022-5193(75)90078-8).
- [49] J. D. Murray. *Mathematical biology. I*, volume 17 of *Interdisciplinary Applied Mathematics*. Springer-Verlag, New York, third edition, 2002. An introduction.
- [50] J. D. Murray. *Mathematical biology. II*, volume 18 of *Interdisciplinary Applied Mathematics*. Springer-Verlag, New York, third edition, 2003. Spatial models and biomedical applications.

- [51] Guillermo Owen. *Game theory*. Academic Press, Inc., San Diego, CA, third edition, 1995.
- [52] Eric Renshaw. *Modelling biological populations in space and time*, volume 11 of *Cambridge Studies in Mathematical Biology*. Cambridge University Press, Cambridge, 1991, doi: 10.1017/CBO9780511624094.
- [53] T.C. Schelling. *The Strategy of Conflict*. Harvard University Press, 1960.
- [54] Erwin Schrödinger. *What is Life? The Physical Aspect of the Living Cell*. Cambridge University Press, 1944.
- [55] A. N. Sharkovsky, S. F. Kolyada, A. G. Sivak, V. V. Fedorenko. *Dynamics of one-dimensional maps*, volume 407 of *Mathematics and its Applications*. Kluwer Academic Publishers Group, Dordrecht, 1997, doi: 10.1007/978-94-015-8897-3. Translated from the 1989 Russian original by Sivak, P. Malyshev and D. Malyshev and revised by the authors.
- [56] Karl Sigmund. The population dynamics of conflict and cooperation. In *Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Vol. I (Berlin, 1998)*, number Extra Vol. I, pages 487–506, 1998.
- [57] Kazuyuki Ikko Takahashi, Khan Md. Mahbubush Salam. Mathematical model of conflict with non-annihilating multi-opponent. *J. Interdiscip. Math.*, 9(3):459–473, 2006.
- [58] Hans Triebel. *Fractals and spectra*, volume 91 of *Monographs in Mathematics*. Birkhäuser Verlag, Basel, 1997, doi: 10.1007/978-3-0348-0034-1. Related to Fourier analysis and function spaces.
- [59] Ī. V. Verigina, V. D. Koshmanenko. An optimal strategy problem in models of the conflict redistribution of the resource space. *Ukraïn. Mat. Zh.*, 69(7):905–911, 2017, doi: 10.1007/s11253-017-1414-7.
- [60] В. Д. Кошманенко. *Спектральна теорія динамічних систем конфлікту*. Київ: Наукова думка, 2016 (in Ukrainian).
- [61] М. В. Працьовитий. *Фрактальний підхід до дослідження сингулярних розподілів*. Київ: Нац. пед. унів. ім. М. П. Драгоманова, 1988 (in Ukrainian).
- [62] А. Ф. Турбин, Н. В. Працевитый. *Фрактальные множества, функции и распределения*. Київ: Наукова думка, 1992 (in Russian).
- [63] А. Н. Шарковский, Ю. Л. Майстренко, Е. Ю. Романенко. *Разностные уравнения и их приложения*. Київ: Наукова думка, 1986 (in Russian).
- [64] Дж. фон Нейман, О. Моргенштерн. *Теория игр и экономическое поведение*. М.: Наука, 1970 (in Russian).

Володимир Кошманенко

ІНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ НАН УКРАЇНИ, КИЇВ

Email: koshman63@gmail.com

Deformations of functions on surfaces

Sergiy Maksymenko

Abstract. The paper contains a review on recent progress in the deformational properties of smooth functions on compact surfaces.

1. INTRODUCTION

Let M be a compact connected surface and P be either the real line \mathbb{R} or the circle S^1 . For a closed subset $X \subset M$ denote by $\mathcal{D}(M, X)$ the group of all smooth (C^∞) diffeomorphisms of M fixed on X . This group acts from the right on the space $\mathcal{C}^\infty(M, P)$ by the following rule: if $h \in \mathcal{D}(M, X)$ and $f \in \mathcal{C}^\infty(M, P)$, then the result of the action of h on f is the composition map $f \circ h : M \rightarrow P$. For $f \in \mathcal{C}^\infty(M, P)$ let Σ_f be the set of its critical points, and

$$\begin{aligned}\mathcal{S}(f, X) &= \{h \in \mathcal{D}(M, X) \mid f \circ h = f\}, \\ \mathcal{O}(f, X) &= \{f \circ h \mid h \in \mathcal{D}(M, X)\}\end{aligned}$$

be respectively the *stabilizer* and the *orbit* of f under that action. It will be convenient to say that elements of $\mathcal{S}(f, X)$ *preserve* f . Let also

$$\mathcal{S}'(f, X) = \mathcal{S}(f) \cap \mathcal{D}_{\text{id}}(M, X)$$

be the subgroup of $\mathcal{S}(f)$ consisting of isotopic to the identity diffeomorphisms relatively to X , though such an isotopy is not required to preserve f . Endow these spaces with C^∞ topologies and denote by $\mathcal{D}_{\text{id}}(M, X)$ and $\mathcal{S}_{\text{id}}(f, X)$ the corresponding path components of id_M in $\mathcal{D}(M, X)$ and $\mathcal{S}(f, X)$, and by $\mathcal{O}_f(f, X)$ the path component of $\mathcal{O}(f, X)$ containing f . We will omit X from notation whenever it is empty.

Let $\mathcal{C}_\partial^\infty(M, P) \subset \mathcal{C}^\infty(M, P)$ be the subset consisting of maps $f : M \rightarrow P$ satisfying the following axiom:

- (B) *The map f takes a constant value at each connected component of ∂M and has no critical points in ∂M .*

Keywords: diffeomorphism, surface, Morse function

Let also $\mathcal{M}(M, P) \subset \mathcal{C}_\partial^\infty(M, P)$ be the subset consisting of *Morse maps*, i.e. maps having only non-degenerate critical points, i.e. in some local coordinates (x, y) at such point f is given by the formula $\pm x^2 \pm y^2$ for some choice of signs. Notice that such a polynomial can be characterized as a non-zero homogeneous polynomial of degree 2 having no multiple factors. A Morse map is called

- *simple* if each connected component of each level set of f contains at most one critical point;
- *generic* if it takes distinct value at distinct critical points.

Every generic Morse map is evidently simple. Denote by $\mathcal{M}^{gen}(M, P)$ and $\mathcal{M}^{smp}(M, P)$ the sets of all generic and simple Morse maps $M \rightarrow P$. Then

$$\mathcal{M}^{gen}(M, P) \subset \mathcal{M}^{smp}(M, P) \subset \mathcal{M}(M, P).$$

It is well known that each of these three spaces is *open* and *everywhere dense* in $\mathcal{C}_\partial^\infty(M, P)$ with respect to \mathcal{C}^∞ topology, e.g. [16, Chapter 6].

More generally, let $\mathcal{F}(M, P) \subset \mathcal{C}_\partial^\infty(M, P)$ be the subset consisting of maps satisfying one more axiom:

- (L) *For every critical point z of f , there are local coordinates in which f is a homogeneous polynomial $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ of degree ≥ 2 without multiple factors.*

The present paper contains a review of recent results about the homotopy types of $\mathcal{S}(f, X)$ and $\mathcal{O}(f, X)$ of maps $f \in \mathcal{F}(M, P)$ obtained by S. Maksymenko, B. Feshchenko, A. Kravchenko, I. Kuznietsova, Yu. Soroka, [9, 19–21, 29, 31, 33–37, 39, 40, 43–47] and E. Kudryavtseva [23–25, 27, 28],

Notice that we have the following inclusions:

$$\mathcal{M}(M, P) \subset \mathcal{F}(M, P) \subset \mathcal{C}_\partial^\infty(M, P) \subset \mathcal{C}^\infty(M, P).$$

It is also easy to show (see §4.1) that every $f \in \mathcal{F}(M, P)$ has only isolated critical points, so the set of critical points is finite. Moreover, for every isolated critical point z of a \mathcal{C}^3 map $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ the local *topological structure* of level-sets of g near z is realized by level sets of homogeneous polynomial without multiple factors, see §4.1.

Thus $\mathcal{F}(M, P)$ consists of “typical” maps with “topologically typical” critical points, and therefore the presented results thus describe typical deformational properties of smooth maps on surfaces.

2. ALGEBRAIC PRELIMINARIES

In this section we will present necessary topological and algebraic definitions and list of preliminary statements. The reader may skip this section on first reading and use it for the references. Everywhere in the paper \hookrightarrow will mean a “*monomorphism*”, \twoheadrightarrow an “*epimorphism*”, and \cong an “*isomorphism*”.

2.1. Commutative diagrams. Suppose we are given two sequences of homomorphisms of groups:

$$\mathbf{u} : K_1 \xrightarrow{\alpha_1} \dots \xrightarrow{\alpha_{k-1}} K_k, \quad \mathbf{v} : L_1 \xrightarrow{\beta_1} \dots \xrightarrow{\beta_{k-1}} L_k.$$

Then by a *homomorphism* $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_k) : \mathbf{u} \rightarrow \mathbf{v}$ we will mean a collection of homomorphisms $\gamma_i : K_i \rightarrow L_i, i = 1, \dots, k$, making commutative the following diagram:

$$\begin{array}{ccccccc} K_1 & \xrightarrow{\alpha_1} & K_2 & \xrightarrow{\alpha_2} & \dots & \xrightarrow{\alpha_{k-1}} & K_k \\ \downarrow \gamma_1 & & \downarrow \gamma_2 & & & & \downarrow \gamma_k \\ L_1 & \xrightarrow{\beta_1} & L_2 & \xrightarrow{\beta_2} & \dots & \xrightarrow{\beta_{k-1}} & L_k \end{array}$$

In this case γ is said to be an *epimorphism* (resp. *monomorphism, isomorphism*) whenever γ_i is so. In particular, one can talk about *exact sequences* of sequences of homomorphisms. Also by a *product* $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ we will mean the following sequence

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} : K_1 \times L_1 \xrightarrow{\alpha_1 \times \beta_1} K_2 \times L_2 \xrightarrow{\alpha_2 \times \beta_2} \dots \xrightarrow{\alpha_{k-1} \times \beta_{k-1}} K_k \times L_k.$$

More generally, one can define in an obvious way similar notions for commutative diagrams of arbitrary fixed type not only for chains of homomorphisms. In particular, by *exact (3 × 3)-diagram* we will mean a commutative diagram shown on the left:

$$\begin{array}{ccccc} \mathbf{u}_0 : & K \hookrightarrow & L & \twoheadrightarrow & M \\ & \downarrow & \downarrow & & \downarrow \\ \mathbf{u}_1 : & A \hookrightarrow & B & \twoheadrightarrow & C \\ & \downarrow & \downarrow & & \downarrow \\ \mathbf{u}_2 : & P \hookrightarrow & Q & \twoheadrightarrow & R \end{array} \tag{2.1}$$

in which each row and column is a short exact sequence. It can be regarded as a *short exact sequence of its rows* $\mathbf{u}_0 \hookrightarrow \mathbf{u}_1 \twoheadrightarrow \mathbf{u}_2$ (or *columns*) being in turn short exact sequences of groups homomorphisms. Notice that if all monomorphisms in (2.1) are inclusions of subgroups, then L and A are normal subgroups of B with $K = L \cap A$ and that diagram is isomorphic with the following one

$$\begin{array}{ccccc} A \cap L \hookrightarrow & L & \twoheadrightarrow & L / (A \cap L) \\ \downarrow & \downarrow & & \downarrow \\ A \hookrightarrow & B & \twoheadrightarrow & B / A \\ \downarrow & \downarrow & & \downarrow \\ A / (A \cap L) \hookrightarrow & B / L & \twoheadrightarrow & B / L / (A / (A \cap L)) \cong B / A / (A / (A \cap L)) \end{array} \tag{2.2}$$

via isomorphism being identity on A, L , and B .

2.2. Sections of homomorphisms. Let $p : G \rightarrow Z$ be a homomorphism. Then another homomorphism $s : Z \rightarrow G$ is called a *section* of p , whenever $p \circ s = \text{id}_Z$. In this case p must be surjective, and s isomorphically maps Z onto the subgroup $s(Z)$ of G .

An essential point here is that s must be a *homomorphism*. For instance $p : \mathbb{Z} \xrightarrow{b \bmod n} \mathbb{Z}_n$ for $n \geq 2$ has no sections. Indeed if $s : \mathbb{Z}_n \rightarrow \mathbb{Z}$ a section, then $s(\mathbb{Z}_n)$ must be a finite subgroup of \mathbb{Z} , and therefore it is $\{0\}$. Thus s is the zero homomorphism, and thus $p \circ s = 0 \neq \text{id}_{\mathbb{Z}_n}$.

2.3. Direct products. Let G be a group, G_1, \dots, G_k a collection of its subgroups, and $\psi : \prod_{i=1}^k G_i \rightarrow G$ a *map* defined by $\psi(g_1, \dots, g_k) = g_1 \cdots g_k$. Then ψ is an *isomorphism of groups* if and only if G_1, \dots, G_k pairwise commute, generate G , and $G_i \cap G_j = \{e\}$ for $i \neq j$. In that case G *splits into a direct product of its subgroups* G_1, \dots, G_k .

2.4. Semidirect products. Let Z and A be two groups with units e_Z and e_A respectively, and $\phi : Z \rightarrow \text{Aut}(A)$ a *homomorphism* into the group of automorphisms of A regarded as a group with respect to the composition of automorphisms. For $x \in Z$ and $a \in A$ it will be convenient to denote $\phi(x)(a) = {}^x a$, whence for $x, y \in Z$ and $a, b \in A$ we have that

$$\begin{aligned} ({}^{xy} a) &= \phi(xy)(a) = \phi(x)(\phi(y)(a)) = {}^x ({}^y a), \\ x(ab) &= \phi(x)(ab) = \phi(x)(a) \cdot \phi(x)(b) = {}^x a \cdot {}^x b. \end{aligned}$$

Then there is a group structure on the Cartesian product of *sets* $A \times Z$, denoted by $A \rtimes_{\phi} Z$ and called a *semidirect product of A and Z (with respect to ϕ)*, defined by the following rule:

$$(a, x) \cdot (b, y) := (a \cdot {}^x b, xy), \quad (a, x), (b, y) \in A \times Z.$$

If ϕ is assumed from the context, then $A \rtimes_{\phi} Z$ is sometimes denoted simply by $A \rtimes Z$.

One easily check associativity of such multiplication, and that

$$(a, x) \cdot (b, y) \cdot (c, z) := (a \cdot {}^x b \cdot {}^{xy} c, xyz),$$

the unit is (e_A, e_Z) , and $(a, x)^{-1} = (x^{-1} a^{-1}, x^{-1})$.

It follows that the following maps

$$\begin{aligned} \rho : A &\rightarrow A \rtimes_{\phi} Z, & \rho(a) &= (a, e_Z), \\ \sigma : Z &\rightarrow A \rtimes_{\phi} Z, & \sigma(z) &= (e_A, z), \\ \pi : A \rtimes_{\phi} Z &\rightarrow Z, & \pi(a, z) &= z, \end{aligned}$$

are homomorphisms, ρ isomorphically maps A on $A \times e_Z$, and σ is a *section* of π , i.e. $\pi \circ \sigma = \text{id}_Z$, and its isomorphically maps Z onto $e_A \times Z$. In other

words, we have the following short exact sequence admitting a section:

$$A \xrightarrow{\rho} A \rtimes Z \begin{array}{c} \xrightarrow{\pi} \\ \xleftarrow{\sigma} \end{array} Z.$$

The following statement characterizes semidirect products via short exact sequences admitting sections.

Lemma 2.4.1. *Let $p : G \rightarrow Z$ be a homomorphism with $A = \ker(p)$. Suppose there exists a **section** $s : Z \rightarrow G$ of p . Then $s(Z)$ acts on A by conjugations, so we get a homomorphism*

$$\phi : Z \rightarrow \text{Aut}(A), \quad \phi(z)(a) = s(z) \cdot a \cdot s(z)^{-1},$$

and can define the semidirect product $A \rtimes_{\phi} Z$. Moreover, the map

$$\psi : A \rtimes_{\phi} Z \rightarrow G, \quad \psi(a, z) = r(a)\sigma(z),$$

is an **isomorphism** which induces isomorphism of the following short exact sequences:

$$\begin{array}{ccccc} A & \xrightarrow{a \mapsto (a,e)} & A \rtimes_{\phi} Z & \xrightarrow{(a,z) \mapsto z} & Z \\ \parallel & & \cong \downarrow \psi & & \parallel \\ A & \xrightarrow{\quad\quad\quad} & G & \xrightarrow{p} & Z \end{array} \tag{2.3}$$

2.5. Semidirect products with \mathbb{Z} . Clearly, any epimorphism $\eta : G \rightarrow \mathbb{Z}$ onto the group \mathbb{Z} of integers, always has a section: just take any $g \in G$ with $\eta(g) = 1$, and put $s(n) = g^n$. Then G is a semidirect product $\ker(\eta) \rtimes \mathbb{Z}$, i.e. a Cartesian product $\ker(\eta) \times \mathbb{Z}$ of sets with the following multiplication:

$$(a, m)(b, n) = (ag^m b g^{-m}, m + n). \tag{2.4}$$

2.6. Wreath products. Let G be a group, $m \geq 1$, and G^m be the m -th power of G , so its elements are m -tuples of elements of G . Also for $n \geq 1$ one can regard the elements of mn -power G^{mn} of G as $(m \times n)$ -matrices whose entries belong to G . In particular, there are the following natural *non-effective* actions of \mathbb{Z} on G^m and \mathbb{Z}^2 on G^{mn} by cyclic shifts of coordinates:

$$\begin{array}{ll} G^m \times \mathbb{Z} \rightarrow G^m, & (\{g_i\}_{i=0}^{m-1}, a) \mapsto \{g_{i+a}\}, \\ G^{mn} \times \mathbb{Z}^2 \rightarrow G^{mn}, & (\{g_{i,j}\}_{i=0, \dots, m-1}^{j=0, \dots, n-1}, (a, b)) \mapsto \{g_{i+a, j+b}\}, \end{array}$$

for $a, b \in \mathbb{Z}$, where $i + a$ is taken modulo m , and $j + b$ is taken modulo n . These actions reduce to *effective* actions of \mathbb{Z}_m on G^m and $\mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_n$ on G^{mn} . Let

$$G \wr_m \mathbb{Z}, \quad G \wr \mathbb{Z}_m, \quad G \wr_{mn} \mathbb{Z}^2, \quad G \wr (\mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_n)$$

be the respective semidirect products induced by the above actions. Such semidirect products are called *wreath products*. For instance, $G \wr_m \mathbb{Z}$ is a cartesian product of sets $G^m \times \mathbb{Z}$ with the following operation:

$$(g_0, \dots, g_{m-1}, a) \cdot (h_0, \dots, h_{m-1}, b) = (g_0 h_a, g_1 h_{a+1}, \dots, g_{m-1} h_{a-1}, a + b),$$

where all indices are taken modulo m . The multiplications in other groups $G \wr \mathbb{Z}_m$, $G \wr_{mn} \mathbb{Z}^2$, and $G \wr (\mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_n)$ are similar.

These groups will play the key role in what follows. For a group G denote by $Z(G)$ its center and by $G' := [G, G]$ its derived subgroup (commutant). Let also $\text{ab} : G \rightarrow G/G'$ be the natural abelianization epimorphism.

Lemma 2.6.1. [31] *Let G be any group and $m, n \geq 1$. Then*

$$\begin{aligned} Z(G \wr_m \mathbb{Z}) &= \{(g, \dots, g, mk) \mid g \in G, k \in \mathbb{Z}\} \cong Z(G) \times \mathbb{Z}, \\ Z(G \wr_{m,n} \mathbb{Z}^2) &= \{(g, \dots, g, mk, nl) \mid g \in G, k, l \in \mathbb{Z}\} \cong Z(G) \times \mathbb{Z}^2. \end{aligned}$$

Moreover, the following maps

$$\begin{aligned} \gamma : G \wr_m \mathbb{Z} &\rightarrow (G/G') \times \mathbb{Z}, & \gamma(g_1, \dots, g_n, k) &= (\text{ab}(g_1 \cdots g_m), k), \\ \delta : G \wr_{m,n} \mathbb{Z}^2 &\rightarrow (G/G') \times \mathbb{Z}^2, & \delta(\{g_{i,j}\}, k, l) &= \left(\text{ab}\left(\prod_{i=1}^m \prod_{j=1}^n g_{i,j}\right), k, l\right) \end{aligned}$$

are well-defined surjective homomorphisms with

$$\begin{aligned} (G \wr_m \mathbb{Z})' &= \ker(\gamma) = \{(g_1, \dots, g_n, 0) \mid \prod_{i=1}^m g_i \in G'\}, \\ (G \wr_{m,n} \mathbb{Z}^2)' &= \ker(\delta) = \{(\{g_{i,j}\}, 0, 0) \mid \prod_{i=1}^m \prod_{j=1}^n g_{i,j} \in G'\}, \end{aligned}$$

so we have the following commutative diagrams:

$$\begin{array}{ccc} G \wr_m \mathbb{Z} & \xrightarrow{\text{ab}} & \frac{G \wr_m \mathbb{Z}}{(G \wr_m \mathbb{Z})'} \\ \parallel & & \cong \downarrow \eta \\ G \wr_m \mathbb{Z} & \xrightarrow{\gamma} & (G/G') \times \mathbb{Z} \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} G \wr_{m,n} \mathbb{Z}^2 & \xrightarrow{\text{ab}} & \frac{G \wr_{m,n} \mathbb{Z}^2}{(G \wr_{m,n} \mathbb{Z}^2)'} \\ \parallel & & \cong \downarrow \nu \\ G \wr_{m,n} \mathbb{Z}^2 & \xrightarrow{\delta} & (G/G') \times \mathbb{Z}^2 \end{array}$$

for unique isomorphisms η and ν .

Finally, if G is **torsion free**, then so are $G \wr_m \mathbb{Z}$ and $G \wr_{m,n} \mathbb{Z}^2$.

Notes to the proof. Statements about centers, derived subgroups, and abelianization are proved in I. Kuznietsova and Yu. Soroka [31]. The latter statement about torsion free property of $G \wr_m \mathbb{Z}$ is established in [44, Lemma 2.2], and the same arguments can be used to prove it for $G \wr_{m,n} \mathbb{Z}^2$. □

2.7. Special short exact sequences. In what follows for $m, n \geq 1$ we will use the following short exact sequences:

$$\mathbf{z}_0 : \{1\} \hookrightarrow \{1\} \twoheadrightarrow \{1\}, \tag{2.5}$$

$$\mathbf{z}_1 : \mathbb{Z} \xrightarrow{\text{id}} \mathbb{Z} \twoheadrightarrow \{1\}, \tag{2.6}$$

$$\mathbf{z}_m : m\mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{\text{mod } m} \twoheadrightarrow \mathbb{Z}_m, \tag{2.7}$$

$$\mathbf{z}_{m,n} : m\mathbb{Z} \times n\mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \xrightarrow{(\text{mod } m, \text{mod } n)} \twoheadrightarrow \mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_n, \tag{2.8}$$

Then for a short exact sequence $\mathbf{q} : K \xrightarrow{\alpha} L \xrightarrow{\beta} \twoheadrightarrow M$ we have the following two exact (3×3) -diagram:

$$\begin{array}{ccccc} \mathbf{q}^m : & K^m \times 0 & \hookrightarrow & L^m \times 0 & \twoheadrightarrow & M^m \times 0 \\ \downarrow & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \mathbf{q} \wr \mathbf{z}_m : & K^m \times m\mathbb{Z} & \xrightarrow{\alpha'} & L \wr \mathbb{Z} & \xrightarrow{\beta'} & M \wr \mathbb{Z}_m \\ \downarrow & \downarrow & & \downarrow p' & & \downarrow \\ \mathbf{z}_m : & m\mathbb{Z} & \hookrightarrow & \mathbb{Z} & \twoheadrightarrow & \mathbb{Z}_m \end{array} \tag{2.9}$$

$$\begin{array}{ccccc} \mathbf{q}^{mn} : & K^{mn} \times 0 \times 0 & \hookrightarrow & L^{mn} \times 0 \times 0 & \twoheadrightarrow & M^{mn} \times 0 \times 0 \\ \downarrow & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \mathbf{q} \wr \mathbf{z}_{m,n} : & K^{mn} \times m\mathbb{Z} \times n\mathbb{Z} & \xrightarrow{\alpha''} & L \wr \mathbb{Z}^2 & \xrightarrow{\beta''} & M \wr (\mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_n) \\ \downarrow & \downarrow & & \downarrow p'' & & \downarrow \\ \mathbf{z}_{m,n} : & m\mathbb{Z} \times n\mathbb{Z} & \hookrightarrow & \mathbb{Z}^2 & \twoheadrightarrow & \mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_n \end{array} \tag{2.10}$$

where p' and p'' are the projection to the last coordinates, and

$$\begin{aligned} \alpha'(a_1, \dots, a_m, mk) &= (\alpha(a_1), \dots, \alpha(a_m), mk), \\ \beta'(b_1, \dots, b_m, k) &= (\beta(b_1), \dots, \beta(b_m), k \text{ mod } m) \\ \alpha''(\{a_{i,j}\}, mk, nl) &= (\{\alpha(a_{i,j})\}, mk, nl), \\ \beta''(\{b_{i,j}\}, k, l) &= (\{\beta(b_{i,j})\}, k \text{ mod } m, l \text{ mod } n), \end{aligned}$$

$\alpha_i \in K, \beta_i \in L$ for all $i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, n$, and $k, l \in \mathbb{Z}$. The middle horizontal sequences of both diagrams will be called the *wreath product of \mathbf{q} with \mathbf{z}_m and $\mathbf{z}_{m,n}$* and denoted by $\mathbf{q} \wr \mathbf{z}_m$ and $\mathbf{q} \wr \mathbf{z}_{m,n}^2$ respectively. Thus (2.9) and (2.10) can be written as short exact sequences of their rows:

$$\mathbf{q}^m \hookrightarrow \mathbf{q} \wr \mathbf{z}_m \twoheadrightarrow \mathbf{z}_m, \quad \mathbf{q}^{mn} \hookrightarrow \mathbf{q} \wr \mathbf{z}_{m,n} \twoheadrightarrow \mathbf{z}_{m,n} \tag{2.11}$$

Evidently,

$$\mathbf{q} \wr \mathbf{z}_{m,1}^2 \cong \mathbf{q} \wr \mathbf{z}_{1,m}^2,$$

$$\begin{aligned}
 \mathbf{q} \wr \mathbf{z}_1 &\cong \mathbf{q} \times \mathbf{z}_1 : K \times \mathbb{Z} \hookrightarrow L \wr \mathbb{Z} \equiv L \times \mathbb{Z} \twoheadrightarrow M, \\
 \mathbf{z}_k \wr \mathbf{z}_m &: (k\mathbb{Z})^m \times m\mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{Z} \wr_m \mathbb{Z} \twoheadrightarrow \mathbb{Z}_k \wr \mathbb{Z}_m, \\
 \mathbf{z}_k \wr \mathbf{z}_{m,n}^2 &: (k\mathbb{Z})^{mn} \times m\mathbb{Z} \times n\mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{Z} \wr_{m,n} \mathbb{Z}^2 \twoheadrightarrow \mathbb{Z}_k \wr (\mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_n).
 \end{aligned}$$

2.8. Garside elements. Let G be any group with unit e and $m \geq 1$. Then the element $\gamma = (\underbrace{e, \dots, e}_m, m) \in G \wr_m \mathbb{Z}$ will be called the *Garside element*.

By Lemma 2.6.1 γ belongs to the center of $G \wr_m \mathbb{Z}$.

2.8.1. Garside sequences. Let $\mathbf{q} : K \hookrightarrow L \twoheadrightarrow M$ be a short exact sequence and $m \geq 1$. For simplicity assume that K is a subgroup of L and let e be the common unit element of K and L . Consider the wreath product

$$\mathbf{q} \wr \mathbf{z}_m : K^m \times m\mathbb{Z} \hookrightarrow L \wr_m \mathbb{Z} \twoheadrightarrow M \wr \mathbb{Z}_m. \tag{2.12}$$

Then the Garside element $\gamma = (e, \dots, e, m)$ of $L \wr_m \mathbb{Z}$ belongs to $K^m \times m\mathbb{Z}$, and $\gamma^k = (e, \dots, e, km)$ for all $k \in \mathbb{Z}$. It follows that there exists the following exact (3×3) -diagram:

$$\begin{array}{ccccc}
 \mathbf{z}_1 & : & e^m \times m\mathbb{Z} & \equiv & e^m \times m\mathbb{Z} & \twoheadrightarrow & 1 \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 \mathbf{q} \wr \mathbf{z}_m & : & K^m \times m\mathbb{Z} & \hookrightarrow & L \wr_m \mathbb{Z} & \twoheadrightarrow & M \wr \mathbb{Z}_m \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \parallel \\
 \mathbf{q} \wr \mathbf{z}_m & : & K^{m\mathbb{Z}} & \hookrightarrow & L \wr \mathbb{Z}_m & \twoheadrightarrow & M \wr \mathbb{Z}_m
 \end{array} \tag{2.13}$$

in which the bottom row sequence will be denoted by $\mathbf{q} \wr \mathbf{z}_m$. The total sequence $\mathbf{z}_1 \hookrightarrow \mathbf{q} \wr \mathbf{z}_m \twoheadrightarrow \mathbf{q} \wr \mathbf{z}_m$ will be called the *Garside sequence of $\mathbf{q} \wr \mathbf{z}_m$* .

Similarly, for $m, n \geq 1$ one has analogous diagram

$$\begin{array}{ccccc}
 \mathbf{z}_1^2 & : & e^{mn} \times m\mathbb{Z} \times n\mathbb{Z} & \equiv & e^{mn} \times m\mathbb{Z} \times n\mathbb{Z} & \twoheadrightarrow & 1 \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 \mathbf{q} \wr \mathbf{z}_{m,n}^2 & : & K^{mn} \times m\mathbb{Z} \times n\mathbb{Z} & \hookrightarrow & L \wr_{m,n} \mathbb{Z}^2 & \twoheadrightarrow & M \wr (\mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_n) \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \parallel \\
 \mathbf{q} \wr \mathbf{z}_{m,n}^2 & : & K^{mn\mathbb{Z}} & \hookrightarrow & L \wr (\mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_n) & \twoheadrightarrow & M \wr (\mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_n)
 \end{array} \tag{2.14}$$

The total sequence $\mathbf{z}_1^2 \hookrightarrow \mathbf{q} \wr \mathbf{z}_{m,n}^2 \twoheadrightarrow \mathbf{q} \wr \mathbf{z}_{m,n}^2$ will be called the *Garside sequence of $\mathbf{q} \wr \mathbf{z}_{m,n}^2$* .

2.8.2. *Diagonal Garside sequences.* More generally, let $n \geq 1$, and for each $i = 1, \dots, n$ let $\mathbf{q}_i : K_i \hookrightarrow L_i \twoheadrightarrow M_i$, be a short exact sequence, $m_i \geq 1$, $\gamma_i \in L_i \wr_{m_i} \mathbb{Z}$ be the corresponding Garside element, and

$$\widehat{\gamma} = (\gamma_1, \dots, \gamma_n) \in \prod_{i=1}^n (K_i^{m_i} \times m_i \mathbb{Z})$$

be the “diagonal” element in the product of subgroups $K_i^{m_i} \times m_i \mathbb{Z}$ generated by the corresponding Garside elements. Then we have the following commutative diagram:

$$\begin{array}{ccc}
 \mathbf{z}_1 & : & \mathbb{Z} \xrightarrow{\quad \widehat{\gamma} \quad} \mathbb{Z} \twoheadrightarrow 1 \\
 \downarrow & & \downarrow \scriptstyle k \mapsto \langle \widehat{\gamma} \rangle^k = \langle \gamma_1^k, \dots, \gamma_n^k \rangle \quad \downarrow \\
 \prod_{i=1}^n \mathbf{q}_i \wr \mathbf{z}_m & : & \prod_{i=1}^n (K_i^{m_i} \times m_i \mathbb{Z}) \hookrightarrow \prod_{i=1}^n (L_i \wr_{m_i} \mathbb{Z}) \twoheadrightarrow \prod_{i=1}^n (M_i \wr \mathbb{Z}_{m_i}) \\
 \downarrow & & \downarrow \quad \quad \quad \downarrow \quad \quad \quad \parallel \\
 (\prod_{i=1}^n \mathbf{q}_i \wr \mathbf{z}_m) / \mathbf{z}_1 & : & \left(\prod_{i=1}^n (K_i^{m_i} \times m_i \mathbb{Z}) \right) / \langle \widehat{\gamma} \rangle \hookrightarrow \prod_{i=1}^n (L_i \wr_{m_i} \mathbb{Z}) / \langle \widehat{\gamma} \rangle \twoheadrightarrow \prod_{i=1}^n (M_i \wr \mathbb{Z}_{m_i})
 \end{array} \tag{2.15}$$

which will be called *diagonal Garside sequence of $\prod_{i=1}^n \mathbf{q}_i \wr \mathbf{z}_m$* .

2.8.3. *Several constructions.* For every group A one can associate two short exact sequences $\mathbf{s}(A) : A = A \twoheadrightarrow 1$ and $\mathbf{d}(A) : 1 \hookrightarrow A = A$.

Then for a pair $\mathbf{k} : A \hookrightarrow B \twoheadrightarrow C$ and $\mathbf{l} : P \hookrightarrow Q \twoheadrightarrow R$ of two exact sequences one can also define the following *split sequence of \mathbf{k} and \mathbf{l}* :

$$\begin{array}{ccc}
 \mathbf{s}(\mathbf{k}) \times \mathbf{d}(\mathbf{l}) : \mathbf{k} \hookrightarrow \mathbf{k} \times \mathbf{l} \twoheadrightarrow \mathbf{l} & & \\
 \mathbf{k} & : & A \hookrightarrow B \twoheadrightarrow C \\
 \downarrow & & \downarrow \quad \quad \quad \downarrow \quad \quad \quad \downarrow \\
 \mathbf{k} \times \mathbf{l} & : & A \times P \hookrightarrow B \times Q \twoheadrightarrow C \times R \\
 \downarrow & & \downarrow \quad \quad \quad \downarrow \quad \quad \quad \downarrow \\
 \mathbf{l} & : & P \hookrightarrow Q \twoheadrightarrow R
 \end{array}$$

Also for each short exact sequence $\mathbf{u} : A \hookrightarrow B \twoheadrightarrow C$ one can define the following exact (3×3) -diagram

$$\begin{array}{ccc}
 \mathbf{s}(A) & : & A \xlongequal{\quad} A \twoheadrightarrow 1 \\
 \downarrow & & \parallel \quad \downarrow \quad \downarrow \\
 \mathbf{u} & : & A \hookrightarrow B \twoheadrightarrow C \\
 \downarrow & & \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \\
 \mathbf{d}(A) & : & 1 \hookrightarrow C \xlongequal{\quad} C
 \end{array} \tag{2.16}$$

which can be viewed as a short exact sequence $\natural \mathbf{u} : \mathbf{s}(A) \hookrightarrow \mathbf{u} \twoheadrightarrow \mathbf{d}(C)$ of short exact sequences which will be denoted by $\natural \mathbf{u}$.

2.9. Characterization of $\mathbf{q}^m \hookrightarrow \mathbf{q} \wr \mathbf{z}_m \twoheadrightarrow \mathbf{z}_m$. Suppose we have a *short exact sequence* of short exact sequences $\mathbf{k} \hookrightarrow \mathbf{l} \twoheadrightarrow \mathbf{z}_m$:

$$\begin{array}{ccccc}
 \mathbf{k} : & K & \hookrightarrow & L & \twoheadrightarrow & M \\
 & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 \mathbf{l} : & A & \hookrightarrow & B & \xrightarrow{\rho} & C \\
 & \downarrow & & \downarrow \eta & & \downarrow \\
 \mathbf{z}_m : & m\mathbb{Z} & \hookrightarrow & \mathbb{Z} & \xrightarrow{\text{mod } m} & \mathbb{Z}_m
 \end{array} \tag{2.17}$$

in which K, A, L are normal subgroups of B and

$$A = \ker(\rho) = \eta^{-1}(m\mathbb{Z}), \quad L = \ker(\eta), \quad K = A \cap L. \tag{2.18}$$

Fix an element $g \in B$ and let $L_0 \subset L$ be a subgroup. Denote $K_0 = K \cap L_0$ and $M_0 = L_0/K_0$, so we get a short exact sequence $\mathbf{u} : K_0 \hookrightarrow L_0 \twoheadrightarrow M_0$.

Also let $L_i := g^{-i}L_0g^i$ and $K_i := g^{-i}K_0g^i$ for $i = 0, \dots, m - 1$. Then $L_i \subset L$ and $K_i \subset K$ since L and K are normal.

Lemma 2.9.1. [44, Lemma 2.3], cf.[30]. *Suppose that*

- (a) $\eta(g) = 1$ and g^m commutes with L ;
- (b) L splits into the product subgroups L_0, \dots, L_{m-1} , i.e. those subgroups generate L , pairwise commute, and $L_i \cap L_j = \{e\}$ for all $i \neq j$;
- (c) K_0, \dots, K_{m-1} generate K .

Then the map $\beta : L_0 \wr_m \mathbb{Z} \rightarrow B$ defined by

$$\begin{aligned}
 \beta(b_0, b_1, \dots, b_{m-1}, k) &= \\
 &= b_0 (g^{-1}b_1g^1) (g^{-2}b_2g^2) \cdots (g^{-m+1}b_{m-1}g^{m-1})g^k = \\
 &= b_0 g^{-1} b_1 \cdots g^{-1} b_{m-1} g^{-1+m+k},
 \end{aligned}$$

for $b_i \in L_0$, $i = 0, \dots, m - 1$, and $k \in \mathbb{Z}$, is an isomorphism of groups inducing an isomorphism of exact (3×3) -diagrams:

$$\begin{array}{ccccc}
 K_0^m \times 0 & \hookrightarrow & L_0^m \times 0 & \twoheadrightarrow & M_0^m \times 0 \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 K_0^m \times m\mathbb{Z} & \xrightarrow{\alpha'} & L_0 \wr_m \mathbb{Z} & \xrightarrow{\beta'} & M_0 \wr_m \mathbb{Z}_m \\
 \downarrow & & \downarrow p & & \downarrow \\
 m\mathbb{Z} & \hookrightarrow & \mathbb{Z} & \twoheadrightarrow & \mathbb{Z}_m
 \end{array} \xrightarrow[\cong]{\beta} \begin{array}{ccccc}
 K & \hookrightarrow & L & \twoheadrightarrow & M \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 A & \hookrightarrow & B & \xrightarrow{\rho} & C \\
 \downarrow & & \downarrow \eta & & \downarrow \\
 m\mathbb{Z} & \hookrightarrow & \mathbb{Z} & \twoheadrightarrow & \mathbb{Z}_m
 \end{array} \xrightarrow{\text{id}}$$

being identity on the lower sequence. In other words, we get an “**isomorphism over \mathbf{z}_m** ” of short exact sequences $\mathbf{u}^m \hookrightarrow \mathbf{u} \wr \mathbf{z}_m \twoheadrightarrow \mathbf{z}_m$ and $\mathbf{k} \hookrightarrow \mathbf{l} \twoheadrightarrow \mathbf{z}_m$.

2.10. **Characterization of $\mathbf{q}^{mn} \hookrightarrow \mathbf{q} \wr \mathbf{z}_{m,n} \twoheadrightarrow \mathbf{z}_{m,n}$.** Suppose we have a short exact sequence of short exact sequences $\mathbf{k} \hookrightarrow \mathbf{l} \twoheadrightarrow \mathbf{z}_{m,n}$:

$$\begin{array}{ccccc}
 \mathbf{k} : & K & \hookrightarrow & L & \twoheadrightarrow & M \\
 & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 \mathbf{l} : & A & \hookrightarrow & B & \xrightarrow{\rho} & C \\
 & \downarrow & & \downarrow \eta & & \downarrow \\
 \mathbf{z}_m : & m\mathbb{Z} \times n\mathbb{Z} & \hookrightarrow & \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} & \xrightarrow{\text{mod } m, \text{mod } n} & \mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_n
 \end{array} \tag{2.19}$$

in which K, A, L are normal subgroups of B and

$$A = \ker(\rho) = \eta^{-1}(m\mathbb{Z} \times n\mathbb{Z}), \quad L = \ker(\eta), \quad K = A \cap L. \tag{2.20}$$

Let $L_0 \subset L$ be a subgroup, $K_0 = K \cap L_0$ and $M_0 = L_0/K_0$, so we get a short exact sequence $\mathbf{u} : K_0 \hookrightarrow L_0 \twoheadrightarrow M_0$. Fix also two elements $g, h \in B$ and for $i = 0, \dots, m - 1, j = 0, \dots, n - 1$ put

$$K_{i,j} := g^i h^j K_0 h^{-j} g^{-i}, \quad L_{i,j} := g^i h^j L_0 h^{-j} g^{-i}.$$

Then $K_{i,j} \subset K$ and $L_{i,j} \subset L$ since K and L are normal. The following lemma can be proved similarly to Lemma 2.9.1.

Lemma 2.10.1. *Suppose that*

- (a) $gh = hg, \eta(g) = (1, 0), \eta(h) = (0, 1)$, and both g^m and h^n commute with L ;
- (b) L splits into the product subgroups $\{L_{i,j}\}$, i.e. those subgroups generate L , pairwise commute, and $L_{i,j} \cap L_{i',j'} = \{e\}$ for all $(i, j) \neq (i', j')$;
- (c) $\{K_{i,j}\}$ generate K .

Then the map $\beta : L_0 \wr_{m,n} \mathbb{Z}^2 \rightarrow B$ defined by

$$\beta(\{b_{i,j}\}, k, l) = \left(\prod_{i,j} g^i h^j b_{i,j} h^{-j} g^{-i} \right) \cdot g^k h^l,$$

for $b_{i,j} \in L_0, i = 0, \dots, m - 1, j = 0, \dots, n - 1$, and $k, l \in \mathbb{Z}$, is an isomorphism of groups inducing an isomorphism of the following exact (3×3) -diagram:

$$\begin{array}{ccccc}
 \mathbf{u}^m & & K_0^m \times 0 \times 0 & \hookrightarrow & L_0^m \times 0 \times 0 & \twoheadrightarrow & M_0^m \times 0 \times 0 \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 \mathbf{u} \wr \mathbf{z}_{m,n} & & K_0^m \times m\mathbb{Z} \times n\mathbb{Z} & \xrightarrow{\alpha'} & L_0 \wr_{m,n} \mathbb{Z}^2 & \xrightarrow{\beta'} & M_0 \wr (\mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_n) \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow p & & \downarrow \\
 \mathbf{z}_{m,n} & & m\mathbb{Z} \times n\mathbb{Z} & \hookrightarrow & \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} & \twoheadrightarrow & \mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_n
 \end{array}$$

to the diagram (2.19) and that isomorphism is the identity on the lower rows. In other words, we get an “**isomorphism over $\mathbf{z}_{m,n}$** ” of short exact sequences

$$\mathbf{u}^m \hookrightarrow \mathbf{u} \wr \mathbf{z}_{m,n} \twoheadrightarrow \mathbf{z}_{m,n} \quad \text{and} \quad \mathbf{k} \hookrightarrow \mathbf{l} \twoheadrightarrow \mathbf{z}_{m,n}.$$

3. HOMOGENEOUS POLYNOMIALS WITHOUT MULTIPLE FACTORS

The fundamental theorem of algebra implies that every real homogeneous polynomial $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ is a product of finitely many linear $L_i = a_i x + b_i y$ and irreducible over \mathbb{R} quadratic factors $Q_j(x, y) = c_j x^2 + 2d_j xy + e_j y^2$:

$$g(x, y) = \prod_{i=1}^p L_i(x, y) \cdot \prod_{j=1}^q Q_j(x, y).$$

Evidently, g has critical points if and only if $\deg g \geq 2$. Moreover, if g has two proportional linear factors, that is $L_i = sL_j$ for some $i \neq j$ and $s \neq 0$, then all the line $L_i = 0$ consists of critical points of g . This implies that *the origin $0 \in \mathbb{R}^2$ is a unique critical point of g iff $\deg g \geq 2$ and g has no multiple linear factors.*

In the latter case the number p of linear factors can be seen from the topological structure of level sets of g , see Figure 3.1.

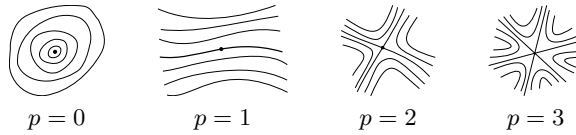


FIGURE 3.1. Topological structure of level-sets of homogeneous polynomials without multiple factors

We will say that $0 \in \mathbb{R}^2$ is

- a *non-degenerate extreme* if $p = 0$ and $q = 1$, so $g = Q_1$;
- a *degenerate extreme* if $p = 0$ and $q \geq 2$, so $g = Q_1 Q_2 \cdots Q_q$;
- a *quasi saddle* if $p = 1$, so $g = L_1 \cdot Q_1 \cdots Q_q$;
- a *non-degenerate saddle* if $p = 2$ and $q = 0$, so $g = L_1 L_2$;
- a *saddle* if $p \geq 2$ and $\deg g = p + 2q \geq 3$.

3.1. Symmetries. Let $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ be a homogeneous polynomial without multiple factors. Let also $\mathcal{S}(g)$ be the group of *germs* at $0 \in \mathbb{R}^2$ of *diffeomorphisms* $h : (\mathbb{R}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^2, 0)$ such that $g \circ h = g$, and $\mathcal{L}(g) \subset \text{GL}(\mathbb{R}, 2)$ be the group of *linear isomorphisms* $A : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ which also preserve g , that is $g(Ax) = g(x)$ for all $x \in \mathbb{R}^2$. Then $\mathcal{L}(g)$ can be regarded as a subgroup of $\mathcal{S}(g)$.

Let $h \in \mathcal{S}(g)$, and $A = J(h)$ be its Jacobi matrix at 0. Since g is homogeneous, say of degree k , the identity $g \circ h = g$ easily implies that $g(Ax) = g(x)$ for all $x \in \mathbb{R}^2$, [32, Lemma 36]:

$$g(x) = \frac{g(tx)}{t^k} = \frac{g(h(tx))}{t^k} = g\left(\frac{h(tx)}{t}\right) \xrightarrow{t \rightarrow 0} g(Ax).$$

In other words, *if a diffeomorphism preserves a homogeneous polynomial g , then its Jacobi matrix at 0 also preserves g* . Hence we get a natural homomorphism:

$$J : \mathcal{S}(g) \rightarrow \mathcal{L}(g), \quad h \mapsto J(h).$$

Since for a linear map given by a matrix A its Jacobi matrix is A , we see that J is the identity on $\mathcal{L}(g)$. In other words, J is a *retraction* of $\mathcal{S}(g)$ onto $\mathcal{L}(g)$, and in particular it is *surjective*.

Let also $\mathcal{L}^+(g) = \mathcal{L}(g) \cap \text{GL}^+(\mathbb{R}, 2)$ and $\mathcal{S}^+(g)$ be the subgroup of $\mathcal{S}(g)$ consisting of orientation preserving germs. Then

$$J(\mathcal{S}^+(g)) = \mathcal{L}^+(g).$$

Lemma 3.1.1. [37, Lemma 6.2]. *After a proper linear change of coordinates in \mathbb{R}^2 and replacing (if necessary) g with $-g$, one can assume that the following properties hold.*

- (a) *Suppose $0 \in \mathbb{R}^2$ is a **non-degenerate local extreme**, i.e. $\deg g = 2$, and g is an irreducible quadratic form. Then*

$$g(x, y) = x^2 + y^2, \quad \mathcal{L}(g) = O(2), \quad \mathcal{L}^+(g) = SO(2).$$

- (b) *If $0 \in \mathbb{R}^2$ is a **non-degenerate saddle**, so $\deg g = 2$, and g is a product of two independent linear factors, then $g(x, y) = xy$,*

$$\mathcal{L}(g) = \{\pm \begin{pmatrix} t^{-1} & 0 \\ 0 & t \end{pmatrix} \mid t \neq 0\}, \quad \mathcal{L}^+(g) = \{\begin{pmatrix} t^{-1} & 0 \\ 0 & t \end{pmatrix} \mid t \neq 0\}.$$

- (c) *Finally, assume that $0 \in \mathbb{R}^2$ is a **degenerate critical point** of g , so $\deg g \geq 3$. Then*

- (a) $\mathcal{L}^+(g)$ *is a finite cyclic subgroup of $SO(2)$ of some order $m \geq 1$ generated by the rotation by $\frac{2\pi}{m}$;*
- (b) $\mathcal{L}(g)$ *either coincides with $\mathcal{L}^+(g)$ or it is a dihedral group \mathbb{D}_m of order $2m$ generated by $\mathcal{L}^+(g)$ and the reflection $(x, y) \mapsto (-x, y)$;*
- (c) *if $\deg g$ is even, e.g. z is a **degenerate local extreme**, then m is always even, since $\mathcal{L}^+(g)$ contains the map $q(x, y) = (-x, -y)$.*

Remark 3.1.2. Statements (a) and (c) of Lemma 3.1.1 indicate an essential difference between diffeomorphisms preserving degenerate and non-degenerate local extremes. Suppose we have a continuous family

$$h_t = (p_t, q_t) : (\mathbb{R}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^2, 0), \quad t \in [0, 1],$$

of germs of diffeomorphisms preserving a homogeneous polynomial $g(x, y)$, such that this family defines a continuous path in $\mathcal{S}^+(g)$ “with respect to at least \mathcal{C}^1 topology”, which mean that the Jacobi matrices $J(h_t)$ are continuous in t .

If, for example, $g(x, y) = x^2 + y^2$, so $p_t(x, y)^2 + q_t(x, y)^2 \equiv x^2 + y^2$, then *the matrices $J(h_t)$ can be arbitrary rotations*. On the other hand, if $g(x, y) = x^4 + y^4$, i.e. $p_t(x, y)^4 + q_t(x, y)^4 \equiv x^4 + y^4$, then there are only finitely many possibilities for $J(h_t)$. Actually, in this case $J(h_t)$ can only be a rotation by $\frac{k\pi}{2}$ for $k = 0, 1, 2, 3$. Therefore continuity of $J(h_t)$ in t implies that now $J(h_t)$ *must be the same for all $t \in [0, 1]$* .

3.2. Symmetry index of a degenerate local extreme. Suppose that $0 \in \mathbb{R}^2$ is a degenerate local extreme of g , as in the in the case 3(c) of Lemma 3.1.1. The order m of the cyclic group $\mathcal{L}(g)$ will be called the *symmetry index* of $0 \in \mathbb{R}^2$.

Example 3.2.1. Let

$$g(x, y) = x^4 + y^4 = (x^2 + \sqrt{2}xy + y^2)(x^2 - \sqrt{2}xy + y^2).$$

Then $\mathcal{L}^+(g) \cong \mathbb{Z}_4$ is generated by rotation by $\pi/2$: $r(x, y) = (-y, x)$, and $\mathcal{L}(g)$ is isomorphic to the dihedral group \mathbb{D}_4 generated by r and the reflection $s(x, y) = (-x, y)$. Thus here $m = 4$.

3.3. Framings at a degenerate local extreme. Let $v \in T_0\mathbb{R}^2 = \mathbb{R}^2$ be a non-zero tangent vector at $0 \in \mathbb{R}^2$. Then its orbit

$$\Phi(0, v) = \{T_0h(v) \mid h \in \mathcal{S}(g)\}$$

with respect to $\mathcal{L}(g)$, and thus with respect to $\mathcal{S}(g)$, consists of either $2m$ or m vectors that are cyclically order, see Figure 4.2.

This set $\Phi(0, v)$ will be called a *framing* at $0 \in \mathbb{R}^2$, whenever either of the following equivalent conditions hold:

- (a) the action of $\mathcal{L}(g)$ to $\Phi(0, v)$ is *effective*, i.e. there is a non-unit element $A \in \mathcal{L}(g)$ fixed on $\Phi(0, v)$;
- (b) if $h \in \mathcal{S}(g)$ is such that $T_0h(w) = w$ for all $w \in \Phi(0, v)$, then $T_0h = \text{id}_{\mathbb{R}^2}$.

Roughly speaking the elements of $\mathcal{L}(g)$ can be distinguished by their action on the finite set $\Phi(0, v)$.

Example 3.3.1. Let $g(x, y) = (x^2 + y^2)(x^2 + 2y^2)$. Then $\mathcal{L}^+(g) \cong \mathbb{Z}_2$ is generated by $-\text{id}_{\mathbb{R}^2}$, while $\mathcal{L}(g)$ is the dihedral group $\mathbb{D}_2 \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ generated by $-\text{id}_{\mathbb{R}^2}$ and the reflection $s(x, y) = (-x, y)$. Here $m = 2$. Also, if $v = (0, 1) \in \mathbb{R}^2$, then $\Phi(0, v) = \{\pm v\}$ is not a framing, since s trivially acts on $\Phi(0, v)$. For any other vector $w \in \mathbb{R}^2$ which is not collinear to v , its orbit $\Phi(0, w)$ is a framing.

Example 3.3.2. Let $g(x, y) = (x^2 + y^2)(3x^2 + 2y^2)(x^2 + xy + y^2)$. Then $\mathcal{L}(g) = \mathcal{L}^+(g) \cong \mathbb{Z}_2$ is generated by $-\text{id}_{\mathbb{R}^2}$. Here $m = 2$ as well and for any non-zero vector $w \in \mathbb{R}^2$ its orbit $\Phi(0, w)$ is a framing.

The following easy lemma shows that one can always choose v so that $\Phi(0, v)$ is a framing.

Lemma 3.3.3. *The set $\Phi(0, v)$ is **not a framing** iff the following two conditions hold:*

- (a) $\mathcal{L}(g)$ is the dihedral group $\mathbb{D}_2 \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$, so $m = 2$;
- (b) v is fixed under the reflection from $\mathcal{L}(g)$.

4. SPACE OF MAPS $\mathcal{F}(M, P)$

In this section we will describe several properties of maps belonging to $\mathcal{F}(M, P)$. Recall that by definition a map $f : M \rightarrow P$ belongs to $\mathcal{F}(M, P)$ if it satisfies axioms (B) and (L).

In the case when $P = S^1$ one can also say about local extremes of f , and even about local minimums or maximums if we fix an orientation of S^1 . Moreover, since S^1 is a group \mathbb{R}/\mathbb{Z} , one can say about neighborhoods of a point $c \in S^1$ of the form $(c - \varepsilon; c + \varepsilon)$ for small $\varepsilon > 0$.

First we will study structure of maps from $\mathcal{F}(M, P)$ at their critical points.

4.1. Smooth functions on the plane with isolated critical points.

Let $g : \mathbb{R}^2 \cong \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$ be a C^∞ function such that $0 \in \mathbb{C}$ is an isolated critical point and $g(0) = 0$. Then there are germs of homeomorphisms $h : (\mathbb{C}, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ and $\phi : (\mathbb{R}, 0) \rightarrow (\mathbb{R}, 0)$ such that

$$\phi \circ g \circ h(z) = \begin{cases} |z|^2, & \text{if } 0 \in \mathbb{C} \text{ is a local extreme of } f, [4], \\ \text{Re}(z^m), & \text{otherwise, [3, 49].} \end{cases} \quad (4.1)$$

In particular, critical points of homogeneous polynomials without multiple factors cover all possible topological types of isolated critical points of maps $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$.

4.2. f -adapted subsurfaces. Now let $f \in \mathcal{F}(M, P)$. As mentioned above condition (L) implies that each critical point of $z \in \Sigma_f$ of f is isolated.

A connected component K of a level-set $f^{-1}(c)$, $c \in P$, will be called a *leaf* (of f). We also call K *regular* if it contains no critical points, and *critical* otherwise.

Evidently, a regular leaf of f is a submanifold of M diffeomorphic to the circle. On the other hand, it follows from Axiom (L), (see also Figure 3.1) that a critical leaf K has a structure of a 1-dimensional CW-complex whose 0-cells are critical points of f belonging to K . Notice that if K contains

only quasi-saddles of f , see Figure 3.1 b), then it is a smooth submanifold of M diffeomorphic to the circle, however it is still *critical* as a leaf of f .

Let K be a (regular or critical) leaf of f . For $\varepsilon > 0$ let N_ε be the connected component of $f^{-1}[c - \varepsilon, c + \varepsilon]$ containing K . Then N_ε will be called an *f-regular neighborhood of K* if ε is so small that $N_\varepsilon \setminus K$ contains no critical points of f and no boundary components of ∂M .

A submanifold $V \subset M$ will be called *f-adapted* if $V = \bigcup_{i=1}^a A_i$, where each A_i is either a critical point of f or a regular leaf of f or an *f-regular neighborhood of some (regular or critical) leaf of f* . We will denote by $V^{(i)}$, $i = 0, 1, 2$, the union of connected components of V of dimension i .

Notice that if V is an *f-adapted subsurface*, then $f|_V : V \rightarrow P$ satisfies Axioms (B) and (L), that is $f|_V \in \mathcal{F}(V, P)$.

4.3. Graph of $f \in \mathcal{F}(M, P)$. Consider the partition Γ_f of M into the leaves of f , and let $p : M \rightarrow \Gamma_f$ be the natural map associating to each $x \in M$ the corresponding element of Γ_f containing x . Endow Γ_f with the quotient topology, so a subset (a collection of leaves) $A \subset \Gamma_f$ is open iff $p^{-1}(A)$ (that is their union) is open in M . It follows from axioms (B) and (L) that Γ_f has a natural structure of 1-dimensional CW-complex, whose 0-cells correspond to boundary components of M and critical leaves of f . We will call Γ_f the *graph of f* .

Since by definition f takes constant values on elements of Γ_f , it induces a function $\hat{f} : \Gamma_f \rightarrow P$ such that $f = \hat{f} \circ p$, see Figure 4.1.

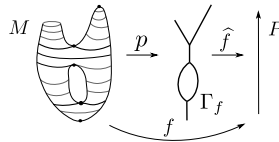


FIGURE 4.1.

Remark 4.3.1. This graph was independently introduced in the papers by G. Adelson-Welsky and A. Kronrod [1], and G. Reeb [50], and often called *Kronrod-Reeb* or *Reeb graph of f* . It is a useful tool for understanding the topological structure of smooth functions on surfaces, e.g. [22], [2]. It plays as well an important role in a theory of dynamical systems on manifolds and called *Lyapunov graph of f* following J. Frank [5, 6, 13, 54]. The reason is that for generic Morse maps Γ_f can be embedded into M , so that f will be monotone on its edges.

Remark 4.3.2. Notice that if M is a torus or a Klein bottle, then there exists a locally trivial fibrations $f : M \rightarrow S^1$, see maps (D) and (E) in

Theorem 5.2.2. Such a map has no critical points and so $f \in \mathcal{F}(M, S^1)$. Evidently, the graph Γ_f of f is a circle and it has no “vertices” that correspond to critical leaves. In this case we assume that Γ_f consists of one edge (homeomorphic to the circle) and has no vertices.

Lemma 4.3.3. *The induced maps $p_1 : H_1(M, \mathbb{Z}) \rightarrow H_1(\Gamma_f, \mathbb{Z})$ of homology groups is surjective and if $H_1(M, \mathbb{Z}) \neq 0$, always have a non-trivial kernel. Therefore if $M = S^2, D^2, S^1 \times [0, 1], \mathbb{R}P^2, \text{Möbius band}$, then Γ_f is a tree. If $M = T^2$ or Klein bottle, then Γ_f is either a tree or has a unique cycle.*

Denote by $\mathcal{H}(\Gamma_f)$ the group of homeomorphisms of Γ_f . Then for each $h \in \mathcal{S}(f)$ the identity $f \circ h = f$ implies that $h(f^{-1}(c)) = f^{-1}(c)$ for all $c \in P$. Thus h leaves invariant every level set of f , and in particular induces a certain permutation $\rho(h)$ of connected components of $f^{-1}(c)$, i.e. leaves of f being in turn points of Γ_f . On other words, we get a map $\rho(h) : \Gamma_f \rightarrow \Gamma_f$. One can easily check that $\rho(h)$ is a *homeomorphism* of Γ_f making commutative the following diagram:

$$\begin{array}{ccccc}
 M & \xrightarrow{p} & \Gamma_f & \xrightarrow{\hat{f}} & P \\
 h \downarrow & & \downarrow \rho(h) & \hat{f} & \parallel \\
 M & \xrightarrow{p} & \Gamma_f & \xrightarrow{\hat{f}} & P
 \end{array} \tag{4.2}$$

Moreover, the correspondence $h \mapsto \rho(h)$ is a *homomorphism* of groups

$$\rho : \mathcal{S}(f) \rightarrow \mathcal{H}(\Gamma_f). \tag{4.3}$$

4.4. Enhanced graph of $f \in \mathcal{F}(M, P)$. In order to encode an information coming from *degenerate local extremes* of f , see Remark 3.1.2, we will add to Γ_f new edges corresponding to framings at such points.

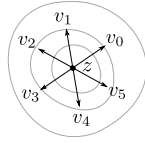
Let z be a *degenerate* local extreme of f and $v \in T_zM$, and

$$\Phi(z, v) = \{T_z h(v) \mid h \in \mathcal{S}(f, z)\} \subset T_zM$$

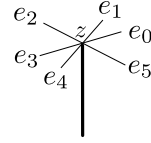
be its orbit with respect to the action of $\mathcal{S}(f, z)$. Similarly, to §3.3, we will say that $\Phi(z, v)$ is a *framing at z* if for every $h \in \mathcal{S}(f, z)$ such that h fixes each element from $\Phi(z, v)$ the tangent map $T_z h : T_zM \rightarrow T_zM$ is the identity.

Let $z_i, (i = 1, \dots, l)$, be all the *degenerate* local extremes of f , and $\Phi_i = \Phi(z_i, v_0^i)$ be some framing at z_i containing k_i edges. We will say that such a collection of framings $\Phi = \{\Phi_i\}_{i=1, \dots, l}$ is *f -adapted*, if it is invariant with respect to $\mathcal{S}(f)$, that is if $h \in \mathcal{S}(f)$ and $h(z_i) = z_j$ for some i, j , then $T_{z_i} h(\Phi_i) = \Phi_j$. One easily checks, that *f -adapted* framings always exist, [40, Corolary 1].

Thus $\mathcal{S}(f)$ naturally acts on Γ_f as well as on each *f -adapted* framing Φ via the corresponding differentials of maps. We want to “join” these actions.



a) Framing at a degenerate local extreme with symmetry index $m = 6$



b) Enhanced graph

FIGURE 4.2.

Regard every point $z_i, i = 1, \dots, l$, as a vertex of Γ_f of degree 1, and glue to this vertex k_i edges $e_0^i, \dots, e_{k_i-1}^i$ corresponding to the vectors in the corresponding framing $\Phi(z_i, v_0^i)$, see Figure 4.2b). The obtained graph will be denoted by $\widehat{\Gamma}_f$ and called the *enhanced* graph of f .

One can assume that each new edge has length 1. Then the action of $\mathcal{S}(f)$ on Γ_f extends to a unique action of $\mathcal{S}(f)$ on $\widehat{\Gamma}_f$ so that each $h \in \mathcal{S}(f)$ interchanges edges (via length preserving maps) of $\widehat{\Gamma}_f \setminus \Gamma_f$ in the same way as its tangent map Th interchanges vectors in the f -adapted framing Φ .

4.5. **Action of $\mathcal{S}(f)$ on $\widehat{\Gamma}_f$.** The previous paragraphs means that the homomorphism (4.3) extends to a homomorphism

$$\rho : \mathcal{S}(f) \rightarrow \mathcal{H}(\widehat{\Gamma}_f). \tag{4.4}$$

associating to each $h \in \mathcal{S}(f)$ the induced homeomorphism of $\widehat{\Gamma}_f$. Let

$$\Delta(f) = \ker(\rho), \quad \mathcal{G}(f) = \rho(\mathcal{S}(f)), \quad \mathcal{G}(f, V) = \rho(\mathcal{S}(f, V)),$$

where V is any f -adapted submanifold. Then, we obtain the following short exact sequence:

$$\mathbf{b}(f, V) : \Delta(f, V) \hookrightarrow \mathcal{S}(f, V) \twoheadrightarrow \mathcal{G}(f, V). \tag{4.5}$$

Evidently, $h \in \mathcal{S}(f)$ belongs to $\Delta(f)$ if and only if

- h preserves every leaf of f ;
- and for every *degenerate local extreme* z (being also a critical leaf) of f the corresponding tangent map $T_z h : T_z M \rightarrow T_z M$ of h at z is the identity.

For an f -adapted submanifold V let

$$\Delta'(f, V) = \Delta(f) \cap \mathcal{D}_{\text{id}}(M, V), \tag{4.6}$$

$$\mathcal{S}'(f, V) = \mathcal{S}(f) \cap \mathcal{D}_{\text{id}}(M, V), \tag{4.7}$$

$$\mathcal{G}'(f, V) = \rho(\mathcal{S}'(f, V)). \tag{4.8}$$

Lemma 4.5.1. e.g. [21, Lemma 2.2] *The group $\mathcal{G}(f, V)$ is finite. Moreover, if f is a generic Morse map, then $\mathcal{G}'(f, V)$ is trivial.*

Lemma 4.5.2 ([44, Lemma 4.1]). $\mathcal{S}_{\text{id}}(f, V)$ is the identity path component of $\Delta'(f, V)$. Therefore $\Delta'(f, V)$ is a disjoint union of some path components of $\mathcal{S}'(f, V)$, and the inclusion $\Delta'(f, V) \subset \mathcal{S}'(f, V)$ induces a monomorphism

$$\pi_0 \Delta'(f, V) \hookrightarrow \pi_0 \mathcal{S}'(f, V),$$

whence

$$\mathcal{G}'(f, V) \cong \frac{\mathcal{S}'(f, V)}{\Delta'(f, V)} \cong \frac{\pi_0 \mathcal{S}'(f, V)}{\pi_0 \Delta'(f, V)}. \tag{4.9}$$

It follows from (4.9) that we have another short exact sequence

$$\mathbf{b}'(f, V) : \pi_0 \Delta'(f, V) \hookrightarrow \pi_0 \mathcal{S}'(f, V) \twoheadrightarrow \mathcal{G}'(f, V). \tag{4.10}$$

This sequence will be called the *Biebarbach sequence of the pair* (f, V) . It plays the main role in our considerations.

4.6. Simplification results. The following Lemmas 4.6.1 and 4.6.2 reduce computation of $\mathbf{b}'(f, V)$ to the case when M is connected and V consists of critical points of f and boundary components of M . Let R_V be a f -regular neighborhood of V .

Lemma 4.6.1. ([44, Corollary 7.2]) *The natural inclusions of pairs*

$$(\mathcal{S}(f, R_V), \Delta(f, R_V)) \subset (\mathcal{S}(f, V), \Delta(f, V)), \tag{4.11}$$

$$(\mathcal{S}'(f, R_V), \Delta'(f, R_V)) \subset (\mathcal{S}'(f, V), \Delta'(f, V)), \tag{4.12}$$

are homotopy equivalences, and therefore they induce isomorphisms of the corresponding sequences:

$$\mathbf{b}(f, R_V) \cong \mathbf{b}(f, V), \quad \mathbf{b}'(f, R_V) \cong \mathbf{b}'(f, V).$$

Lemma 4.6.2 (cf. [44, Lemma 5.2]). *Let X_1, \dots, X_k all the connected components of $\overline{M} \setminus R_V$, and $X_i^\partial := X_i \cap R_V$, $i = 1, \dots, k$, so X_i^∂ consists of some common boundary components of X_i and R_V . Then the natural homomorphism*

$$\alpha : \mathcal{D}_{\text{id}}(M, V) \rightarrow \prod_{i=1}^k \mathcal{D}_{\text{id}}(X_i, X_i^\partial), \quad \alpha(h) = (h|_{X_1}, \dots, h|_{X_k}),$$

induces an isomorphism $\mathbf{b}'(f, V) \cong \prod_{i=1}^k \mathbf{b}'(f|_{X_i}, X_i^\partial)$.

If M contains no connected components M_1 and M_2 that are diffeomorphic each other and do not intersect V , then we also have an isomorphism

$$\mathbf{b}(f, V) \cong \prod_{i=1}^k \mathbf{b}(f|_{X_i}, X_i^\partial).$$

Notes to the proof. In fact, Lemma 5.2 in [44] *wrongly* states that we always have an isomorphism of sequences $\mathbf{b}(f, V) \cong \prod_{i=1}^k \mathbf{b}(f|_{X_i}, X_i^\partial)$. The gap is in the claim that the map $\alpha : \mathcal{D}(M, U) \rightarrow \prod_{i=1}^k \mathcal{D}(X_i, U_i)$ given by the same formula $\alpha(h) = (h|_{X_1}, \dots, h|_{X_k})$ is *well-defined*, where U_i is a f -regular neighborhood of X_i^∂ in X_i , and $U = \cup_{i=1}^k U_i$.

Indeed, the definition of α assumes that every $h \in \mathcal{D}(M, U)$ leaves invariant each connected component of M . However, it might happen that M has two diffeomorphic connected components M_1 and M_2 which do not intersect U . Then α is not-defined for a diffeomorphism of M interchanging M_1 and M_2 and fixed on $M \setminus (M_1 \cup M_2)$.

Nevertheless, the statement about isomorphism of \mathbf{b}' -sequences remains true, since every isotopic to the identity diffeomorphism preserves every connected component. \square

The following lemma allows to cut an f -adapted collar of some boundary component of M .

Lemma 4.6.3. ([44, Theorem 5.5(3)]) *Let M be a not necessarily orientable connected compact surface, $f \in \mathcal{F}(M, P)$, and V be a connected component of ∂M . Suppose there exists a regular component W of some level set of f separating M and let B and A be the connected components of $\overline{M \setminus W}$. Assume that $V \subset A$ and let $X \subset B \setminus W$ be an f -adapted submanifold, see Figure 4.3. Suppose A is an **annulus** and $h(A) = A$ for all $h \in \mathcal{S}(f, X \cup V)$.*

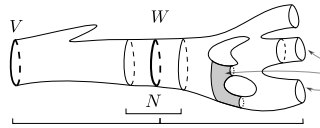


FIGURE 4.3.

Then we have the following homotopy equivalence:

$$\mathcal{S}(f, X \cup V) \cong \mathcal{S}(f|_B, X \cup W) \times \mathcal{S}'(f|_A, \partial A)$$

which induces the homotopy equivalence

$$\mathcal{S}'(f, X \cup V) \cong \mathcal{S}'(f|_B, X \cup W) \times \mathcal{S}'(f|_A, \partial A)$$

and homotopy equivalences between the corresponding Δ - and Δ' -groups. In particular, we get isomorphisms of short exact sequences:

$$\begin{aligned} \mathbf{b}(f, X \cup V) &\cong \mathbf{b}(f|_B, X \cup W) \times \mathbf{b}'(f|_A, \partial A), \\ \mathbf{b}'(f, X \cup V) &\cong \mathbf{b}'(f|_B, X \cup W) \times \mathbf{b}'(f|_A, \partial A). \end{aligned} \tag{4.13}$$

Moreover, if B is either a 2-disk or an annulus and $X = \emptyset$, then

$$\mathbf{b}'(f, \partial M) \cong \mathbf{b}'(f|_B, \partial B) \times \mathbf{b}'(f|_A, \partial A). \tag{4.14}$$

4.7. Structure of $\pi_0\Delta(f, V)$. Fix a possibly empty collection V of boundary components of M .

Let e be an (open) edge of Γ_f , and $x \in e$ be a point, so it corresponds to a regular leaf γ of f in $\text{Int}M$. Then there exists a Dehn twist $\tau_\gamma \in \Delta(f)$ along γ supported in f -regular neighborhood of γ which does not intersect ∂M . We will call a *Dehn twist around the edge e* and also denote by τ_e .

Notice that by definition τ_e is fixed on $\partial M \supset V$. Then its isotopy class in $\pi_0\Delta(f, V)$ will be denoted by $[\tau_e]$. Since for distinct edges e, e' their Dehn twists τ_e and $\tau_{e'}$ have disjoint supports, we obtain that τ_e and $\tau_{e'}$ commute. Hence their isotopy classes $[\tau_e]$ and $[\tau_{e'}]$ in $\pi_0\Delta(f, V)$ also commute.

Let also v_0, v_1 be the vertices of e , and $K_i = p^{-1}(v_i)$, $i = 0, 1$, be the corresponding leaves of f . Then each K_i is either a critical leaf of f or a boundary component of M . We will say that e (as well as the corresponding Dehn twist τ_e is *internal for V* if each K_i is one of following leaves:

- either a degenerate local extreme,
- or contains a saddle point of f ,
- or is contained in V .

Otherwise e is *external with respect to V* .

Lemma 4.7.1. (e.g. [34, Theorem 6.2]) *Let V be a possibly empty collection of boundary components of M .*

- (1) *An edge e of Γ_f is **external**, if and only if $\tau_e \in \mathcal{S}_{\text{id}}(f)$.*
- (2) *Suppose K is a Klein bottle, and $f : K \rightarrow S^1$ is a map without critical points, see map (E) in Theorem 5.2.2. Then there exists an isotopy $H : K \times [0, 1] \rightarrow K$ such that $H_0 = \text{id}_K$ and $H_1 \in \Delta'(f)$ preserves each leaf of f and reverses its orientation. In this case $\pi_0\Delta'(f, V) \cong 0$ and $\pi_0\Delta(f, V) \cong \mathbb{Z}_2$.*
- (3) *In all other cases $\pi_0\Delta(f, V)$ is a free abelian group freely generated by internal for V Dehn twists, so $\pi_0\Delta(f, V) \cong \mathbb{Z}^k$. Hence $\pi_0\Delta'(f, V)$ is also a free abelian group generated by **relations between internal Dehn twists in $\pi_0\mathcal{D}(M, V)$** .*

5. HOMOTOPY TYPES OF STABILIZERS AND ORBITS

In this section we assume that M is a compact surface, $f \in \mathcal{F}(M, P)$, and V is f -adapted submanifold. We will expose the results about homotopy types of $\mathcal{S}(f, V)$ and orbits of $\mathcal{O}(f, V)$. Everywhere the sign \simeq means “*homotopy equivalent*”. For a set V we will denote by $|V|$ the number of points in V if it is finite, and ∞ otherwise.

Theorem 5.1 ([34, 51]). (1) *The natural map into the orbit*

$$\mathfrak{p} : \mathcal{D}(M, V) \rightarrow \mathcal{O}(f, V), \quad \mathfrak{p}(h) = f \circ h$$

is a locally trivial principal $\mathcal{S}(f, V)$ -fibration.

- (2) *The restriction $\mathfrak{p} : \mathcal{D}_{\text{id}}(M, V) \rightarrow \mathcal{O}_f(f, V)$ is a locally trivial principal $\mathcal{S}'(f, V)$ -fibration.*
- (3) $\mathcal{O}_f(f, V) = \mathcal{O}_f(f, V \cup X)$ *for any collection X of boundary components of M .*
- (4) $\mathcal{O}_f(f)$ *is a Frèchet manifold, whence (by [48]) it has a homotopy type of a CW-complex.*

Notices to the proof. Statements (2) and (3) are simple consequences of (3) (see [43, Corollary 2.1]). Statements (1) and (4) were proved by F. Sergeraert [51] for functions $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ of the so-called *finite codimension* on a closed manifolds M and $V = \emptyset$. Further it was extended to a more general context of tame actions of *tame Lie groups on tame Frechet spaces* in [34, Appendix 11]. The latter includes Theorem 5.1, see [44, Theorem 1.1] for details. □

Definition 5.1.1 (Weak homotopy equivalences of sequences of maps). Suppose we are given two sequences of continuous maps of topological spaces:

$$\mathbf{u} : K_1 \xrightarrow{\alpha_1} \dots \xrightarrow{\alpha_{k-1}} K_k, \quad \mathbf{v} : L_1 \xrightarrow{\beta_1} \dots \xrightarrow{\beta_{k-1}} L_k.$$

Then by a *morphism* $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_k) : \mathbf{u} \rightarrow \mathbf{v}$ of those sequences we will mean the following commutative diagram

$$\begin{array}{ccccccc} K_1 & \xrightarrow{\alpha_1} & K_2 & \xrightarrow{\alpha_2} & \dots & \xrightarrow{\alpha_{k-1}} & K_k \\ \downarrow \gamma_1 & & \downarrow \gamma_2 & & & & \downarrow \gamma_k \\ L_1 & \xrightarrow{\beta_1} & L_2 & \xrightarrow{\beta_2} & \dots & \xrightarrow{\beta_{k-1}} & L_k \end{array}$$

Such a morphism will be called a *weak homotopy equivalence*, whenever each γ_i is a weak homotopy equivalence. In this case we will write $\gamma : \mathbf{u} \stackrel{w}{\simeq} \mathbf{v}$.

The following sequence of maps will be called an **O**-sequence of (f, V) :

$$\mathbf{O}(f, V) : \Delta'(f, V) \hookrightarrow \mathcal{S}'(f, V) \hookrightarrow \mathcal{D}_{\text{id}}(M, V) \xrightarrow{\mathfrak{p}} \mathcal{O}_f(f, V), \quad (5.1)$$

where the first two arrows are natural inclusions of normal subgroups, and the last map is a projection to cosets (we denoted it by \twoheadrightarrow meaning that it is surjective).

We will study such sequences up to a weak homotopy equivalence and one of the main tools are long exact sequence of fibration \mathfrak{p} :

$$\dots \rightarrow \pi_{k+1} \mathcal{S}_{\text{id}}(f, V) \rightarrow \pi_{k+1} \mathcal{D}_{\text{id}}(M, V) \xrightarrow{\mathfrak{p}_{k+1}} \pi_{k+1} \mathcal{O}_f(f, V) \xrightarrow{\partial_{k+1}}$$

$$\begin{aligned} \rightarrow \pi_k \mathcal{S}_{\text{id}}(f, V) \rightarrow \pi_k \mathcal{D}_{\text{id}}(M, V) \xrightarrow{\mathbf{p}_k} \pi_k \mathcal{O}_f(f, V) \xrightarrow{\partial_k} \dots \\ \dots \rightarrow \pi_1 \mathcal{D}_{\text{id}}(M, V) \xrightarrow{\mathbf{p}_1} \pi_1 \mathcal{O}_f(f, V) \xrightarrow{\partial_1} \pi_0 \mathcal{S}'(f, V), \end{aligned}$$

where the corresponding base points are id_M and f .

The homotopy types of groups $\mathcal{D}_{\text{id}}(M, V)$ are computed in [52, Theorem A], [7, Theorems 1,2], [8, Theorems 1B,1C,1D], [14, Théorème 1], and are presented in the following Table 5.1, in which $|V|$ is the number of points in V , Mo is a Möbius band, and K is a Klein bottle. Moreover, Theorem 5.2.1 below describes the homotopy type of $\mathcal{S}(f, V)$. This will give a complete information about higher homotopy groups of spaces in (5.1) and a lot of information about fundamental groups.

TABLE 5.1.

M	$ V $	$\mathcal{D}_{\text{id}}(M)$			
		homotopy type	homotopy groups		
			π_1	π_2	$\pi_k, k \geq 3$
$S^2, \mathbb{R}P^2$	0	$SO(3) \cong \mathbb{R}P^3$	\mathbb{Z}_2	0	$\pi_k S^3 = \pi_k S^2 = \pi_k \mathbb{R}P^2$
T^2	0	T^2	\mathbb{Z}^2	0	0
$D^2, S^1 \times [0, 1], Mo, K$	0	S^1	\mathbb{Z}	0	0
$D^2, S^2, \mathbb{R}P^2$	1				
S^2	2				
other cases		point	0	0	0

Remark 5.1.2 (Explicit construction of ∂_1). Let $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathcal{O}_f(f, V)$ be a loop with $\gamma(0) = \gamma(1) = f$, and $[\gamma]$ its homotopy class in $\pi_1 \mathcal{O}_f(f, V)$. Since \mathbf{p} satisfies path lifting axiom, there exists a path $\hat{\gamma} : [0, 1] \rightarrow \mathcal{D}_{\text{id}}(M, V)$ such that $\hat{\gamma}(0) = \text{id}_M$, and $\hat{\gamma}(1) \in \mathcal{S}'(f, V)$. Then

$$\mathbf{p}_1([\gamma]) = [\hat{\gamma}(1)] \in \pi_0 \mathcal{S}'(f, V)$$

is the isotopy class of $\hat{\gamma}(1)$ in $\mathcal{S}'(f, V)$.

Lemma 5.1.3. (1) $\mathcal{D}_{\text{id}}(M, V)$ is contractible if and only if $\chi(M) < |V|$, which in particular holds if V is infinite or when $\chi(M) < 0$.

(2) If $V = \emptyset$, then $\pi_2 \mathcal{D}_{\text{id}}(M) = 0$ and for $k \geq 3$ we have that

$$\pi_k \mathcal{D}_{\text{id}}(M) = \pi_k M = \begin{cases} \pi_k S^3 & \text{if } M = S^2 \text{ or } \mathbb{R}P^2, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

(3) The image of $\mathbf{p}_1(\pi_1 \mathcal{D}_{\text{id}}(M, V))$ is contained in the center of $\pi_1 \mathcal{O}_f(f, V)$, ([43, Lemma 2.2]).

(4) The set $\pi_0 \mathcal{S}'(f, V)$ is a group, and $\partial_1 : \pi_1 \mathcal{O}_f(f, V) \rightarrow \pi_0 \mathcal{S}'(f, V)$ is a homomorphism.

5.2. Structure of $\mathcal{S}_{\text{id}}(f, V)$. The following theorem is proved in [34] for Morse maps and in [40] for all $f \in \mathcal{F}(M, P)$. In fact, it is a consequence of a series of papers [32, 33, 38, 41, 42] about diffeomorphisms preserving orbits of flows. The technique developed in those paper is also extensively used for the proof of almost all presented here results, e.g. Lemmas 4.7.1, 4.6.1, 6.1.1, Theorem 5.2.2.

Theorem 5.2.1. ([34, 40]). *Suppose M is connected. Then $\mathcal{S}_{\text{id}}(f, V)$ is **contractible** if and only if either of the following conditions is satisfied:*

- (i) *f is has at least one saddle critical point or degenerate local extreme;*
- (ii) *M is non-orientable;*
- (iii) *V contains more than $\chi(M)$ points (which holds e.g. when $\dim V \geq 1$ or $\chi(M) < 0$).*

*In all other cases $\mathcal{S}_{\text{id}}(f, V)$ is **homotopy equivalent to the circle** S^1 . In fact the latter holds if and only if f is one of maps of types (A)-(D) of Theorem 5.2.2 below.*

The following theorem characterizes Morse maps having only local extremes and describes their **O**-sequences.

Theorem 5.2.2. ([34, Theorem 1.9]) *Let $f \in \mathcal{F}(M, P)$. Then every critical point of f is a **non-degenerate local extreme** if and only if f is one of the maps of the following types (A)-(E).*

- (A) *$f : S^2 \rightarrow P$ is a Morse map having precisely two critical points $\{a, b\}$, and those points are non-degenerate local extremes. In this case*

$$\mathbf{O}(f) \stackrel{w}{\simeq} [S^1 \equiv S^1 \hookrightarrow SO(3) \twoheadrightarrow S^2],$$

$$\mathbf{O}(f, \{a\}) \stackrel{w}{\simeq} \mathbf{O}(f, \{a, b\}) \stackrel{w}{\simeq} [S^1 \equiv S^1 \equiv S^1 \twoheadrightarrow \bullet].$$

- (B) *$f \in \mathcal{F}(D^2, P)$ is a map having precisely one critical point a , and that point is a non-degenerate local extreme. In this case*

$$\mathbf{O}(f) \stackrel{w}{\simeq} \mathbf{O}(f, \{a\}) \stackrel{w}{\simeq} [S^1 \equiv S^1 \equiv S^1 \twoheadrightarrow \bullet].$$

- (C) *$f \in \mathcal{F}(S^1 \times [0, 1], P)$ is a map having no critical points and*

$$\mathbf{O}(f) \stackrel{w}{\simeq} [S^1 \equiv S^1 \equiv S^1 \twoheadrightarrow \bullet].$$

- (D) *$f \in \mathcal{F}(T^2, S^1)$ is a map without critical points. Let $m\mathbb{Z} \subset \mathbb{Z} \cong \pi_1 S^1$ be the image of the induced homomorphism $f_1 : \pi_1 T^2 \rightarrow \pi_1 S^1$ for some m . Then $m \geq 1$, $f : T^2 \rightarrow S^1$ is a locally trivial fibration whose fiber is a disjoint union of m circles, and*

$$\mathbf{O}(f) \stackrel{w}{\simeq} [S^1 \times 0 \hookrightarrow S^1 \times \mathbb{Z}_m \hookrightarrow S^1 \times S^1 \xrightarrow{(w,z) \mapsto z^m} S^1]$$

(E) $f \in \mathcal{F}(K, S^1)$ is be a map from Klein bottle to the circle having no critical points. Let $m\mathbb{Z} \subset \mathbb{Z} \cong \pi_1 S^1$ be the image of the induced homomorphism $f_1 : \pi_1 K \rightarrow \pi_1 S^1 \cong \mathbb{Z}$ for some m . Then $m \geq 1$, $f : K \rightarrow S^1$ is a locally trivial fibration whose fiber is a disjoint union of m circles, and

$$\mathbf{O}(f) \stackrel{w}{\simeq} [0 \hookrightarrow \mathbb{Z}_m \hookrightarrow S^1 \xrightarrow{z \mapsto z^m} S^1]$$

All the above weak homotopy equivalences are homotopy equivalences.

Remark 5.2.3. To clarify the statement notice that the first weak homotopy equivalence $\mathbf{O}(f) \stackrel{w}{\simeq} [S^1 \cong S^1 \hookrightarrow SO(3) \twoheadrightarrow S^2]$ in (A) means that $\mathcal{O}_f(f)$ is homotopy equivalent to 2-sphere S^2 , and $\mathcal{S}'(f)$ is homotopy equivalent to the circle S^1 . Since it is path connected, we also have that $\mathcal{S}'(f) = \Delta'(f) = \mathcal{S}_{\text{id}}(f)$.

For example, regard $S^2 = \{x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ as a unit sphere in \mathbb{R}^3 , and let $f : S^2 \rightarrow \mathbb{R}$ be given by $f(x, y, z) = z$. Then f is a function of type (A). Let $H : S^2 \times [0, 1] \rightarrow S^2$ be the linear rotations given by the formula:

$$H(x, y, z, t) = \begin{pmatrix} \cos 2\pi t & \sin 2\pi t & 0 \\ -\sin 2\pi t & \cos 2\pi t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Evidently, each H_t preserves coordinate z , i.e. $f \circ H_t = f$. Moreover, $H_0 = H_1 = \text{id}_{S^2}$. In other words, H_t is a loop in $\mathcal{S}(f)$ at id_{S^2} . Then the inclusion of this loop as a map $\nu : S^1 \rightarrow \mathcal{S}(f)$, $\nu(e^{2\pi it}) = H_t$, which turns out to be a homotopy equivalence.

Similar consideration can be applied to other cases and we refer the reader to [34, Proof of Theorem 1.9].

Corollary 5.2.4. *Suppose $\mathcal{S}_{\text{id}}(f, V)$ is contractible. Then the following statements hold.*

(a) $\pi_n \mathcal{D}(M, V) \cong \pi_n \mathcal{O}_f(f, V)$ for $n \geq 2$ and we get the following short exact sequence

$$\pi_1 \mathcal{D}_{\text{id}}(M, V) \xleftarrow{p_1} \pi_1 \mathcal{O}_f(f, V) \xrightarrow{\partial_1} \pi_0 \mathcal{S}'(f, V). \tag{5.2}$$

(b) If $M \neq S^2$ and $\mathbb{R}P^2$, then $\mathcal{O}_f(f, V)$ is aspherical¹, so its homotopy type is determined by the fundamental group $\pi_1 \mathcal{O}_f(f, V)$. In particular, $\pi_1 \mathcal{O}_f(f, V)$ is torsion free.

(c) If $\chi(M) < |V|$, then $\mathcal{D}_{\text{id}}(M, V)$ is contractible as well, and and Eq. (5.2) yields an isomorphism

$$\partial_1 : \pi_1 \mathcal{O}_f(f, V) \cong \pi_0 \mathcal{S}'(f, V). \tag{5.3}$$

¹A path connected topological space Q is aspherical, if $\pi_n Q = 0$ for $n \geq 2$. In this case Q is also called Eilenberg–MacLane space $K(\pi_1 Q, 1)$.

Then $\pi_0\mathcal{S}'(f, V)$ is also torsion free and this group completely determine the homotopy type of $\mathcal{O}_f(f, V)$.

5.3. Structure of $\pi_1\mathcal{O}_f(f, V)$. We will describe here the general structure of fundamental groups of orbits, see Theorem 5.5 and Remark 5.4.1.

Suppose that $\mathcal{S}_{\text{id}}(f, V)$ is contractible. Then we have the following commutative diagram:

$$\begin{array}{ccccc}
 \pi_1\mathcal{D}(M, V) & \xhookrightarrow{\mathfrak{p}_1} & \partial_1^{-1}(\pi_0\Delta'(f, V)) & \xrightarrow{\partial_1} & \pi_0\Delta'(f, V) \\
 \parallel & & \downarrow & & \downarrow \\
 \pi_1\mathcal{D}(M, V) & \xhookrightarrow{\mathfrak{p}_1} & \pi_1\mathcal{O}_f(f, V) & \xrightarrow{\partial_1} & \pi_0\mathcal{S}'(f, V) \\
 & & \downarrow \rho \circ \partial_1 & & \downarrow \rho \\
 & & \mathcal{G}'(f, V) & \xlongequal{\quad} & \mathcal{G}'(f, V)
 \end{array} \tag{5.4}$$

in which all horizontal and vertical sequences are exact. In fact, the middle horizontal sequence is the last part of the above long exact sequence of \mathfrak{p} , while the right vertical is \mathbf{b}' -sequence for (f, V) .

Denote $A = \partial_1^{-1}(\pi_0\Delta'(f, V))$ and consider the upper horizontal sequence:

$$\pi_1\mathcal{D}(M, V) \xhookrightarrow{\mathfrak{p}_1} A \xrightarrow{\partial_1} \pi_0\Delta'(f, V). \tag{5.5}$$

We know that $\pi_0\Delta'(f, V)$ is a free abelian, $\pi_1\mathcal{D}(M, V)$ is abelian ($0, \mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}$, or \mathbb{Z}^2) and its image is contained in the center of $\pi_1\mathcal{O}_f(f, V)$, and therefore in the center of A . One might expect that this sequence splits, i.e. ∂_1 in (5.5) admits a section $q : \pi_0\Delta'(f, V) \rightarrow A$, which gave an isomorphism $\phi : \pi_1\mathcal{D}_{\text{id}}(M, V) \oplus \pi_0\Delta'(f, V) \cong A$, $\phi(a, b) = \mathfrak{p}_1(a) \cdot q(b)$. This was initially stated in [34, Theorem 1.5] for $V = \emptyset$, however the arguments contained a gap and were completed in [40, Theorem 6].

The following theorem describes a more general effect. Let \mathbb{T}^k be the k -dimensional torus, i.e. a product of k circles.

Theorem 5.3.1. (cf. [40, Theorem 6]) *Suppose $\mathcal{S}_{\text{id}}(f, V)$ is contractible and that $\pi_0\Delta'(f, V) \cong \mathbb{Z}^k$ for some $k \geq 0$. Let $\omega : \pi_1\mathbb{T}^k \rightarrow \pi_0\Delta'(f, V)$ be any isomorphism. Then there exists a continuous map $\eta : \mathbb{T}^k \rightarrow \mathcal{O}_f(f, V)$ such that we have the following commutative diagram:*

$$\begin{array}{ccc}
 \pi_1\mathbb{T}^k & \xrightarrow[\cong]{\omega} & \pi_0\Delta'(f, V) \\
 \eta \downarrow & & \downarrow \\
 \pi_1\mathcal{O}_f(f, V) & \xrightarrow{\partial_1} & \pi_0\mathcal{S}'(f, V)
 \end{array} \tag{5.6}$$

Hence for the map

$$\psi : \mathcal{D}_{\text{id}}(M, V) \times \mathbb{T}^k \rightarrow \mathcal{O}_f(f, V), \quad \psi(h, s) = \eta(s) \circ h$$

the induced homomorphisms $\psi_n : \pi_1(\mathcal{D}_{\text{id}}(M, V) \times \mathbb{T}^k) \rightarrow \pi_1\mathcal{O}_f(f, V)$ are **isomorphisms** for $n \geq 2$ and a monomorphism for $n = 1$, so we will have the following commutative diagram:

$$\begin{array}{ccc}
 \pi_1\mathcal{D}(M, V) \oplus \pi_0\Delta'(f, V) & \xrightarrow{p_2} & \pi_0\Delta'(f, V) \\
 \parallel & \searrow^{p_1 \oplus \psi_1} & \downarrow \\
 \pi_1\mathcal{D}(M, V) & \xrightarrow{p_1} & \pi_1\mathcal{O}_f(f, V) \xrightarrow{\partial_1} \pi_0\mathcal{S}'(f, V) \\
 & & \downarrow \rho \\
 & & \mathcal{G}'(f, V)
 \end{array} \tag{5.7}$$

in which main diagonal, middle row and right column are exact.

Therefore, if $\sigma : \tilde{\mathcal{O}} \rightarrow \mathcal{O}_f(f, V)$ is a covering map corresponding to the subgroup $\psi_1(\pi_1(\mathcal{D}_{\text{id}}(M, V) \times \mathbb{T}^k))$ of $\pi_1\mathcal{O}_f(f, V)$, then ψ lifts to the map $\hat{\psi} : \mathcal{D}_{\text{id}}(M, V) \times \mathbb{T}^k \rightarrow \tilde{\mathcal{O}}$ such that $\psi = \sigma \circ \hat{\psi}$ and $\hat{\psi}$ induces an isomorphism of all homotopy groups, i.e. $\hat{\psi}$ is a weak homotopy equivalence.

In particular, if $\mathcal{G}'(f, V)$ is trivial (which holds e.g. when f is a generic Morse map), then ψ_1 is an isomorphism as well, whence ψ is a weak homotopy equivalence (cf. [34, Theorem 1.5(3)]).

Proof. Let $I^k = [0, 1]^k$ be a k -dimensional cube. Then there is a natural quotient map

$$\nu : I^k \rightarrow \mathbb{T}^k, \quad \nu(t_1, \dots, t_k) = (e^{2\pi i t_1}, \dots, e^{2\pi i t_k}).$$

We will construct a certain continuous map $\zeta : I^k \rightarrow \mathcal{D}_{\text{id}}(M, V \cup Q)$ such that for all $i = 1, \dots, k$, and $t_1, \dots, t_{i-1}, t_{i+1}, \dots, t_k \in [0, 1]$ we will have

$$f \circ \zeta(t_1, \dots, t_{i-1}, 0, t_i, \dots, t_k) = f \circ \zeta(t_1, \dots, t_{i-1}, 1, t_{i+1}, \dots, t_k).$$

This will imply existence of a unique continuous map $\eta : \mathbb{T}^k \rightarrow \mathcal{O}_f(f, V)$ with $p \circ \zeta = \eta \circ \nu$. Moreover, ζ will be constructed so that η will make commutative the diagram (5.6).

Notation. Notice that $[0, 1]$ can be regarded as a CW-complex with two 0-cells $\{0\}$ and $\{1\}$ and a 1-cell $(0, 1)$. Then $I^k = [0, 1]^k$ inherits a CW-structure, whose cells are product of cells of copies of $[0, 1]$. It will be convenient to introduce uniform notation for such faces.

Let $K = \{1, \dots, k\}$. Then each i -th face E of I^k is determined by partition of K into three mutually disjoint subsets A, B, C such that

- for each $s \in A$ there is $(t_1, \dots, t_k) \in E$ with $0 < t_s < 1$.
- for each $s \in B$ and $(t_1, \dots, t_k) \in E$ we always have $t_s = 0$;
- for each $s \in C$ and $(t_1, \dots, t_k) \in E$ we always have $t_s = 1$;

Denote such face by $E_{A,B,C}$. Evidently, the dimension of $E_{A,B,C}$ equals to the number of elements of A . Moreover, when writing points of $E_{A,B,C}$ we will sometimes indicate only coordinates belonging to A .

Construction of ζ . One can easily find

- (a) a subset $Q \subset M$ such that $|Q| > \chi(M)$;
- (b) pairwise commuting diffeomorphisms $\tau_1, \dots, \tau_k \in \Delta'(f, V)$ whose isotopy classes $[\tau_i]$ constitute a basis for $\pi_0 \Delta'(f) \cong \mathbb{Z}^k$;
- (c) isotopies $H^i : M \times [0, 1] \rightarrow M$ relatively Q with $H^i = \text{id}_M$ and $H^i_1 = \tau_i$ for all $i = 1, \dots, k$.

Indeed, for each edge e of Γ_f choose a Dehn twist τ_e along e . Then one can assume that each τ_i is a product of some τ_e . This will guarantee condition (b). Existence of Q and isotopies H^i as in (a) and (c) is proved in [40, Theorem 6] for $V = \emptyset$. That sets also suffice if $V \neq \emptyset$ is finite but $|V| < \chi(M)$. E.g. if $M = D^2$, then one can take $Q = \partial D^2$. If $|V| > \chi(M)$, then one can put $Q = V$.

Now ζ will be constructed by induction on d -dimensional faces of I^k .

Let $d = 0$. Put

$$\zeta(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k) = \tau_1^{\varepsilon_1} \circ \dots \circ \tau_k^{\varepsilon_k} = \prod_{i=1}^k \tau_i, \quad \varepsilon_i \in \{0, 1\}.$$

Since τ_i pairwise commute, one can write the product of τ_i in any order, and therefore the notation $\prod_{i=1}^k \tau_i$ is well-defined. Then

$$f \circ \zeta(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k) = f \circ \tau_1^{\varepsilon_1} \circ \dots \circ \tau_k^{\varepsilon_k} = f.$$

Let $d = 1$. Every 1-dimensional cell has the form $E_{\{i\}, B, C}$, and so it is “parametrized” by its i -th coordinate t_i . Then we define ζ on $E_{\{i\}, B, C}$ by

$$\zeta(t_i) = \left(\prod_{j \in C} \tau_j \right) \circ H^i_{t_i}.$$

In other words, we first apply an isotopy H^i , and if j -th coordinate of the face is 1 (for $j \neq i$), then we additionally make a composition with τ_j . Since all τ_i pairwise commute, ζ is correctly defined on 1-skeleton of I^k .

It follows that

$$f \circ \zeta(t_i) = f \circ H^i_{t_i}, \quad t_i \in E_{A, B, C}.$$

For example, if $k = 2$, then

$$\zeta(t_1, 0) = H^1_t, \quad \zeta(t_1, 1) = \tau_2 \circ H^1_t, \quad \zeta(0, t_2) = H^2_t, \quad \zeta(1, t_2) = \tau_1 \circ H^2_t.$$

Let $d = 2$. Let $i_1 < i_2$ be two distinct indices and

$$E = E_{\{i_1, i_2\}, K \setminus \{i_1, i_2\}, \emptyset}$$

be a 2-face of I^k in which all coordinates except for i_1 and i_2 are zeros.

By the construction $\zeta(\partial E) \in \mathcal{D}_{\text{id}}(M, V \cup Q)$, and the latter space is contractible. Hence ζ extends to some continuous map

$$H^{i_1, i_2} : E \rightarrow \mathcal{D}_{\text{id}}(M, V \cup Q).$$

Extend ζ to each other 2-face $E_{\{i_1, i_2\}, B, C}$ spanned by coordinates i_1, i_2 in a similar way:

$$\zeta(t_{i_1}, t_{i_2}) = \left(\prod_{j \in C} \tau_j \right) \circ H^{i_1, i_2}(t_{i_1}, t_{i_2}).$$

Then again

$$f \circ \zeta(t_{i_1}, t_{i_2}) = f \circ H^{i_1, i_2}(t_{i_1}, t_{i_2})$$

for any 2-face $E_{\{i_1, i_2\}, B, C}$.

Let $d = 3$. The construction is similar to the case $d = 2$. Let $i_1 < i_2 < i_3$ be three distinct indices and

$$E = E_{\{i_1, i_2, i_3\}, K \setminus \{i_1, i_2, i_3\}, \emptyset}$$

be a 3-face of I^k in which all coordinates except for i_1, i_2 , and i_3 are zeros.

By the construction $\zeta(\partial E) \in \mathcal{D}_{\text{id}}(M, V \cup Q)$, and the latter space is contractible. Hence ζ extends to some continuous map

$$H^{i_1, i_2, i_3} : E \rightarrow \mathcal{D}_{\text{id}}(M, V \cup Q)$$

and we extend ζ to each other 3-face $E_{\{i_1, i_2, i_3\}, B, C}$ spanned by coordinates i_1, i_2, i_3 in a similar way:

$$\zeta(t_{i_1}, t_{i_2}, t_{i_3}) = \left(\prod_{j \in C} \tau_j \right) \circ H^{i_1, i_2, i_3}(t_{i_1}, t_{i_2}, t_{i_3}).$$

Applying the same arguments so on, we extend ζ to all of I^k .

Verification of properties of η . By construction the restriction of ζ to each 1-face spanned by coordinate t_i , is given by the loop $\gamma_i := f \circ H^i$. But due to description of ∂_1 (see Remark 5.1.2), $\partial_1([\gamma_i]) = H_1^i = \tau_i$. This means commutativity of (5.6). □

It is convenient to formulate the general observation about the homotopy types of $\mathcal{O}(f, V)$ in the form of the following property (Bib).

Definition 5.4. *Let M be a compact surface, $f \in \mathcal{F}(M, P)$, V be an f -adapted submanifold, and $\mathcal{G}'(f, V)$ be the group of automorphisms of the graph of f induced by elements of $\mathcal{S}'(f, V)$, see (4.8). Say that a pair (f, V) has property (Bib) whenever*

(Bib) *there exists a **free** action of the (finite) group $\mathcal{G}'(f, V)$ on a k -torus \mathbb{T}^k for some $k \geq 0$ such that we have the following homotopy equivalence:*

$$\mathcal{O}_f(f, V) \simeq \mathcal{D}_{\text{id}}(M, V) \times (\mathbb{T}^k / \mathcal{G}'(f, V)),$$

where $\mathbb{T}^k/\mathcal{G}'(f, V)$ is the corresponding quotient space.

Remark 5.4.1. Evidently, Property (Bib) generalizes the effect described in Theorem 5.3.1 for the case when $\mathcal{G}'(f, V)$ is trivial. That property was discovered by E. Kudryavtseva in a series of papers [23, 24, 26], in which she described the homotopy structure of the spaces $\mathcal{F}_{p,q,r}$ of Morse functions on orientable compact surfaces equipped with a numeration of their critical points (such spaces are finite covering spaces of the spaces of all Morse functions). She presented a “finite-dimensional” model for the stratifications of those spaces into orbits of Morse functions, and demonstrated Property (Bib) for them.

Remark 5.4.2. Notice that not all pairs (f, V) have property (Bib). For instance, if $f : S^2 \rightarrow \mathbb{R}$ is a Morse function with two only critical points as in Theorem 5.2.1(A), then $\pi_1\mathcal{O}_f(f) = \pi_1S^2 = 0$. On the other hand, the graph of f is a closed segment, whence $\mathcal{G}'(f)$ is trivial, and therefore

$$\pi_1(\mathcal{D}_{\text{id}}(S^2) \times (\mathbb{T}^k/\mathcal{G}'(f))) \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}^k \neq 0 \text{ for any } k \geq 0.$$

Nevertheless this property seems to be very typical. The following theorem describes several cases when (Bib) holds.

Theorem 5.5. *Let M be a compact connected surface, $f \in \mathcal{F}(M, P)$, and V be an f -adapted submanifold. Then the pair (f, V) has property (Bib) in the following cases.*

- (1) $\mathcal{S}_{\text{id}}(f, V)$ is contractible, and $\mathcal{G}'(f, V)$ is trivial (Theorem 5.3.1).
- (2) M is orientable, $V = \emptyset$, and $f \in \mathcal{M}(M, \mathbb{R})$ is such that the Euler characteristic $\chi(M)$ of M is **less than** the total number of fixed critical points of $\mathcal{S}'(f)$ (E. Kudryavtseva [23, 24, 26]).

Warning. In [44, Corollary 1.3 & Theorem 5.10] it was claimed that Property (Bib) holds for pairs (f, V) admitting a diagonal short exact sequence from (5.7). However, such a statement is not in fact proved. The reason is that the above claims were just direct applications of [44, Theorem 2.5] being in turn an *incorrect* formulation of a realization theorem for crystallographic groups. That [44, Theorem 2.5] states that for *every* short exact sequence $\mathbb{Z}^k \hookrightarrow \Gamma \twoheadrightarrow G$ with finite G and torsion free Γ , there exists a free action of G on \mathbb{T}^k such that $\pi_1(\mathbb{T}^k/G) \cong \Gamma$. In fact, in general one should additionally require that \mathbb{Z}^k is a *maximal abelian subgroup* of Γ (this is a theorem by H. Zassenhaus, see e.g. [53, Theorem 2.2]).

Nevertheless this does not mean that [44, Corollary 1.3 & Theorem 5.10] are wrong. Indeed, consider the following short exact sequence $n\mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{Z} \twoheadrightarrow \mathbb{Z}_n$. Then $n\mathbb{Z}$ is not a maximal abelian subgroup of \mathbb{Z} , however there exists an action of \mathbb{Z}_n on $\mathbb{T}^1 = S^1$ such that $\pi_1(\mathbb{T}^1/\mathbb{Z}_3) \cong \mathbb{Z}$.

Therefore to complete the proofs of [44, Corollary 1.3 & Theorem 5.10] one needs to thoroughly check conditions on (f, V) when such actions of $\mathcal{G}'(f, V)$ on some tori exist. This will be done in another paper. □

In next sections we will describe algebraic structure of $\pi_1\mathcal{O}_f(f, V)$ for the case when M is orientable and distinct from S^2 .

6. MAPS ON SURFACES WITH $\chi(M) < 0$

Let M be compact surface, $f \in \mathcal{F}(M, P)$, and V an f -adapted submanifold. In this section we give a complete description of algebraic structure of Bieberbach sequence (4.5):

$$\mathbf{b}(f, V) : \pi_0\Delta(f, V) \hookrightarrow \pi_0\mathcal{S}(f, V) \twoheadrightarrow \pi_0\mathcal{G}(f, V).$$

for the case when M is orientable and differs from S^2 .

6.1. Reduction to the case $\chi(M) \geq 0$. Theorem 6.1.1 below shows that computations of $\mathbf{b}'(f, V)$ completely reduces to the case when $\chi(M) \geq 0$ (i.e. is one of the following surfaces: $S^2, T^2, D^2, S^1 \times [0, 1], \mathbb{R}P^2$, Möbius band and Klein bottle) and V consists of critical points of f and boundary components of M .

Let R_V be a f -regular neighborhood of V and D_1, \dots, D_q all the connected components of the closure $\overline{M \setminus R_V}$ which are diffeomorphic with a 2-disk. Then the union

$$N_V := R_V \cup D_1 \cup \dots \cup D_q$$

is called a *canonical neighborhood* N_V of V (corresponding to R_V), see [17].

Theorem 6.1.1. ([39], [44, Theorem 5.4]) *Suppose M is connected with $\chi(M) < 0$. Let also K be the union of all non-extremal critical leaves of f whose canonical neighborhoods have negative Euler characteristic, R_K an f -regular neighborhood of K , B_1, \dots, B_k all the connected components of $\overline{M \setminus R_K}$, and $X_i^\partial := B_i \cap (V \cup R_K)$, $i = 1, \dots, k$. Then*

- (1) *each B_i is diffeomorphic either with a 2-disk or a cylinder or a Möbius band;*
- (2) *the inclusion $(\mathcal{S}'(f, V \cup R_K), \Delta'(f, V \cup R_K)) \subset (\mathcal{S}'(f, V), \Delta'(f, V))$ is a homotopy equivalence, inducing therefore an isomorphism*

$$\mathbf{b}'(f, V) \cong \mathbf{b}'(f, V \cup R_K) \cong \prod_{i=1}^k \mathbf{b}'(f|_{B_i}, X_i^\partial).$$

6.2. Relation between sequences $\mathbf{b}'(f, V)$ and $\mathbf{b}(f)$. Denote by

$$j_0 : \pi_0\mathcal{S}'(f, V) \rightarrow \pi_0\mathcal{S}'(f)$$

the homomorphism induced by the inclusion $j : \mathcal{S}'(f, V) \subset \mathcal{S}'(f)$.

Lemma 6.2.1 [44, Lemma 5.1]). *Suppose M is connected and V is a **non-empty** union of several boundary components of M . Suppose also that $\mathcal{S}_{\text{id}}(f)$ is contractible.*

(i) *Then we have the following commutative diagram:*

$$\begin{array}{ccccc}
 \pi_1 \mathcal{D}_{\text{id}}(M) \subset & \xrightarrow{p_1} & \pi_1 \mathcal{O}_f(f) & \xrightarrow{\partial} & \pi_0 \mathcal{S}'(f) \\
 & & \uparrow \cong & \searrow \beta & \uparrow j_0 \\
 & & \pi_1 \mathcal{O}_f(f, V) & \xrightarrow[\cong]{(5.3)} & \pi_0 \mathcal{S}'(f, V) \\
 & \searrow \alpha & & & \uparrow \downarrow \\
 & & & & \ker(j_0)
 \end{array} \tag{6.1}$$

In particular, it induces an isomorphism between the right column and the upper row which coincides with the sequence (5.2).

(ii) *We also have the following exact (3×3) -diagram:*

$$\begin{array}{ccccc}
 & & \ker(j_0) & \xlongequal{\quad} & \ker(j_0) & \longrightarrow & \{1\} \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 \mathbf{b}'(f, V) & : & \pi_0 \Delta'(f, V) & \hookrightarrow & \pi_0 \mathcal{S}'(f, V) & \xrightarrow{\rho_V} & \mathcal{G}'(f, V) \\
 & & \xi \uparrow \downarrow & & \downarrow j_0 & & \cong \downarrow \Gamma'(V, \emptyset) \\
 \mathbf{b}'(f) & : & \pi_0 \Delta'(f) & \hookrightarrow & \pi_0 \mathcal{S}'(f) & \xrightarrow{\rho} & \mathcal{G}'(f)
 \end{array} \tag{6.2}$$

Since the groups $\pi_0 \Delta'(f, V)$ and $\pi_0 \Delta'(f)$ are free abelian, the left column splits, so there is a section $\xi : \pi_0 \Delta'(f) \rightarrow \pi_0 \Delta'(f, V)$.

(iii) *If $\chi(M) < 0$, and thus $\mathcal{D}_{\text{id}}(M)$ is contractible, then by (6.1), j_0 is an isomorphism, and (6.2) yields an isomorphism $\mathbf{b}'(f, V) \cong \mathbf{b}'(f)$.*

(iv) *If $\chi(M) \geq 0$, so M is either a 2-disk, or a cylinder, or a Möbius band (since $\partial M \neq \emptyset$), then $\ker(j_0) \cong \pi_1 \mathcal{D}_{\text{id}}(M) \cong \mathbb{Z}$ due to (6.1), and the diagram (6.2) is a short exact sequence $\mathbf{z}_1 \hookrightarrow \mathbf{b}'(f, V) \twoheadrightarrow \mathbf{b}'(f)$.*

In fact, for M being a 2-disk of a Möbius band, then $\ker(j_0)$ is generated by a Dehn twist along boundary component of M , and for $M = S^1 \times [0, 1]$ the kernel $\ker(j_0)$ is generated by a pair of Dehn twists in different directions along boundary components of M .

In the next two sections we will describe the algebraic structure of $\mathbf{b}(f, V)$ for the cases when M is a 2-disk, cylinder and torus. Together with Theorem 6.1.1 this will give complete information on $\mathbf{b}(f, V)$ for all orientable surfaces distinct from S^2 .

7. MAPS ON 2-DISK AND CYLINDER

Suppose (M, V) is one of the pairs $(D^2, \partial D^2)$ or $(S^1 \times [0, 1], S^1 \times 0)$. Then the group $\mathcal{D}(M, V)$ is connected (in fact even contractible, see Table 5.1). Hence $\mathcal{D}(M, V) = \mathcal{D}_{\text{id}}(M, V)$ and

$$\mathcal{S}'(f, V) = \mathcal{S}(f, V) \cap \mathcal{D}_{\text{id}}(M, V) = \mathcal{S}(f, V) \cap \mathcal{D}(M, V) = \mathcal{S}(f, V). \quad (7.1)$$

Similarly, $\Delta'(f, V) = \Delta(f, V)$. This implies that $\mathbf{b}(f, V) = \mathbf{b}'(f, V)$.

Recall that if $\mathcal{S}_{\text{id}}(f)$ is contractible, then by Lemma 6.2.1(iv) we also have the following short exact sequence:

$$\mathbf{z}_1 \hookrightarrow \mathbf{b}'(f, V) \twoheadrightarrow \mathbf{b}'(f) \quad (7.2)$$

which is the same as the diagram (6.2).

7.1. Maps with minimal number of critical points.

Theorem 7.1.1. ([44, Theorem 5.5]) *Let $(M, V) = (S^1 \times [0, 1], S^1 \times 0)$.*

(1) *For each $f \in \mathcal{F}(M, P)$ the inclusion of pairs*

$$(\mathcal{S}'(f, \partial M), \Delta'(f, \partial M)) \subset (\mathcal{S}'(f, V), \Delta'(f, V)) \stackrel{(7.1)}{\cong} (\mathcal{S}(f, V), \Delta(f, V))$$

is a homotopy equivalence, whence $\mathbf{b}'(f, \partial M) \cong \mathbf{b}'(f, V) \cong \mathbf{b}(f, V)$.

(2) *If $f \in \mathcal{F}(M, P)$ has **no critical points**, then*

$$\pi_0 \mathcal{S}'(f, V) = 0, \quad \pi_0 \mathcal{S}(f, \partial M) = \mathbb{Z}.$$

In particular, $\mathbf{b}'(f, V) \cong \mathbf{z}_0 : \{1\} \hookrightarrow \{1\} \twoheadrightarrow \{1\}$.

Theorem 7.1.2. ([44, Theorem 5.6]) *Suppose $f \in \mathcal{F}(D^2, P)$ has a **unique critical point** z being therefore a **local extreme**.*

(1) *If z is **non-degenerate**, then $\mathbf{b}'(f, \partial D^2) \cong \mathbf{z}_0 : \{1\} \hookrightarrow \{1\} \twoheadrightarrow \{1\}$.*

(2) *If z is **degenerate** of symmetry index m , then $\mathcal{S}_{\text{id}}(f)$ is contractible, and the sequence (7.2) is isomorphic with (3×3) -diagram $\mathfrak{z}_{\mathbf{z}_m}$, see (2.16):*

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{z}_1 & : & m\mathbb{Z} = m\mathbb{Z} \twoheadrightarrow 0 \\ \downarrow \wr & & \downarrow \wr \quad \downarrow \wr \quad \downarrow \wr \\ \mathbf{b}'(f, \partial D^2) \cong \mathbf{z}_m & : & m\mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{Z} \twoheadrightarrow \mathbb{Z}_m \\ \downarrow & & \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \\ \mathbf{b}'(f) & : & 0 \hookrightarrow \mathbb{Z}_m = \mathbb{Z}_m \end{array}$$

7.2. General case. It follows from these theorems that

$$\mathbf{b}(f, V) \stackrel{(7.1)}{\cong} \mathbf{b}'(f, V) \cong \mathbf{b}'(f, \partial M), \tag{7.3}$$

where the second and third sequences coincide if $M = D^2$ and are isomorphic for $M = S^1 \times [0, 1]$ by Theorem 7.1.1(1). Our aim is to compute the sequence (7.3).

Let K be a unique critical leaf of f such that the connected component of $M \setminus K$ containing V includes no critical points of f . Equivalently, let v be the vertex of Γ_f of f corresponding to V . Then v belongs to a unique edge e of Γ_f , and K is the leaf of f corresponding to another vertex of e .

It follows from uniqueness of K that

$$h(K) = K, \quad \forall h \in \mathcal{S}(f, V). \tag{7.4}$$

Let $c = f(K) \in P$ and $\varepsilon > 0$. Denote by R_K the connected component of $f^{-1}[c - \varepsilon, c + \varepsilon]$ containing K . Decreasing ε we can assume that $R_K \setminus K$ contains no critical points of f and $R_K \cap \partial M \subset \partial R_K$ (this intersection may be empty). In particular, R_K is an f -regular neighborhood of K .

Let \mathbf{Z} be the collection of all connected components of $\overline{M \setminus R_K}$. Since by (7.4) K is $\mathcal{S}(f, V)$ -invariant, we have that so are R_K and $\overline{M \setminus R_K}$. In other words, we get a natural action of $\mathcal{S}(f, V)$ on \mathbf{Z} . Let

$$\mathcal{S}(\mathbf{Z}) = \{h \in \mathcal{S}(f, V) \mid h(Z) = Z \text{ for each } Z \in \mathbf{Z}\} \tag{7.5}$$

be its kernel of non-effectiveness. Then the quotient $\mathcal{S}(f, V)/\mathcal{S}(\mathbf{Z})$ *effectively* acts on \mathbf{Z} .

- Let $\mathbf{Z}^{fix} = \{X_0, X_1, \dots, X_a\}$ be all the elements of \mathbf{Z} invariant under all diffeomorphisms from $\mathcal{S}(f, V)$, i.e. fixed points of $\mathcal{S}(f, V)/\mathcal{S}(\mathbf{Z})$. Enumerate them so that $V \subset X_0$, and in particular, X_0 is always a cylinder. Evidently, if $M = D^2$, then all $X_i, i \geq 1$, are 2-disks. On the other hand, if $M = S^1 \times [0, 1]$, then the element of \mathbf{Z} containing another boundary component $S^1 \times 1$ is invariant under $\mathcal{S}(f, V)$ and we will always denote it by X_1 . In this case X_1 is a cylinder, and all others $X_i, i \geq 2$, must be 2-disks.

- Let also $\mathbf{Z}^{reg} := \mathbf{Z} \setminus \mathbf{Z}^{fix} = \{Y_1, \dots, Y_b\}$ be all other 2-disks of \mathbf{Z} . Thus each Y_i is not invariant under some element of $\mathcal{S}(f, V)$.

The following theorem expresses $\mathbf{b}'(f, \partial M)$ via the corresponding sequences $\{\mathbf{b}'(f|_Z, \partial Z)\}_{Z \in \mathbf{Z}}$. It is essentially based in Lemma 2.9.1,

Theorem 7.2.1. (A) *Suppose that all elements of \mathbf{Z} are invariant under $\mathcal{S}(f, V)$, which is equivalent to either of the following three conditions:*

$$\mathbf{Z}^{reg} = \emptyset, \quad \mathbf{Z} = \mathbf{Z}^{fix} = \{X_0, X_1, \dots, X_a\}, \quad \mathcal{S}(f, V) = \mathcal{S}(\mathbf{Z}).$$

Then $\mathbf{b}'(f) \cong \prod_{i=1}^a \mathbf{b}'(f|_{X_i}, \partial X_i)$:

$$\prod_{i=1}^a \Delta'(f|_{X_i}, \partial X_i) \hookrightarrow \prod_{i=1}^a \mathcal{S}'(f|_{X_i}, \partial X_i) \twoheadrightarrow \prod_{i=1}^a \mathcal{G}'(f|_{X_i}, \partial X_i), \quad (7.6)$$

and the sequence (7.2): $\mathbf{z}_1 \hookrightarrow \mathbf{b}'(f, V) \twoheadrightarrow \mathbf{b}'(f)$ is isomorphic with a split sequence (2.8.3): $\mathbf{z}_1 \hookrightarrow \mathbf{z}_1 \times \mathbf{b}'(f) \twoheadrightarrow \mathbf{b}'(f)$. In particular,

$$\mathbf{b}'(f, V) \cong \mathbf{z}_1 \times \mathbf{b}'(f) \cong \mathbf{b}'(f) \times \mathbf{z}_1 \cong \mathbf{b}'(f) \wr \mathbf{z}_1 :$$

$$\left(\prod_{i=1}^a \Delta'(f|_{X_i}, \partial X_i) \right) \times \mathbb{Z} \hookrightarrow \left(\prod_{i=1}^a \mathcal{S}'(f|_{X_i}, \partial X_i) \right) \times \mathbb{Z} \twoheadrightarrow \prod_{i=1}^a \mathcal{G}'(f|_{X_i}, \partial X_i),$$

(B) Assume that $\mathbf{Z}^{reg} = \{Y_i\}_{i=1}^b \neq \emptyset$.

(a) Then $\mathcal{S}(f, V)/\mathcal{S}(\mathbf{Z}) \cong \mathbb{Z}_m$ for some $m \geq 2$;

(b) The **effective** action of $\mathcal{S}(f, V)/\mathcal{S}(\mathbf{Z})$ on \mathbf{Z} is **semifree**, i.e. free on the set \mathbf{Z}^{reg} of non-fixed elements, and has exactly either **one** or **two** fixed elements.

In particular, m divides b and that action has exactly $c := b/m$ orbits. Fix any (2-disks) $Y_1, \dots, Y_c \in \mathbf{Z}^{reg}$ belonging to mutually distinct non-fixed \mathbb{Z}_m -orbits and define the following short exact sequence:

$$\mathbf{q} := \left(\prod_{j=1}^c \mathbf{b}'(f|_{Y_j}, \partial Y_j) \right) \wr \mathbf{z}_m : \quad (7.7)$$

$$\left(\prod_{i=1}^a \Delta'(f|_{X_i}, \partial X_i) \right)^m \times \mathbb{Z}^m \hookrightarrow \left(\prod_{i=1}^a \mathcal{S}'(f|_{X_i}, \partial X_i) \right)_m \wr \mathbb{Z} \twoheadrightarrow \prod_{i=1}^a \mathcal{G}'(f|_{X_i}, \partial X_i).$$

Then the following statements hold.

(c) If $\mathcal{S}(f, V)/\mathcal{S}(\mathbf{Z})$ has a unique fixed element, i.e. $\mathbf{Z}^{fix} = \{X_0\}$, then

$$\mathbf{b}'(f, \partial M) \cong \mathbf{q}.$$

(d) Otherwise, due to (b), $\mathcal{S}(f, V)/\mathcal{S}(\mathbf{Z})$ has exactly two fixed elements, so $\mathbf{Z}^{fix} = \{X_0, X_1\}$. Let $A_1 = \overline{M \setminus X_1}$. Then

$$\mathbf{Z}_{A_1}^{fix} = \mathbf{Z}^{fix} \setminus \{X_1\} = \{X_0\},$$

whence the restriction $f|_{A_1}$ satisfies condition (B)(c). Therefore

$$\mathbf{b}'(f|_{A_1}, \partial A_1) \cong \mathbf{q}, \quad \mathbf{b}'(f, \partial M) \stackrel{(4.14)}{\cong} \mathbf{b}'(f|_{X_1}, \partial X_1) \times \mathbf{q}.$$

Corollary 7.2.2 (Decomposition into annuli and possibly one disk). *Let M be either a 2-disk or a cylinder and $f \in \mathcal{F}(M, P)$. Then there are f -adapted subsurfaces $A_1, \dots, A_n \subset M$ having the following properties.*

(a) For $i = 1, \dots, n - 1$ the surface A_i is a **cylinder**, while A_n is either a 2-disk or a cylinder. Moreover, the intersection $A_i \cap A_j$ for $i < j$ is non-empty only for $j = i + 1$ and in this case it is a common boundary component of these subsurfaces. Also A_1 contains some boundary component of M .

(b) For each $i = 1, \dots, n - 1$ there exist $m_i, c_i \geq 1$ and certain f -adapted mutually disjoint **2-disks** $Y_{i,1}, \dots, Y_{i,c_i} \subset A_i$, such that we have an isomorphism

$$\mathbf{b}'(f|_{A_i}, \partial A_i) \cong \left(\prod_{j=1}^{c_i} \mathbf{b}'(f|_{Y_{i,j}}, \partial Y_{i,j}) \right) \wr \mathbf{z}_{m_i}, \tag{7.8}$$

while the last sequence $\mathbf{b}'(f|_{A_n}, \partial A_n)$ is isomorphic either with a sequence of type (7.8) or with \mathbf{z}_0 or with \mathbf{z}_{m_n} for some $m_n \geq 1$.

(c) $\mathbf{b}'(f, \partial M) \cong \prod_{i=1}^n \mathbf{b}'(f|_{A_i}, \partial A_i)$.

(d) The sequence (7.2): $\mathbf{z}_1 \hookrightarrow \mathbf{b}'(f, \partial M) \twoheadrightarrow \mathbf{b}'(f)$ is isomorphic with diagonal Garside sequence (2.15) for the sequences $\{\mathbf{b}'(f|_{A_i}, \partial A_i)\}_{i=1}^n$.

In order to formulate the general result about the structure of $\mathbf{b}'(f, \partial M)$ it will be convenient to introduce a series of classes of groups and short exact sequences, see Theorem 7.3.4.

7.3. Classes of groups and short exact sequences. A group B is called *crystallographic* if it admits a short exact sequence: $A \hookrightarrow B \twoheadrightarrow C$ in which C is finite and A is a maximal abelian subgroup of B being also free abelian. A crystallographic group B is *Bieberbach* if it is torsion free (i.e. has no elements of finite order).

A short exact sequence $\mathbf{u} : A \hookrightarrow B \twoheadrightarrow C$ will be called *nearly crystallographic* if $A \in \mathcal{Z}$, i.e. it is a free abelian and C is finite. In this case we also say that \mathbf{u} is *crystallographic*, if A is a maximal subgroup of B . Moreover, a (nearly) crystallographic sequence $\mathbf{u} : A \hookrightarrow B \twoheadrightarrow C$ will be called (*nearly*) *Bieberbach* if B is torsion free.

For example, for $m \geq 2$ the sequence $\mathbf{z}_m : m\mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{Z} \twoheadrightarrow \mathbb{Z}_m$ is *nearly Bieberbach* but *not Bieberbach*, since $m\mathbb{Z}$ is not a maximal subgroup of \mathbb{Z} , though the group \mathbb{Z} is Bieberbach.

A group G is *solvable* if it has a finite increasing sequence of subgroups $1 = G_0 \triangleleft G_1 \triangleleft \dots \triangleleft G_n = G$ such that G_i is normal in G_{i+1} and each quotient G_{i+1}/G_i is abelian. It is well known and is easy to check that in a short exact sequence of groups $A \hookrightarrow B \twoheadrightarrow C$ if any two groups are solvable, then so is the third one.

7.3.1. Classes of groups. Consider the following classes of groups.

- Let $\mathcal{Z} = \{\mathbb{Z}^n \mid n \geq 0\}$ be the set of all finitely generated free abelian groups.
- Let \mathcal{B} be the *minimal* set of isomorphism classes of groups such that $\{1\} \in \mathcal{B}$ and if $A, B \in \mathcal{B}$ and $m \geq 1$, then $A \times B$ and $A \wr_m \mathbb{Z} \in \mathcal{B}$ as well.
- Let \mathcal{B}_2 be the *minimal* set of isomorphism classes of groups such that $\{1\} \in \mathcal{B}_2$ and if $A, B \in \mathcal{B}_2$ then $A \times B$ and $A \wr_2 \mathbb{Z} \in \mathcal{B}_2$.
- Let also \mathcal{P} be the *minimal* set of isomorphism classes of groups such that $\{1\} \in \mathcal{P}$, and if $A, B \in \mathcal{P}$ and $m \geq 1$ then $A \times B, A \wr_m \mathbb{Z} \in \mathcal{P}$ as well.
- Let \mathcal{P}_2 be the *minimal* set of isomorphism classes of groups such that $\{1\} \in \mathcal{P}_2$, and if $A, B \in \mathcal{P}_2$ then $A \times B, A \wr_2 \mathbb{Z} \in \mathcal{P}_2$.

Evidently, $\mathcal{B}_2 \subset \mathcal{B}$ and $\mathcal{P}_2 \subset \mathcal{P}$.

It is easy to check that a group $G \in \mathcal{B}$ (resp. $\mathcal{B}_2, \mathcal{P}, \mathcal{P}_2$) if G is obtained from the unit group by finitely many operations of direct products and wreath products of the form $\cdot \wr_m \mathbb{Z}$ for some $m \geq 1$ (resp. $\cdot \wr_2 \mathbb{Z}$ only, $\cdot \wr_m \mathbb{Z}_m$ for some $m \geq 1, \cdot \wr_2 \mathbb{Z}_2$ only). For instance,

$$\begin{aligned} \mathcal{B} &\ni \{1\}, \quad \mathbb{Z} \cong \{1\} \wr_m \mathbb{Z}, \quad \mathbb{Z}^m, \quad ((\mathbb{Z}^3 \wr_2 \mathbb{Z}) \wr_m \mathbb{Z}) \times (\mathbb{Z} \wr_{18} \mathbb{Z}), \\ \mathcal{B}_2 &\ni \{1\}, \quad \mathbb{Z}^m, \quad ((\mathbb{Z}^3 \wr_2 \mathbb{Z}) \wr_2 \mathbb{Z}) \times (\mathbb{Z} \wr_2 \mathbb{Z}), \\ \mathcal{P} &\ni \{1\}, \quad \mathbb{Z}_m, \quad ((\mathbb{Z}_2^6 \wr \mathbb{Z}_8) \wr \mathbb{Z}_{11}) \times (\mathbb{Z}_3 \wr \mathbb{Z}_{15}), \\ \mathcal{P}_2 &\ni \{1\}, \quad \mathbb{Z}_2, \quad ((\mathbb{Z}_2^6 \wr \mathbb{Z}_2) \wr \mathbb{Z}_2) \times (\mathbb{Z}_2 \wr \mathbb{Z}_2). \end{aligned}$$

7.3.2. *Classes of short exact sequences.*

- Let $\widetilde{\mathcal{ZBP}}$ be the set of isomorphism classes of all *nearly crystallographic sequences* $A \hookrightarrow B \twoheadrightarrow C$, so $A \in \mathcal{Z}, B \in \mathcal{B}$, and $C \in \mathcal{P}$.
- Let $\mathcal{ZZI} = \{(\mathbf{z}_1)^m : \mathbb{Z}^m = \mathbb{Z}^m \twoheadrightarrow 1\}_{m \geq 0}$.
- Let also \mathcal{ZBP} be the *minimal* set of isomorphism classes of *short exact sequences* such that $\mathbf{z}_0 \in \mathcal{ZBP}$, and if $\mathbf{q}, \mathbf{q}' \in \mathcal{ZBP}$ and $m \in \mathbb{N}$ then $\mathbf{q} \times \mathbf{q}'$ and $\mathbf{q} \wr \mathbf{z}_m \in \mathcal{ZBP}$ as well.
- Let also \mathcal{ZBP}_2 be the *minimal* set of isomorphism classes of *short exact sequences* such that $\mathbf{z}_0 \in \mathcal{ZBP}_2$, and if $\mathbf{q}, \mathbf{q}' \in \mathcal{ZBP}_2$ then $\mathbf{q} \times \mathbf{q}'$ and $\mathbf{q} \wr \mathbf{z}_2 \in \mathcal{ZBP}_2$ as well.

Similarly, a short exact sequence \mathbf{q} belongs to \mathcal{ZBP} (resp. \mathcal{ZBP}_2) iff it can be obtained from \mathbf{z}_0 by finitely many operations of products of sequences and wreath products of the form $\cdot \wr \mathbf{z}_m, m \in \mathbb{N}$, (resp $m = 2$ only).

The following lemma describes properties of the above classes.

Lemma 7.3.3. ([44, Lemma 2.6])

- (1) Every $B \in \mathcal{B}$ is solvable and nearly Bieberbach, and every $C \in \mathcal{P}$ is solvable and finite.
- (2) $\mathbf{z}_m \in \widetilde{\mathcal{ZBP}}$ for all $m \geq 0$.
- (3) If $\mathbf{q}_i : \mathbb{Z}^{k_i} \hookrightarrow B_i \twoheadrightarrow C_i$, $i = 1, 2$, are (nearly) crystallographic (resp. (nearly) Bieberbach) and $m \geq 1$, then so are

$$\begin{aligned} \mathbf{q}_1 \times \mathbf{q}_2 : \mathbb{Z}^{k_1+k_2} &\hookrightarrow B_1 \times B_2 \twoheadrightarrow C_1 \times C_2, \\ \mathbf{q}_1 \wr \mathbf{z}_m : \mathbb{Z}^{k_1 m} \times m\mathbb{Z} &\hookrightarrow B_1 \wr_m \mathbb{Z} \twoheadrightarrow C_1 \wr_m \mathbb{Z}_m. \end{aligned}$$

- (4) $\mathcal{ZBP}_2 \subset \mathcal{ZBP} \subset \widetilde{\mathcal{ZBP}}$.

Theorem 7.3.4. ([44, Theorem 5.10]) *Let M be a connected orientable compact surface distinct from S^2 and T^2 , $f \in \mathcal{F}(M, P)$, and $V \subset M$ an f -adapted submanifold such that*

- (a) *each connected component of V is of dimension ≥ 1 , i.e. it is not a critical point of f ;*
- (b) *$V \neq \emptyset$ whenever $M = D^2$ or $S^1 \times [0, 1]$, so $\chi(M) < |V|$, whence $\mathcal{D}_{\text{id}}(M, V)$ is always contractible, and we have an isomorphism*

$$\pi_1 \mathcal{O}_f(f, V) \xrightarrow[\cong]{\partial_1} \pi_0 \mathcal{S}'(f, V).$$

Then the sequence

$$\mathbf{b}'(f, V) : \pi_0 \Delta'(f, V) \hookrightarrow \pi_0 \mathcal{S}'(f, V) \twoheadrightarrow \mathcal{G}'(f, V) \tag{7.9}$$

belongs to the class \mathcal{ZBP} .

In particular, $\pi_0 \Delta'(f, V)$ is a finitely generated free abelian group (which is already stated in Lemma 4.7.1(3)), $\pi_1 \mathcal{O}_f(f, V) \cong \pi_0 \mathcal{S}'(f, V)$ are solvable nearly Bieberbach group, and $\mathcal{G}'(f, V)$ is solvable and finite.

If $f \in \mathcal{M}^{\text{sm}p}(M, P)$ is a simple Morse map, then $\mathbf{b}'(f, V) \in \mathcal{ZBP}_2$.

Notes to the proof. Assume that $f \in \mathcal{F}(M, P)$ has exactly n critical points.

1) Suppose M is a 2-disk or a cylinder. If f has no saddle critical points, then by Theorems 7.1.1 and 7.1.2 the sequence is either \mathbf{z}_0 or $\mathbf{z}_0 \wr \mathbf{z}_1$. On the other hand, if f has critical point, then Theorem 7.2.1 shows that $\mathbf{b}'(f, \partial M)$ expresses via analogous sequences $\mathbf{b}'(f|_{X_i}, \partial X_i)$ and $\mathbf{b}'(f|_{Y_i}, \partial Y_i)$ by operations of direct products and wreath product $\cdot \wr \mathbf{z}_m$ for some $m \geq 1$. Since each X_i and Y_i is also a 2-disk and cylinder and contain less number of critical points than f , one can apply the induction on n , and obtain that $\mathbf{b}'(f, \partial M)$ is obtained from a sequence \mathbf{z}_0 by finitely many operations of direct products of short exact sequences and wreath products $\cdot \wr \mathbf{z}_m$ for some m .

2) If $\chi(M) < 0$, then by Theorem 6.1.1 $\mathbf{b}'(f, \partial M)$ is again a product of sequences of the form $\mathbf{b}'(f|_B, \partial B)$, where B is either a 2-disk or a cylinder, and therefore $\mathbf{b}'(f, \partial M)$ is also obtained from the sequence \mathbf{z}_0 by finitely many operations of direct products of short exact sequences and wreath products $\cdot \wr \mathbf{z}_m$ for some m .

If f is a generic Morse map, then an f -regular neighborhood of each critical leaf of f is a disk with two holes, which leads to the observation that in Theorem 7.2.1 we always have that $m = 2$. This implies the last statement of Theorem 7.3.4. \square

7.4. Realization theorems for $\mathbf{b}'(f, V)$. We discuss here the question when an abstract group G can be realized as one of the groups (7.9) for some (M, f, X) . The presented results are obtained in the papers S. Maksymenko and A. Kravchenko [21], B. Feshchenko and A. Kravchenko [18], I. Kuznietsova and Yu. Soroka [31].

7.4.1. *Signs on the boundary.* Let M be a compact surface. Then by definition each $f \in \mathcal{F}(M, P)$ takes constant values at connected components of ∂M . Fix an orientation on P (which is \mathbb{R} or S^1). Then for each boundary component W of M one can say whether f takes a local maximum or local minimum with respect to the orientation of P . Hence one can associate to f a function $\varepsilon_f : \pi_0 \partial M \rightarrow \{\pm 1\}$ such that $\varepsilon_f(W) = -1$ (resp $+1$) if f takes on W a local minimum (resp. maximum) with respect to the orientation of P .

For every function $\varepsilon : \pi_0 \partial M \rightarrow \{\pm 1\}$ define the following four spaces:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_\varepsilon(M, P) &= \{f \in \mathcal{F}(M, P) \mid \varepsilon_f = \varepsilon\}, \\ \mathcal{M}_\varepsilon(M, P) &= \mathcal{M}(M, P) \cap \mathcal{F}_\varepsilon(M, P), \\ \mathcal{M}_\varepsilon^{smp}(M, P) &= \mathcal{M}^{smp}(M, P) \cap \mathcal{F}_\varepsilon(M, P), \\ \mathcal{M}_\varepsilon^{gen}(M, P) &= \mathcal{M}^{gen}(M, P) \cap \mathcal{F}_\varepsilon(M, P). \end{aligned}$$

Also for every subspace $\mathcal{X} \subset \mathcal{F}(M, P)$ consider the following sets of isomorphism classes of groups

$$\mathbf{S}_\mathcal{X} = \{\pi_0 \mathcal{S}'(f, \partial M) \mid f \in \mathcal{X}\}, \quad \mathbf{G}_\mathcal{X} = \{\pi_0 \mathcal{G}'(f, \partial M) \mid f \in \mathcal{X}\},$$

and the following set of isomorphism classes of short exact sequences:

$$\Delta \mathbf{SG}_\mathcal{X} := \{\mathbf{b}'(f, \partial M) \mid f \in \mathcal{X}\}.$$

Then we have the following relations between those classes:

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_{\mathcal{M}_\varepsilon^{gen}(M, P)} &\subset \mathcal{Z}, & \mathbf{G}_{\mathcal{M}_\varepsilon^{gen}(M, P)} &= \{1\}, \\ \mathbf{S}_{\mathcal{M}_\varepsilon^{smp}(M, P)} &\subset \mathcal{B}_2, & \mathbf{G}_{\mathcal{M}_\varepsilon^{smp}(M, P)} &\subset \mathcal{P}_2, \\ \mathbf{S}_{\mathcal{M}_\varepsilon(M, P)} &\subset \mathbf{S}_{\mathcal{F}_\varepsilon(M, P)} \subset \mathcal{B}, & \mathbf{G}_{\mathcal{M}_\varepsilon(M, P)} &\subset \mathbf{G}_{\mathcal{F}_\varepsilon(M, P)} \subset \mathcal{P} \\ \\ \Delta \mathbf{SG}_{\mathcal{M}_\varepsilon^{gen}(M, P)} &\subset \mathcal{ZZI}, \\ \Delta \mathbf{SG}_{\mathcal{M}_\varepsilon^{smp}(M, P)} &\subset \mathcal{ZBP}_2, \\ \Delta \mathbf{SG}_{\mathcal{M}_\varepsilon(M, P)} &\subset \Delta \mathbf{SG}_{\mathcal{F}_\varepsilon(M, P)} \subset \mathcal{ZBP}. \end{aligned}$$

The inclusions for generic Morse maps follow from Lemma 4.5.1, and all others from Theorem 7.3.4.

Theorem 7.4.2. *Let M be an orientable compact surface distinct from T^2 and S^2 , and $\varepsilon : \pi_0\partial M \rightarrow \{\pm 1\}$ be any function.*

(1) *If $M = S^1 \times [0, 1]$, and ε takes the same value on both connected components of ∂M , then*

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_{\mathcal{M}_\varepsilon^{smp}(M,P)} &= \mathcal{B}_2 \setminus \{1\}, & \mathbf{S}_{\mathcal{M}_\varepsilon(M,P)} &= \mathbf{S}_{\mathcal{F}_\varepsilon(M,P)} = \mathcal{B} \setminus \{1\}, \\ \mathbf{G}_{\mathcal{M}_\varepsilon^{smp}(M,P)} &= \mathcal{P}_2, & \mathbf{G}_{\mathcal{M}_\varepsilon(M,P)} &= \mathbf{G}_{\mathcal{F}_\varepsilon(M,P)} = \mathcal{P}, \\ \Delta\mathbf{SG}_{\mathcal{M}_\varepsilon^{smp}(M,P)} &= \mathcal{ZBP}_2 \setminus \{\mathbf{z}_0\}, & \Delta\mathbf{SG}_{\mathcal{M}_\varepsilon(M,P)} &= \Delta\mathbf{SG}_{\mathcal{F}_\varepsilon(M,P)} = \\ & & &= \mathcal{ZBP} \setminus \{\mathbf{z}_0\}. \end{aligned}$$

In particular, for every $f \in \mathcal{F}_\varepsilon(M, P)$, the group $\pi_0\mathcal{S}'(f, \partial M)$ is always non-trivial.

(2) *In all other cases of M and ε we have that*

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_{\mathcal{M}_\varepsilon^{smp}(M,P)} &= \mathcal{B}_2, & \mathbf{S}_{\mathcal{M}_\varepsilon(M,P)} &= \mathbf{S}_{\mathcal{F}_\varepsilon(M,P)} = \mathcal{B}, \\ \mathbf{G}_{\mathcal{M}_\varepsilon^{smp}(M,P)} &= \mathcal{P}_2, & \mathbf{G}_{\mathcal{M}_\varepsilon(M,P)} &= \mathbf{G}_{\mathcal{F}_\varepsilon(M,P)} = \mathcal{P}, \\ \Delta\mathbf{SG}_{\mathcal{M}_\varepsilon^{smp}(M,P)} &= \mathcal{ZBP}_2, & \Delta\mathbf{SG}_{\mathcal{M}_\varepsilon(M,P)} &= \Delta\mathbf{SG}_{\mathcal{F}_\varepsilon(M,P)} = \mathcal{ZBP}. \end{aligned}$$

Notes to the proof. For groups $\mathbf{G}_\mathcal{X}$ the proof is given in S. Maksymenko and A. Kravchenko [21], and for groups $\mathbf{S}_\mathcal{X}$ by I. Kuznietsova and Yu. Soroka [31]. Notice that in the case (1) any map $f \in \mathcal{F}_\varepsilon(M, P)$ has local minimum (or local maximum) on both boundary components of M . Therefore f must have saddle critical points inside M , and therefore by Theorem 7.2.1 the group $\pi_0\mathcal{S}'(f, \partial M)$ is always non-trivial. This explains why one should remove the unit group $\{1\}$ from the classes in the first line of (1).

A thorough analysis of arguments in [31] shows that they actually contain realization theorems for sequences $\mathbf{b}'(f, \partial M)$. This gives the corresponding relations for $\Delta\mathbf{SG}_\mathcal{X}$.

The case $M = T^2$ is described in Theorem 8.3.3 below. □

8. MAPS ON 2-TORUS

In this section we will describe the results of S. Maksymenko, B. Feshchenko, and A. Kravchenko [9–12, 18, 45–47] about algebraic structure of $\pi_1\mathcal{O}_f(f)$ for the maps $f \in \mathcal{F}(T^2, P)$.

Let $f \in \mathcal{F}(T^2, P)$. If f has no critical points, then f is a locally trivial fibration $T^2 \rightarrow S^1$ and the homotopy types of stabilizers and orbits for the pair (f, \emptyset) is described by Theorem 5.2.2(D).

Assume that f has at least one critical point. Then we have the following diagram (5.7) relating all the groups which we are interested in:

$$\begin{array}{ccc}
 \pi_1 \mathcal{D}(T^2) \oplus \pi_0 \Delta'(f) & \xrightarrow{p_2} & \pi_0 \Delta'(f) \\
 p_1 \downarrow & \searrow^{p_1 \oplus \psi_1} & \downarrow \\
 \pi_1 \mathcal{D}(T^2) & \xrightarrow{p_1} & \pi_1 \mathcal{O}_f(f) \xrightarrow{\partial_1} \pi_0 \mathcal{S}'(f) \\
 & & \searrow^{\rho \circ \partial_1} \downarrow \rho \\
 & & \mathcal{G}'(f)
 \end{array} \tag{8.1}$$

Recall that by Lemma 4.3.3 the graph Γ_f of f is either a tree or contains a unique cycle. In each of those cases we will describe this diagram up to isomorphism.

Lemma 8.1. ([18, Lemma 5.4]) *Let $f \in \mathcal{F}(T^2, P)$. If f is either simple, or $P = S^1$ and f is not null-homotopic, then Γ_f contains a cycle.*

8.2. Maps $f \in \mathcal{F}(T^2, P)$ whose graph Γ_f contains a cycle. Suppose $f : M \rightarrow P$ be a map from $\mathcal{F}(T^2, P)$ such that its graph Γ_f contains a simple cycle γ . Let x be a point belonging to some open edge of γ . Then x corresponds to some regular leaf C_0 of f . Let

$$\mathcal{C} = \{h(C_0) \mid h \in \mathcal{S}'(f)\}$$

be the set of images of C_0 under all maps of $\mathcal{S}'(f)$. Then \mathcal{C} consists of finitely many, say n , leaves of f which can be cyclically ordered along T^2 and enumerated as follows:

$$C_0, C_1, \dots, C_{n-1}.$$

If $n \geq 2$, then for each i the leaves C_i and C_{i+1} bound a cylinder Q_i containing no other leaves C_j and $\text{Int}Q_j \cap \text{Int}Q_i = \emptyset$ for $i \neq j$. Every $h \in \mathcal{S}(f)$ cyclically shift those cylinders. Denote by Q one of them, e.g. put $Q = Q_0$.

Suppose $n = 1$, so C_0 is invariant with respect to $\mathcal{S}'(f)$, then $T^2 \setminus C_0$ is an open cylinder “bounded by C_0 from both sides”. In this case we put $Q = \overline{T^2 \setminus R_{C_0}}$, where R_{C_0} is any f -regular neighborhood of C_0

Now we will define several constructions and homomorphisms.

a) Recall that $T^2 = S^1 \times S^1$ is a abelian group, and therefore for each $(a, b) \in T^2$, the shift $\eta_{a,b} : (x, y) \mapsto (x + a, y + b)$ is a diffeomorphism of T^2 . Then the correspondence $(a, b) \mapsto \eta_{a,b}$ is an embedding $\eta : T^2 \hookrightarrow \mathcal{D}_{\text{id}}(T^2)$. It is well known that η is a homotopy equivalence, see Table 5.1.

b) Let C'_0 be a simple closed curve which transversely intersects C_0 at a unique point x . It will be convenient to imagine C'_0 and C_0 as a parallel and

a meridian of T^2 . Let $\lambda = [C'_0], \mu = [C_0] \in \pi_1(T^2, x)$ be the corresponding elements of the fundamental group of T^2 . Then one can assume that

$$\lambda = (1, 0), \mu = (0, 1) \in \mathbb{Z}^2 \cong \pi_1 T^2 \xrightarrow[\cong]{\eta} \pi_1 \mathcal{D}_{\text{id}}(T^2).$$

c) Let V_0 and V_1 be the boundary components of Q . By Corollary 7.2.2 one can represent Q as a “chain” of n cylinders A_1, \dots, A_n having the following properties.

- $V_0 \subset \partial A_1, V_1 \subset \partial A_n$, and only consecutive pairs A_i and A_{i+1} intersects and $A_i \cap A_{i+1}$ is their common boundary circle;
- $\mathbf{b}'(f|_Q, \partial Q) \cong \prod_{i=1}^n \mathbf{b}'(f|_{A_i}, \partial A_i)$;

d) Let $\varepsilon : \partial Q \rightarrow \{\pm 1\}$ be the function defining the sings on the boundary of the restriction $f|_Q$, see Section 7.4.1. Thus ε takes constant values on each connected component V of ∂Q and equals $+1$ (resp -1) if f takes on V a local maximum (resp. local minimum). Then it is easy to see if $P = \mathbb{R}$, then ε takes the same value on both boundary components of ∂Q , whence by Theorem 7.4.2(1), $\pi_0 \mathcal{S}(f|_Q, \partial Q)$ is a non-trivial group. On the other hand, for the case $P = S^1$, the function ε takes distinct values on boundary components of ∂Q , whence in this case $\pi_0 \mathcal{S}(f|_Q, \partial Q)$ can be trivial, which holds, e.g. when f has no critical points, see Theorem 5.2.2(D).

e) To simplify notations define the following groups $\mathcal{A}_i := \pi_0 \mathcal{S}'(f|_{A_i}, \partial A_i)$,

$$\begin{aligned} \Delta_\partial &:= \pi_0 \Delta'(f|_Q, \partial Q), & \Delta &:= \pi_0 \Delta'(f|_Q), \\ \mathcal{S}_\partial &:= \pi_0 \mathcal{S}'(f|_Q, \partial Q), & \mathcal{S} &:= \pi_0 \mathcal{S}'(f|_Q). \end{aligned}$$

Then the latter isomorphism for the sequence $\mathbf{b}'(f|_Q, \partial Q)$ contains an isomorphism

$$\mathcal{S}_\partial \cong \prod_{i=1}^n \mathcal{A}_i.$$

f) Let $\widehat{\lambda} = ([\text{id}_Q], \dots, [\text{id}_Q], m) \in \mathcal{S}_\partial \wr \mathbb{Z}$ be the Garside element of the group $\mathcal{S}_\partial \wr \mathbb{Z}$, see §2.8. Then $\widehat{\lambda}$ contained in the center of $\mathcal{S}_\partial \wr \mathbb{Z}$.

g) Let $\widehat{\mu}_i$ be the Garside element of \mathcal{A}_i , and $\widehat{\mu} = (\widehat{\mu}_1, \dots, \widehat{\mu}_n)$ be the *diagonal Garside element* of \mathcal{S}_∂ , see (2.15). Notice $\widehat{\mu}$ is the generator of the kernel $j_0 : \mathcal{S}_\partial \rightarrow \mathcal{S}$, and corresponds to a pair of Dehn twists along boundary components of Q produces in different directions.

h) Recall that by Lemma 6.2.1(ii) there exists a section

$$\xi : \Delta \rightarrow \Delta_\partial \subset \mathcal{S}_\partial.$$

i) Then one can define the following homomorphism:

$$\alpha : \pi_1 \mathcal{D}_{\text{id}}(T^2) \times \Delta^m \rightarrow \mathcal{S}_\partial \wr \mathbb{Z},$$

$$\alpha(\lambda^a \mu^b, q_1, \dots, q_n) = (\xi(q_1) \widehat{\mu}^b, \dots, \xi(q_n) \widehat{\mu}^b, am).$$

Since $\alpha(\lambda) = \widehat{\lambda}$ and $\alpha(\mu) = (\widehat{\mu}, \dots, \widehat{\mu}, 0)$ belongs to the center of $\mathcal{S}_\partial \wr \mathbb{Z}$, one easily checks that α is in fact a well-defined homomorphism. Moreover, it is also easy to see that α is injective.

Theorem 8.2.1. ([11, 46, 47]) *Diagram (5.7) is isomorphic to the following one:*

$$\begin{array}{ccc} \pi_1 \mathcal{D}(T^2) \oplus (\pi_0 \Delta'(f|_Q))^m & \xrightarrow{p_2} & (\pi_0 \Delta'(f|_{Q_0}))^m \\ \downarrow p_1 & \searrow \alpha & \downarrow \\ \pi_1 \mathcal{D}(T^2) & \xrightarrow{\alpha} & \pi_0 \mathcal{S}'(f|_Q, \partial Q) \wr \mathbb{Z} \xrightarrow{\delta} \pi_0 \mathcal{S}'(f|_Q) \wr \mathbb{Z}_m \\ & & \downarrow \\ & & \mathcal{G}'(f|_Q) \wr \mathbb{Z}_m \end{array}$$

where $\delta(s_1, \dots, s_m, k) = (j_0(s_1), \dots, j_0(s_m), k \bmod m)$, and other arrows are obvious homomorphisms.

In particular, for the right columns of the corresponding diagrams we have the isomorphism, see (2.13):

$$\mathbf{b}'(f) \cong \mathbf{b}'(f|_Q) \wr \mathbf{z}_m.$$

8.3. Maps $f \in \mathcal{F}(T^2, P)$ whose graph Γ_f is a tree.

Lemma 8.3.1. ([45, Proposition 1]) *Suppose Γ_f is a tree. Then there exists a unique critical leaf K of f such that $T^2 \setminus K$ is a union of open 2-disks.*

It follows from uniqueness of such critical leaf, that $h(K) = K$ for all $h \in \mathcal{S}(f)$.

Let $c = f(K) \in P$. Take $\varepsilon > 0$ and consider the connected component R_K of $f^{-1}([c - \varepsilon, c + \varepsilon])$ containing K . Decreasing ε one can assume that $R_K \cap \Sigma_f = K \cap \Sigma_f$. Then R_K is an f -regular neighborhood of K , and it is also invariant with respect to $\mathcal{S}(f)$.

Similarly to §7.2 let \mathbf{Z} be the collection of all connected components of $\overline{T^2 \setminus R_K}$. Then by Lemma 8.3.1 each element of \mathbf{Z} is a 2-disk, and $\mathcal{S}(f)$ interchanges those disks. Let also

$$\mathcal{S}(\mathbf{Z}) = \{h \in \mathcal{S}'(f) \mid h(Z) = Z \text{ for each } Z \in \mathbf{Z}\} \tag{8.2}$$

be the kernel of non-effectiveness of the action of $\mathcal{S}'(f)$ on \mathbf{Z} . Then the quotient $\mathcal{S}'(f)/\mathcal{S}(\mathbf{Z})$ effectively acts on \mathbf{Z} .

Theorem 8.3.2. ([9–11, 18, 45])

(A) *Suppose all elements of \mathbf{Z} are invariant with respect to $S'(f)$. To simplify notation put*

$$\Delta := \prod_{Z \in \mathbf{Z}} \pi_0 \Delta'(f|_Z, \partial Z), \quad \mathcal{S} := \prod_{Z \in \mathbf{Z}} \pi_0 S'(f|_Z, \partial Z), \quad \mathcal{G} := \prod_{Z \in \mathbf{Z}} \mathcal{G}'(f|_Z, \partial Z).$$

Then diagram (5.7) is isomorphic to the following one:

$$\begin{array}{ccc}
 \pi_1 \mathcal{D}(T^2) \oplus \Delta & \xrightarrow{p_2} & \Delta \\
 p_1 \downarrow & \searrow & \downarrow \\
 \pi_1 \mathcal{D}(T^2) & \hookrightarrow \pi_1 \mathcal{D}(T^2) \oplus \mathcal{S} \xrightarrow{\delta} & \mathcal{S} \\
 & \searrow & \downarrow \\
 & & \mathcal{G}
 \end{array} \tag{8.3}$$

In particular, for the right column we have an isomorphism

$$\mathbf{b}'(f) \cong \prod_{Z \in \mathbf{Z}} \mathbf{b}'(f|_Z, \partial Z).$$

(B) *Otherwise, the following statements hold.*

- a) $S'(f)/S(\mathbf{Z}) \cong \mathbb{Z}_m \oplus \mathbb{Z}_n$ for some $n, m \geq 1$;
- b) *The action of $S'(f)/S(\mathbf{Z})$ on \mathbf{Z} is **free**. For instance \mathbf{Z} contains mnc disks, where $c \geq 1$ is the number of orbits of that action.*
- c) *Choose any collection Z_1, \dots, Z_c of elements of \mathbf{Z} belonging to mutually distinct orbits and for simplicity denote*

$$\Delta := \prod_{i=1}^c \pi_0 \Delta'(f|_{Z_i}, \partial Z_i), \quad \mathcal{S} := \prod_{i=1}^c \pi_0 S'(f|_{Z_i}, \partial Z_i), \quad \mathcal{G} := \prod_{i=1}^c \mathcal{G}'(f|_{Z_i}, \partial Z_i).$$

Then diagram (5.7) is isomorphic to the following one:

$$\begin{array}{ccc}
 \pi_1 \mathcal{D}(T^2) \oplus \Delta^{mn} & \xrightarrow{p_2} & \Delta^{mn} \\
 p_1 \downarrow & \searrow & \downarrow \\
 \pi_1 \mathcal{D}(T^2) & \xrightarrow{\alpha} \mathcal{S} \wr_{m,n} \mathbb{Z}^2 \xrightarrow{\delta} & \mathcal{S} \wr (\mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_n) \\
 & \searrow & \downarrow \\
 & & \mathcal{G} \wr (\mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_n)
 \end{array} \tag{8.4}$$

where $\alpha : \pi_1 T^2 \rightarrow \mathcal{S} \wr_{m,n} \mathbb{Z}$ is given by

$$\alpha(\lambda^a \mu^b) = (e, \dots, e, a \bmod m, b \bmod n)$$

and e is the unit of \mathcal{S} .

In particular, for the right column we have an isomorphism, see (2.14):

$$\mathbf{b}'(f) \cong \left(\prod_{Z \in \mathcal{Z}} \mathbf{b}'(f|_Z, \partial Z) \right) \wr \mathbf{z}_{m,n}^2.$$

Evidently, (8.3) is a particular case of (8.4) for $m = n = 1$. The last identity can also be proved using Lemma 2.10.1.

We will now formulate the results about the structure of $\mathbf{b}'(f)$ sequences for maps on T^2 similar to Theorems 7.3.4 and 7.4.2.

Define the following spaces of maps:

$$\mathcal{F}^\Psi(T^2, P) = \{f \in \mathcal{F}(T^2, P) \mid \Gamma_f \text{ is a tree}\},$$

$$\mathcal{F}^O(T^2, P) = \{f \in \mathcal{F}(T^2, P) \mid \Gamma_f \text{ contains a cycle}\},$$

$$\mathcal{M}^\Psi(T^2, P) = \mathcal{M}(T^2, P) \cap \mathcal{F}^\Psi(T^2, P),$$

$$\mathcal{M}^O(T^2, P) = \mathcal{M}(T^2, P) \cap \mathcal{F}^O(T^2, P).$$

Then Lemma 8.1 implies that we have the following inclusions:

$$\mathcal{M}^{gen}(T^2, P) \subset \mathcal{M}^{smp}(T^2, P) \subset \mathcal{M}^O(T^2, P) \subset \mathcal{F}^O(T^2, P),$$

$$\mathcal{M}^\Psi(T^2, P) \subset \mathcal{F}^\Psi(T^2, P).$$

As a consequence of Theorems 7.4.2, 8.2.1, 8.3.2 we get the following:

Theorem 8.3.3. ([18, 31]) *The following identities hold:*

$$\mathbf{S}_{\mathcal{M}^{gen}(T^2, P)} = \mathcal{Z} = \{\mathbb{Z}^n \mid n = 0, 1, \dots\},$$

$$\mathbf{S}_{\mathcal{M}^{smp}(T^2, \mathbb{R})} = \{(A \times B) \wr \mathbb{Z} \mid A, B \in \mathcal{B}_2 \setminus \{1\}, m \geq 1\},$$

$$\mathbf{S}_{\mathcal{M}^{smp}(T^2, S^1)} = \{A \wr \mathbb{Z} \mid A \in \mathcal{B}_2, m \geq 1\},$$

$$\mathbf{S}_{\mathcal{M}^O(T^2, \mathbb{R})} = \mathbf{S}_{\mathcal{F}^O(T^2, \mathbb{R})} = \{(A \times B) \wr \mathbb{Z} \mid A, B \in \mathcal{B} \setminus \{1\}, m \geq 1\},$$

$$\mathbf{S}_{\mathcal{M}^O(T^2, S^1)} = \mathbf{S}_{\mathcal{F}^O(T^2, S^1)} = \mathcal{B},$$

$$\mathbf{S}_{\mathcal{M}^\Psi(T^2, P)} = \mathbf{S}_{\mathcal{F}^\Psi(T^2, P)} = \{A \wr \mathbb{Z}^2 \mid A \in \mathcal{B}, m, n \geq 1\},$$

$$\mathbf{G}_{\mathcal{M}^{gen}(T^2, P)} = \{1\},$$

$$\mathbf{G}_{\mathcal{M}^{smp}(T^2, P)} = \{G \wr \mathbb{Z}_m \mid \text{for some } G \in \mathcal{P}_2 \text{ and } m \geq 1\},$$

$$\mathbf{G}_{\mathcal{M}^O(T^2, P)} = \mathbf{G}_{\mathcal{F}^O(T^2, P)} = \mathcal{P},$$

$$\mathbf{G}_{\mathcal{M}^\Psi(T^2, P)} = \mathbf{G}_{\mathcal{F}^\Psi(T^2, P)} = \{G \wr (\mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_n) \mid G \in \mathcal{P}, m, n \geq 1\},$$

$$\Delta \mathbf{S}\mathbf{G}_{\mathcal{M}^{gen}(T^2, P)} = \mathcal{Z}\mathcal{Z}\mathcal{I},$$

$$\Delta \mathbf{S}\mathbf{G}_{\mathcal{M}^{smp}(T^2, \mathbb{R})} = \{(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \wr \mathbf{z}_m \mid \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathcal{Z}\mathcal{B}\mathcal{P}_2 \setminus \{\mathbf{z}_0\}, m \geq 1\},$$

$$\Delta \mathbf{S}\mathbf{G}_{\mathcal{M}^{smp}(T^2, S^1)} = \{\mathbf{u} \wr \mathbf{z}_m \mid \mathbf{u} \in \mathcal{Z}\mathcal{B}\mathcal{P}, m \geq 1\},$$

$$\begin{aligned} \Delta\mathbf{SG}_{\mathcal{M}^{\mathcal{O}}(T^2,P)} &= \Delta\mathbf{SG}_{\mathcal{F}^{\mathcal{O}}(T^2,P)} = \\ &= \{(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \wr \mathbf{z}_m \mid \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathcal{ZBP} \setminus \{\mathbf{z}_0\}, m \geq 1\}, \\ \Delta\mathbf{SG}_{\mathcal{M}^{\Psi}(T^2,P)} &= \Delta\mathbf{SG}_{\mathcal{F}^{\Psi}(T^2,P)} = \\ &= \{\mathbf{u} \wr \mathbf{z}_{m,n}^2 \mid \mathbf{u} \in \mathcal{ZBP}, m, n \geq 1\}. \end{aligned}$$

The proof for classes $\mathbf{G}_{\mathcal{X}}$ is given in [18] and for $\mathbf{S}_{\mathcal{X}}$ in [31]. Those proofs imply realization theorems for $\Delta\mathbf{SG}_{\mathcal{X}}$.

Partial computation of sequences $\mathbf{b}'(f)$ were obtained in [19, 20] and in [29] for the cases when M is 2-sphere and Möbius band respectively. They are not complete, and therefore we do not present them here.

9. FIRST HOMOLOGY GROUPS OF ORBITS

Let M be a connected compact orientable surface distinct from S^2 , and $f \in \mathcal{F}(M, P)$. Let also

$$\mathcal{B}' = \mathbf{S}_{\mathcal{F}^{\Psi}(T^2,P)} = \{A \wr_{m,n} \mathbb{Z}^2 \mid A \in \mathcal{B}, m, n \geq 1\}.$$

Then by Theorems 8.3.3 and 7.4.2 the fundamental group $G = \pi_1 \mathcal{O}_f(f)$ belongs either to \mathcal{B} or to \mathcal{B}' . Moreover, as mentioned after definitions class \mathcal{B} in Sections 7.3.1, G is obtained from the unit group by finitely many operations of direct products and wreath products of the form $\cdot \wr_m \mathbb{Z}$, and (for the case when $M = T^2$ and Γ_f is a tree) possibly a *unique and the last* operation of wreath product of the form $\cdot \wr_{a,b} \mathbb{Z}^2$ for some $a, b \geq 1$. One can formalize this observation as follows.

Consider the following two alphabets:

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= \{ 1, \mathbb{Z}, (,), \times \} \cup \{ \wr_a \mathbb{Z} \}_{a \geq 1} \\ \mathcal{A}' &= \mathcal{A} \cup \{ \wr_{a,b} \mathbb{Z}^2 \}_{a,b \geq 1}, \end{aligned}$$

so \mathcal{A} it consists of the unit group 1, group on integers \mathbb{Z} , brackets “(” and “)”, a product sign “ \times ”, and *wreath product with \mathbb{Z} symbols* “ $\wr_a \mathbb{Z}$ ” for all $a \geq 1$, while \mathcal{A}' additionally contains *wreath products with \mathbb{Z}^2 symbols* “ $\wr_{a,b} \mathbb{Z}^2$ ” for all $a, b \geq 1$.

Then every group $G \in \mathcal{B}$ (resp. \mathcal{B}') is written (though not in a unique way) as a word w in the alphabet \mathcal{A} (resp. \mathcal{A}'). For example, \mathbb{Z}^2 can be written by the following words:

$$\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, \quad \mathbb{Z} \times (\wr_a \mathbb{Z}), \quad 1 \times (\wr_a \mathbb{Z}) \times (\wr_b \mathbb{Z}), \quad 1 \wr_{a,b} (\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}).$$

for any $a, b \geq 1$. Of course, there are words which do not define a group, e.g. $\underbrace{\})\mathbb{Z}\{)}_4$.

Given a group $G \in \mathcal{B}$ (resp. \mathcal{B}') every word w which correctly defines G will be called a *realization of G in the alphabet \mathcal{A} (resp. \mathcal{A}')*. Denote by $\beta_1(w)$ the number of symbols \mathbb{Z} in the word w .

The following result is obtained by I. Kuznietsova and Yu. Soroka as a consequence of Lemma 2.6.1.

Theorem 9.1 ([31]). *Let $G \in \mathcal{B}$ (resp. \mathcal{B}'), and w be any realization of G in the alphabet \mathcal{A} (resp. \mathcal{A}'). Then the center and the abelianization of G are free abelian groups of the same rank $\beta_1(w)$:*

$$Z(G) \cong G/[G, G] \cong \mathbb{Z}^{\beta_1(w)}.$$

In particular, $\beta_1(w)$ does not depend on a concrete realization w of G in the alphabet \mathcal{A} (resp. \mathcal{A}').

Recall that by Hurewicz theorem, e.g. [15, Theorem 2A.1], for any path connected topological space X with the fundamental group $G = \pi_1 X$ we have an isomorphism $H_1(X, \mathbb{Z}) \cong G/[G, G]$. Hence we get the following

Corollary 9.2 ([31]). *Let M be a connected compact orientable surface distinct from S^2 , $f \in \mathcal{F}(M, P)$, $G = \pi_1 \mathcal{O}_f(f)$, and β_1 be the number of symbols \mathbb{Z} in any realization of G in the alphabet \mathcal{A} (or \mathcal{A}'). Then the first homology group $H_1(\mathcal{O}_f(f), \mathbb{Z}) \cong G/[G, G]$ is a free abelian group of rank β_1 , that is β_1 is the first Betti number of the orbit $\mathcal{O}_f(f)$.*

REFERENCES

- [1] G. M. Adelson-Welsky, A. S. Kronrode. Sur les lignes de niveau des fonctions continues possédant des dérivées partielles. *C. R. (Doklady) Acad. Sci. URSS (N.S.)*, 49:235–237, 1945.
- [2] A. V. Bolsinov, A. T. Fomenko. *Introduction to the topology of integrable Hamiltonian systems*. “Nauka”, Moscow, 1997 (in Russian).
- [3] P. T. Church, J. G. Timourian. Differentiable open maps of $(p + 1)$ -manifold to p -manifold. *Pacific J. Math.*, 48:35–45, 1973, <http://projecteuclid.org/euclid.pjm/1102945698>.
- [4] E. N. Dancer. Degenerate critical points, homotopy indices and Morse inequalities. II. *J. Reine Angew. Math.*, 382:145–164, 1987.
- [5] K. A. de Rezende, R. D. Franzosa. Lyapunov graphs and flows on surfaces. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 340(2):767–784, 1993, doi: 10.2307/2154676.
- [6] Ketty A. de Rezende, Guido G. E. Ledesma, Oziride Manzoli-Neto, Gioia M. Vago. Lyapunov graphs for circle valued functions. *Topology Appl.*, 245:62–91, 2018, doi: 10.1016/j.topol.2018.06.008.
- [7] C. J. Earle, J. Eells. The diffeomorphism group of a compact Riemann surface. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 73:557–559, 1967.

- [8] C. J. Earle, A. Schatz. Teichmüller theory for surfaces with boundary. *J. Differential Geometry*, 4:169–185, 1970.
- [9] B. Feshchenko. Deformation of smooth functions on 2-torus whose Kronrod-Reeb graphs is a tree. In *Topology of maps of low-dimensional manifolds*, volume 12 of *Pr. Inst. Mat. Nats. Akad. Nauk Ukr. Mat. Zastos.*, pages 204–219. Natsional. Akad. Nauk Ukraini, Inst. Mat., Kiev, 2015.
- [10] B. Feshchenko. Actions of finite groups and smooth functions on surfaces. *Methods Funct. Anal. Topology*, 22(3):210–219, 2016.
- [11] B. Feshchenko. Deformations of smooth functions on 2-torus. *Proc. Int. Geom. Cent.*, 12(3):30–50, 2019, doi: 10.15673/tmgc.v12i3.1528.
- [12] B. Feshchenko. Deformations of circle-valued Morse functions on 2-torus. 2021, <https://arxiv.org/abs/2104.06151>.
- [13] John Franks. Nonsingular Smale flows on S^3 . *Topology*, 24(3):265–282, 1985, doi: 10.1016/0040-9383(85)90002-3.
- [14] André Gramain. Le type d’homotopie du groupe des difféomorphismes d’une surface compacte. *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)*, 6:53–66, 1973.
- [15] Allen Hatcher. *Algebraic topology*. Cambridge University Press, Cambridge, 2002.
- [16] Morris W. Hirsch. *Differential topology*, volume 33 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 1994. Corrected reprint of the 1976 original.
- [17] William Jaco, Peter B. Shalen. Surface homeomorphisms and periodicity. *Topology*, 16(4):347–367, 1977.
- [18] A. Kravchenko, B. Feshchenko. Automorphisms of Kronrod-Reeb graphs of Morse functions on 2-torus. *Methods Funct. Anal. Topology*, 26(1):88–96, 2020.
- [19] A. Kravchenko, S. Maksymenko. Automorphisms of Kronrod-Reeb graphs of Morse functions on 2-sphere. *Proc. Int. Geom. Cent.*, 11(4):72–79, 2018, doi: 10.15673/tmgc.v11i4.1306.
- [20] A. Kravchenko, S. Maksymenko. Automorphisms of cellular divisions of 2-sphere induced by functions with isolated critical points. *Zh. Mat. Fiz. Anal. Geom.*, 16(2):138–160, 2020, doi: 10.15407/mag16.02.138.
- [21] A. Kravchenko, S. Maksymenko. Automorphisms of Kronrod-Reeb graphs of Morse functions on compact surfaces. *Eur. J. Math.*, 6(1):114–131, 2020, doi: 10.1007/s40879-019-00379-8.
- [22] A. S. Kronrod. On functions of two variables. *Uspehi Matem. Nauk (N.S.)*, 5(1(35)):24–134, 1950.
- [23] E. A. Kudryavtseva. Special framed Morse functions on surfaces. *Vestnik Moskov. Univ. Ser. I Mat. Mekh.*, (4):14–20, 2012, doi: 10.3103/S0027132212040031.
- [24] E. A. Kudryavtseva. The topology of spaces of Morse functions on surfaces. *Math. Notes*, 92(1-2):219–236, 2012, doi: 10.1134/S0001434612070243. Translation of *Mat. Zametki* 92 (2012), no. 2, 241–261.
- [25] E. A. Kudryavtseva. On the homotopy type of spaces of Morse functions on surfaces. *Mat. Sb.*, 204(1):79–118, 2013, doi: 10.1070/SM2013v204n01ABEH004292.
- [26] E. A. Kudryavtseva. On the homotopy type of spaces of Morse functions on surfaces. *Sb. Math.*, 204(1):75–113, 2013.
- [27] E. A. Kudryavtseva. Topology of spaces of functions with prescribed singularities on the surfaces. *Dokl. Akad. Nauk*, 93(3):264–266, 2016.
- [28] E. A. Kudryavtseva, D. A. Permyakov. Framed Morse functions on surfaces. *Mat. Sb.*, 201(4):33–98, 2010, doi: 10.1070/SM2010v201n04ABEH004081.
- [29] I. Kuznietsova, S. Maksymenko. Homotopy properties of smooth functions on the Möbius band. *Proc. Int. Geom. Cent.*, 12(3):1–29, 2019, doi: 10.15673/tmgc.v12i3.1488.

- [30] I. Kuznietsova, S. Maksymenko. Deformations of smooth functions on a Möbius band. in preparation, 2020.
- [31] I. Kuznietsova, Yu. Soroka. First Betti numbers of orbits of Morse functions on surfaces. *Ukrain. Mat. Zh.*, 73(2):179–200, 2021, doi: 10.37863/umzh.v73i2.2383.
- [32] S. Maksymenko. Smooth shifts along trajectories of flows. *Topology Appl.*, 130(2):183–204, 2003, doi: 10.1016/S0166-8641(02)00363-2.
- [33] S. Maksymenko. Hamiltonian vector fields of homogeneous polynomials in two variables. *Pr. Inst. Mat. Nats. Akad. Nauk Ukr. Mat. Zastos.*, 3(3):269–308, arXiv:math/0709.2511, 2006.
- [34] S. Maksymenko. Homotopy types of stabilizers and orbits of Morse functions on surfaces. *Ann. Global Anal. Geom.*, 29(3):241–285, 2006, doi: 10.1007/s10455-005-9012-6.
- [35] S. Maksymenko. Stabilizers and orbits of smooth functions. *Bull. Sci. Math.*, 130(4):279–311, 2006, doi: 10.1016/j.bulsci.2005.11.001.
- [36] S. Maksymenko. Homotopy dimension of orbits of Morse functions on surfaces. In *Travaux mathématiques. Vol. XVIII*, volume 18 of *Trav. Math.*, pages 39–44. Fac. Sci. Technol. Commun. Univ. Luxemb., Luxembourg, 2008.
- [37] S. Maksymenko. Connected components of partition preserving diffeomorphisms. *Methods Funct. Anal. Topology*, 15(3):264–279, 2009.
- [38] S. Maksymenko. ∞ -jets of diffeomorphisms preserving orbits of vector fields. *Cent. Eur. J. Math.*, 7(2):272–298, 2009.
- [39] S. Maksymenko. Functions on surfaces and incompressible subsurfaces. *Methods Funct. Anal. Topology*, 16(2):167–182, 2010.
- [40] S. Maksymenko. Functions with isolated singularities on surfaces. *Geometry and topology of functions on manifolds. Pr. Inst. Mat. Nats. Akad. Nauk Ukr. Mat. Zastos.*, 7(4):7–66, 2010.
- [41] S. Maksymenko. Image of a shift map along the orbits of a flow. *Indiana University Mathematics Journal*, 59(5):1587–1628, 2010.
- [42] S. Maksymenko. Local inverses of shift maps along orbits of flows. *Osaka Journal of Mathematics*, 48(2):415–455, 2011.
- [43] S. Maksymenko. Homotopy types of right stabilizers and orbits of smooth functions on surfaces. *Ukrainian Math. Journal*, 64(9):1186–1203, 2012 (in Russian).
- [44] S. Maksymenko. Deformations of functions on surfaces by isotopic to the identity diffeomorphisms. *Topology Appl.*, 282:107312, 48, 2020, doi: 10.1016/j.topol.2020.107312.
- [45] S. Maksymenko, B. Feshchenko. Homotopic properties of the spaces of smooth functions on a 2-torus. *Ukrainian Math. J.*, 66(9):1346–1353, 2015, doi: 10.1007/s11253-015-1014-3. Translation of *Ukrain. Mat. Zh.* 66 (2014), no. 9, 1205–1212.
- [46] S. Maksymenko, B. Feshchenko. Orbits of smooth functions on 2-torus and their homotopy types. *Mat. Stud.*, 44(1):67–83, 2015, doi: 10.15330/ms.44.1.67-83.
- [47] S. Maksymenko, B. Feshchenko. Smooth functions on 2-torus whose Kronrod-Reeb graph contains a cycle. *Methods Funct. Anal. Topology*, 21(1):22–40, 2015.
- [48] Richard S. Palais. Homotopy theory of infinite dimensional manifolds. *Topology*, 5:1–16, 1966.
- [49] A. O. Prishlyak. Topological equivalence of smooth functions with isolated critical points on a closed surface. *Topology Appl.*, 119(3):257–267, 2002, doi: 10.1016/S0166-8641(01)00077-3.
- [50] Georges Reeb. Sur les points singuliers d’une forme de Pfaff complètement intégrable ou d’une fonction numérique. *C. R. Acad. Sci. Paris*, 222:847–849, 1946.
- [51] Francis Sergeraert. Un théorème de fonctions implicites sur certains espaces de Fréchet et quelques applications. *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)*, 5:599–660, 1972.

- [52] S. Smale. Diffeomorphisms of the 2-sphere. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 10:621–626, 1959.
- [53] Andrzej Szczepański. *Geometry of crystallographic groups*, volume 4 of *Algebra and Discrete Mathematics*. World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., Hackensack, NJ, 2012, doi: 10.1142/8519.
- [54] Bin Yu. Lyapunov graphs of nonsingular Smale flows on $S^1 \times S^2$. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 365(2):767–783, 2013, doi: 10.1090/S0002-9947-2012-05636-4.

Sergiy Maksymenko

INSTITUTE OF MATHEMATICS, KIEV, UKRAINE

Email: maks@imath.kiev.ua

ORCID: orcid.org/0000-0002-0062-5188

Symmetries and supersymmetries of generalized Schrödinger equations

A. G. Nikitin

Abstract. The contemporary results concerning Lie symmetries, higher symmetries and supersymmetries in generalized Schrödinger equations are presented. Namely, the standard Schrödinger equation with scalar and vector potentials and position dependent mass Schrödinger equations are discussed as well as the equations with matrix potentials. Group classification of the mentioned equations is carried out, i.e., all inequivalent versions of them are presented together with the admitted Lie symmetries. An extended class of exactly solvable quantum mechanical problems admitting higher symmetries and supersymmetries is specified.

Анотація. Предметом статті є класичні та сучасні результати відносно ліївських, вищих та суперсиметрій стандартних та узагальнених рівнянь Шредінгера. А саме, описано симетрії рівняння Шредінгера, що включає скалярний та векторний потенціал зовнішнього електромагнітного поля, рівняння Шредінгера-Паулі та рівняння Шредінгера для частинок зі змінною масою. Проведено групову класифікацію згаданих рівнянь, тобто знайдені всі їх нееквівалентні версії разом з повними наборами неперервних груп перетворень залежних та незалежних змінних, що зберігають їх форму. Представлено логічно замкнену колекцію точно розв'язних квантовомеханічних систем, що володіють вищими симетріями та суперсиметріями.

2010 Mathematics Subject Classification: 17B80, 35A30, 35J10, 81R12

UDC 517.958:512.816

Keywords: integrability, superintegrability, supersymmetry, Lie symmetry, position dependent mass, matrix potential, shape invariance.

1. INTRODUCTION

The well known statement that mathematics is the queen of sciences can be prolonged by the following maxima: the queen of mathematics is symmetry. Indeed, symmetry appears as a very effective tool in numerous fields of mathematics, but in the present paper we restrict ourselves to symmetries of differential equations.

Starting with the pioneering papers and books of Sophus Lie, just symmetries play more and more recognised role in the qualitative analysis of differential equations and construction of their solutions. The interest to the classical Lie results was reanimated thanks to efforts of Lev Ovsianikov [74], but also of Nail Ibragimov [2], Wilhelm Fushchych [30] and their collaborators.

It is important to note that Lie symmetries (i.e., invariance with respect to continuous transformation groups) are representing only a very restricted part of symmetries connected with differential equations. Let us enumerate some important kinds of symmetries which generalize the Lie ones.

First we can mention so called hidden symmetries whose existence for relativistic wave equations had been discussed in [27, 28, 30]. The specific property of such symmetries is that they are generated by integro-differential operators.

The next important class of symmetries includes so called conditional symmetries, see, e.g., [30]. To find them it is necessary to add some additional conditions on solutions of the equation under study. In particular these conditions can be chosen as conditions of invariance with respect of some one parametrical Lie groups. In this way it is possible to find new exact solutions which cannot be obtained in the traditional Lie approach.

In seventieth of the previous century a new qualitatively new symmetry in physics has been discovered and called *supersymmetry* (SUSY) see, e.g., [35, 36, 86, 89] but also [1, 24, 39, 41, 45, 49, 80, 81] where the idea of SUSY was formulated in somewhat rudimentary form. Its rather specific property is the existence of symmetry transformations mixing bosonic and fermionic states.

Mathematically, SUSY is operating with the graded Lie algebras instead of the usual ones, and the corresponding group parameters are not numbers but Grassmannian variables. Moreover, just SUSY generated the essential progress in the related fields of mathematics.

One of attractive properties of SUSY is that it presents effective tools for understanding the relations between spectra of different Hamiltonians as well as for explaining degeneracy of their spectra, for constructing exactly or quasi-exactly solvable systems, for justifying formulations of initial and boundary problems, etc.; see, e.g., surveys [18, 21, 33] and monographs [8, 40].

It generated a very attractive approach to quantum mechanical problems called supersymmetric quantum mechanics (SSQM).

The SSQM was created by Witten [91, 92] as a toy model for illustration of global properties of the quantum field theory. Now it becomes a fundamental field attracting the interest of numerous physicists and mathematicians. In particular the SSQM presents powerful tools for explicit solution of quantum mechanical problems using the shape invariance approach [32]. The number of problems satisfying the shape invariance condition is rather restricted but includes the majority of exactly solvable Schrödinger equations.

An important application of SUSY in quantum mechanics is the classification of isospectral Hamiltonians. In addition to the standard SUSY there appear more refined approaches which presuppose using intertwining operators of higher order [6], the N -fold supersymmetry [82] and the hidden nonlinear supersymmetry [20]. An important field of the contemporary SUSY is connected with using of so-called exceptional orthogonal polynomials [72, 78].

Let us mention that there exist also other generalized SUSYs which include the standard SUSY as a particular case. We can mention so called parasupersymmetry [10, 11, 13, 79], which has good roots in real problems of mathematical physics [14, 15].

In addition to SUSY, there are other important generalized symmetries of differential equations like higher order symmetries which specify superintegrable systems and equations admitting solutions in separated variables. We will discuss them in application to Schrödinger equation and some of its generalizations. They belong to fundamental tools of quantum mechanics and present us a perfect field for application of different kinds of symmetries, which can be extended to many other partial differential equations.

We will not discuss generalizations of the standard SUSY in quantum mechanics mentioned above, but restrict ourselves to the standard SUSY quantum mechanics with the first order intertwining operators [12]. In addition, the systems with extended SUSY as well as systems including SEs with Pauli and spin-orbit couplings and with position dependent mass will be considered. Notice that just these fields are the subjects of current interest of numerous investigators.

Let us note that there are two faces of SUSY in quantum mechanics. First, there exist QM systems like the charged particle with spin $1/2$ in the constant and homogeneous magnetic field which admit constants of motion forming superalgebras. Secondly, it is possible to indicate the QM systems with "hidden" SUSY like the Hydrogen atom, and just these systems can

be solved exactly using the shape invariance of the related Schrödinger equations. We will discuss both types of SUSY.

An inspiring example of QM problem with a shape invariant potential was discovered by Pron'ko and Stroganov [77] while the relativistic version of this problem was discussed in [23].

The specificity of the PS problem is that it can be reformulated using *matrix superpotential* while in the standard SUSY in quantum mechanics the superpotential is a scalar function. Matrix potentials and superpotentials naturally appears in quantum mechanical models including particles with spin (see, e.g., [19, Sections 10 and 11]) and in multidimensional models of SSQM [3, 37]. Particular examples of such superpotentials was discussed in [4, 5, 7, 22, 25, 38]. In papers [83, 84] such superpotentials were used for modelling the motion of a spin $\frac{1}{2}$ particle in superposed magnetic and scalar fields. In paper [25] a certain class of such superpotentials was described, while more extended classes of them were classified in [67, 68]. The contemporary results in this field will be discussed in the following.

In addition to SUSY, some SEs can possess one more nice property called superintegrability. By definition, the Hamiltonian system is called superintegrable if it admits more integrals of motion than the degrees of freedom. Like SUSY, the superintegrability can cause the exact solvability of the related SE.

As a rule superintegrable systems admit higher order integrals of motion realized by differential operators of order higher than one and even higher than two [42, 54, 90]. Such integrals of motion have various interesting applications including the construction of non-standard conservation laws [29].

There exist a tight connection between the SI and SUSY, and many QM systems are both supersymmetric and superintegrable. In fact the maximal SI induces SUSY and vice versa, in spite of that this fact was never proven for generic QM systems.

The superintegrable systems which are also supersymmetric will be a special subjects of our discussion. Moreover, they will be the systems with position dependent masses which are discussed in Section 6.

2. GENERALIZED SCHRÖDINGER EQUATIONS

In this section we specify the equations which will be a subject of our analysis. First we consider the standard Schrödinger equation with a scalar potential

$$\left(i \frac{\partial}{\partial t} - H \right) \psi(t, \mathbf{x}) = 0, \quad (2.1)$$

where H is the Hamiltonian

$$H = -\frac{1}{2}\partial_a\partial_a + V(\mathbf{x}) \quad (2.2)$$

with

$$\partial_a = \frac{\partial}{\partial x_a}, \quad \mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$$

and summation is imposed over the repeating indices a over the values $a = 1, 2, \dots, n$.

Equation (2.1) for $n = 3$ is one of corner stones of quantum mechanics. In particular for $V(\mathbf{r})$ being the Coulomb potential it is a model of Hydrogen atom.

We will discuss also the stationary Schrödinger equations

$$H\psi = E\psi, \quad (2.3)$$

where H is Hamiltonian (2.2) and E is its eigenvalue. The related eigenvalue problem usually includes the square integrability condition for eigenfunctions ψ and their zero values at $\mathbf{x} = 0$.

A more general version of equation (2.2) we consider includes also vector potentials. The corresponding Hamiltonian looks as follows:

$$H = \frac{1}{2}\pi_a\pi_a + eA_0, \quad (2.4)$$

where $\pi_a = p_a - eA^a$, $p_a = -i\frac{\partial}{\partial x_a}$, A_0 and A_a are components of the vector-potential of the electromagnetic field, e is a (coupling) constant.

Equations (2.4) are modelling interactions of charged quantum mechanical particles with superpositions of electric and magnetic fields, and their symmetries also are very important and form the group-theoretical grounds of quantum mechanics.

An important class of SEs includes more general, namely, matrix potentials. Following Pauli, we write the related Hamiltonians in the following form:

$$H = \frac{1}{2}\pi_a\pi_a + eA_0 + g\sigma_a H_a, \quad (2.5)$$

where $H_a = \varepsilon_{abc}\pi_b\pi_c$ is the magnetic field vector induced by vector-potential A_a , g is the coupling constant and σ_a are Pauli matrices

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

The corresponding SE (2.1) described a charged particle with spin 1/2 interacting with the external electromagnetic field.

The Pauli term $g\sigma_a H_a$ is requested also for a bit exotic case of neutral particles with non-trivial dipole momentum, a perfect example of such particles is neutron. The related Hamiltonian again have the form (2.5) where the coupling constant e is trivial:

$$H = \frac{1}{2}\pi_a\pi_a + V(\mathbf{x}) + g\sigma_a H_a. \quad (2.6)$$

To keep a generality we introduce in (2.6) potential $V(\mathbf{x})$ which represents an external field which is not necessary of electromagnetic nature.

The next class of Hamiltonians we consider include a position dependent mass:

$$\hat{H} = p_a f(\mathbf{x}) p_a - V(\mathbf{x}) = -\partial_a f(\mathbf{x}) \partial_a - V(\mathbf{x}). \quad (2.7)$$

Here $f = f(\mathbf{x})$ is a function of spatial variables which is associated with the inverse mass.

SEs with position dependent mass are requested for description of various condensed-matter systems such as:

- semiconductors,
- quantum liquids and metal clusters,
- quantum dots,

etc. However, in contrast with standard QM systems, their symmetries and integrals of motion were never investigated systematically.

Thus the subjects of our research are just Schrödinger equations (2.1) with generic potentials presented in formulae (2.3)-(2.6). We will study their Lie symmetries and various kinds of generalized symmetries.

3. LIE SYMMETRIES

In this section we will study symmetries of the above presented equations with respect to continuous groups of transformation of their independent and dependent variables. Just symmetries of this kind has been discovered by Sophus Lie and are called Lie symmetries.

3.1. Lie symmetries of free Schrödinger equation and Schrödinger equation with scalar potential.

3.1.1. *Determining equations.* Let us start with the simplest, but maybe the most fundamental class of SEs presented by formulae (2.1) and (2.3), and search for its symmetries with respect to continuous groups of transformations. We will not apply the generic Lie approach (whose presentation can be found, e.g., in [30]) but restrict ourselves to its simplified version

which is perfectly adopted to *linear* equation (2.1). We represent the infinitesimal operator of the searched transformation group in the form

$$Q = \xi^0 \partial_t + \xi^a \partial_a + \tilde{\eta} \equiv \xi^0 \partial_t + \frac{1}{2} (\xi^a \partial_a + \partial_a \xi^a) + i\eta, \quad (3.1)$$

where $\tilde{\eta} = \frac{1}{2} \dot{\xi}_a^a + i\eta$, ξ^0 , ξ^a and η are functions of independent variables and $\partial_t = \frac{\partial}{\partial t}$.

Generator (3.1) transforms solutions of equation (2.1) into solutions if it satisfies the following operator equation

$$QL - LQ = \alpha L, \quad (3.2)$$

where $L = i\partial_t - H$ and α is an unknown function of t and \mathbf{x} .

Formula (3.2) represents the operator equation which should be satisfied within action of the operators in the l.h.s. and r.h.s. on the arbitrary differentiable function ψ . In other words the different differential operators in (3.2) should be linearly independent. Evaluating the commutator in the l.h.s. of (3.2) and equating coefficients for the linearly independent differentials we obtain the following system of equations for unknowns ξ^0 , ξ^a , η , V and α :

$$\dot{\xi}^0 = -\alpha, \quad \dot{\xi}_a^0 = 0, \quad (3.3)$$

$$\xi_a^b + \xi_b^a - \frac{2}{n} \delta_{ab} \xi^i_i = 0, \quad (3.4)$$

$$\xi_i^i = -\frac{n}{2} \alpha, \quad (3.5)$$

$$\dot{\xi}^a + \eta_a = 0, \quad (3.6)$$

$$\xi^a V_a = \alpha V + \dot{\eta}, \quad (3.7)$$

where the dot denotes the time derivative and the subindexes indicate derivatives with respect to the corresponding spatial variable: $\xi_a^0 = \frac{\partial \xi^0}{\partial x_a}$, etc.

It is typical for the determining equations that they are overdetermined. In our case they can be solved by direct calculations, which, however, include some rather nontrivial steps.

In accordance with (3.3) both ξ^0 and α do not depend on \mathbf{x} . In addition, equations (3.4) and (3.5) define the 3d Killing vector and fix the x -dependence of coefficients ξ^a :

$$\xi^a = -\frac{\alpha}{2} x_a + \theta^{ab} x_b + \nu_a, \quad (3.8)$$

where α , $\theta^{ab} = -\theta^{ba}$ and ν^a are parameters which can depend on time. On the other hand, in accordance with (3.6), θ^{ab} are time independent, thus we have five unknown functions α , η and ν^a depending on t .

Integrating (3.6) we obtain the generic form of function η :

$$\eta = \frac{\dot{\alpha}}{4}x^2 - \dot{\nu}_a x_a + f(t), \quad (3.9)$$

and equation (3.7) is reduced to the following form:

$$\left(\frac{\alpha}{2}x_a - \nu_a - \theta^{ab}x_b\right)V_a + \alpha V + \frac{\ddot{\alpha}}{4}x^2 - \ddot{\nu}_a x_a - \dot{f} = 0. \quad (3.10)$$

Thus to classify point Lie symmetries of equation (2.1) it is necessary to find all non-equivalent solutions of equation (3.10). It should be done up to equivalence transformations, whose specification is a subproblem of our classification problem. The evident equivalence transformations for (2.1) which keep the generic form of this equation but can change the exact form of the potential, are shifts, rotations and scalings of independent variables. Such transformations form the Euclid group $E(n)$ extended by simultaneous scaling of these variables. In addition, we can scale ψ and make the following transformations:

$$\psi \rightarrow \exp(itC)\psi, \quad V \rightarrow V + C,$$

where C is a constant.

The mentioned transformations exhaust the equivalence group for equation (2.1) with arbitrary potential. However, for some particular potentials there are additional equivalence transformations which will be specified in the following sections.

3.1.2. Dependence of symmetries on time. Let us specify the possible time dependence of the parameters involved into equations (3.9) and (3.10). In accordance with conditions (3.3) function ξ^0 does not depend on \mathbf{x} , and so our symmetries include the time derivative term of the following form:

$$Q = \xi^0(t)\partial_t. \quad (3.11)$$

Operators (3.1) and their part presented in (3.11) should form a basis of a Lie algebra, the same is true for. Operators (3.11) are generators of Lie groups on a line, and it was shown already by Lie that such groups are as maximum three parametrical. The corresponding Lie algebra is isomorphic to $\mathfrak{sl}(2, R)$ and, up to a change of variables these generators can be represented as:

$$Q_1 = \partial_t, \quad Q_2 = t\partial_t, \quad Q_3 = t^2\partial_t. \quad (3.12)$$

Thus corresponding function ξ^0 in (3.1) is constant, linear or quadratic.

Changing variables in (3.12) we can obtain another realizations of this algebra whose generic form is:

$$\tilde{Q}_1 = f(\tilde{t})\partial_{\tilde{t}}, \quad \tilde{Q}_2 = g(\tilde{t})\partial_{\tilde{t}}, \quad \tilde{Q}_3 = h(\tilde{t})\partial_{\tilde{t}},$$

where $f(\tilde{t})$, $g(\tilde{t})$ and $h(\tilde{t})$ are functions of the changed variable $\tilde{t} = F(t)$. In order these changes to be compatible with symmetries of SE functions $f(\tilde{t})$ and $g(\tilde{t})$ should be linear, quadratic, exponential or trigonometric functions of \tilde{t} [65]. This observation fixes the possible time dependence of functions ξ^0 included into symmetries (3.1).

3.1.3. Equivalence transformations. In addition to symmetries we consider also equivalence transformations for equation (2.1) which keep its generic form but can change exact forms of the arbitrary elements, i.e., of scalar potential A^0 and components A^1 , A^2 of the vector potential.

To describe all admissible equivalence relations we will exploit the following fact: the transformed equation should have the same generic form (3.1) and (3.8) of symmetry operators as the initial one.

Transformations of the time variable were discussed in the previous section. Since ξ^0 in (3.1) are \mathbf{x} -independent, the admissible changes of the spatial variable are:

$$t \rightarrow \tilde{t} = F^{-1}(t), \quad t = F(\tilde{t}). \quad (3.13)$$

To describe functions $F(t)$ we start with (3.12). As it is shown in the previous section we should restrict ourselves to such transformations (3.13) generate either second order polynomial, or trigonometric, or exponential functions $f(\tilde{t})$, $g(\tilde{t})$ and $h(\tilde{t})$.

The second order polynomials generate operators in the canonical form given by (3.12). The corresponding transformations have the following generic form

$$t \rightarrow \tilde{t} = \frac{\nu t + \mu}{t + \lambda}, \quad (3.14)$$

where μ , ν and λ are transformation parameters.

Whenever $f(\tilde{t})$, $g(\tilde{t})$ and $h(\tilde{t})$ are trigonometric or exponential functions the corresponding transformation (3.13) is not a symmetry but can belongs to the equivalence groupoid of (2.1). To obtain the corresponding transformed generators we have three qualitatively different possibilities for function $F(\tilde{t})$:

$$F(\tilde{t}) = \tan(\omega\tilde{t}), \quad F(\tilde{t}) = \tanh(\omega\tilde{t}) \quad (3.15)$$

and

$$F(\tilde{t}) = e^{2\omega\tilde{t}} \quad (3.16)$$

with some numeric parameter ω .

Just the changes (3.15) were used in [50] to prove the equivalence of the free particle and the oscillator SEs. However the related transformations for the wave function presented in [50] are rather cumbersome.

Let us consider in detail the change of the time variable given by (3.16). It keeps the generic form of the equations (2.1) and (2.4) provided their variables are transformed as:

$$t = e^{2\omega\tilde{t}}, \quad \mathbf{x} = \sqrt{2\omega}e^{\omega\tilde{t}}\tilde{\mathbf{x}}, \quad \psi(t, \mathbf{x}) = e^{i\omega(\tilde{\mathbf{x}}^2 - it)}\tilde{\psi}(\tilde{t}, \tilde{\mathbf{x}}). \quad (3.17)$$

Transformations (3.17) connect the free particle and repulsive oscillator equations and can be applied for all system which are conformal invariany. The inverse transforms look as follows:

$$\tilde{t} = \ln(t)/2\omega, \quad \tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{x}/\sqrt{2\omega t} \quad (3.18)$$

and

$$\tilde{\psi}(\tilde{t}, \tilde{\mathbf{x}}) = t^{-\frac{3}{2}}e^{-ix^2/t}\psi(t, \mathbf{x}). \quad (3.19)$$

The much more cumbersome transformations proposed in [50] can be represented as products of (3.17) and transformations (3.14) with

$$\nu = \lambda = -\mu = 1.$$

The components of vector $\frac{\mathbf{x}}{\sqrt{t}}$ are nothing but invariants of the dilatation transformations whose generator for the free SE can be written as follows: $X = 2t\partial_t + x_a\partial_a$. And just these invariants change the standard spatial variables in transformations (3.18).

Notice that up no normalization (3.19) can be represented as

$$\tilde{\psi}(\tilde{t}, \tilde{\mathbf{x}}) = \psi_f \psi(t, \mathbf{x}),$$

where $\psi_f = (2\sqrt{2\pi})^{-3}t^{-\frac{3}{2}}e^{-ix^2/t}$ is the fundamental solution of the free SE. Our equivalence transformations are reduced to the change of the spatial variables to the invariants of the dilatation transformation and the multiplication of the wave function by the fundamental solution.

3.1.4. *Equivalence transformations which keep the time variable invariant.*

Consider now admissible transformations of the following form:

$$x_a \rightarrow \tilde{x}_a = G_a(\mathbf{x}) + R_a(t) \quad (3.20)$$

and find such of them which do not change the time variable.

It is easy to show that functions $R_a(t)$ should be second order polynomials in t :

$$R_a = \mu_a + \nu_a t + \varkappa_a t^2.$$

Parameters μ_a and ν_a generate shifts of spatial variables and Galilei transformations respectively and so can be neglected in search for the equivalence

relations. To keep the derivative terms in (2.1) unchanged the related transformation (3.20) with non-trivial \varkappa has to be accompanied by the following transformations:

$$\begin{aligned} x_a &\rightarrow x'_a = x_a - \frac{1}{2}\kappa_a t^2 - \mu, & t &\rightarrow t' = t, \\ \psi(t, \mathbf{x}) &\rightarrow \psi'(t', \mathbf{x}') = \exp\left(-it\kappa_a x_a + \frac{i}{3}\kappa^2 t^3\right)\psi(t, \mathbf{x}), \end{aligned} \quad (3.21)$$

which connect the SE with trivial and free fall potentials [50] and also equations with potentials not depending on x_a .

Thus we specify the equivalence transformations admitted by the classified equations. They are given by relations (3.17)-(3.21), or belong to the extended Euclid group, or are product of the mentioned transformations.

3.1.5. Symmetries for equations with trivial and isotropic oscillator potentials. Setting in (3.10) $V = 0$ we easily solve the obtained reduced equations. The corresponding admissible symmetries (3.1) are linear combinations of the following operators:

$$\begin{aligned} P_a &= -i\partial_a, & M_{ab} &= x_a P_b - x_b P_a, \\ D &= 2tP_0 - x_a P_a + \frac{in}{2}, \end{aligned} \quad (3.22)$$

$$\begin{aligned} P_0 &= i\partial_t, & G_a &= tP_a - x_a, \\ A &= tD - t^2 P_0 - \frac{x^2}{2}. \end{aligned} \quad (3.23)$$

Operators (3.22), (3.23) together with the unit operator I satisfy the following commutation relations:

$$[P_0, A] = iD, \quad [P_0, D] = 2iP_0, \quad [D, A] = 2iA, \quad (3.24)$$

$$[P_a, D] = iP_a, \quad [G_a, D] = -iG_a,$$

$$[P_0, G_a] = iP_a, \quad [P_a, G_b] = i\delta_{ab}I,$$

$$[M_{ab}, M_{cd}] = i(\delta_{ad}M_{bc} + \delta_{bc}M_{ad} - \delta_{ac}M_{bd} - \delta_{bd}M_{ac}) \quad (3.25)$$

$$[P_a, M_{bc}] = i(\delta_{ab}P_c - \delta_{ac}P_b), \quad [G_a, M_{bc}] = i(\delta_{ab}G_c - \delta_{ac}G_b),$$

(the remaining commutators are equal to zero) and form the Lie algebra $\text{schr}(1, n)$ whose dimension is $N = \frac{n^2+3n+8}{2}$. Commutation relations (3.25) specify the Lie algebra $\mathfrak{g}(1, n)$ of Galilei group, which is a subalgebra of $\text{schr}(1, n)$.

Let us present some specific identities satisfied by operators (3.22) and (3.23) (see, e.g., [30]):

$$\begin{aligned} P_a G_b - P_b G_a &= M_{ab}, \\ P_a G_a + G_a P_a &= 2D + 2t(P^2 - 2P_0), \\ G_a G_a &= 2A + t^2(P^2 - 2P_0). \end{aligned} \quad (3.26)$$

On the set of solutions of equation (2.2) the term in brackets is equal to $-2V$. Since in our case $V = 0$ relations (3.26) express generators M_{ab} , D and A via bilinear combination of Galilei group generators P_a and G_a . In other words, the invariance with respect to rotation, dilatation and conformal transformations appears to be a consequence of the symmetry with respect to the displacement and Galilei transformations.

Equations (2.1), (2.2) with trivial V admit symmetries (3.22), (3.23), but also all equivalence transformations indicated in Section 3.1.3. The effect of transformations (3.17) and (3.21) is the change of the trivial potential to the quadratic one

$$V = -\frac{1}{2}\omega^2 x^2,$$

and linear potential

$$V = \kappa_a x_a$$

correspondingly.

Mapping (3.21) connects the systems with trivial and free fall potentials [50]. However, its origin can be extended to all potentials linearly dependent on a reduced number m of spatial variables with $m < n$.

Symmetries of equation (2.2) with quadratic potential can be obtained from (3.24)-(3.25) applying transformations (3.17). These transformations keep M_{ab} but make the following changes:

$$\begin{aligned} P_0 &\rightarrow A^-(\omega), & D &\rightarrow P_0, & A &\rightarrow A^+(\omega), \\ P_a &\rightarrow B_a^-(\omega), & G_a &\rightarrow B_a^+(\omega), & L_a &\rightarrow L_a, \end{aligned}$$

where

$$\begin{aligned} A^\pm(\omega) &= \exp(\pm 2\omega t)(2P_0 + \omega^2 r^2 \mp \omega(x_a P_a + P_a x_a)), \\ B_a^\pm(\omega) &= \exp(\pm \omega t)(P_a \mp \omega x_a). \end{aligned} \quad (3.27)$$

Analogously, starting with (3.22), (3.23) and making transformations (3.21) we find symmetries for equation (2.2) with the free fall potential. Their explicit form can be obtained making the changes

$$P_0 \rightarrow P_0 + \kappa_a G_a + \frac{1}{2}\kappa_a^2 t^2, \quad P_a \rightarrow P_a + \kappa_a t, \quad x_a \rightarrow x_a + \frac{1}{2}\kappa_a t^2$$

in all generators (3.22) and (3.23).

3.1.6. *Classification results for arbitrary potentials.* Let us consider equation (3.10) for arbitrary potential V . It can be solved using the separation of variables and reducing the problem to solution of systems of ordinary differential equations for time dependent functions α , ν^a and f . Then the corresponding potentials are easily calculated integrating equations (3.10) with found functions of t .

However this problem is rather complicated thanks to the presence of a big number of arbitrary parameters. We use the algebraic approach whose main idea is to exploit the basic property of symmetry operators, i.e., the fact that they should form a basis of a Lie algebra.

To find potentials compatible with symmetries (3.22) it is necessary to solve the system of equations (3.9) and (3.10) with *constant* parameters $\theta^{ab} = -\theta^{ba}$, ν^a and α . In this case we have as much as seven arbitrary parameters, which make it impossible to integrate this system directly. To achieve this goal we will restrict ourselves to inequivalent reduced combinations of these parameters.

Operators (3.22) form a basis of the extended Euclid algebra $\tilde{e}(3)$ whose non-equivalent subalgebras has been classified in [26]. These subalgebras generate non-equivalent linear combinations of symmetries which we have to consider.

In accordance with [26] algebra $\tilde{e}(3)$ has four non-equivalent one-dimensional subalgebras spanned on the following basis elements: [26]:

$$L_3 = M_{12}, \quad L_3 + P_3, \quad D + \mu L_3, \quad P_3. \quad (3.28)$$

The corresponding parameters in (3.8) are $\theta^{12} = 1$ for L_3 , $\theta^{12} = \nu^3 = 1$ for $L_3 + P_3$, $\alpha = -2$, $\theta^{12} = \mu$ for $D + \mu L_3$, $\nu^3 = 1$ for P_3 . Substituting these data into (3.35) and (3.7) we come to exactly solvable equations whose integrals give us the list of inequivalent potentials corresponding to the one-dimensional subalgebras of $\tilde{e}(3)$.

The next step is to use the non-equivalent two-dimensional subalgebras of $\tilde{e}(3)$. In accordance with [26], it is sufficient to consider the subalgebras spanned on the following basis elements:

$$\langle L_3, P_3 \rangle, \quad \langle D + \kappa L_3, P_3 \rangle, \quad \langle P_2, P_3 \rangle, \quad \langle D, L_3 \rangle. \quad (3.29)$$

Any sets (3.29) includes at least one element from (3.28). Thus we can use the results obtained at the previous step and apply to them the additional restrictions which are nothing but equations (3.35) and (3.7) generated by the second basis elements of the considered algebra.

Analogously, considering the non-equivalent three-dimensional subalgebras of $\tilde{e}(3)$, whose basis elements are presented in the following formulae

$$\langle D, P_3, L_3 \rangle, \quad \langle D, P_1, P_2 \rangle, \quad \langle L_1, L_2, L_3 \rangle, \quad \langle L_3, P_1, P_2 \rangle$$

$$\langle P_1, P_2, P_3 \rangle, \quad \langle L_3 + P_3, P_1, P_2 \rangle, \quad \langle D + \mu L_3, P_1, P_2 \rangle, \quad \mu > 0,$$

we obtain potentials compatible with three-dimensional subalgebras, and so on.

The same strategy can be used for the case of symmetries with polynomial dependence on time. Solving the determining equations corresponding to the fixed subalgebras of the extended Euclid group we find all inequivalent Hamiltonians and the related symmetries which are represented in Tables 3.1, 3.2 for $d = 3$ and Table 3.3 for $d = 2$.

In the tables $G(\cdot)$ are arbitrary function, μ , κ and ω_a are arbitrary real parameters, ε_1 , ε_2 and ε_3 independently take values ± 1 , subindexes a and k take values 1, 2, 3 and 1, 2 correspondingly. In addition, we denote $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$, $\tilde{r} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$ and $\varphi = \arctan(x_2/x_1)$.

Table 3.1: Non-quadratic potentials and symmetries for $3d$ Schrödinger equation

No	Potential V	Symmetries	Invariance algebras
1	$G(\tilde{r}, x_3) + \kappa\varphi$	$L_3 + \kappa t$	$\mathfrak{n}_{3,1}$ if $\kappa \neq 0$, $3\mathfrak{n}_{1,1}$ if $\kappa = 0$
2	$G(\tilde{r}, x_3 - \varphi) + \kappa\varphi$	$L_3 + P_3 + \kappa t$	$\mathfrak{n}_{3,1}$ if $\kappa \neq 0$, $3\mathfrak{n}_{1,1}$ if $\kappa = 0$
3	$\frac{1}{r^2}G(\frac{r}{\tilde{r}}, r^\kappa e^{-\varphi})$	$D + \kappa L_3$	$\mathfrak{s}_{2,1} \oplus \mathfrak{n}_{1,1}$
4*	$G(x_1, x_2)$	G_3, P_3	$\mathfrak{n}_{4,1}$
5*	$\frac{1}{r^2}G(\varphi, \frac{r}{\tilde{r}})$	A, D	$\mathfrak{sl}(2, R) \oplus \mathfrak{n}_{1,1}$
6*	$\frac{1}{\tilde{r}^2}G(\frac{\tilde{r}}{r})$	A, D, L_3	$\mathfrak{sl}(2, R) \oplus 2\mathfrak{n}_{1,1}$
7*	$G(\tilde{r}) + \kappa\varphi$	$L_3 + \kappa t, G_3, P_3$	$\mathfrak{s}_{5,14}$ if $\kappa \neq 0$, $\mathfrak{n}_{4,1} \oplus \mathfrak{n}_{1,1}$ if $\kappa = 0$
8	$\frac{1}{\tilde{r}^2}G(\tilde{r}^\kappa e^{-\varphi})$	$D + \kappa L_3, G_3, P_3$	$\mathfrak{s}_{5,38}$
9**	$\frac{1}{\tilde{r}^2}G(\varphi)$	A, D, G_3, P_3	$\mathfrak{sl}(2, R) \not\subset \mathfrak{n}_{3,1}$
10*	$G(x_1)$	G_3, P_3, P_2, G_2, L_1	$\mathfrak{g}(1, 2)$
11	$G(r)$	L_1, L_2, L_3	$\mathfrak{so}(3) \oplus 2\mathfrak{n}_{1,1}$
12*	$\frac{\kappa}{r^2}$	A, D, L_1, L_2, L_3	$\mathfrak{sl}(2, R) \oplus \mathfrak{so}(3) \oplus \mathfrak{n}_{1,1}$
13**	$\frac{\kappa}{\tilde{r}^2}$	A, D, G_3, P_3, L_3	$\mathfrak{sl}(2, R) \not\subset \mathfrak{n}_{3,1} \oplus \mathfrak{n}_{1,1}$
14**	$\frac{\kappa}{x_1^2}$	$A, D, G_2, G_3,$ P_2, P_3, L_1	$\text{schr}(1, 2)$

All presented systems by construction admit symmetry P_0 and the unit operator I . The additional symmetries are presented in Columns 3, where $P_a, L_a = \frac{1}{2}\varepsilon_{abc}M^{bc}$, $D, A, B_a^\varepsilon(\omega_a)$, and $\hat{B}_a^\varepsilon(\omega_a)$ are generators (3.22), (3.23) and (3.27).

The related symmetry algebras are fixed in the fourth columns, where $\mathfrak{n}_{a,b}$ and $\mathfrak{s}_{a,b}$ are nilpotent and solvable Lie algebras of dimension a . To identify these algebras for $a \leq 6$ we use the notations presented in [88]. The symbol $2\mathfrak{n}_{1,1}$ (or $3\mathfrak{n}_{1,1}$) denotes the direct sum of two (or three) one-dimension algebras. In addition, $g(1,2)$ and $\text{schr}(1,2)$ are Lie algebras of Galilei and Schrödinger groups in $(1+2)$ -dimensional space.

The algebras of symmetries presented in Items 6-10 of Table 3.2 are solvable and have dimension $d \geq 8$. We denote them formally as $\mathfrak{s}_{d,a}(\cdot)$ without refering to any data base, since the classification of algebras of such dimensions is still far from the completeness.

In the tables we specify also the admissible equivalence transformations additional to ones belonging to the extended Euclid group. Namely, the star near the item number indicates that the corresponding Schrödinger equation admits additional equivalence transformation (3.21) for independent variables x_a provided $\frac{\partial V}{\partial x_a} = 0$. The asterisk marks the items which specifies equations admitting transformation (3.17) and (3.21).

Table 3.2: Potentials including quadratic terms for $3d$ Schrödinger equation

No	Potential V	Symmetries	Invariance algebras
1	$\varepsilon \frac{\omega^2 x_3^2}{2} + G(x_1, x_2)$	$B_3^\varepsilon(\omega), \hat{B}_3^\varepsilon(\omega)$	$\mathfrak{s}_{4,9}$ if $\varepsilon = 1$, $\mathfrak{s}_{4,8}$ if $\varepsilon = -1$
2	$\varepsilon \frac{\omega^2 x_3^2}{2} + G(\tilde{r}) + \mu\varphi$	$B_3^\varepsilon(\omega), \hat{B}_3^\varepsilon(\omega),$ $L_3 + \mu t$	$\mathfrak{s}_{5,16}$ if $\varepsilon = 1, \mu \neq 0$ $\mathfrak{s}_{5,15}$ if $\varepsilon = -1, \mu \neq 0$ $\mathfrak{s}_{4,9} \oplus \mathfrak{n}_{1,1}$ if $\varepsilon = 1, \mu = 0$, $\mathfrak{s}_{4,8} \oplus \mathfrak{n}_{1,1}$ if $\varepsilon = -1, \mu = 0$
3*	$\varepsilon \frac{\omega^2 x_2^2}{2} + G(x_1)$	$B_2^\varepsilon(\omega), \hat{B}_2^\varepsilon(\omega),$ P_3, G_3	$\mathfrak{s}_{6,160}$ if $\varepsilon = -1$, $\mathfrak{s}_{6,161}$ if $\varepsilon = 1$
4	$\varepsilon_1 \frac{\omega_1^2 x_1^2}{2} + \varepsilon_2 \frac{\omega_2^2 x_2^2}{2} + G(x_3)$	$B_k^{\varepsilon_k}(\omega_k),$ $\hat{B}_k^{\varepsilon_k}(\omega_k), k = 1, 2$	$\mathfrak{s}_{6,162}$ if $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = -1$, $\mathfrak{s}_{6,164}$ if $\varepsilon_1 \varepsilon_2 = -1$, $\mathfrak{s}_{6,166}$ if $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 1$
5	$\varepsilon \frac{\omega^2 \tilde{r}^2}{2} + G(x_3)$	$B_k^\varepsilon(\omega), \hat{B}_k^\varepsilon(\omega), L_3$	$\mathfrak{s}_{6,162}$ if $\varepsilon = -1$, $\mathfrak{s}_{6,166}$ if $\varepsilon = 1$
6	$\varepsilon_1 \frac{\omega_1^2 x_1^2}{2} + \varepsilon_2 \frac{\omega_2^2 x_2^2}{2} + \varepsilon_3 \frac{\omega_3^2 x_3^2}{2}$	$B_a^{\varepsilon_a}(\omega_a), \hat{B}_a^{\varepsilon_a}(\omega_a),$ $a = 1, 2, 3$	$\mathfrak{s}_{8,1}(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$

Table 3.2, continued

No	Potential V	Symmetries	Invariance algebras
7*	$\varepsilon_1 \frac{\omega_1^2 x_1^2}{2} + \varepsilon_2 \frac{\omega_2^2 x_2^2}{2}$	$B_k^{\varepsilon k}(\omega_k), \hat{B}_k^{\varepsilon k}(\omega_k),$ P_3, G_3	$\mathfrak{s}_{8,2}(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$
8	$\varepsilon \frac{\omega^2 \tilde{r}^2}{2} + \varepsilon_3 \frac{\omega_3^2 x_3^2}{2}$	$L_3, B_a^{\varepsilon a}(\omega_a),$ $\hat{B}_a^{\varepsilon a}(\omega_a)$	$\mathfrak{s}_{9,1}(\varepsilon, \varepsilon_3)$
9*	$\varepsilon \frac{\omega^2 \tilde{r}^2}{2}$	$G_3, P_3, L_3,$ $B_k^{\varepsilon}(\omega), \hat{B}_k^{\varepsilon}(\omega)$	$\mathfrak{s}_{9,2}(\varepsilon)$
10*	$\varepsilon \frac{\omega^2 x_3^2}{2}$	$B_3^{\varepsilon}(\omega), \hat{B}_3^{\varepsilon}(\omega),$ P_k, G_k, L_3	$\mathfrak{s}_{9,3}(\varepsilon)$

Let us present commutation relations which specify the algebras fixed in Items 6-10 of Table 3.1:

$$[P_0, B_a^{\varepsilon}] = i\omega \hat{B}_a^{\varepsilon}, \quad [P_0, \hat{B}_a^{\varepsilon}] = i\varepsilon \omega B_a^{\varepsilon}, \quad [P_0, G_3] = iP_3, \quad [B_a^{\varepsilon}, \hat{B}_b^{\varepsilon}] = i\delta_{ab}I,$$

$$[B_2^{\varepsilon}, L_3] = iB_1^{\varepsilon}, \quad [B_1^{\varepsilon}, L_3] = -iB_2^{\varepsilon}, \quad [\hat{B}_2^{\varepsilon}, L_3] = i\hat{B}_1^{\varepsilon}, \quad [\hat{B}_1^{\varepsilon}, L_3] = -i\hat{B}_2^{\varepsilon},$$

where only the non-trivial commutators are presented.

Table 3.3: Non-equivalent potentials and symmetries for $2d$ Schrödinger equation

No	Potential V	Symmetries	Invariance algebras
1	$G(\tilde{r}) + \kappa\varphi$	$L_3 + \kappa t$	$\mathfrak{n}_{3,1}$ if $\kappa \neq 0$, $3\mathfrak{n}_{1,1}$ if $\kappa = 0$
2	$\frac{1}{\tilde{r}^2}G(r^\kappa e^{-\varphi})$	$D + \kappa L_3$	$\mathfrak{s}_{2,1} \oplus \mathfrak{n}_{1,1}$
3*	$\frac{1}{\tilde{r}^2}G(\varphi)$	A, D	$\mathfrak{sl}(2, R) \oplus \mathfrak{n}_{1,1}$
4*	$G(x_1)$	P_2, G_2	$\mathfrak{n}_{4,1}$
5*	$\frac{\kappa}{\tilde{r}^2} + \kappa\varphi$	$A, D, L_3 + \kappa t$	$\mathfrak{sl}(2, R) \oplus \mathfrak{n}_{3,1}$ if $\kappa \neq 0$, $\mathfrak{sl}(2, R) \oplus 3\mathfrak{n}_{1,1}$ if $\kappa = 0$
6**	$\frac{\kappa}{x_1^4}$	A, D, G_2, P_2	$\mathfrak{sl}(2, R) \oplus \mathfrak{n}_{4,1}$
7	$\varepsilon \frac{\omega^2 x_1^2}{2} + G(x_2)$	$B_1^{\varepsilon}(\omega), \hat{B}_1^{\varepsilon}(\omega)$	$\mathfrak{s}_{4,9}$ if $\varepsilon = 1$, $\mathfrak{s}_{4,8}$ if $\varepsilon = -1$
8	$\varepsilon \frac{\omega^2 x_1^2}{2}$	$B_1^{\varepsilon}(\omega), \hat{B}_1^{\varepsilon}(\omega), P_2, G_2$	$\mathfrak{S}_{6,160}$ if $\varepsilon = -1$, $\mathfrak{S}_{6,161}$ if $\varepsilon = 1$
9	$\varepsilon_1 \frac{\omega_1^2 x_1^2}{2} + \varepsilon_2 \frac{\omega_2^2 x_2^2}{2}$	$B_1^{\varepsilon_1}(\omega_1), B_2^{\varepsilon_2}(\omega_2),$ $\hat{B}_1^{\varepsilon_1}(\omega_1), \hat{B}_2^{\varepsilon_2}(\omega_2)$	$\mathfrak{S}_{6,162}$ if $\varepsilon = \varepsilon' = -1$, $\mathfrak{S}_{6,164}$ if $\varepsilon\varepsilon' = -1$, $\mathfrak{S}_{6,166}$ if $\varepsilon = \varepsilon' = 1$

Thus we classify all non-equivalent Lie symmetries admitted by $3d$ and $2d$ Schrödinger equations (2.2). Some of them are well known, but a part of them were overlooked by classics [17] and so are new. These new symmetries are represented in Items 1, 2, 7 of Table 3.1, Item 2 of Table 3.2 Items 1, 5 of Table 3.3. Let us note that our analysis can be extended to the case of SEs with larger numbers n of spatial variables. For $n = 4$ we have to start with the following one-dimensional subalgebras:

$$P_4, \quad M_{12}, \quad M_{12} + M_{34}, \quad M_{12} + \alpha M_{34} \quad (0 < \alpha < 1), \quad M_{12} + \nu P_4 \quad (\nu > 0), \\ D + \lambda M_{12}, \quad D + M_{12} + M_{34}, \quad M_{12} + \alpha M_{34} + \beta D \quad (0 < \alpha \leq 1, \beta > 1).$$

The number of these subalgebra is more extended than in $3d$ case (compare equation (3.28) but not dramatically large. We remind that the determining equations (3.10) are defined for arbitrary n .

3.2. Lie symmetries of Schrödinger equations with scalar and vector potentials.

3.2.1. *Previous speculations.* Let us consider the standard SE equation for a charged particle interacting with the external electromagnetic field whose Hamiltonian is given in (2.3), where A^0 and A^a are components of the vector potential of the electromagnetic field, e is the coupling constant associated with the particle charge, which, up to the redefinition of A^0 and A^a can be (and will be) chosen as the unity.

The vector-potential is supposed to satisfy the continuity equation which, in view of its time independence, is reduced to the divergence-less condition for the vector A^a . However in paper [65] we prefer to change it by the condition $A^3 = 0$ which always can be done using the gauge transformations. In particular we can set:

$$A_3 = 0, \quad A_1 = \partial_1 \tilde{F}(\mathbf{x}) + \partial_2 G(\mathbf{x}), \quad A_2 = \partial_2 F(\mathbf{x}) - \partial_1 G(\mathbf{x}), \quad (3.30)$$

where $\partial_1 = \frac{\partial}{\partial x_1}$, etc., \tilde{F} and G are functions of \mathbf{x} .

Alternatively using the gauge transformation

$$H \rightarrow \exp(-i\tilde{F}(\mathbf{x}))H \exp(i\tilde{F}\mathbf{x})$$

we can reduce (3.30) to a more compact form

$$A_1 = \partial_2 G(\mathbf{x}), \quad A_2 = -\partial_1 G(\mathbf{x}), \quad A_3 = F(\mathbf{x}), \quad (3.31)$$

where $F(\mathbf{x}) = \partial_3 \tilde{F}(\mathbf{x})$. Just representation (3.31) will be used in what follows.

To simplify the following calculations we express functions A^1 and A^2 via another functions, i.e., F and G . Notice that just function G generates the divergent less part of the vector-potential.

Substituting (3.31) into (2.3) we reduce it to the following form:

$$H = \frac{1}{2}p_a p_a - \frac{e}{2}(A^a \partial_a + \partial_a A^a) + V, \quad (3.32)$$

where V is the effective potential:

$$V^0 = A_0 + \frac{e^2}{2}(A_1^2 + A_2^2 + A_3^2). \quad (3.33)$$

Setting in (2.4) $G = F = 0$ we come to the standard SEs with a scalar potential V , which is a very particular subject of our analysis.

3.2.2. Determining equations and classification results. Like in the previous section we represent the generator of symmetry group in the form (3.1). Substituting (3.32) and (3.1) into (3.2) we again come to the determining equations (3.3)-(3.5). However, equations (3.6) and (3.7) should be replaced by the following more general ones:

$$\begin{aligned} \eta_a &= A^b \xi_b^a - \xi^b A_b^a + \alpha A^a - \dot{\xi}^a, \\ \xi^a V_a &= \alpha V + \dot{\eta} - e A^a \eta_a. \end{aligned}$$

The system of the determining equations (3.3)-(3.7) is rather complicated and includes tree arbitrary elements A^1, A^2 and V whose form should be fixed by the compatibility condition of this system. However, the subsystem (3.3), (3.4), and (3.5) does not include these arbitrary elements. Its generic solution is well known and can be represented in the form given by formula (3.8).

Substituting (3.8) into (3.6) and integrating with respect to x_a we obtain the following generic form of η :

$$\eta^0 = \frac{\dot{\alpha}}{4} x^2 - \dot{\nu}^a x_a + K(\mathbf{x}, t) = 0, \quad (3.34)$$

where parameters α and ν should satisfy the condition $\alpha \nu^a = 0$. In addition, $K(\mathbf{x}, t)$ is a yet unknown function. In accordance with (3.6) and (3.34) $K(\mathbf{x}, t)$ satisfies the following condition:

$$K_a = A^b \xi_b^a - \xi^b A_b^a + \alpha A^a, \quad (3.35)$$

which, in view of (3.8), can be reduced to the following form:

$$K_a = \frac{\alpha}{2} (A_b^a x_b + A^a) + \theta^{ab} A^b - \theta^{bc} x_c A_b^a - \nu^b A_b^a. \quad (3.36)$$

One more equation for potentials is given by (3.7). Using again relation (3.8) and taking into account the time independence of θ^{ab} we transform it to the form:

$$\begin{aligned} \left(-\frac{\alpha}{2}x^a + \theta^{ab}x_b + \nu^a\right)A_a^0 + \frac{\dot{\alpha}}{2}x^aA^a - \dot{\nu}^aA^a = \\ = \alpha A^0 + \frac{\ddot{\alpha}}{2}r^2 - \ddot{\nu}^ax^a + \dot{K}. \end{aligned} \tag{3.37}$$

It is convenient to consider the following algebraic consequences of (3.36):

$$\frac{a}{2}x_a(x \cdot A)_a - \theta^{dc}x_c(x \cdot A)_d - \nu^b(x \cdot A)_b + \nu^bA^b = x_aK_a,$$

$$\frac{a}{2}x_ax_a(x \times A)_a^n - \theta^{dc}x_c(x \times A)_d^n - \nu^b(x \times A)_b^n + (\nu \times A)^n = (x \times \partial)^nK,$$

where $x \cdot A = x_aA^a$, $(x \times A)^n = \varepsilon^{nab}x_aA^b$, etc., with ε^{nbc} being the absolutely antisymmetric unit tensor.

Thus to classify symmetries of the SE which include a superposition of vector and scalar potentials, i.e., of equation (2.1) it is necessary to solve the system of equations (3.36) and (3.37). This system includes parameters α and ν which can depend on time, and time independent parameters θ^{ab} .

In complete analogy with Sections 3.1.2-3.1.6 (but with evident complexification connected with the more extended number of arbitrary elements) we can solve the presented determining equations, see [65] for calculation details. As a result we obtain the list of inequivalent systems and the related Lie symmetries, which is presented in Tables 3.4-3.7.

Table 3.4: Symmetries polynomial in time variable

No	Vector potentials V	Symmetries	Algebras
1	$A^1 = x_3\partial_1F(x_1, x_2) + \partial_2G(x_1, x_2),$ $A^2 = x_3\partial_2F(x_1, x_2) - \partial_1G(x_1, x_2),$ $A^0 = R(x_1, x_2)$	P_3 $-F(x_1, x_2)$	$3n_{1,1}$
2	$A^1 = x_1G^1(\tilde{r}, x_3) + x_2G^2(\tilde{r}, x_3),$ $A^2 = x_2G^1(\tilde{r}, x_3) - x_1G^2(\tilde{r}, x_3),$ $A^0 = R(\tilde{r}, x_3)$	L_3	$3n_{1,1}$
3	$A^1 = x_1G^1(\tilde{r}, \varkappa) + x_2G^2(\tilde{r}, \varkappa),$ $A^2 = x_2G^1(\tilde{r}, \varkappa) - x_1G^2(\tilde{r}, \varkappa),$ $A^0 = R(\tilde{r}, \varkappa), \varkappa = \varphi - x_3$	$L_3 + P_3$	$3n_{1,1}$
4	$A^1 = x_3\partial_1F(\tilde{r}) + \partial_2G(\tilde{r}),$ $A^2 = x_3\partial_2F(\tilde{r}) - \partial_1G(\tilde{r}),$ $A^0 = R(\tilde{r})$	$P_3 - F(\tilde{r}),$ L_3	$4n_{1,1}$

Table 3.4, continued

No	Vector potentials V	Symmetries	Algebras
5*	$A^1 = x_3 \partial_1 (F(\varphi)/\tilde{r}) + \partial_2 G(\varphi),$ $A^2 = x_3 \partial_2 (F(\varphi)/\tilde{r}) - \partial_1 G(\varphi),$ $A^0 = R(\varphi)/\tilde{r}^2$	$D,$ $P_3 - \frac{F(\varphi)}{\tilde{r}}$	$\mathfrak{s}_{3,1} \oplus \mathfrak{n}_{1,1}$
6*	$A^1 = \partial_2 G(x_1, x_2),$ $A^2 = -\partial_1 G(x_1, x_2),$ $A^0 = R(x_1, x_2)$	P_3, G_3	$\mathfrak{n}_{4,1}$
7*	$A^1 = x_2 F(\theta, \varphi)/r^2 + \partial_2 G(\theta),$ $A^2 = -x_1 F(\theta, \varphi)/r^2 - \partial_1 G(\theta),$ $A^0 = \frac{1}{r^2} R(\theta, \varphi)$	D, A	$\mathfrak{sl}(2, R) \oplus \mathfrak{n}_{1,1}$
8*	$A^1 = F(x_3), A^2 = G(x_3),$ $A^0 = R(x_3)$	P_1, P_2	$\mathfrak{n}_{1,1}$
9*	$A^1 = F(x_3), A^2 = 0,$ $A^0 = R(x_3)$	P_1, P_2, G_2	$\mathfrak{n}_{4,1} \oplus \mathfrak{n}_{1,1}$
10*	$A^1 = \partial_2 G(\tilde{r}), A^2 = -\partial_1 G(\tilde{r}),$ $A^0 = R(\tilde{r})$	P_3, L_3, G_3	$\mathfrak{n}_{4,1} \oplus \mathfrak{n}_{1,1}$
11*	$A^1 = x_2 F(\theta)/r^2 + \partial_2 G(\theta),$ $A^2 = -x_1 F(\theta)/r^2 - \partial_1 G(\theta),$ $A^0 = \frac{1}{r^2} R(\theta, \varphi)$	D, A, L_3	$\mathfrak{sl}(2, R) \oplus 2\mathfrak{n}_{1,1}$
12**	$A^1 = \partial_2 G(\tilde{r}^\mu \exp(-\varphi)),$ $A^2 = -\partial_1 G(\tilde{r}^\mu \exp(-\varphi)),$ $A^0 = \frac{1}{\tilde{r}^2} R(\tilde{r}^\mu e^{-\varphi})$	$D + \mu L_3,$ P_3, G_3	$\mathfrak{s}_{5,38}$
13**	$A^1 = \frac{\lambda}{x_3}, A^2 = 0,$ $A^3 = \frac{\mu}{x_3^2}$	$P_1, P_2,$ G_2, D	$\mathfrak{s}_{6,96}$

Table 3.5: Symmetries induced by external magnetic fields

No	Vector potentials V	Symmetries	Algebras
1	$A^1 = \partial_1(\tilde{F}(\theta, z) + F(y, z)) +$ $\quad \quad \quad + \partial_2 G(\theta, z),$ $A^2 = \partial_2(\tilde{F}(\theta, z) + F(y, z)) -$ $\quad \quad \quad - \partial_1 G(\theta, z)$ $A^0 = \frac{1}{r^2} R(\theta, z),$ $y = \mu \ln(\tilde{r}) + \varphi,$ $z = \mu \ln(\tilde{r}) - \varphi$	$D + \mu L_3$ $+ 2\mu \partial_y F(y, z)$	$\mathfrak{s}_{2,1} \oplus \mathfrak{n}_{1,1}$

Table 3.5, continued

No	Vector potentials V	Symmetries	Algebras
2	$A^1 = \partial_1 F(y, z) + \partial_2 G(\theta, z),$ $A^2 = \partial_2 F(y, z) - \partial_1 G(\theta, z),$ $A^0 = \frac{1}{r^2} R(\theta, z)$	$D + \mu L_3$ $+ 2\mu \partial_y F(y, z),$ P_3, G_3	$\mathfrak{s}_{5,38}$
3*	$A^1 = F(x_3) - \alpha x_2,$ $A^2 = G(x_3) + \alpha x_1,$ $A^0 = R(x_3), \alpha \neq 0$	$P_1 - \alpha x_2,$ $P_2 + \alpha x_1$	$\mathfrak{s}_{4,7}$
4*	$A^1 = -\alpha x_2,$ $A^2 = \alpha x_1,$ $A^0 = R(x_3), \alpha \neq 0$	$P_1 - \alpha x_2,$ $P_2 + \alpha x_1, L_3$	$\mathfrak{s}_{4,7} \oplus \mathfrak{n}_{1,1}$
5	$A^1 = -\alpha x_2 + \nu \cos(x_3),$ $A^2 = \alpha x_1 + \nu \sin(x_3),$ $A^0 = R(\varphi - x_3)$	$P_1 - \alpha x_2,$ $P_2 + \alpha x_1,$ $L_3 + P_3$	$\mathfrak{s}_{4,7} \oplus \mathfrak{n}_{1,1}$
6	$A^1 = \lambda x_3 \partial_1 \varphi / r,$ $A^2 = \lambda x_3 \partial_2 \varphi / r,$ $A^0 = R(r)$	$L_1 + x_3 A^2 -$ $-\lambda x_1 / r,$ $L_2 - x_3 A^1 -$ $-\lambda x_2 / r, L_3$	$\mathfrak{so}(3) \oplus 2\mathfrak{n}_{1,1}$
7	$A^1 = \lambda x_3 \partial_1 \varphi / r,$ $A^2 = \lambda x_3 \partial_2 \varphi / r,$ $A^0 = \mu / r^2$	$L_1 + x_3 A^2 -$ $-\lambda x_1 / r,$ $L_2 - x_3 A^1 -$ $-\lambda x_2 / r,$ L_3, D, A	$\mathfrak{so}(3) \oplus$ $\oplus \mathfrak{sl}(2, R) \oplus \mathfrak{n}_{1,1}$
8*	$A^1 = -\alpha x_2, A^2 = \alpha x_1,$ $A^0 = 0$	$P_1 - \alpha x_2,$ $P_2 + \alpha x_1,$ P_3, G_3, L_3	$\mathfrak{s}_{7,1}$

Table 3.6: Symmetries induced by external electric fields

No Potentials	Symmetries	Algebras	
1	$A^1 = x_1 G^1(\tilde{r}, x_3) + x_2 G^2(\tilde{r}, x_3),$ $A^2 = x_2 G^1(\tilde{r}, x_3) - x_1 G^2(\tilde{r}, x_3),$ $A^0 = R(\tilde{r}, x_3) + \kappa \varphi$	$L_3 + \kappa t$	$\mathfrak{n}_{3,1}$
2	$A^1 = x_1 G^1(\tilde{r}, \varkappa) + x_2 G_2(\tilde{r}, \varkappa),$ $A^2 = -x_1 G^2(\tilde{r}, \varkappa) + x_2 G^1(\tilde{r}, \varkappa),$ $A^0 = R(\tilde{r}, \varkappa) + \kappa \varphi, \varkappa = \varphi - x_3$	$L_3 + P_3 + \kappa t$	$\mathfrak{n}_{3,1}$
3*	$A^1 = \partial_2 G(\tilde{r}), A^2 = -\partial_1 G(\tilde{r}),$ $A^0 = R(\tilde{r}) + \kappa \varphi$	$P_3, L_3 + \kappa t, G_3$	$\mathfrak{s}_{5,14}$

Table 3.6, continued

No Potentials	Symmetries	Algebras
4 $A^1 = x_3 \partial_1 F(\tilde{r}) + \partial_2 G(\tilde{r}),$ $A^2 = x_3 \partial_2 F(\tilde{r}) - \partial_1 G(\tilde{r}),$ $A^0 = R(\tilde{r}) + \kappa \varphi$	$P_3 - F(\tilde{r}),$ $L_3 + \kappa t$	$\mathfrak{n}_{3,1} \oplus \mathfrak{n}_{1,1}$
5 $A^1 = \partial_2 G(x_1, x_2),$ $A^2 = -\partial_1 G(x_1, x_2)$ $A^0 = R(x_1, x_2) - \frac{\omega^2 x_3^2}{2}$	$B_3^+(\omega), B_3^-(\omega)$	$\mathfrak{s}_{4,6}$
6 $A^1 = \partial_2 G(\tilde{r}), A^2 = -\partial_1 G(\tilde{r})$ $A^0 = R(\tilde{r}) - \frac{\omega^2 x_3^2}{2}$	$B_3^+(\omega), B_3^-(\omega),$ L_3	$\mathfrak{s}_{4,6} \oplus \mathfrak{n}_{1,1}$
7* $A^1 = 0, A^2 = G(x_1),$ $A^0 = R(x_1) - \frac{\omega^2 x_3^2}{2}$	$B_3^+(\omega), B_3^-(\omega),$ P_2	$\mathfrak{s}_{4,6} \oplus \mathfrak{n}_{1,1}$
8 $A^1 = 0, A^2 = 0,$ $A^0 = R(x_3) - \frac{\omega^2 \tilde{r}^2}{2}$	$B_1^+(\omega_1), B_1^-(\omega_1),$ $B_2^+(\omega_2), B_2^-(\omega_2), L_3$	$\mathfrak{s}_{7,2}$
9* $A^1 = A^2 = 0,$ $A^0 = -\frac{\omega_1^2 x_1^2}{2} - \frac{\omega_2^2 x_2^2}{2}$	$B_1^+(\omega_1), B_1^-(\omega_1),$ $B_2^+(\omega_2), B_2^-(\omega_2),$ P_3, G_3	$\mathfrak{s}_{8,1}$
10 $A^1 = A^2 = 0,$ $A^0 = -\frac{\omega_1^2 x_1^2}{2} - \frac{\omega_2^2 x_2^2}{2} - \frac{\omega_3^2 x_3^2}{2}$	$B_1^+(\omega_1), B_1^-(\omega_1),$ $B_2^+(\omega_2), B_2^-(\omega_2),$ $B_3^+(\omega_3), B_3^-(\omega_3)$	$\mathfrak{s}_{8,2}$
11* $A^1 = A^2 = 0,$ $A^0 = -\frac{\omega^2 x_3^2}{2}$	P_1, P_2, G_1, G_2 $B_3^+(\omega), B_3^-(\omega), L_3$	$\mathfrak{s}_{9,1}$
12* $A^1 = A^2 = 0,$ $A^0 = -\frac{\omega^2 \tilde{r}^2}{2}$	$B_1^+(\omega_1), B_1^-(\omega_1),$ $B_2^+(\omega_2), B_2^-(\omega_2),$ L_3, P_3, G_3	$\mathfrak{s}_{9,2}$
13 $A^1 = A^2 = 0,$ $A^0 = -\frac{\omega^2 \tilde{r}^2}{2} - \frac{\omega_3^2 x_3^2}{2}$	$B_1^+(\omega_1), B_1^-(\omega_1),$ $B_2^+(\omega_2), B_2^-(\omega_2),$ $B_3^+(\omega_3), B_3^-(\omega_3), L_3$	$\mathfrak{s}_{9,3}$

Table 3.7: Symmetries induced by superpositions of electric and magnetic external fields

No Potentials A^a	Symmetries	Algebras
$A^1 = x_3\partial_1 F(x_1, x_2) + \partial_2 G(x_1, x_2),$ $A^2 = x_3\partial_2 F(x_1, x_2) - \partial_1 G(x_1, x_2),$ $A^0 = G(x_1, x_2) - \frac{\omega^2 x_3^2}{2} + \omega x_3 F(x_1, x_2)$	$B_3^+(\omega) - e^{\omega t} F(x_1, x_2)$	$\mathfrak{S}_{2,1} \oplus \mathfrak{n}_{1,1}$
$A^1 = \partial_2 G(\tilde{r}), A^2 = -\partial_1 G(\tilde{r}),$ $A^0 = R(\tilde{r}) - \frac{\omega^2 x_3^2}{2} + \kappa\varphi$	$B_3^+(\omega), B_3^-(\omega),$ $L_3 + \kappa t$	$\mathfrak{S}_{5,15}$
$A^1 = x_3\partial_1 F(\tilde{r}) + \partial_2 G(\tilde{r}),$ $A^2 = x_3\partial_2 F(\tilde{r}) - \partial_1 G(\tilde{r}),$ $A^0 = R(\tilde{r}) - \frac{\omega^2 x_3^2}{2} + \omega x_3 F(\tilde{r}) + \kappa\varphi$	$B_3^+(\omega) - e^{\omega t} F(\tilde{r}),$ $L_3 + \kappa t$	$\mathfrak{S}_{2,1} \oplus 2\mathfrak{n}_{1,1}$
$A^1 = x_3\partial_1 F(x_1),$ $A^2 = G(x_1),$ $A^0 = R(x_1) - \frac{\omega^2 x_3^2}{2} + \omega x_3 F(x_1)$	$B_3^+(\omega) - e^{\omega t} F(x_1),$ $P_2,$ and G_2 if $A_2 = 0$	$\mathfrak{S}_{2,1} \oplus 2\mathfrak{n}_{1,1}$ or $\mathfrak{S}_{5,14}$ if $A_2 = 0$
$A^1 = F(x_3), A^2 = G(x_3),$ $A^0 = R(x_3) + \omega_1 x_1 A^1 + \omega_2 x_2 A^2 - \frac{\omega_1^2 x_1^2}{2} - \frac{\omega_2^2 x_2^2}{2}$	$B_1^+(\omega_1), B_1^-(\omega_1),$ $B_2^+(\omega_2), B_2^-(\omega_2)$	$\mathfrak{S}_{6,162}$
$A^1 = F(x_3) - \alpha x_2,$ $A^2 = G(x_3) + \alpha x_1,$ $A^0 = R(x_3) - \frac{\omega^2 \tilde{r}^2}{2} + 2\alpha\omega x_1 x_2$	$B_1^+(\omega) - \alpha e^{\omega t} x_2,$ $B_2^-(\omega) + \alpha e^{-\omega t} x_1$	$\mathfrak{S}_{4,6}$
$A^1 = -\alpha x_2, A^2 = \alpha x_1,$ $A^0 = -\frac{\omega^2 x_3^2}{2}$	$L_3, P_1 - \alpha x_2,$ $P_2 + \alpha x_1,$ $B_3^+(\omega), B_3^-(\omega)$	$\mathfrak{S}_{7,2}$
$A^1 = -\alpha x_2, A^2 = \alpha x_1,$ $A^0 = -\frac{\omega^2 \tilde{r}^2}{2} + 2\alpha\omega x_1 x_2$	$B_1^+(\omega) - \alpha e^{\omega t} x_2,$ $B_2^-(\omega) + \alpha e^{-\omega t} x_1,$ P_3, G_3	$\mathfrak{S}_{6,160}$
$A^1 = -\alpha x_2, A^2 = \alpha x_1,$ $A^0 = 2\alpha\omega x_1 x_2 - \frac{\omega^2 \tilde{r}^2}{2} - \frac{\omega_3^2 x_3^2}{2}$	$B_1^+(\omega) - \alpha e^{\omega t} x_2,$ $B_2^-(\omega) + \alpha e^{-\omega t} x_1,$ $B_3^+(\omega_3), B_3^-(\omega_3)$	$\mathfrak{S}_{6,162}$

Table 3.7, continued

No Potentials	A^a	Symmetries	Algebras
10	$A^1 = \partial_1 \tilde{F}(\theta, \varphi) + \partial_2 G(\theta, \varphi),$ $A^2 = \partial_2 \tilde{F}(\theta, \varphi) - \partial_1 G(\theta, \varphi),$ $A^0 = -\frac{\omega^2 r^2}{2} + \frac{1}{r^2} R(\theta, \varphi) +$ $\quad + \omega(\partial_\varphi G(\theta, \varphi) -$ $\quad - \frac{1}{2} \sin(2\theta) \partial_\theta F(\theta, \varphi))$	$A^+(\omega)$	$\mathfrak{so}_{2,1} \oplus \mathfrak{n}_{1,1}$
11	$A^1 = \partial_1 \tilde{F}(\theta) + \partial_2 G(\theta),$ $A^2 = \partial_2 \tilde{F}(\theta) - \partial_1 G(\theta),$ $A^0 = -\frac{\omega^2 r^2}{2} + \frac{1}{r^2} R(\theta) -$ $\quad - \frac{\omega}{2} \sin(2\theta) \partial_\theta F(\theta)$	$A^+(\omega), L_3$	$\mathfrak{so}_{2,1} \oplus 2\mathfrak{n}_{1,1}$
12	$A^1 = x_3 \partial_1 \frac{F(\varphi)}{\tilde{r}},$ $A^2 = x_3 \partial_2 \frac{F(\varphi)}{\tilde{r}},$ $A^0 = \frac{1}{\tilde{r}^2} R(\varphi) - \frac{\omega^2 r^2}{2} + \frac{\omega x_3 F(\varphi)}{\tilde{r}}$	$A^+(\omega),$ $B_3^+(\omega) - \frac{e^{\omega t} F(\varphi)}{\tilde{r}}$	$\mathfrak{so}_{3,1} \oplus \mathfrak{n}_{1,1}$
13	$A^1 = \frac{x_1 x_3}{\tilde{r}^3},$ $A^2 = \frac{x_2 x_3}{\tilde{r}^3},$ $A^0 = \frac{\nu}{\tilde{r}^2} - \frac{\omega^2 r^2}{2} - \frac{\omega x_3}{\tilde{r}}$	$A^+(\omega), L_3,$ $B_3^+(\omega) + \frac{e^{\omega t}}{\tilde{r}}$	$\mathfrak{so}_{3,1} \oplus 2\mathfrak{n}_{1,1}$
14	$A^1 = \frac{x_3}{x_1}, A^2 = 0,$ $A^0 = -\frac{\omega^2 r^2}{2} - \frac{\omega x_3}{x_1}$	$A^+(\omega), B_2^+, B_2^-$ $B_3^+(\omega) + \frac{e^{\omega t}}{x_1}$	$\mathfrak{S}_{6,124}$

Tables 3.4, 3.5, 3.6 and 3.7 present the exhaustive information about inequivalent SEs with scalar and vector potentials and their symmetries. Like in Tables 3.1 and 3.2 we indicate by star and (or) asterisk such systems which admit equivalence transformations (3.17) and (or) (3.21).

Symmetries presented in Table 3.4 belong (or can be reduced) to symmetries of the free SE. This reduction can be made using the gauge transformations. It is possible to nullify the external electric field, or magnetic field, or both of them, and the mentioned symmetries still would be valid. In other words, the external fields presented there cause the reduction of symmetries of the free SE but keep a part of them.

Symmetries presented in Table 3.5 do not belong to the symmetries of the free SE. They are valid also for the trivial scalar potential. However, the presence of the vector potentials is essential since they are constituent parts of the mentioned symmetries.

The systems fixed in Table 3.6 also admit symmetries which are not valid for the free SE. However, the vector potentials presented there can be nullified without reduction of the admitted symmetries. The scalar potentials should be non-trivial since in fact they generate the mentioned symmetries.

The most specific systems can be found in Table 3.7. In order to the symmetries presented here be valid, both the vector and scalar potentials should be non-trivial.

3.3. Lie symmetries of the Schrödinger-Pauli equations for charged particles.

3.3.1. *Preliminary notes.* The next equation whose symmetry we discuss is the SP equation represented by formulae (2.1) and (2.5).

Substituting (3.31) into (2.5) we reduce it to the following form:

$$H = \frac{1}{2}p_a p_a - \frac{e}{2}(A^a \partial_a + \partial_a A^a) + V \quad (3.38)$$

where V is the effective *matrix* potential:

$$V = V^0 + g\sigma_a H_a, \\ V^0 = A_0 + \frac{e^2}{2}(A_1^2 + A_2^2 + A_3^2)$$

and

$$H_1 = \partial_2 F + \partial_1 \partial_3 G, \quad H_2 = \partial_2 \partial_3 G - \partial_1 F, \quad H_3 = -(\partial_1^2 + \partial_2^2)G. \quad (3.39)$$

Equation (2.1) with Hamiltonian (2.4) includes three arbitrary elements, i.e., functions A_0 , F and G .

Let us represent the generator of the symmetry group in the standard form (3.1) where $\tilde{\eta} = \frac{1}{2}\xi_a^a + i\eta$, ξ^0 , ξ^a and η are functions of t , \mathbf{x} and $\partial_t = \frac{\partial}{\partial t}$. Moreover, η is a 2×2 matrix which can be expanded via Pauli matrices:

$$\eta = \eta^0 \sigma_0 + \sigma_a \eta^a \quad (3.40)$$

where σ_0 is the 2×2 unit matrix which will be omitted in the following formulae. In contrary, ξ^0 and ξ^a are scalar functions which can be treated as multipliers for the unit matrix.

Substituting this expression together with (3.38) into (3.2) we come again to the determining equations (3.3)-(3.5) and (3.6), (3.7). However, the latter equations are now the matrix ones, i.e., any of them is a system of four scalar equations.

Collecting in (3.6) the terms proportional to the unit matrix we obtain:

$$\dot{\xi}^a + \eta_a^0 = e(A^b \xi_b^a - \xi^b A_b^a + \alpha A^a), \quad (3.41)$$

while the remaining terms are reduced to the following condition:

$$\frac{\partial \eta^a}{\partial x_b} = 0. \quad (3.42)$$

Equation (3.7) also is decoupled to the scalar and vector parts:

$$\xi^a V_a^0 = \alpha V^0 + \dot{\eta}^0 - e A^a \eta_a^0, \quad (3.43)$$

and

$$g(\xi^a H_a^b - \alpha H^b + 2\varepsilon^{bcd}\eta^c H^d) - \dot{\eta}^b = 0, \quad (3.44)$$

where ε^{bcd} is the absolutely antisymmetric unit tensor.

Substituting (3.41) into (3.43) and using definition (3.33) we reduce the latter equation to the following form:

$$\xi^a A_a^0 + \dot{\xi}^a A^a = \alpha A^0 + \dot{\eta}^0.$$

In other words, system (3.3)-(3.7) includes the autonomous subsystem formed by equations (3.3), (3.4), (3.5), (3.41) and (3.43). Its solutions, which give symmetries of equation (2.1), (2.4) in the particular case $g = 0$, have been already obtained in the previous section. On the other hand setting $A^1 = A^2 = A^3 = 0$ we reduce our classification problem to description of symmetries of the SP equation for chargeless particles. This description had been made in paper [65]. The more general problem with nontrivial coupling constant g and nontrivial vector potentials is solved in the present section.

3.3.2. The connection with symmetries of Schrödinger equations. In accordance with the above the first necessary step in description of symmetries of the SP equation for charged particles is the group classification of the standard Schrödinger equations including the vector potential of the external electromagnetic field. Then going over all inequivalent versions of such external fields presented in Section 3.2.2 we will select such of them which are compatible with equation (3.44) and specify the corresponding functions η^b .

By construction equations (2.1), (2.3) with arbitrary potentials admit two-dimensional symmetry algebra spanned on $P_0 = i\frac{\partial}{\partial t}$ and the unit operator. In accordance with the results presented in Section 3.1 there exist six inequivalent cases when this algebra is extended to three-dimensional one. The corresponding potentials and the related additional symmetries Q are given by the following formulae:

$$A^1 = \partial_2 G(x_1, x_2), \quad A^2 = -\partial_1 G(x_1, x_2), \quad (3.45)$$

$$A^3 = F(x_1, x_2), \quad A^0 = R(x_1, x_2),$$

$$P_3 = p_3 = -i\partial_3, \quad (3.46)$$

where $F(\cdot, \cdot)$, $G(\cdot, \cdot)$ and $R(\cdot, \cdot)$ are arbitrary functions of the arguments fixed in the brackets;

$$A^1 = \partial_2 G(\tilde{r}, x_3), \quad A^2 = -\partial_1 G(\tilde{r}, x_3), \quad (3.47)$$

$$A^3 = F(\tilde{r}, x_3), \quad A^0 = R(\tilde{r}, x_3) + \kappa\varphi,$$

$$Q = L_3 + \kappa t \quad (3.48)$$

where $\tilde{r} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$, $\varphi = \arctan \frac{x_2}{x_1}$, $L_3 = x_1 p_2 - x_2 p_1$ and κ is an arbitrary real parameter;

$$A^1 = \partial_2 G(\tilde{r}, \varkappa), \quad A^2 = -\partial_1 G(\tilde{r}, \varkappa), \quad (3.49)$$

$$A^3 = F(\tilde{r}, \varkappa), \quad A^0 = R(\tilde{r}, \varkappa) + \kappa\varphi,$$

$$Q = L_3 + p_3 + \kappa t, \quad (3.50)$$

where $\varkappa = \varphi - x_3$;

$$A^1 = \partial_2 G(\theta, \mu), \quad A^2 = -\frac{1}{r} \partial_1 G(\theta, \mu) \quad (3.51)$$

$$A^3 = \frac{1}{r} (F(\theta, \mu) + \tilde{F}(\nu, \mu)), \quad A^0 = \frac{1}{r^2} R(\theta, \mu),$$

$$Q = D + \alpha L_3, \quad (3.52)$$

where $\mu = \alpha\rho - \varphi$, $\nu = \rho + \alpha\varphi$, $\rho = \ln(\tilde{r})$ and $D = 2tP_0 - x_a p_a + 3i/2$;

$$A^1 = \partial_2 G(x_1, x_2), \quad A^2 = -\partial_1 G(x_1, x_2), \quad A^3 = F(x_1, x_2), \quad (3.53)$$

$$A^0 = R(x_1, x_2) - \frac{\omega^2 x_3^2}{2} + \omega x_3 F(x_1, x_2),$$

$$B^3 = \exp(\omega t)(p_3 - \omega x_3); \quad (3.54)$$

$$A^1 = \partial_2 G(\theta, \varphi), \quad A^2 = -\partial_1 G(\theta, \varphi),$$

$$A^3 = \frac{1}{r} (\tilde{F}(\theta, \varphi) + (\partial_\rho + 2)F(\rho, \varphi)),$$

$$A^0 = -\frac{\omega^2 r^2}{2} + \frac{1}{r^2} R(\theta, \varphi) + 4\omega \partial_\rho F(\rho, \varphi),$$

$$A^+ = \exp(2\omega t)(p_0 + \omega^2 r^2 - \frac{\omega}{2}(x_a p_a + p_a x_a)). \quad (3.55)$$

Notice that L_3 is nothing but the third component of the orbital moment. Up to rotation it can be replaced by the first component $L_1 = x_2 p_3 - x_3 p_2$ or the second component $L_2 = x_3 p_1 - x_1 p_3$.

Consider consequently all potentials and symmetries (3.45)-(3.55) in more detail and verify their compatibility with equation (3.44). The vector of magnetic field corresponding to potentials (3.45) has the following components (refer to (3.39)):

$$H^1 = -\partial_2 F(x_1, x_2), \quad H^2 = \partial_1 F(x_1, x_2),$$

$$H^3 = -(\partial_1^2 + \partial_2^2)G(x_1, x_2). \quad (3.56)$$

The related symmetry (3.46) includes only a part of matrix η which is proportional to the unit matrix, i.e., only the first term from the r.h.s. of equation (3.40). Whenever the Pauli term is present, it is necessary to add the remaining part of η equal to $\sigma^a \eta^a$, i.e., replace (3.46) by the following operator:

$$\hat{P}_3 = p_3 + \eta^0 + \eta^a \sigma^a,$$

where η^0 and η^a are unknown functions. The corresponding condition (3.44) is reduced to the following form:

$$g(\partial_3 H^b + 2\varepsilon^{bcd}\eta^c H^d) - \dot{\eta}^b = 0. \quad (3.57)$$

All components of the magnetic field presented in (3.56) do not depend on x_3 , the same is true for functions η^a in view of equation (3.42). This means that condition (3.57) nullifies all functions η^a , $a = 1, 2, 3$ if $F(x_1, x_2)$ and $G(x_1, x_2)$ are arbitrary. However, for the very special case of these functions corresponding to *constant* magnetic field (3.56) equation (3.57) has non-trivial solutions which, up to rotation transformations, can be represented in the following form:

$$\begin{aligned} H^1 = H^2 = 0, \quad H^3 = c_1, \\ \eta^1 = c_2 \sin(2c_1 gt) + c_3 \cos(2c_1 gt), \\ \eta^2 = c_2 \cos(2c_1 gt) - c_3 \sin(2c_1 gt), \quad \eta^3 = c_4, \end{aligned} \quad (3.58)$$

where c_1, \dots, c_4 are arbitrary parameters. Moreover, up to scaling of the independent variables and standard trigonometric manipulations we can reduce these parameters to the form $c_1 = 1$, $c_2 = 0$, $c_3 = 1$, $c_4 = c$.

The next system we consider is given by relations (3.47). The corresponding symmetry (3.49) again has to be generalised by adding matrix η , whose components should satisfy condition (3.44) which is reduced to the following form:

$$g((x_1\partial_2 - x_2\partial_1)H^b + 2\varepsilon^{bcd}\eta^c H^d) - \dot{\eta}^b = 0 \quad (3.59)$$

or

$$g(\partial_\varphi H^b + 2\varepsilon^{bcd}\eta^c H^d) - \dot{\eta}^b = 0. \quad (3.60)$$

But in accordance with (3.39) and (3.47) the related components of the magnetic field can be represented as:

$$\begin{aligned} H^1 = -\partial_3(x_2 G^1 - x_1 G^2), \quad H^2 = \partial_3(x_1 G^1 + x_2 G^2), \\ H^3 = (2 + \tilde{r}\partial_{\tilde{r}})G^2, \end{aligned} \quad (3.61)$$

where G^1 and G^2 are functions of \tilde{r} and x_3 . In view of (3.61) equations (3.60) are reduced to the following form:

$$2g(\eta^1 H^2 - \eta^2 H^1) = \dot{\eta}^3, \quad (3.62)$$

$$g(2\eta^2 H^3 + (2\eta_3 - 1)H^1) = \dot{\eta}^1, \quad (3.63)$$

$$g(2\eta^1 H^3 + (1 - 2\eta_3)H^2) = -\dot{\eta}^2.$$

For generic magnetic field whose components are given by equation (3.61) we obtain from (3.62) that

$$\eta^1 = 0, \quad \eta^2 = 0, \quad \eta^3 = \frac{1}{2}. \quad (3.64)$$

However, for the constant magnetic field there is one more solution given by equations (3.58).

In the complete analogy with the above it is possible to consider the remaining systems (3.47)-(3.55) and prove, that all symmetries (3.50), (3.52), (3.54) and (3.55) valid for the Schrödinger equation are kept for the Schrödinger-Pauli equation also, provided L_3 is changed to $J_3 = L_3 + \frac{1}{2}\sigma_3$. The main point of the proof is that H_3 always depends on invariant variables for these symmetries, and so in all cases we have the same equation (3.64) which nullifies either η^1 , η^2 or H^1 , H^2 .

The obtained results can be formulated as the following statement.

Theorem 3.4. *All Lie symmetries of the Schrödinger equation with time independent scalar and vector potentials can be extended to the symmetries of the corresponding SP equation, if we change the orbital momentum operators L_a by the total orbital momentum operators $J_a = L_a + \frac{1}{2}\sigma_a$. In addition, for constant magnetic fields or for the fields with the only non-trivial component H_3 the additional symmetry*

$$Q = \sigma_1 \cos(2gt) + \sigma_2 \sin(2gt) + c\sigma_3$$

or

$$\tilde{Q} = \sigma_3$$

is valid.

Since the symmetries of the Schrödinger equation with time independent scalar and vector potentials have been described in Section 3.2, in fact we have in hands all inequivalent symmetries of the related SP equation.

3.5. Symmetries of Schrödinger-Pauli equations for neutral particles.

3.5.1. *Determining equations.* The SP Hamiltonian for neutral particles is given by equation (2.6). In contrast to the equations considered in the previous section, now equation does not include vector potentials but only scalar one and three arbitrary components of the external magnetic field.

Evaluating the commutator in the l.h.s. of (3.2) and equating coefficients for the linearly independent differentials we obtain the following system of equations for unknowns ξ^0 , ξ^a , η , V and α :

$$\dot{\xi}^0 = -\alpha, \quad \xi_a^0 = 0, \quad (3.65)$$

$$\xi_a^b + \xi_b^a - \frac{2}{n} \delta_{ab} \xi_i^i = 0, \quad (3.66)$$

$$\xi_i^i = -\frac{n}{2} \alpha, \quad (3.67)$$

$$\dot{\xi}^a + \eta_a = 0, \quad (3.68)$$

$$\xi^a V_a = \alpha V + \dot{\eta} + i[\eta, V] \quad (3.69)$$

where $\dot{\eta} = \frac{\partial \eta}{\partial t}$ and $\eta_a = \frac{\partial \eta}{\partial x_a}$.

Formally speaking, system of the determining equations (3.3)-(3.7) is rather complicated since it includes four arbitrary elements V^0, V^1, V^2 and V^3 whose form should be fixed from the compatibility condition of this system. However, the major part of this system, i.e., equations (3.3), (3.4), (3.5) and (3.6), do not include these arbitrary elements. The immediate consequences of equation (3.6) are the following conditions:

$$\frac{\partial \eta^a}{\partial x_b} = 0 \quad (3.70)$$

and

$$\dot{\xi}^a + \eta_a^0 = 0.$$

Equation (3.7) in its turn is decoupled to the scalar and vector parts:

$$\xi^a V_a^0 = \alpha V^0 + \dot{\eta}^0,$$

and

$$\xi^a V_a^b = \alpha V^b + \dot{\eta}^b - 2\varepsilon^{bcd} \eta^c V^d, \quad (3.71)$$

where ε^{bcd} is the absolutely antisymmetric unit tensor.

In other words, system (3.3)-(3.7) includes the autonomous subsystem formed by equations (3.3), (3.4), (3.5), (3.41) and (3.43). Solving this subsystem we recover symmetries of the standard SE describing a spinless particle. Then, to find symmetries of the SP equation it is sufficient to solve equations (3.41) and (3.44) where ξ^b and α are functions found at the previous step.

Symmetries of the standard SE are presented in Section 3.1. Thus all what we need is to solve the related equations (3.41) and (3.44) with ξ^b and α presented in Tables 3.1 and 3.2.

3.5.2. Symmetries of SP equations which do not include oscillator terms.

Since we have in hands all inequivalent solutions of equations (3.4)-(3.6) which are found in the previous section, the only thing we need is to find the corresponding solutions of equations (3.44) where ξ^a and α are known and, in accordance with (3.70), η^a are not dependent on \mathbf{x} . In other words, it is necessary to consider all cases indicated in Table 1 and extend them

to the case of non-trivial V^a solving the corresponding equation (3.71) for potential components V^a .

First we consider the cases when SP equation admit one-dimensional algebras whose generators are presented in (3.28). The related scalar potentials are enumerated in items 1-4 of Table 3.1. In item 4 we can find one more symmetry, namely, G_3 , but it can be treated as induced by P_3 .

Let us start with the case which is not included into Table 3.1: no symmetry, all coefficients ξ^a and η^0 are trivial. The corresponding equation (3.44) is reduced to the following form:

$$\dot{\eta}^b - 2\varepsilon^{bcd}\eta^c V^d = 0. \quad (3.72)$$

Up to constant matrix transformation the generic solution of (3.72) is:

$$\begin{aligned} V^1 = V^2 = 0, & & V^3 = \lambda, \\ \eta^1 = \cos(t), & & \eta^2 = \sin(t), & & \eta^3 = \rho, \text{ and} \\ \eta^1 = \sin(t), & & \eta^2 = -\cos(t), & & \eta^3 = \rho, \end{aligned}$$

where λ and ρ are arbitrary constants.

Thus we find the symmetry of SP equation for a neutral particle interacting with the constant magnetic field which without loss of generality can be directed along the third coordinate axis. However, like in the case of the harmonic oscillator, the related SP equation (2.1) can be reduced to the equation with trivial potential, which can be done using transformation (3.21).

Let us consider consequently the matrix extensions of all potentials and symmetries presented in Table 3.1. For the first symmetry specified in Item 4, i.e., for P_3 we have $\xi = 1$ while ξ^1 , ξ^2 and α are trivial. Substituting these data into (3.44) we obtain:

$$V_3^a = \dot{\eta}^a - 2\varepsilon^{abc}\eta^b V^c. \quad (3.73)$$

Differentiating (3.73) w.r.t. t we obtain the condition $\dot{\eta}^a = 2\varepsilon^{abc}\dot{\eta}^b V^c$, and so

$$\dot{\eta}^a \ddot{\eta}^a = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} (\dot{\eta}^a \dot{\eta}^a) = 0. \quad (3.74)$$

In accordance with (3.74) vector components $\dot{\eta}^a$ should be time independent, and so

$$\eta^a = k^a t + n^a$$

with some constants k^a and n^a . Moreover, up to constant matrix transformations, $k^1 = k^2 = n^2 = 0$. As a result equation is reduced to the following

system:

$$\begin{aligned} V_3^1 &= 2n^3V^2, & V_3^2 &= 2(n^1V^3 - n^3V^1), \\ V_3^3 &= k^3 - 2n^1V^2, & k^3V^1 &= k^3V^2 = 0, \end{aligned} \quad (3.75)$$

which has two classes of solutions defined up to constant matrix transformations:

$$\begin{aligned} V^1 = V^2 = 0, \quad V^3 &= k^3x_3 + \Phi(x_1, x_2), & \eta^1 = \eta^2 = 0, \quad \eta^3 &= k^3t + n^3, \\ V^1 = V^2 = 0, \quad V^3 &= \Phi(x_1, x_2), & \eta^1 = \eta^2 = \eta^3 &= 0, \end{aligned} \quad (3.76)$$

and

$$\begin{aligned} V^1 &= \Phi \cos(2nx_3) + \tilde{\Phi}(x_1, x_2) \sin(2nx_3), \\ V^2 &= \Phi(x_1, x_2) \sin(2nx_3) - \tilde{\Phi}(x_1, x_2) \cos(2nx_3), \\ V^3 &= \tilde{G}(x_1, x_2), \\ \eta^1 = \eta^2 &= 0, \quad \eta^3 = n^3 = n, \end{aligned} \quad (3.77)$$

where $\Phi(x_1, x_2)$, $\tilde{\Phi}(x_1, x_2)$, $G(x_1, x_2)$ and $\tilde{G}(x_1, x_2)$ are arbitrary functions of x_1 and x_2 .

Solutions (3.76) are not interesting since they correspond to the direct sum of ordinary SEs considered in the previous section. However, solutions (3.77) generate the matrix potential which cannot be diagonalized. Namely, these solutions generate the following potential:

$$V = N(x_1, x_2) + F(x_1, x_2)M(n, x_3), \quad (3.78)$$

where $N(x_1, x_2)$, $F(x_1, x_2)$ and $M(n, x_3)$ are matrices of the following generic form:

$$\begin{aligned} N(x_1, x_2) &= G(x_1, x_2) + \sigma_3 \tilde{G}(x_1, x_2), \\ F(x_1, x_2) &= \Phi(x_1, x_2) + i\sigma_3 \tilde{\Phi}(x_1, x_2), \\ M(n, x_3) &= \sigma_1 \cos(2nx_3) + \sigma_2 \sin(2nx_3) \end{aligned} \quad (3.79)$$

with arbitrary functions G , \tilde{G} , Φ and $\tilde{\Phi}$.

In the case of standard SE the symmetry P_3 induces the symmetry G_3 . It can be verified by the direct calculation that for matrix potential (3.77) it is not the case, and so the related SP equation is not Galilei invariant.

Thus we have generalized the potential $V = G(x_1, x_2)$ presented in Item 4 of Table 1 which admit symmetry P_3 to the case of matrix potential given by equation (3.78). However the SE with potential $V = G(x_1, x_2)$ admits equivalence transformation (3.21) while in the case of matrix potential (3.79) it loses this property. It means that the term κx_3 which we omit in the case of scalar potential (since it can be reduced to zero by the equivalence transformation (3.21)) now cannot be omitted.

In complete analogy with the above we solve equations (3.44) corresponding to the other symmetries presented in Table 3.8. We will not present here the related cumbersome calculations (which can be found in [66]).

In Table 3.8 the symbols $M(\cdot)$, $N(\cdot)$, $F(\cdot)$ denote matrices defined in equations (3.79) where n can take arbitrary values including zero, $G(r)$ and $\Phi(r)$ are arbitrary functions.

Table 3.8: Symmetries for SP equation with non quadratic potential

No Potential V		Symmetries
1	$N(x_1, x_2) + F(x_1, x_2)M(n, x_3) + n\kappa x_3$	$P_3 + \sigma_3 n + n\kappa t$ and G_3 if $n = 0$
2	$N(\tilde{r}, x_3) + F(\tilde{r}, x_3)M(n, \varphi) + n\kappa\varphi$	$L_3 + n\kappa t + \sigma_3 n$
3	$N(\tilde{r}, x_3 - \varphi) + F(\tilde{r}, x_3 - \varphi)M(n, \varphi)$	$L_3 + P_3 + \sigma_3 n + n\kappa t$
4	$\frac{1}{r^2}N(\theta, r^n \kappa e^{-\varphi}) + \frac{1}{r^2}F(\theta, r^n \kappa e^{-\varphi})M(n, y),$ $y = \varphi + \nu \ln(r), \nu + k \neq 0$	$D + kL_3 + n(k + \nu)\sigma_3$
5	$N(\tilde{r}) + n\kappa\varphi + F(\tilde{r})M(n, x_3) + \nu x_3,$ $n \neq 0$	$L_3 + n\kappa t,$ $P_3 + n\sigma_3 + \nu t$
6	$N(\tilde{r}) + n\kappa\varphi + F(\tilde{r})M(n, \varphi)$	$L_3 + n\kappa t + n\sigma_3, P_3$ and G_3 if $n = 0$
7	$\frac{1}{r^2}N(\tilde{r}^n \kappa e^{-\varphi}) + \frac{1}{r^2}F(\tilde{r}^n \kappa e^{-\varphi})M(n, \varphi)$	$D + k(L_3 + n\sigma_3), P_3$
8	$\frac{1}{r^2}N(\theta) + \frac{1}{r^2}F(\theta)M(n, \varphi), n \neq 0$	$D, L_3 + n\sigma_3$
9	$\frac{1}{r^2}N(\theta) + \frac{1}{r^2}F(\theta)M(n, \ln(r))$	$D + n\sigma_3, L_3$ and A if $n = 0$
10	$N(x_2) + F(x_2)M(n, x_3) + n\kappa x_3$	$P_1, P_3 + n\sigma_3 + n\kappa t$ and G_1, G_3, L_2 if $n = 0$
11	$G(r) + \Phi(r)\sigma_a x_a$	$L_a + \frac{1}{2}\sigma_a, a = 1, 2, 3$
12	$\frac{\nu}{r^2} + \sigma_3 \frac{\mu}{r^2} + \frac{\alpha}{r^2}M(n, \ln(r))$	$D + n\sigma_3, L_1, L_2, L_3$ and A if $n = 0$
13	$\frac{\nu}{r^2} + \sigma_3 \frac{\mu}{r^2} + \frac{\alpha}{r^2}M(n, \varphi), n \neq 0$	$D, L_3 + n\sigma_3, P_3$
14	$\frac{\nu}{r^2} + \sigma_3 \frac{\mu}{r^2} + \frac{\alpha}{r^2}M(n, \ln(\tilde{r}))$	$D + n\sigma_3, P_3, L_3$ and A if $n = 0$
15	$\frac{\nu}{x_3^2} + \sigma_3 \frac{\mu}{x_3^2} + \frac{\alpha}{x_3^2}M(n, \ln(x_3))$	$D + n\sigma_3, P_1, P_2, L_3$ and A, G_1, G_2 if $n = 0$
16	$\frac{\nu}{r^2} + \frac{\mu}{r^3}\sigma_a x_a$	$D, A, L_a + \frac{1}{2}\sigma_a, a = 1, 2, 3$

3.5.3. *Symmetries of SP equations with oscillator terms.* The next step of our classification is the generalization of the scalar potentials which include the harmonic oscillator terms to the case of matrix ones. Such potentials

are presented in Table 3.2. In addition, we are supposed to analyze all versions presented in Table 3.1 and marked by the asterisk. The related potentials can be generalized to include the isotropic harmonic oscillator term which cannot be removed using the equivalence transformations (3.21) provided the potential includes non-diagonal matrix terms.

Starting with the analogous reasons, it is necessary to generalize the potentials including linear terms, which can be generated using equivalence transformations (3.21) starting with the data of Table 3.1 marked by the star.

Let us consider consequently all symmetries presented in Table 3.2 and find the matrix potentials compatible with them. To achieve this goal it is sufficient to solve equations (3.44) for V^a where functions ξ^a can be found comparing definition (3.1) and explicit expressions for symmetry operators presented in the Table 3.2.

For symmetries presented in Item 1 of Table 3.2 we find that neither B_3^ε nor \hat{B}_3^ε generate non-trivial solutions of equation (3.44) for components V^a of matrix potential. However, the linear combinations $Q^\pm = B_3^\pm \pm \hat{B}_3^\pm$ are compatible with non-trivial V^a . In this case the nonzero components ξ^a and η^0 are

$$\xi^3 = \exp(\pm\omega t), \quad \eta^0 = \mp \exp(\pm\omega t)\omega x_3.$$

The related components η^a should have the same dependence on t as ξ^3 , and so in analogy with (3.76) we have to set

$$\eta_1 = \eta_2 = 0, \quad \eta^3 = n \exp(\pm\omega t).$$

In the following we omit signs \pm but reserve the possibilities for parameter ω be positive or negative, and write the corresponding symmetry as

$$Q = \exp(\omega t)(P_3 - \omega x_3 + n\sigma_3).$$

Substituting these data into equation (3.44) we come to the following system:

$$\begin{aligned} V_3^1 &= 2nV^2, & V_3^2 &= -2nV^1, \\ V_3^3 &= \omega n. \end{aligned} \quad (3.80)$$

Equation (3.80) is easy solved and its solution is given by formula (3.77). Just this solution is presented in Item 1 of Table 3.6 together with the scalar term $-\frac{1}{2}\omega^2 x_3^2$.

Thus we have found an example of matrix potential which include the repulsive oscillator term. The related SP equation (2.1), (2.6) admits a one parametric Lie group additional to shifts of the time variable. This potential includes three arbitrary matrices of special form (3.79), dependent on two or one spatial variables. To classify the potentials which admit

symmetry (3.44) and are compatible with more extended symmetry groups we apply the additional conditions (3.72) where ξ^a and η^a are functions specifying the additional symmetries (3.1), (3.40).

Table 3.9: Potentials with oscillator terms and symmetries for Schrödinger-Pauli equation

No	Potential V	Symmetries
1	$N(x_1, x_2) + \sigma_3 \omega n x_3 - \frac{1}{2} \omega^2 x_3^2 + F(x_1, x_2) M(n, x_3)$	Q
2	$N(\tilde{r}) + \sigma_3 \omega n x_3 + F(\tilde{r}) M(n, x_3) + n \kappa \varphi - \frac{1}{2} \omega^2 x_3^2$	$Q, L_3 + n \kappa t$
3	$N(x_2) + \sigma_3 \omega n x_3 - \frac{1}{2} \omega^2 x_3^2 + F(x_2) M(n, x_3)$	Q, P_1, G_1
4	$N(x_1) + F(x_1) M(n, x_3) + \frac{\varepsilon}{2} \omega_2^2 x_2^2 - \frac{1}{2} \omega_3^2 x_3^2 + n \omega \sigma_3 x_3$	$Q, B_2^\varepsilon, \tilde{B}_2^\varepsilon$
5	$\mu M(n, x_3) + \frac{\varepsilon}{2} \omega_2^2 x_2^2 - \frac{1}{2} \omega_3^2 x_3^2 + \sigma_3 n \omega x_3$	$Q, B_2^\varepsilon, \tilde{B}_2^\varepsilon, P_1$
6	$\mu M(n, x_3) + \frac{\varepsilon_1}{2} \omega_1^2 x_1^2 + \frac{\varepsilon_2}{2} \omega_2^2 x_2^2 - \frac{1}{2} \omega_3^2 x_3^2 + \sigma_3 n \omega x_3$	$Q, B_1^{\varepsilon_1}, \tilde{B}_1^{\varepsilon_1}, B_2^{\varepsilon_2}, \tilde{B}_2^{\varepsilon_2}$
7	$\mu M(n, x_3) + \frac{\varepsilon_1}{2} \omega^2 \tilde{r}^2 - \frac{1}{2} \omega_3^2 x_3^2 + \sigma_3 n \omega x_3$	$Q, B_1^\varepsilon, \tilde{B}_1^\varepsilon, B_2^\varepsilon, \tilde{B}_2^\varepsilon, L_3$
8	$\sigma_3 \omega n - \frac{1}{2} \omega^2 r^2 + \frac{1}{r^2} N(\varphi, \theta) + \frac{1}{r^2} F(\varphi, \theta) M(n, \ln(r))$	\tilde{Q}
9	$\sigma_3 \omega n - \frac{1}{2} \omega^2 r^2 + \frac{1}{r^2} N(\theta) + \frac{1}{r^2} F(\theta) M(n, \ln(r))$	\tilde{Q}, L_3
10	$\sigma_3 \omega n - \frac{1}{2} \omega^2 r^2 + \frac{1}{\tilde{r}^2} N(\varphi) + \frac{1}{\tilde{r}^2} F(\varphi) M(n, \ln(\tilde{r}))$	$\tilde{Q}, B_3^-, \tilde{B}_3^-$
11	$\sigma_3 \omega n - \frac{1}{2} \omega^2 r^2 + \frac{\mu}{r^2} + \frac{\lambda}{r^2} M(n, \ln(r))$	\tilde{Q}, L_1, L_2, L_3
12	$\sigma_3 \omega n - \frac{1}{2} \omega^2 r^2 + \frac{\mu}{\tilde{r}^2} + \frac{\lambda}{\tilde{r}^2} M(n, \ln(\tilde{r}))$	$\tilde{Q}, L_3, B_3^-, \tilde{B}_3^-$
13	$\sigma_3 \omega n - \frac{1}{2} \omega^2 r^2 + \frac{\mu}{x_3} + \frac{\lambda}{x_3} M(n, \ln(x_3))$	$\tilde{Q}, L_3, B_1^-, \tilde{B}_1^-, B_2^-, \tilde{B}_2^-$
14	$N(\tilde{r}) + F(\tilde{r}) M(n, \varphi) + \frac{\varepsilon}{2} \omega^2 x_3^2$	$L_3 + \sigma_3 n, B_3^\varepsilon, \tilde{B}_3^\varepsilon$
15	$N(x_2) + \frac{\varepsilon}{2} \omega^2 x_1^2 + F(x_2) M(n, x_3) + n \kappa x_3$	$P_3 + n \sigma_3 + n \kappa t, B_1^\varepsilon, \tilde{B}_1^\varepsilon$
16	$\mu M(n, x_3) + \frac{\varepsilon_1}{2} \omega_1^2 x_1^2 + \frac{\varepsilon_2}{2} \omega_2^2 x_2^2 + n \kappa x_3$	$B_1^{\varepsilon_1}, \tilde{B}_1^{\varepsilon_1}, B_2^{\varepsilon_2}, \tilde{B}_2^{\varepsilon_2}, P_3 + n \sigma_3 + n \kappa t$
17	$\mu M(n, x_3) + \frac{\varepsilon}{2} \omega^2 \tilde{r}^2 + n \kappa x_3$	$B_1^\varepsilon, \tilde{B}_1^\varepsilon, B_2^\varepsilon, \tilde{B}_2^\varepsilon, L_3, P_3 + n \sigma_3 + n \kappa t$

Applying this machinery to all potential presented in Tables 1-3 we find all symmetries admitted by SP equations with matrix potentials which include quadratic terms, see [66] for calculation details. The classification results are present in Table 9.

In the table $Q = B^+$ and $\tilde{Q} = A^+$ are generators fixed in (3.27). The symbols $N(\cdot)$, $F(\cdot)$, $M(n, \cdot)$ denote matrices (3.79) depending on the arguments fixed in the brackets, μ and λ are arbitrary real parameters.

Symmetries specified in Table 9 correspond to non-zero values of parameter n . However, the corresponding equations are well defined also for $n = 0$. In this case symmetry algebras are more extended, namely, symmetries Q and \tilde{Q} are replaced by the pairs $\langle B_3^-, \tilde{B}_3^- \rangle$ and $\langle A^-, \hat{A}^- \rangle$ correspondingly. In addition, symmetry G_3 appears in Items 15, 16, 17 and symmetry G_1 should be included into Item 5.

Summarising, we classify all inequivalent Lie symmetries which can be admitted by SP equations for the neutral particles. The classification problem appears to be more complicated than in the case of the SP equations for charged particles, but it can be effectively solved using the algebraic approach.

3.6. Symmetries of PDM Schrödinger equations.

3.6.1. *The stationary equation.* PDM Schrödinger equations include Hamiltonians whose generic form is given by equation (2.2). It includes two arbitrary elements, i.e., the inverse mass $f(\mathbf{x})$ and potential $V(\mathbf{x})$.

Let us start with symmetries of the related stationary SE (2.3). Then the corresponding invariance condition formally coincides with (3.2) where $\alpha = 0$ and generates the following determining equations:

$$\xi^c f_c \delta_{ab} - f(\xi_a^b + \xi_b^a) = 0, \quad (3.81)$$

$$-\xi^i f_{ai} + f_i \xi_i^a + f \xi_{cc}^a + 2f \eta_a = 0, \quad (3.82)$$

$$f_a \eta_a + f \eta_{aa} - \xi^a V_a = 0. \quad (3.83)$$

The system (3.81)-(3.83) is overdetermined and includes ten equations for six unknowns.

Equation (3.81) can be decoupled to two subsystems:

$$\xi_a^b + \xi_b^a = \frac{2}{3} \delta_{ab} \xi_i^i, \quad (3.84)$$

$$3\xi^i f_i = 2f \xi_i^i, \quad (3.85)$$

which are nothing but the traceless part and trace of (3.81).

Relations (3.84) define the $3d$ conformal Killing vector, whose general form is given by the following expression (see, e.g., [52])

$$\xi^a = \lambda^a x^n x^n - 2x^a \lambda^n x^n + \mu^c \varepsilon^{abc} x^b + \omega x^a + \nu^a, \quad (3.86)$$

where the Greek letters denote arbitrary real constants.

To find function η needed to fix Q it is sufficient to differentiate (3.4) w.r.t. x_a and compare the result with (3.82). In this way, using equations (3.84) and the following identities

$$\xi_{aa}^i = 2\lambda_i, \quad \xi_{ia}^i = -6\lambda_a$$

we obtain

$$\eta = -3\lambda_a x_a + c, \tag{3.87}$$

where c is a constant.

The remaining equations (3.83) and (3.4) are reduced to the following form:

$$\xi^i f_i = 2(\omega - 2\lambda_a x_a) f, \tag{3.88}$$

$$\xi^i V_i = -3\lambda_i f_i, \tag{3.89}$$

where ξ^i are given in (3.86). Thus our classification problem is reduced to finding the general solution of equations (3.88) and (3.89) for unknowns f and V , where ξ^i are polynomials (3.86).

Equations (3.88) and (3.89) include ten arbitrary parameters. To specify the values of these parameters which correspond to non-equivalent versions of these equations we note that in accordance with (5.12), (3.86), (3.87) we should deal with the linear combination of the generators the 3d conformal group:

$$Q = \lambda^i K^i + \mu^i J^i + \omega D + \nu^i P^i + c, \tag{3.90}$$

where

$$\begin{aligned} P^i &= p^i = -i \frac{\partial}{\partial x_i}, & J^i &= \varepsilon^{ijk} x^j p^k, \\ D &= x^n p^n - \frac{3i}{2}, & K^i &= x^n x^n p^i - 2x^i D, \end{aligned} \tag{3.91}$$

and c is a constant which is not essential and will be chosen as zero.

Thus the integrals of motion belong to algebra $c(3)$ whose basis elements are given by equation (3.91). However, if all parameters λ^a, ν^a, μ^a and ω are arbitrary, then the determining equations have only trivial solutions $f(\mathbf{x}) = 0, V(\mathbf{x}) = \text{const}$. To obtain a non-trivial equation (2.1) it is necessary to impose some constraints on these parameters and reduce the algebra $c(3)$ to one of its subalgebras.

Happily, the optimal system of subalgebras of $c(3)$ are well known. To enumerate them we note that algebra $c(3)$ is isomorphic to $\mathfrak{so}(1, 4)$, i.e., to the Lie algebra of the Poincaré group in (1+4)-dimensional space. This isomorphism is fixed by the following relations:

$$M^{ab} = \varepsilon^{abc} J^c, \quad M^{0a} = \frac{1}{2}(K^a + P_a),$$

$$M^{4a} = \frac{1}{2}(K^a - P_a), \quad M^{04} = D, \quad (3.92)$$

where $M^{\mu\nu}$ with $\mu, \nu = 0, 1, 2, 3, 4$ are basis elements of algebra $\mathfrak{so}(1,4)$, satisfying the following commutation relations:

$$[M^{\mu\nu}, M^{\lambda\sigma}] = i(g^{\mu\sigma} M^{\nu\lambda} + g^{\nu\lambda} M^{\mu\sigma} - g^{\mu\lambda} M^{\nu\sigma} - g^{\nu\sigma} M^{\mu\lambda}),$$

where $g^{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -1, -1, -1)$. Optimal subalgebras of algebra $\mathfrak{so}(1,4)$ have been classified in paper [75]. Using this classification and applying isomorphism (3.92) we obtain the requested list of non-equivalent subalgebras, which can be found in paper [70]. Here we present only the bases of one-dimensional subalgebras:

$$\begin{aligned} &\langle M^{21} \rangle, \quad \langle M^{43} - M^{03} \rangle, \quad \langle M^{43} - M^{03} + M^{21} \rangle, \\ &\langle M^{43} + \alpha M^{21} \rangle, \quad 0 < \alpha^2 \leq 1, \quad \langle M^{04} - \nu M^{21} \rangle, \quad 0 \leq \nu \leq 1. \end{aligned} \quad (3.93)$$

Any symmetry (3.93) corresponds to the fixed values of the numeric parameters in the linear combination (3.90) which will appear in our determining equations, which appear to be exactly solvable. We will not give here the related routine calculations which can be found in [70], but restrict ourselves to the presentation of the classification results given in Table 3.10, where μ, ν and $\alpha \neq 0$ are arbitrary constants, φ and θ are Euler angles,

$$\omega = \alpha \arctan \frac{r^2 + 1}{2x_3} - \varphi, \quad k_{\pm} = \tilde{r}^2 + (x_3 \pm 1)^2,$$

while $D_1 F(\dots)$, $D_2 F(\dots)$ and $DF(\dots)$ denote the derivations of functions $F(\dots)$ with respect to their the first, second and the only element correspondingly.

Table 3.10 presents the complete list of inequivalent symmetries which can be admitted by the stationary PDM Schrödinger equations. As it is shown in paper [70] (refer also to Section 5 of the present paper) many of the systems presented in Table 10 are exactly solvable.

3.6.2. Time dependent PDM Schrödinger equations. The equation indicated in the section title has the generic form (2.1), where $H = \hat{H}$ is Hamiltonian given by the following formula:

$$H = m^\rho p_a m^{-1-2\rho} p_a m^\rho + \tilde{V}. \quad (3.94)$$

Here $p_a = -i \frac{\partial}{\partial x_a}$, $m = m(\mathbf{x})$ and $\tilde{V} = \tilde{V}(\mathbf{x})$ are the mass and potential depending on spatial variables $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, and summation w.r.t. the repeating indices a is imposed over the values $a = 1, 2, \dots, n$. In our case $n = 2$ while the case $n = 3$ will be considered in the following section.

Table 3.10: Functions f and V in Hamiltonians (2.2) and the corresponding integrals of motion

No	f	V	Integrals of motion
1	$F(\tilde{r}^2, x_3)$	$\tilde{F}(\tilde{r}^2, x_3)$	M^{21}
2	$F(x_1, x_2)$	$\tilde{F}(x_1, x_3)$	$M^{43} - M^{03}$
3	$r^2 F(\theta, r^\nu e^\varphi)$	$\tilde{F}(\theta, r^\nu e^\varphi)$	$M^{04} - \nu M^{21}$
4	$\tilde{r}^2 F(\frac{r^2+1}{\tilde{r}}, \omega)$	$3\tilde{r}(D_1 - \frac{\alpha x_3 \tilde{r}}{2k_+ k_-} D_2)F + \tilde{F}(\frac{r^2+1}{\tilde{r}}, \omega)$	$M^{43} + \alpha M^{21}$
5	$F(\tilde{r}^2, x_3 - \varphi)$	$\tilde{F}(\tilde{r}^2, x_3 - \varphi)$	$M^{43} - M^{03} + M^{21}$
6	$\tilde{r}^2 F(\frac{r^2+1}{\tilde{r}})$	$3\tilde{r}F' + \tilde{F}(\frac{r^2+1}{\tilde{r}})$	M^{43}, M^{21}
7	$F(\tilde{r})$	$\tilde{F}(\tilde{r})$	$M^{21}, M^{43} - M^{03}$
8	$\tilde{r}^2 F(\tilde{r}^\alpha e^\varphi)$	$\tilde{F}(\tilde{r}^\alpha e^\varphi)$	$M^{43} - M^{03}, M^{40} + \alpha M^{21}$
9	$r^2 F(\theta)$	$\tilde{F}(\theta)$	M^{40}, M^{12}
10	$r^2 F(\varphi)$	$\tilde{F}(\varphi)$	M^{04}, M^{03}, M^{43}
11	$F(x_3)$	$\tilde{F}(x_3)$	$M^{41} - M^{01}, M^{42} - M^{02}, M^{12}$
12	$F(r^2)$	$\tilde{F}(r^2)$	M^{32}, M^{31}, M^{21}
13	μr^2	ν	$M^{04}, M^{12}, M^{31}, M^{23}$
14	$\mu \tilde{r}^2$	ν	$M^{40}, M^{21}, M^{43}, M^{03}$
15	$\mu(r^2 + 1)^2$	$6\mu r^2 + \nu$	$M^{41}, M^{42}, M^{43}, M^{21}, M^{31}, M^{32}$
16	$\mu(r^2 - 1)^2$	$6\mu r^2 + \nu$	$M^{01}, M^{02}, M^{03}, M^{21}, M^{31}, M^{32}$
17	μr^4	$6\mu r^2 + \nu$	$M^{31}, M^{21}, M^{32}, M^{43} + M^{03}, M^{42} + M^{02}, M^{41} + M^{01}$

In (3.94) we give the physically motivated representation for the kinetic energy term, where ρ is the so called ambiguity parameter [46, 87]. Alternatively, it is possible to represent H in the standard form (2.7). Moreover, the related function m and f are connected by the following relation [64]:

$$f = m^{-1}, \quad V = \tilde{V} + (\rho^2 + 2\rho) \frac{m_a m_a}{m^3} - \frac{\rho m_{aa}}{m^2}.$$

Here $m_a = \frac{\partial m}{\partial x_a}$ and $f_a = \frac{\partial f}{\partial x_a}$.

3.6.3. *Determining equations for symmetries of time dependent PDM Schrödinger equations in any dimension.* Let us search for symmetries of equations (2.1), (2.7) with respect to continuous groups of transformations. Like

in previous sections we represent the generator of the symmetry group in the form (3.1) and substitute this expression together with (2.7) into the invariance condition (3.2). Evaluating commutator in (3.2) and equating coefficients for the same differentials we come to the following system of the determining equations for unknowns ξ^0 , ξ^a , η , f , \hat{V} and α :

$$\xi^0 = -\alpha, \quad \xi_a^0 = 0, \quad (3.95)$$

$$\left(\xi_a^b + \xi_b^a\right) f - \delta^{ab} (\xi^i f_i - \alpha f) = 0, \quad (3.96)$$

$$-i\dot{\xi}^a + f\xi_{cc}^a - 2if\eta_a + \xi^b f_{ab} - \xi_b^a f_b - f\xi_{na}^n = \alpha f_a, \quad (3.97)$$

$$i(f\eta_a)_a + \xi^a V_a + \frac{1}{2} (f\xi_{ab}^a)_b + \left(\frac{i}{2}\dot{\xi}_a^a - \dot{\eta}\right) = \alpha V, \quad (3.98)$$

where δ^{ab} is the Kronecker delta, the dot and subindices denote derivations with respect to time and spatial variables: $\dot{\xi}^0 = \frac{\partial \xi^0}{\partial t}$, $f_a = \frac{\partial f}{\partial x_a}$, etc.

Using differential and algebraic consequences of (3.96)-(3.98) it is possible to reduce this system to the following equivalent form (see [71]):

$$\xi_a^b + \xi_b^a - \frac{2}{n} \delta_{ab} \xi_i^i = 0, \quad (3.99)$$

$$\xi^i f_i - \alpha f = \frac{2}{n} f \xi_i^i, \quad (3.100)$$

$$\dot{\xi}^a + 2\eta_a f = 0, \quad (3.101)$$

$$\xi^a V_a + \frac{1}{2} \xi_{ba}^b f_a = \alpha V + \dot{\eta}. \quad (3.102)$$

The system (3.95), (3.99)-(3.102) gives the determining equations for symmetries of arbitrary dimension PDM Schrödinger equation. It is overdetermined but rather complicated. In the following sections we present solutions of this system for $n = 2$.

3.6.4. Reduction to the case $n = 2$ and equivalence relations. The classification problem in $(1 + 2)$ -dimensional space is rather specific. First, the number of dependent and independent variables is relatively small, secondly, the equivalence relations appear to be more powerful than in the cases of more extended carrier spaces.

Equation (3.99) for $n = 2$ is reduced to the Cauchy-Riemann conditions for functions $\xi^1 = u$ and $\xi^2 = v$:

$$u_1 = v_2, \quad u_2 = -v_1. \quad (3.103)$$

The corresponding symmetries (3.1) can be rewritten as follows:

$$Q = \xi^0 \partial_0 + u \partial_1 + v \partial_2 + u_1 + i\eta. \quad (3.104)$$

The remaining equations (3.100)-(3.102) take the following form:

$$2f\eta_1 + \dot{u} = 0, \quad (3.105)$$

$$2f\eta_2 + \dot{v} = 0, \quad (3.106)$$

$$uf_1 + vf_2 - (\alpha + 2u_1)f = 0, \quad (3.107)$$

$$uV_1 + vV_2 + u_{11}f_1 + v_{22}f_2 = \alpha V + \dot{\eta}. \quad (3.108)$$

Just system (3.95), (3.103), (3.105)-(3.108) together with definition (3.104) describes symmetry algebras for equations (2.1), (2.4) with $n = 2$. To solve this system it is necessary fix the admissible equivalence relations.

Let us note that Hamiltonian (2.7) is form invariant with respect to the following transformation:

$$x_1 \rightarrow \tilde{u}(x_1, x_2), \quad x_2 \rightarrow \tilde{v}(x_1, x_2), \quad (3.109)$$

$$\psi \rightarrow \frac{1}{\sqrt{R}}\psi, \quad H \rightarrow \frac{1}{\sqrt{R}}H\sqrt{R}, \quad (3.110)$$

where \tilde{u} and \tilde{v} are arbitrary functions satisfying the Cauchy-Riemann condition (3.103), and $R = \sqrt{\tilde{u}_1^2 + \tilde{u}_2^2}$. Indeed, the transformations (3.109) and (3.110) keep the generic form of the Hamiltonian but change functions f and V in (2.7).

In addition, the related equation (2.1) admits the scaling and shifts of the time variable:

$$t \rightarrow \nu t + \mu, \quad (3.111)$$

where $\nu \neq 0$ and μ are arbitrary constants. Such transformations can be compensated by multiplication of f and V by $\frac{1}{\nu}$. Moreover, formulae (3.109), (3.110) and (3.111) give the most general continues transformations which keep the generic form (2.7) of the Hamiltonian up to change of functions f and V [71]. Thus two equations of type (2.1), (2.7) be equivalent if they can be connected via transformations (3.109)-(3.111).

3.6.5. Classification results for $n = 2$. Let us present the classification results obtained in [71] by solution of the determining equations (3.3), (3.103), (3.105)-(3.108) up to the equivalence relations (3.109)-(3.111). They are given by the following formulae where the inequivalent symmetries together with the corresponding Hamiltonians:

$$\begin{cases} H = p_a f(r) p_a + V(r), \\ Q_1 = J = x_1 p_2 - x_2 p_1; \end{cases} \quad (3.112)$$

$$\begin{cases} H = p_a(r^2 + 1)^2 p_a - 4r^2, \\ Q_1 = J, \\ Q_2 = (x_2^2 - x_1^2 - 1)p_1 - 2x_1x_2p_2 + 2ix_1, \\ Q_3 = (x_1^2 - x_2^2 - 1)p_2 - 2x_1x_2p_1 + 2ix_2; \end{cases} \quad (3.113)$$

$$\begin{cases} H = p_a(r^2 - 1)^2 p_a - 4r^2, \\ Q_1 = J, \\ Q_4 = (x_2^2 - x_1^2 + 1)p_1 - 2x_1x_2p_2 + 2ix_1, \\ Q_5 = (x_1^2 - x_2^2 + 1)p_2 - 2x_1x_2p_1 + 2ix_2 \end{cases} \quad (3.114)$$

$$\begin{cases} H = p_a r^{\alpha+2} F(\varphi) p_a + r^\alpha \hat{V}(\varphi), \\ Q_6 = D = i\alpha t \partial_t + x_1 p_1 + x_2 p_2; \end{cases} \quad (3.115)$$

$$\begin{cases} H = p_a f(r) p_a + \nu \varphi + \hat{V}(r), \\ Q_7 = J + \nu t; \end{cases} \quad (3.116)$$

$$\begin{cases} H = p_a x_1^{\alpha+2} p_a + \nu x_1^\alpha, \quad \alpha \neq 1; \\ Q_8 = p_2, \\ Q_9 = D; \end{cases} \quad (3.117)$$

$$\begin{cases} H = p_a x_1^3 p_a + \mu x_1 + \nu x_2, \\ Q_{10} = p_2 + \nu t, \\ Q_{11} = it \partial_t + x_1 p_1 + x_2 p_2, \end{cases} \quad (3.118)$$

where $\varphi = \arctan\left(\frac{x_2}{x_1}\right)$ and $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$. In addition, $f(r)$, $F(\varphi)$, $\hat{V}(r)$ and $\hat{V}(\varphi)$ are arbitrary functions of the arguments fixed in brackets.

Equations (3.112)-(3.118) present Hamiltonians with different symmetries, defined up to equivalence relations (3.109), (3.110) and (3.111). All presented systems are invariant w.r.t. shifts of the time variable. The generator of these transformations is $P_0 = i \frac{\partial}{\partial t}$.

Let us note that for $F(\varphi) = \exp(\nu\varphi)$ and $\hat{V}(\varphi) = \mu \exp(\nu\varphi)$ the system (3.115) admits the additional symmetry $Q = J + 2\nu t P_0$. In addition, if in equations (3.116) function $f(r)$ is proportional to r^2 , the corresponding system admits the additional integral of motion $D_0 = x_1 p_1 + x_2 p_2 - i$. We do not specify these systems in the list (3.112)-(3.118) since they are equivalent to systems with constant masses.

Operators Q_1, Q_2, \dots, Q_5 given by formulae (3.112)-(3.114) commute with Hamiltonians and so are integrals of motion. In addition, they satisfy

the following commutation relations:

$$\begin{aligned} [Q_1, Q_2] &= iQ_3, & [Q_1, Q_3] &= -iQ_2, & [Q_2, Q_3] &= iQ_1, \\ [Q_1, Q_4] &= iQ_5, & [Q_1, Q_5] &= -iQ_4, & [Q_4, Q_5] &= -iQ_1, \end{aligned}$$

which specify algebras $\mathfrak{so}(3)$ and $\mathfrak{so}(1, 2)$ correspondingly.

The other symmetries which are given by equations (3.115)-(3.118) are time dependent and do not commute with Hamiltonians. However, they satisfy the following relations:

$$[Q_6, H] = 2iH, \quad (3.119)$$

$$[Q_7, H] = -\nu I, \quad [Q_7, I] = [H, I] = 0, \quad (3.120)$$

$$[Q_8, H] = 0, \quad [Q_9, H] = i\alpha H, \quad [Q_9, Q_8] = iQ_8, \quad (3.121)$$

$$\begin{aligned} [Q_{10}, H] &= -i\nu I, & [Q_{11}, H] &= iH, & [Q_{10}, Q_{11}] &= i\nu Q_{10}, \\ [Q_{10}, I] &= [Q_{11}, I] &= [H, I] &= 0, \end{aligned} \quad (3.122)$$

where I is the unit operator.

3.6.6. Classification results for $n = 3$. The determining equations (3.95), (3.99)-(3.102) are defined for PDM Schrödinger equations of arbitrary dimension d . The most interesting case $d = 3$ was considered in paper [64], where the mentioned systems were solved and the related equivalence relations were specified. Here we restrict ourselves to presentation of the mentioned equivalence relations and classification tables.

It is shown in [64] that the generic equivalence group for PDM Schrödinger equations with three spatial variables is nothing but $C(3)$, i.e., the conformal group in three-dimensional flat space. We can search for potentials V up to constant terms C , i.e., potentials V and $V' = V + C$ will be treated as equivalent. To reduce V' to V it is sufficient to make the transformation $\psi \rightarrow e^{-iCt}\psi$ in equation (2.1), (2.7). In addition, rescaling the time variable we can reduce to the unity any constant multiplier for f .

Transformations discussed in the above belong to the generic equivalence group of equations (2.1), (2.7) and can be applied for any arbitrary elements f and V . However, for some particular cases there are additional equivalence transformations which are listed in the following formulae:

$$\begin{cases} x_1 \rightarrow \tilde{x}_1 = x_1 \cos\left(\frac{\mu}{\lambda^2}\right) - x_2 \sin\left(\frac{\mu}{\lambda^2}\right), \\ x_2 \rightarrow \tilde{x}_2 = x_2 \cos\left(\frac{\mu}{\lambda^2}\right) + x_1 \sin\left(\frac{\mu}{\lambda^2}\right), \end{cases} \quad (3.123)$$

$$\begin{cases} x_1 \rightarrow \tilde{x}_1 = x_1 \cos(\ln(\omega)) - x_2 \sin(\ln(\omega)), \\ x_2 \rightarrow \tilde{x}_2 = x_2 \cos(\ln(\omega)) + x_1 \sin(\ln(\omega)), \\ t \rightarrow \tilde{t} = t\omega^{-1}, \end{cases} \quad (3.124)$$

$$\mathbf{x} \rightarrow \tilde{\mathbf{x}} = e^{\frac{\mu}{\lambda^2}} \mathbf{x}, \quad (3.125)$$

$$\mathbf{x} \rightarrow \tilde{\mathbf{x}} = \omega^{-\frac{1}{\sigma}} \mathbf{x}, \quad t \rightarrow \tilde{t} = t\omega^{-1}, \quad (3.126)$$

$$x_3 \rightarrow \tilde{x}_3 = x_3 - \omega, \quad t \rightarrow \tilde{t} = t\omega^{-1}, \quad (3.127)$$

$$\begin{cases} x_1 \rightarrow \tilde{x}_1 = \sigma^{-1}, \\ x_2 \rightarrow \tilde{x}_2 = \sigma^{-1}, \\ x_3 \rightarrow \tilde{x}_3 = \sigma^{-1}(x_3 + 2 \ln(\sigma)) \end{cases} \quad (3.128)$$

$$\begin{cases} x_1 \rightarrow \tilde{x}_1 = x_1 \cos\left(\frac{\mu t^2}{2}\right) + x_2 \sin\left(\frac{\mu t^2}{2}\right), \\ x_2 \rightarrow \tilde{x}_2 = x_2 \cos\left(\frac{\mu t^2}{2}\right) - x_1 \sin\left(\frac{\mu t^2}{2}\right), \\ \psi(t, x_1, x_2, x_3) \rightarrow \tilde{\psi}(t, \tilde{x}_1, \tilde{x}_2, x_3) = e^{i\mu t(\frac{\mu t^2}{3} - \Theta)} \psi(t, x_1, x_2, x_3), \\ V \rightarrow V + \mu \tilde{\Theta}, \quad \tilde{\Theta} = \arctan\left(\frac{\tilde{x}_2}{\tilde{x}_1}\right), \quad \Theta = \arctan\left(\frac{x_2}{x_1}\right), \end{cases} \quad (3.129)$$

$$\begin{cases} \mathbf{x} \rightarrow \tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{x} e^{-\frac{\mu t^2}{2}}, \\ \psi(t, \mathbf{x}) \rightarrow \tilde{\psi}(t, \tilde{\mathbf{x}}) = e^{\frac{3\mu t^2}{2} + i\mu t(\frac{\mu t^2}{3} - \ln(r))} \psi(t, \mathbf{x}), \\ V \rightarrow V + \mu \ln(r), \end{cases} \quad (3.130)$$

$$\begin{cases} x_3 \rightarrow \tilde{x}_3 = x_3 e^{-\frac{\mu t^2}{2}}, \\ \psi(t, x_1, x_2, x_3) \rightarrow \tilde{\psi}(t, x_1, x_2, \tilde{x}_3) = \\ = e^{\frac{3\mu t^2}{2} + i\mu^2 t^3 - i\mu t \ln(x_3)} \psi(t, x_1, x_2, x_3), \\ V \rightarrow V + \mu \ln(x_3), \end{cases} \quad (3.131)$$

$$\begin{cases} x_3 \rightarrow \tilde{x}_3 = x_3 + \ln(1 + t^2) + \ln\left(\frac{\mu}{2}\right), \quad t \rightarrow \tilde{t} = \frac{2}{\mu} \arctan(t), \\ \psi(t, x_1, x_2, x_3) \rightarrow \tilde{\psi}(\tilde{t}, x_1, x_2, \tilde{x}_3) = e^{\frac{-i\mu t}{(1+t^2)}} e^{-x_3} \psi(t, x_1, x_2, x_3), \\ V \rightarrow V + \frac{\mu^2}{2} e^{-\tilde{x}_3}, \end{cases} \quad (3.132)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x_3 \rightarrow \tilde{x}_3 = x_3 + \ln(1 - t^2) + \ln\left(\frac{\mu}{2}\right), \\ t \rightarrow \tilde{t} = \frac{2}{\mu} \operatorname{arctanh}(t), \\ \psi(t, x_1, x_2, x_3) \rightarrow \tilde{\psi}(\tilde{t}, x_1, x_2, \tilde{x}_3) = e^{\frac{i\mu t}{(1-t^2)}} e^{-x_3} \psi(t, x_1, x_2, x_3), \\ V \rightarrow V - \frac{\mu^2}{2} e^{-\tilde{x}_3}, \end{array} \right. \quad (3.133)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 \rightarrow \tilde{x}_1 = x_1 \cos(\Phi) - x_2 \sin(\Phi), \\ \Phi = \frac{1}{\sigma} \ln\left(\frac{\omega\sigma(1+t^2)}{2}\right), \\ x_2 \rightarrow \tilde{x}_2 = x_2 \cos(\Phi) + x_1 \sin(\Phi), \\ t \rightarrow \tilde{t} = \frac{2}{\omega\sigma} \operatorname{arctan}(t), \\ \psi(t, x_1, x_2, x_3) \rightarrow \tilde{\psi}(\tilde{t}, \tilde{x}_1, \\ \tilde{x}_2, x_3) = e^{\frac{-i\omega t}{\sigma(1+t^2)}} e^{-\sigma\Theta} \psi(t, x_1, x_2, x_3), \\ V \rightarrow V + \frac{\omega^2}{2} e^{-\sigma\Theta}, \end{array} \right. \quad (3.134)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 \rightarrow \tilde{x}_1 = x_1 \cosh(\hat{\Phi}) - x_2 \sinh(\hat{\Phi}), \\ \hat{\Phi} = \frac{1}{\sigma} \ln\left(\frac{\omega\sigma(1-t^2)}{2}\right), \\ x_2 \rightarrow \tilde{x}_2 = x_2 \cosh(\hat{\Phi}) + x_1 \sinh(\hat{\Phi}), \\ t \rightarrow \tilde{t} = \frac{2}{\omega\sigma} \operatorname{arctanh}(t), \\ \psi(t, x_1, x_2, x_3) \rightarrow \tilde{\psi}(\tilde{t}, \tilde{x}_1, \tilde{x}_2, x_3) \\ = e^{\frac{i\omega t}{\sigma(1-t^2)}} e^{-\sigma\Theta} \psi(t, x_1, x_2, x_3), \\ V \rightarrow V - \frac{\omega^2}{2} e^{-\sigma\Theta}, \end{array} \right. \quad (3.135)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{x} \rightarrow \tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{x}(1+t^2)^{\frac{1}{2\sigma}}, \\ t \rightarrow \tilde{t} = \frac{1}{\omega\sigma} \operatorname{arctan}(t), \\ \psi(t, \mathbf{x}) \rightarrow \tilde{\psi}(\tilde{t}, \tilde{\mathbf{x}}) = (1+t^2)^{\frac{3}{4}} e^{\frac{-i\omega t}{2\sigma(1+t^2)}} (\mathbf{x}^2)^{-\sigma} \psi(t, \mathbf{x}), \\ V \rightarrow V + \frac{\omega^2}{2} (\tilde{\mathbf{x}}^2)^{-\sigma}, \end{array} \right. \quad (3.136)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{x} \rightarrow \tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{x}(1 - (\sigma t)^2)^{\frac{1}{2\sigma}}, \\ t \rightarrow \tilde{t} = \frac{1}{\sigma\omega} \operatorname{arctanh}(\sigma t), \\ \psi(t, \mathbf{x}) \rightarrow \tilde{\psi}(\tilde{t}, \tilde{\mathbf{x}}) = (1 - t^2)^{\frac{3}{4}} e^{\frac{i\omega t}{2\sigma(1-t^2)}} (\mathbf{x}^2)^{-\sigma} \psi(t, \mathbf{x}), \\ V \rightarrow V - \frac{\omega^2}{2} (\tilde{\mathbf{x}}^2)^{-\sigma}. \end{array} \right. \quad (3.137)$$

Transformations (3.123)-(3.137) do not belong to the equivalence group $C(3)$ which is valid for arbitrary mass and potential. However, they keep the generic form of equations (2.1), (2.7) for some particular f and V .

The admissible fixed mass functions are presented in the following formulae:

$$\begin{aligned} m &= \tilde{r}^{-2} = (x_1^2 + x_2^2)^{-1}, \\ m &= r^{-2}, \quad m = e^{-x_3}, \quad m = (r^2 \pm 1)^{-2} \\ m &= \tilde{r}^{-3}, \quad m = x_3^{-2}, \quad m = x_3^{-3}. \end{aligned} \quad (3.138)$$

Mass functions defined up to arbitrary parameters also correspond to highly symmetric PDM Schrödinger equations. They can have the following forms:

$$m = r^{-2(1+\sigma)}, \quad m = \tilde{r}^{-2} e^{-\sigma\Theta}, \quad m = \tilde{r}^{-2-\sigma} e^{-\nu\Theta}, \quad (3.139)$$

where $\Theta = \arctan(\frac{x_2}{x_1})$, σ and ν are arbitrary nonzero parameters. Masses with $m = r^{-2+\sigma}$ and $m = r^{-2-\sigma}$ are equivalent.

There is a big variety of potentials corresponding to the position dependent masses given by equations (3.138) and (3.139). The corresponding classification results are arranged in Tables 3.11, 3.12, 3.13, 3.14.

In Table 3.11 the systems with power inverse mass are represented. Here λ is a parameter which takes nonzero values, μ can be reduced to zero applying transformation inverse to (3.129) for Items 1-6 and transformation (3.123) for Items 7-18. The invariance algebras include the presented symmetries together with generator P_0 and the unit operator.

Additional symmetries are indicated in the third columns of the tables where M_{ab} , P_a , L_a , and D are operators defined in (3.91) and (3.92), $G(\cdot)$ are arbitrary functions of the arguments fixed in brackets, and small Greek letters denote arbitrary parameters. The related symmetry algebras are fixed in the fourth columns, where $\mathfrak{n}_{a,b}$ and $\mathfrak{s}_{a,b}$ are nilpotent and solvable Lie algebras of dimension a . We use the notations presented in [88].

The systems presented in Items 15-17 admit equivalence transformations (3.136) and (3.137). By definition $\sigma \neq 0$.

Table 3.11: Systems with power inverse PDM function $f = \tilde{r}^2 = x_1^2 + x_2^2$

No	Potential V	Symmetries	Invariance algebras
1	$G(\tilde{r}, x_3) + \mu\Theta$, where $\Theta = \arctan(\frac{x_2}{x_1})$	$A_1^1 = t(L_3 + \frac{\mu t}{2}) - \Theta$, $A_2^1 = L_3 + \mu t$	$\mathfrak{n}_{4,1}$
2	$G(\tilde{r}) + \mu\Theta + \kappa x_3$	$A_1^1, A_2^1, P_3 + \kappa t$	$\mathfrak{n}_{5,4}$
3	$G(\frac{x_3}{\tilde{r}}) + \mu\Theta + \nu \ln(\tilde{r})$	$A_1^1, A_2^1, D + \nu t$	$\mathfrak{n}_{5,4}$
4	$G(\frac{r^2+1}{\tilde{r}}) + \mu\Theta + \lambda\Phi$ where $\Phi = \arctan(\frac{r^2-1}{2x_3})$	$A_1^1, A_2^1, K_3 - P_3 - 2\lambda t$	$\mathfrak{n}_{5,4}$
5	$\mu\Theta + \nu \ln(\tilde{r})$	$A_1^1, A_2^1, D + \nu t, P_3$	$\mathfrak{S}_{6,91}$
6	$\mu\Theta$	$A_1^1, A_2^1, P_3, D, K_3$	$\mathfrak{n}_{4,1} \oplus \mathfrak{sl}(2, R)$
7	$G(\tilde{r}, x_3) + \frac{\lambda^2}{2}\Theta^2 + \mu\Theta$	$B_1^1 = \lambda \sin(\lambda t)L_3$ $-(\lambda^2\Theta + \mu) \cos(\lambda t)$, $B_2^1 = \lambda \cos(\lambda t)L_3$ $+(\lambda^2\Theta + \mu) \sin(\lambda t)$	$\mathfrak{S}_{4,7}$
8	$G(\tilde{r}) + \frac{\lambda^2}{2}\Theta^2 + \mu\Theta + \kappa x_3$	$B_1^1, B_2^1, P_3 + \kappa t$	$\mathfrak{S}_{5,16}$
9	$G(\frac{x_3}{\tilde{r}}) + \frac{\lambda^2}{2}\Theta^2 +$ $+\mu\Theta + \nu \ln(\tilde{r})$	$B_1^1, B_2^1, D + \nu t$	$\mathfrak{S}_{5,16}$
10	$G(\frac{r^2+1}{\tilde{r}}) + \frac{\lambda^2}{2}\Theta^2 +$ $+\mu\Theta + \lambda\Phi$	$B_1^1, B_2^1, K_3 - P_3 - 2\lambda t$	$\mathfrak{S}_{5,16}$
11	$\frac{\lambda^2}{2}\Theta^2 + \mu\Theta$ $+\nu \ln(\tilde{r})$	$B_1^1, B_2^1, D + \nu t, P_3$	$\mathfrak{S}_{6,230}$
12	$\frac{\lambda^2}{2}\Theta^2 + \mu\Theta$	$B_1^1, B_2^1, P_3, D, K_3$	$\mathfrak{S}_{4,7} \oplus \mathfrak{sl}(2, R)$
13	$G(\tilde{r}, x_3) - \mu\Theta - \frac{\lambda^2}{2}\Theta^2$	$C_1^1 = \lambda \sinh(\lambda t)L_3 +$ $+(\mu + \lambda^2\Theta) \cosh(\lambda t)$, $C_2^1 = \lambda \cosh(\lambda t)L_3 +$ $+(\mu + \lambda^2\Theta) \sinh(\lambda t)$	$\mathfrak{S}_{4,6}$
14	$G(\tilde{r}) - \mu\Theta - \frac{\lambda^2}{2}\Theta^2 + \kappa x_3$	$C_1^1, C_2^1, P_3 + \kappa t$	$\mathfrak{S}_{5,15}$
15	$G(\frac{x_3}{\tilde{r}}) - \mu\Theta - \frac{\lambda^2}{2}\Theta^2 + \nu \ln(\tilde{r})$	$C_1^1, C_2^1, D + \nu t$	$\mathfrak{S}_{5,15}$
16	$G(\frac{r^2+1}{\tilde{r}}) - \mu\Theta - \frac{\lambda^2}{2}\Theta^2 + \lambda\Phi$	$C_1^1, C_2^1, K_3 - P_3 - 2\lambda t$	$\mathfrak{S}_{5,16}$
17	$-\mu\Theta - \frac{\lambda^2}{2}\Theta^2 + \nu \ln(\tilde{r})$	$C_1^1, C_2^1, P_3, D + \nu t$	$\mathfrak{S}_{6,229}$
18	$-\mu\Theta - \frac{\lambda^2}{2}\Theta^2$	$C_1^1, C_2^1, P_3, D, K_3$	$\mathfrak{S}_{4,7} \oplus \mathfrak{sl}(2, R)$

Table 3.12: Systems with inverse PDM function $f = \tilde{r}^2 e^{\sigma\Theta}$ (Items 1-5), $f = r^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$ (Items 6-14) and $f = r^{2+\sigma}$, $\sigma \neq \pm 1$ (Items 15-17)

No Potential V	Symmetries	Algebras
1 $G(\tilde{r}, x_3)e^{\sigma\Theta}$	$Q_1^1 = it^2\partial_t + \frac{2t}{\sigma}L_3 + \frac{2}{\sigma^2}e^{-\sigma\Theta}$, $Q_2^1 = \frac{1}{\sigma}L_3 + it\partial_t$	$\mathfrak{sl}(2, R)$
2 $G(\tilde{r})e^{\sigma\Theta}$	Q_1^1, Q_2^1, P_3	$\mathfrak{sl}(2, R) \oplus \mathfrak{n}_{1,1}$
3 $G(\frac{r}{\tilde{r}})e^{\sigma\Theta}$	Q_1^1, Q_2^1, D	$\mathfrak{sl}(2, R) \oplus \mathfrak{n}_{1,1}$
4 $G(\frac{r^2+1}{\tilde{r}})e^{\sigma\Theta}$	$Q_1^1, Q_2^1, K_3 - P_3$	$\mathfrak{sl}(2, R) \oplus \mathfrak{n}_{1,1}$
5 $\kappa e^{\sigma\Theta}$	$Q_1^1, Q_2^1, P_3, D, K_3$	$\mathfrak{sl}(2, R) \oplus \mathfrak{sl}(2, R)$
6 $G(\Theta, \frac{\tilde{r}}{r}) + \mu \ln(r)$	$A_1^2 = tD + \frac{1}{2}\mu t^2 - \ln(r)$, $A_2^2 = D + \mu t$	$\mathfrak{n}_{4,1}$
7 $G(\frac{r}{\tilde{r}}) + \mu \ln(r) + \kappa\Theta$	$A_1^2, A_2^2, L_3 + \kappa t$	$\mathfrak{n}_{5,4}$
8 $\mu \ln(r)$	$A_1^2, A_2^2, L_1, L_2, L_3$	$\mathfrak{n}_{4,1} \oplus \mathfrak{so}(3)$
9 $G(\Theta, \frac{\tilde{r}}{r}) + \mu \ln(r) + \frac{\lambda^2}{2} \ln(r)^2$	$B_1^2 = \sin(\lambda t)D - \cos(\lambda t)(\lambda \ln(r) + \frac{\mu}{\lambda})$, $B_2^2 = \cos(\lambda t)D + \sin(\lambda t)(\lambda \ln(r) + \frac{\mu}{\lambda})$	$\mathfrak{n}_{4,7}$
10 $G(\frac{r}{\tilde{r}}) + \kappa\Theta + \frac{\lambda^2}{2} \ln(r)^2 + \mu \ln(r)$	$B_1^2, B_2^2, L_3 + \kappa t$	$\mathfrak{s}_{5,16}$
11 $\mu \ln(r) + \frac{\lambda^2}{2} \ln(r)^2$	$B_1^2, B_2^2, L_1, L_2, L_3$	$\mathfrak{n}_{4,7} \oplus \mathfrak{so}(3)$
12 $G(\Theta, \frac{\tilde{r}}{r}) - \mu \ln(r) - \frac{\lambda^2}{2} \ln(r)^2$	$C_1^2 = \cosh(\lambda t)D + \sinh(\lambda t)(\lambda \ln(r) + \frac{\mu}{\lambda})$, $C_2^2 = \sinh(\lambda t)D + \cosh(\lambda t)(\lambda \ln(r) + \frac{\mu}{\lambda})$	$\mathfrak{n}_{4,6}$
13 $G(\frac{r}{\tilde{r}}) + \kappa\Theta - \frac{\lambda^2}{2} \ln(r)^2 - \mu \ln(r)$	$C_1^2, C_2^2, L_3 + \kappa t$	$\mathfrak{s}_{5,15}$
14 $-\mu \ln(r) - \frac{\lambda^2}{2} \ln(r)^2$	$C_1^2, C_2^2, L_1, L_2, L_3$	$\mathfrak{n}_{4,6} \oplus \mathfrak{so}(3)$
15 $r^\sigma G(\Theta, \frac{\tilde{r}}{r})$	$Q_1^2 = it^2\partial_t + \frac{2t}{\sigma}D + \frac{2}{\sigma^2 r^\sigma}$, $Q_2^2 = \frac{1}{\sigma}D + it\partial_t$	$\mathfrak{sl}(2, R)$
16 $r^\sigma G(\frac{\tilde{r}}{r})$	Q_1^2, Q_2^2, L_3	$\mathfrak{sl}(2, R) \oplus \mathfrak{n}_{1,1}$
17 κr^σ	$Q_1^2, Q_2^2, L_1, L_2, L_3$	$\mathfrak{sl}(2, R) \oplus \mathfrak{so}(3)$

The maximally extended symmetry algebras presented in Table 3.13 are seven dimensional, see Items 3, 6 and 9 there. These algebras and all other algebras presented in Items 1, 2, 4, 5, 7, 8 ultimately include the unit operator which is accepted by any of the considered equations. Notice that

the low dimension algebras with dimension $d \leq 5$ and a certain class of the algebras with dimension 6 had been classified by Mubarakzianov [47], see also a more contemporary and accessible papers [9] and [76].

In Table 5.2 some exotic PDMs are specified. In particular, there are two systems which admit eight-dimensional invariance algebras, see Items 6 and 7. However, the related symmetries are time independent and commute with Hamiltonians. In other words, they belong to integrals of motion for the stationary Schrödinger equation which have been classified in paper [70], see also the latest version of preprint [arXiv:1412.4332](https://arxiv.org/abs/1412.4332).

All the invariance algebras presented in Items 1-5 of Table 3.13 are solvable. Like in the previous tables we use notations $\mathfrak{s}_{a,b}$ for solvable algebra of dimension a and classification number b , see [88].

Table 3.13: Systems with some particular mass functions. The invariance algebras include the presented symmetries together with generator P_0 and the unit operator. Parameter μ can be reduced to zero using transformation inverse to (3.131)

No	Inverse mass	Potential V	Symmetries	Invariance algebras
1	\tilde{r}^3	$\kappa x_3 + \lambda \tilde{r}$	$P_3 + \kappa t, D + it\partial_t, L_3$	$\mathfrak{s}_{4,6} \oplus \mathfrak{n}_{1,1}$
2	x_3^2	$\mu \ln(x_3)$	$P_1, P_2, L_3, D + \mu t$	$\mathfrak{s}_{5,3} \oplus \mathfrak{n}_{1,1}$
3	x_1^3	$\lambda x_1 + \kappa x_3$	$P_3 + \kappa t, P_2, D + it\partial_t$	$\mathfrak{s}_{5,17}$
4	$x_3^{\sigma+2}$	κx_3^σ	$P_1, P_2, L_3, D + i\sigma t\partial_t, \sigma \neq 0, 1, -2$	$\mathfrak{s}_{4,3} \oplus \mathfrak{n}_{1,1} \oplus \mathfrak{n}_{1,1}$
5	$\tilde{r}^{\sigma+2} e^{\lambda\Theta}$	$\kappa \tilde{r}^\sigma e^{\lambda\Theta}$	$L_3 + i\lambda t\partial_t, P_3, D + i\sigma t\partial_t, \sigma \neq 0$	$\mathfrak{s}_{2,1} \oplus \mathfrak{s}_{2,1} \oplus \mathfrak{n}_{1,1}$
6	$(r^2 + 1)^2$	$-3r^2$	$M_{41}, M_{42}, M_{43}, M_{21}, M_{31}, M_{32}$	$\mathfrak{so}(4) \oplus \mathfrak{n}_{1,1} \oplus \mathfrak{n}_{1,1}$
7	$(r^2 - 1)^2$	$-3r^2$	$M_{01}, M_{02}, M_{03}, M_{21}, M_{31}, M_{32}$	$\mathfrak{so}(1,3) \oplus \mathfrak{n}_{1,1} \oplus \mathfrak{n}_{1,1}$

One dimension algebra $\mathfrak{n}_{1,1}$ in Items 1 and 2 is spanned on L_3 and the unit operator correspondingly. In Item 4 the basis elements of $\mathfrak{s}_{1,1} \oplus \mathfrak{s}_{1,1}$ are L_3 and the unit operator. In Items 6 and 7 the symbol $\mathfrak{s}_{1,1} \oplus \mathfrak{s}_{1,1}$ denotes the direct sum of one-dimensional algebras spanned on P_0 and the unit operator.

In Table 3.14 the systems with masses are exponentials in the only spatial variable x_3 . are presented. The invariance algebras again have dimensions 3, 4 or 5. These algebras are either simple or form a direct sum of a simple and solvable algebra, and can be extended by the unit operator. In addition, the Euclidean algebra in two-dimensional space is denoted as $e(2)$

The systems which are presented in Table 3.14 admit equivalence transformations (3.132), (3.133) and (3.128), the latter generates multiplier σ for x_3 .

Table 3.14: Systems with exponential inverse PDM function
 $f = e^{x_3}$

No	Potential V	Symmetries	Invariance algebras
1	$e^{x_3}G(x_1, x_2)$	$Q_1^3 = it^2\partial_t + 2tP_3 + 2e^{-x_3}$, $Q_2^3 = it\partial_t + P_3$	$\mathfrak{sl}(2, R)$
2	$e^{x_3}G(x_2)$	Q_1^3, Q_2^3, P_1	$\mathfrak{sl}(2, R) \oplus \mathfrak{n}_{1,1}$
3	$e^{x_3}G(\tilde{r})$	Q_1^3, Q_2^3, L_3	$\mathfrak{sl}(2, R) \oplus \mathfrak{n}_{1,1}$
4	κe^{x_3}	$Q_1^3, Q_2^3, P_1, P_2, L_3$	$\mathfrak{sl}(2, R) \oplus e(2)$

Rather generic systems are presented in Table 3.15. They include potentials (and masses) defined up to arbitrary functions, but admit reduced numbers of symmetries belonging to class 3 specified in Section 5. In Table 3.15 the symbols $F(\cdot)$ and $G(\cdot)$ denote arbitrary functions of arguments fixed in brackets, D_1F and D_2F are the derivations of function $F = F\left(\frac{r^2+1}{\tilde{r}}, \nu\Phi + \Theta\right)$ with respect to the first and second argument correspondingly, F' is the derivation of function $F = F\left(\frac{r^2+1}{\tilde{r}}\right)$ with respect to its combined argument $\frac{r^2+1}{\tilde{r}}$. In addition, to save a room we denote $\Phi = \arctan\left(\frac{r^2-1}{2x_3}\right)$ and $\Psi = \frac{3\nu x_3 \tilde{r}^2}{(r^2+1)^2 - 4\tilde{r}^2}$. The symmetries additional to P_0 and I are indicated in the third column. For the systems presented in Items 1, 3, 5, 7, 9 and 2, 4, 6, 8, 10 the corresponding symmetry algebras are $\mathfrak{s}_{2,1} \oplus \mathfrak{n}_{1,1}$ and $\mathfrak{s}_{3,1}$ correspondingly. In Items 11, 13, 15, 17, 19 and 21 we have symmetry algebras isomorphic to $\mathfrak{s}_{2,1} \oplus \mathfrak{n}_{1,1} \oplus \mathfrak{n}_{1,1}$ if at least one of parameters λ or σ is nontrivial. If all these parameters are equal to zero, these symmetry algebras (and algebras admitted by systems presented in Items 12, 14, 16, 18 and 20) are degenerated to the direct sums of four one-dimensional algebras.

In Items 12, 14, 16, 18 and 20 we have symmetry algebras isomorphic to $\mathfrak{s}_{3,1} \oplus \mathfrak{n}_{1,1}$ if at least one of parameters λ or σ is nontrivial. Finally, the

systems presented in Items 22, 23 and 24 admit the direct sums of symmetry algebras $e(2) \oplus \mathfrak{n}_{1,1}$, $\mathfrak{so}(3) \oplus \mathfrak{n}_{1,1}$ and $\mathfrak{so}(1,2) \oplus \mathfrak{n}_{1,1}$ correspondingly.

Table 3.15: Systems with masses and potentials defined up to arbitrary functions

No Inverse mass f	Potential	Symmetries
1 $F(x_1, x_2)e^{\lambda x_3}$	$G(x_1, x_2)e^{\lambda x_3}$	$P_3 + i\lambda t\partial_t$
2 $F(x_1, x_2)$	$G(x_1, x_2) + \lambda x_3$	$P_3 + \lambda t$
3 $F(\tilde{r}, x_3)e^{\sigma\Theta}$	$G(\tilde{r}, x_3)e^{\sigma\Theta}$	$L_3 + i\sigma t\partial_t$
4 $F(\tilde{r}, x_3)$	$G(\tilde{r}, x_3) + \lambda\Theta$	$L_3 + \lambda t$
5 $r^{\sigma+2}F(\frac{\tilde{r}}{r}, r^\lambda e^{-\Theta})$	$r^\sigma G(\frac{r}{\tilde{r}}, r^\lambda e^{-\Theta})$	$\lambda L_3 + D + i\sigma t\partial_t$
6 $r^2F(\frac{\tilde{r}}{r}, r^\lambda e^{-\Theta})$	$G(\frac{r}{\tilde{r}}, r^\lambda e^{-\Theta}) + \sigma(\lambda\Theta + \ln(r))$	$\lambda L_3 + D + \sigma(1 + \lambda^2)t$
7 $F(\tilde{r}, x_3 - \Theta)e^{\sigma\Theta}$	$G(\tilde{r}, x_3 - \Theta)e^{\sigma\Theta}$	$P_3 + L_3 + i\sigma t\partial_t$
8 $F(\tilde{r}, x_3 - \Theta)$	$G(\tilde{r}, x_3 - \Theta) + \lambda\Theta$	$P_3 + L_3 + \lambda t$
9 $\tilde{r}^2F\left(\frac{r^2+1}{\tilde{r}}, \lambda\Phi + \Theta\right)e^{\sigma\Theta}$	$e^{\sigma\Theta}\left(\Psi D_2F - \frac{3\tilde{r}}{2}D_1F + G\left(\frac{r^2+1}{\tilde{r}}, \lambda\Phi + \Theta\right)\right)$	$M_{43} + \lambda L_3 + i\sigma t\partial_t$
10 $\tilde{r}^2F\left(\frac{r^2+1}{\tilde{r}}, \lambda\Phi + \Theta\right)$	$G\left(\frac{r^2+1}{\tilde{r}}, \lambda\Phi + \Theta\right) + \sigma\Theta - \frac{3\tilde{r}}{2}D_1F + \Psi D_2F$	$M_{43} + \lambda L_3 + i\lambda\sigma t$
11 $F(\tilde{r})e^{\sigma\Theta + \lambda x_3}$	$G(\tilde{r})e^{\sigma\Theta + \lambda x_3}$	$L_3 + \sigma t\partial_t, P_3 + i\lambda t\partial_t$
12 $F(\tilde{r})$	$G(\tilde{r}) + \sigma\Theta + \lambda x_3$	$L_3 + \sigma t, P_3 + \lambda t$
13 $\tilde{r}^{\sigma+2}e^{\lambda\Theta}F(\frac{\tilde{r}}{r})$	$\tilde{r}^\sigma e^{\mu\Theta}G(\frac{x_3}{\tilde{r}})$	$D + i\sigma t\partial_t, L_3 + i\lambda t\partial_t$
14 $\tilde{r}^2F(\frac{\tilde{r}}{r})$	$G(\frac{\tilde{r}}{r}) + \sigma\Theta + \lambda \ln(r)$	$D + \lambda t, L_3 + \sigma t$
15 $e^{\sigma x_1}F(x_3)$	$e^{\sigma x_1}G(x_3)$	$P_1 + i\sigma t\partial_t, P_2$
16 $F(x_3)$	$G(x_3) + \lambda x_2$	$P_1, P_2 + \lambda t$
17 $e^{\sigma\Theta - \lambda\Phi}\tilde{r}^2F(\frac{r^2+1}{\tilde{r}})$	$e^{\sigma\Theta - \lambda\Phi}\left(\frac{3}{2}\tilde{r}F' + G\left(\frac{r^2+1}{\tilde{r}}\right)\right)$	$M_{43} + i\lambda t\partial_t, L_3 + i\sigma t\partial_t$
18 $\tilde{r}^2F(\frac{r^2+1}{\tilde{r}})$	$\frac{3}{2}\tilde{r}F' + G\left(\frac{r^2+1}{\tilde{r}}\right) + \sigma\Theta - \lambda\Phi$	$M_{43} + \lambda t, L_3 + \sigma t$
19 $\tilde{r}^{\sigma+2}F(\tilde{r}^\nu e^{-\Theta})$	$\tilde{r}^\sigma G(\tilde{r}^\nu e^{-\Theta})$	$D + i\sigma t\partial_t + \nu L_3, P_3$

Table 3.15, continued

No Inverse mass f	Potential	Symmetries
20 $\tilde{r}^3 F(\tilde{r}^\nu e^{-\Theta})$	$\tilde{r}G(\tilde{r}^\nu e^{-\Theta}) + \sigma x_3$	$D + it\partial_t + \nu L_3,$ $P_3 + \sigma t$
21 $\tilde{r}^2 F(\tilde{r}^\nu e^{-\Theta})$	$\sigma \ln(\tilde{r}) + G(\tilde{r}^\nu e^{-\Theta})$	$D + \nu L_3 +$ $\sigma t, P_3$
22 $F(x_3)$	$G(x_3)$	P_1, P_2, L_3
23 $F(r^2)$	$G(r^2)$	L_1, L_2, L_3
24 $x_3^{\frac{2}{3}} F\left(\frac{r^2-1}{x_3}\right)$	$\frac{3}{2}x_3 F' + G\left(\frac{r^2-1}{x_3}\right)$	M_{01}, M_{02}, M_{12}

Thus we classify all inequivalent (generalized) Schrödinger equations, namely, standard SE, SP equations for neutral and charged particles and PDM Schrödinger equations, and represent their Lie symmetries. The next task is the study of their extended symmetries and supersymmetries.

4. SUPERSYMMETRIES

The nice kind of symmetries called SUSY has two meanings in quantum mechanics. First, some QM systems like spin 1/2 in magnetic field can admit constants of motion forming superalgebras. Secondly, there are the QM systems which, like the Hydrogen atom, can admit “hidden” SUSY together with shape invariance, and so be exact solvable. We will discuss both types of SUSY, starting with the systems admitting supercharges as motion constants.

4.1. $N = 2$ SUSY and Landau levels. Let us start with the very nice system, namely, the spin 1/2 particle interacting with the constant magnetic field. The corresponding QM Hamiltonian is given by equation (2.5) where

$$A_0 = 0, \quad A_1 = -\frac{1}{2}x_2 B_3, \quad A_2 = \frac{1}{2}x_1 B_3, \quad A_3 = 0, \quad \nu = \frac{1}{2} \quad (4.1)$$

and by definition $B_1 = B_2 = 0, B_3 = B = \text{const.}$ Such Hamiltonian can be represented in the following form:

$$H = H_1 + H_2, \quad H_1 = \frac{(\sigma_1 \pi_1 + \sigma_2 \pi_2)^2}{2m}, \quad H_2 = \frac{p_3^2}{2m} \quad (4.2)$$

with $p_3 = -i\frac{\partial}{\partial x_3}$.

Using just representation (4.2) it can be verified very easily that our Hamiltonian commutes with the following three operators:

$$Q_1 = \sigma_1 \pi_1 + \sigma_2 \pi_2, \quad Q_2 = i\sigma_3 Q_1, \quad Q_3 = p_3 \quad (4.3)$$

which satisfy the following relations:

$$[Q_3, Q_1] = [Q_3, Q_2] = [Q_3, H] = 0, \tag{4.4}$$

$$\{Q_\mu, Q_\nu\} = 2\delta_{\mu\nu}H_2, \quad [Q_\mu, H_2] = 0, \tag{4.5}$$

where μ, ν independently takes the values 1, 2, $\delta_{\mu\nu}$ is the Kronecker delta, the symbols $[\cdot, \cdot]$ and $\{\cdot, \cdot\}$ denote the commutator and anticommutator correspondingly.

In addition, we can indicate three more constants of motion, namely, the Johnson-Lippmann constants and the third component of the total orbital momentum:

$$L_3 = x_1p_2 - x_2p_1 + \frac{1}{2}\sigma_3, \tag{4.6}$$

$$K_1 = \partial_1 - \frac{1}{2}x_2B_3, \quad K_2 = \partial_2 + \frac{1}{2}x_1B_3. \tag{4.7}$$

Four of the presented constants, namely, P_3, L_3, K_1 and K_2 commute between themselves and with Q_1 and Q_2 . The latter ones are not in involution, but satisfy more complicated relations (4.5), which characterize a *Lie superalgebra*.

Just this specific supersymmetry can be treated as the reason of the two fold degeneration of the Landau levels, i.e., the non-ground energy levels of a spin 1/2 particle interacting with the constant and homogeneous magnetic field.

Thus we have a nice example of superalgebra realised on the set of solutions of a realistic physical system. In general superalgebra is a graded algebra which, in our case, is characterising by the Z_2 grading. Its elements belong to two different classes, say, are odd or even. In our case Q_1 and Q_2 are odd while Q_3, H_1 and H_2 are even. The product of two algebra elements is defined as the commutator if at least one of them is even and as the anticommutator if both the elements are odd. In SUSY quantum mechanics the odd elements are called supercharges. Since we have indicated two supercharges then it is possible to indicate the $N = 2$ SUSY admitted by the considered system.

4.2. Extended SUSY. In analogy with the above we can construct a supercharge for Hamiltonian H_1 in the case of arbitrary external magnetic field:

$$\tilde{Q}_1 = \sigma_i\pi_i \tag{4.8}$$

since $\tilde{Q}_1^2 = H_1$ and $[Q_1, H_1] = 0$.

Let us show that there exist three more supercharges if the external field is given by relations (4.1). To do it we exploit the fact that equation (3.45) is invariant w.r.t. the following three *discretetransformations*:

$$\psi \rightarrow i\sigma_2R_1\psi^*, \quad \psi \rightarrow i\sigma_2R_2\psi^*, \quad \psi \rightarrow R_3\psi \tag{4.9}$$

where R_a are reflections:

$$R_a\psi(\mathbf{x}) = \sigma_a\theta_a\psi(\mathbf{x}), \quad \theta_a\psi(\mathbf{x}) = \psi(r_a\mathbf{x}) \quad (4.10)$$

and

$$\begin{aligned} r_1\mathbf{x} &= (-x_1, x_2, x_3), & r_2\mathbf{x} &= (x_1, -x_2, x_3), \\ r_3\mathbf{x} &= (x_1, x_2, -x_3), \end{aligned} \quad (4.11)$$

and the asterisk denotes the complex conjugation.

In accordance with the above the following operators

$$\tilde{Q}_1 = \sigma_i\pi_i, \quad Q_2 = iR_3\tilde{Q}_1, \quad Q_3 = CR_1\tilde{Q}_1, \quad Q_4 = CR_2\tilde{Q}_1 \quad (4.12)$$

fulfill the following relations

$$\{Q_k, Q_l\} = 2g_{kl}\hat{H}, \quad [Q_k, \hat{H}] = 0, \quad (4.13)$$

where $k, l = 1, 2, 3, 4$, $g_{11} = g_{22} = -g_{33} = -g_{44} = 1$; $g_{kl} = 0$, $k \neq l$. In other words they are supercharges generating the $N = 4$ extended SUSY.

The main trick for constructing the extended SUSY was using the discrete involutive symmetries, i.e., reflections (4.10) and (4.11). In analogous way it is possible to find extended SUSY for more generic potentials with well defined parities and involution symmetries realized by rotations. We will not present here numerous examples of such extended SUSY which can be found in paper [51]. Let us stress then among them there is a lot of systems with a clear exact physical meaning, see [53] for discussion of this aspect.

4.3. SUSY and shape invariance. Considering the stationary Schrödinger equations (2.3) with Hamiltonian H_1 (3.45) we can exploit its rotational invariance and search for solutions in separated radial and angular variables. Indeed, representing the wave function ψ as

$$\psi = \frac{1}{\tilde{r}}R(\tilde{r})e^{n\varphi}, \quad (4.14)$$

where $\tilde{r} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$, $\varphi = \arctan \frac{x_2}{x_1}$, we come to the following equation for the radial functions:

$$\tilde{H}R \equiv \left(-\frac{\partial^2}{\partial \tilde{r}^2} - \frac{m(m+1)}{\tilde{r}^2} + \omega\sigma_3 + \omega^2\tilde{r}^2 \right) R = \tilde{E}R, \quad (4.15)$$

where $m = n - \frac{1}{2}$, $\omega = 2m\alpha$ and $\tilde{E} = 2mE + \omega n$.

Equation (3.75) defines the “2d supersymmetric oscillator” which is rather similar to the 2d supersymmetric oscillator but includes half integer parameter m while in the 3d oscillator this parameter is integer. It can be

decoupled to direct sums of equations since Hamiltonian \tilde{H} can be represented as:

$$\tilde{H} = \begin{pmatrix} \tilde{H}_+ & 0 \\ 0 & \tilde{H}_- \end{pmatrix}, \tag{4.16}$$

where

$$\tilde{H}_\pm = -\frac{\partial^2}{\partial \tilde{r}^2} + \frac{n(n \mp 1)}{\tilde{r}^2} + \omega^2 \tilde{r}^2 \pm \omega. \tag{4.17}$$

Hamiltonians \tilde{H}_\pm has two nice properties. First, it can be factorized:

$$\tilde{H}_+ = a^+ a, \quad \tilde{H}_- = a a^+, \tag{4.18}$$

where a^+ and a^- are the first order differential operators:

$$a_\kappa^- = \frac{\partial}{\partial \tilde{r}} + W_\kappa, \quad a_\kappa^+ = -\frac{\partial}{\partial \tilde{r}} + W_\kappa, \tag{4.19}$$

and $W_\kappa = -\frac{1}{\tilde{r}} + \frac{\omega}{\kappa}$, $c_\kappa = (2\kappa - 1)\omega$. Moreover these Hamiltonians satisfy the following relation

$$\tilde{H}_+(\kappa) = \tilde{H}_-(\kappa + 1) + C_\kappa \tag{4.20}$$

with $C_\kappa = 2\omega$. In other words, Hamiltonians $\tilde{H}_\pm(\kappa)$ are *shape invariant* [32].

Thus our analysis of the realistic quantum mechanical system having a clear physical meaning (charged particle with spin 1/2 interacting with the constant and homogeneous magnetic field) make it possible to discover its nice hidden symmetry, i.e., the shape invariance. It happens that this symmetry is valid for many other important QM systems like the Hydrogen atom, and causes their exact solvability [32].

To be shape invariant, Hamiltonian should be factorizable, i.e., to admit representation (4.18), (4.19) for $\tilde{H}_-(\kappa)$ with some function W called *superpotential*. In addition, it should satisfy condition (4.20) together with the corresponding Hamiltonian $\tilde{H}_+(\kappa)$ which is called *superpartner*.

The shape invariance condition can be formulated as a condition for the potential. Considering the 1d Hamiltonian $H = -\frac{\partial^2}{\partial x^2} + V(\kappa, x)$ and representing $V(\kappa, x)$ as

$$V = W_\kappa^2 + W'_\kappa, \tag{4.21}$$

where $W'_\kappa = \frac{\partial W_\kappa}{\partial x}$, and superpotential W_κ is a solution of the Riccati equation (4.21). Then we construct a superpartner potential

$$\tilde{V} = W_\kappa^2 - W'_\kappa. \tag{4.22}$$

The corresponding stationary Schrödinger equation is shape invariant provided $\tilde{V}(\kappa, x) = V(\kappa + 1) + C_\kappa$ where C_κ is a constant. In terms of the superpotential this condition looks as follows:

$$W_\kappa^2 - W'_\kappa = W_{\kappa+1}^2 + W'_{\kappa+1} + C_\kappa. \tag{4.23}$$

Of course it is interesting to find all inequivalent QM systems satisfying the shape invariance conditions. This problem is reduced to finding the inequivalent solutions of Riccati equations (4.23).

4.4. Matrix superpotentials.

4.4.1. *Pron'ko-Stroganov problem.* Let us show that the concept of shape invariance can be extended to the case of matrix superpotentials.

We will start with a well defined QM system which includes a matrix potential and appears to be shape invariant. Namely, let us consider a neutral QM particle with non-trivial dipole momentum (e.g., neutron), interacting with the magnetic field generated by a straight line current directed along the third coordinate axis (Pron'ko-Stroganov problem [77]) The related Hamiltonian looks as follows:

$$\mathcal{H} = \frac{p_1^2 + p_2^2}{2m} + \lambda \frac{\sigma_1 x_2 - \sigma_2 x_1}{\tilde{r}^2}, \quad (4.24)$$

where λ is the integrated coupling constant, σ_1 and σ_2 are Pauli matrices. In other words, we are considering a very particular case of the systems studied in Section 3.4.

Hamiltonian (4.24) commutes with the third component of the total orbital momentum $L_3 = x_1 p_2 - x_2 p_1 + \frac{1}{2} \sigma_3$, and the corresponding stationary Schrödinger equation can be solved separated variables. The related equation for radial functions looks as:

$$\hat{H}_\kappa \psi = E_\kappa \psi, \quad (4.25)$$

where \hat{H}_κ is a Hamiltonian with a matrix potential, E_κ and ψ are its eigenvalue and eigenfunction correspondingly, moreover, ψ is a two-component spinor. Up to normalization of the radial variable \tilde{r} the related Hamiltonian \hat{H}_κ can be represented as

$$\hat{H}_\kappa = -\frac{\partial^2}{\partial \tilde{r}^2} + \kappa(\kappa - \sigma_3) \frac{1}{\tilde{r}^2} + \sigma_1 \frac{1}{\tilde{r}}, \quad (4.26)$$

where σ_1 and σ_3 are Pauli matrices and κ is a natural number. In addition, solutions of equation (4.25) must be normalizable and vanish at $\tilde{r} = 0$.

Hamiltonian \hat{H}_κ can be factorized as in (4.18), (4.19) where $c_\kappa = -\frac{1}{(2\kappa+1)^2}$ and W_κ is the *matrix superpotential*

$$W_\kappa = \frac{1}{2\tilde{r}} \sigma_3 - \frac{1}{2\kappa+1} \sigma_1 - \frac{2\kappa+1}{2\tilde{r}}. \quad (4.27)$$

It is easily verified that the superpartner of Hamiltonian \hat{H}_κ satisfies relation (4.20). In other words, equation (4.25) admits supersymmetry with shape invariance and can be solved using the standard technique of SSQM exposed, e.g., in survey [19].

4.4.2. *Generic matrix superpotentials.* Following a natural desire to find other shape invariant systems we return to conditions (4.23) which should be satisfied by the corresponding matrix superpotentials.

Assume $W_k(x)$ be Hermitian. Then the corresponding potential $V_k(x)$ and its superpartner $V_k^+(x)$, are Hermitian too.

The problem of classification of shape invariant superpotentials, i.e., $n \times n$ matrices whose elements are functions of x, k satisfying conditions (4.23), was formulated and partially solved in papers [68] and [67]. Here we present the completed classification results for a special class of superpotentials being 2×2 matrices.

Consider superpotentials of the following special form

$$W_k = kA + \frac{1}{k}B + C, \tag{4.28}$$

where C, B and A are Hermitian matrices depending on x .

Substituting (4.28) into (4.23) we obtain the following equations for C, B and A :

$$A' = \alpha(A^2 + \nu I), \tag{4.29}$$

$$C' - \frac{\alpha}{2}\{A, C\} + \kappa I = 0, \tag{4.30}$$

$$\{B, C\} + \lambda I = 0, \quad B^2 = \omega^2 I \tag{4.31}$$

where $A' = \frac{dA}{dx}$, $\{A, C\} = AC + CA$ is the anticommutator of matrices A and C , I is the unit matrix and $\kappa, \lambda, \nu, \omega$ are constants. Thus the problem of classification of matrix superpotentials is reduced to solution of equations (4.30)-(4.31) for unknown matrices A, B and C .

4.4.3. *The completed list of scalar superpotentials.* Consider the scalar case when A, C and B in (4.28) are 1×1 “matrices”. The corresponding equations (4.29)-(4.31) can be integrated rather easily, refer to [67] for detailed calculations. As a result we obtain the well known list of scalar superpotentials:

$$\begin{aligned} W &= -\frac{\kappa}{x} + \frac{\omega}{\kappa} && \text{(Coulomb),} \\ W &= \lambda\kappa \tan \lambda x + \frac{\omega}{\kappa} && \text{(Rosen1),} \\ W &= \lambda\kappa \tanh \lambda x + \frac{\omega}{\kappa} && \text{(Rosen2),} \\ W &= -\lambda\kappa \coth \lambda x + \frac{\omega}{\kappa} && \text{(Eckart),} \\ W &= \mu x && \text{(Harmonic Oscillator),} \end{aligned} \tag{4.32}$$

$$\begin{aligned}
W &= \mu x - \frac{\kappa}{x} && \text{(3D Oscillator),} \\
W &= \lambda \kappa \tan \lambda x + \mu \sec \lambda x && \text{(Scarf I),} \\
W &= \lambda \kappa \tanh \lambda x + \mu \operatorname{sech} \lambda x && \text{(Scarf 2),} \\
W &= \lambda \kappa \coth \lambda x + \mu \operatorname{cosech} \lambda x && \text{(Generalized Pöschl-Teller),} \\
W &= \kappa - \mu \exp(-x) && \text{(Morse).}
\end{aligned}$$

Thus integrating equations (4.29)-(4.31) we recover the known list of superpotentials (4.32) which generate classical additive shape invariant potentials, in a straightforward and very simple way. The corresponding potentials V_κ can be found using definition (4.21).

4.4.4. *Matrix superpotentials of dimension 2×2 .* Here we consider the case when superpotentials are x -dependent (2×2) -matrices of form (4.28).

Supposing that $A(x)$ is diagonal and solving the related equations (4.29)-(4.31), it is possible to specify five inequivalent solutions of equations (4.23):

$$W_{\nu,\mu} = ((2\mu + 1)\sigma_3 - 2\nu - 1) \frac{1}{2x} + \frac{\omega}{2\nu + 1} \sigma_1, \quad \mu > -\frac{1}{2}, \quad (4.33)$$

$$W_{\nu,\mu} = \lambda \left(-\nu + \mu \exp(-\lambda x) \sigma_1 - \frac{\omega}{\nu} \sigma_3 \right), \quad (4.34)$$

$$W_{\nu,\mu} = \lambda \left(\nu \tan \lambda x + \mu \sec \lambda x \sigma_3 + \frac{\omega}{\nu} \sigma_1 \right), \quad (4.35)$$

$$W_{\nu,\mu} = \lambda \left(-\nu \coth \lambda x + \mu \operatorname{sch} \lambda x \sigma_3 - \frac{\omega}{\nu} \sigma_1 \right), \quad \mu < 0, \omega > 0, \quad (4.36)$$

$$W_{\nu,\mu} = \lambda \left(-\nu \tanh \lambda x + \mu \operatorname{sech} \lambda x \sigma_1 - \frac{\omega}{\nu} \sigma_3 \right), \quad (4.37)$$

where we introduce the rescaled parameter $\nu = \frac{\kappa}{\alpha}$. These superpotentials are defined up to translations $x \rightarrow x + c$, $\nu \rightarrow \nu + \gamma$, and unitary transformations $W_{\nu,\mu} \rightarrow U_a W_{\nu,\mu} U_a^\dagger$, where $U_1 = \sigma_1$, $U_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1 \pm i\sigma_2)$ and $U_3 = \sigma_3$. In particular these transformations change signs of parameters μ and ω in (4.34)-(4.37) and of $\mu + \frac{1}{2}$ in (4.33), thus without loss of generality we can set

$$\omega > 0, \quad \mu > 0 \quad (4.38)$$

in superpotentials (4.34)-(4.37).

Notice that the transformations $\kappa \rightarrow \kappa' = \kappa + \alpha$ correspond to the following transformations for ν :

$$\nu \rightarrow \nu' = \nu + 1. \quad (4.39)$$

If $\mu = 0$ and $\omega = 1$ then operator (4.33) coincides with the superpotential for PS problem given by equation (4.27). For $\mu \neq 0$ superpotential (4.33) is not equivalent to (4.27). The other presented matrix superpotentials were found in [68] for the first time.

The corresponding potentials V_ν can be found starting with (4.33)-(4.36) and using definition (4.21):

$$\hat{V}_\nu = (\mu(\mu + 1) + \nu^2 - \nu(2\mu + 1)\sigma_3) \frac{1}{x^2} - \frac{\omega}{x}\sigma_1, \tag{4.40}$$

$$\hat{V}_\nu = \lambda^2 (\mu^2 \exp(-2\lambda x) - (2\nu - 1)\mu \exp(-\lambda x)\sigma_1 + 2\omega\sigma_3), \tag{4.41}$$

$$\hat{V}_\nu = \lambda^2 \left((\nu(\nu - 1) + \mu^2) \sec^2 \lambda x + 2\omega \tan \lambda x \sigma_1 + \right. \tag{4.42}$$

$$\left. + \mu(2\nu - 1) \sec \lambda x \tan \lambda x \sigma_3 \right), \tag{4.43}$$

$$\hat{V}_\nu = \lambda^2 \left((\nu(\nu - 1) + \mu^2) \operatorname{csch}^2(\lambda x) + 2\omega \coth \lambda x \sigma_1 + \right. \tag{4.44}$$

$$\left. + \mu(1 - 2\nu) \coth \lambda x \operatorname{csch} \lambda x \sigma_3 \right), \tag{4.45}$$

$$\hat{V}_\nu = \lambda^2 \left((\mu^2 - \nu(\nu - 1)) \operatorname{sech}^2 \lambda x + 2\omega \tanh \lambda x \sigma_3 - \right. \tag{4.46}$$

$$\left. - \mu(2\nu - 1) \operatorname{sech} \lambda x \tanh \lambda x \sigma_1 \right). \tag{4.47}$$

Potentials (4.40), (4.41), (4.42) (4.44) and (4.46) are generated by superpotentials (4.33), (4.34), (4.35), (4.36) and (4.37) respectively. All the above potentials are shape invariant and give rise to exactly solvable problems for systems of Schrödinger-Pauli type.

It was proven in [68] that $n \times n$ matrix superpotentials of the form (4.28) with a diagonal matrix Q and $n > 2$ can be reduced to direct sums of operators fixed in (4.33) and scalar superpotentials specified in equations (4.32). Thus in fact we present the complete description of superpotentials (4.28) being matrices of arbitrary dimension, provided matrix Q is diagonal.

The case of non-diagonal matrices Q has been examined in paper [67]. The classifying equations (4.29)-(4.31) have been solved for the cases of superpotentials being 2×2 or 3×3 matrices. In the first case the following list of superpotentials was obtained:

$$W_\kappa^{(1)} = \lambda \left(\kappa (\sigma_+ \tan(\lambda x + c) + \sigma_- \tan(\lambda x - c)) + \right. \\ \left. + \mu \sigma_1 \sqrt{\sec(\lambda x - c) \sec(\lambda x + c)} + \frac{1}{\kappa} R \right),$$

$$W_\kappa^{(2)} = \lambda \left(-\kappa (\sigma_+ \coth(\lambda x + c) + \sigma_- \coth(\lambda x - c)) + \right. \\ \left. + \mu \sigma_1 \sqrt{\operatorname{csch}(\lambda x - c) \operatorname{csch}(\lambda x + c)} + \frac{1}{\kappa} R \right),$$

$$W_\kappa^{(3)} = \lambda \left(-\kappa (\sigma_+ \tanh(\lambda x + c) + \sigma_- \tanh(\lambda x - c)) + \right. \\ \left. + \mu \sigma_1 \sqrt{\operatorname{sech}(\lambda x - c) \operatorname{sech}(\lambda x + c)} + \frac{1}{\kappa} R \right),$$

$$\begin{aligned}
W_{\kappa}^{(4)} &= \lambda \left(-\kappa(\sigma_+ \tanh(\lambda x + c) + \sigma_+ \coth(\lambda x - c)) + \right. \\
&\quad \left. + \mu\sigma_1 \sqrt{\operatorname{sech}(\lambda x + c)\operatorname{csch}(\lambda x - c)} + \frac{1}{\kappa}R \right), \\
W_{\kappa}^{(5)} &= \lambda \left(-\kappa(\sigma_+ \tanh(\lambda x) + \sigma_-) + \mu\sigma_1 \sqrt{\operatorname{sech}(\lambda x) \exp(-\lambda x)} + \frac{1}{\kappa}R \right), \\
W_{\kappa}^{(6)} &= \lambda \left(-\kappa(\sigma_+ \coth(\lambda x) + \sigma_-) + \mu\sigma_1 \sqrt{\operatorname{csch}(\lambda x) \exp(-\lambda x)} + \frac{1}{\kappa}R \right), \\
W_{\kappa}^{(7)} &= -\kappa \left(\frac{\sigma_+}{x+c} + \frac{\sigma_-}{x-c} \right) + \frac{\mu\sigma_1}{\sqrt{x^2-c^2}} + \frac{1}{\kappa}R, \\
W_{\kappa}^{(8)} &= -\kappa \frac{\sigma_+}{x} + \mu\sigma_1 \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\kappa}R, \\
W_{\kappa}^{(9)} &= \lambda \left(-\kappa I + \mu \exp(-\lambda x)\sigma_1 - \frac{\omega}{\kappa}\sigma_3 \right), \tag{4.48}
\end{aligned}$$

where

$$\sigma_{\pm} = \frac{1}{2}(\sigma_0 \pm \sigma_3), \quad R = r_3\sigma_3 + r_2\sigma_2, \tag{4.49}$$

r_a are constants satisfying $r_2^2 + r_3^2 = \omega^2$, κ , μ , λ and $c \neq 0$ are arbitrary parameters.

4.4.5. *Shape invariant QM systems with matrix potentials.* The discussed matrix superpotentials naturally appear in realistic QM systems. The entire collection of such system can be found in [57, 58, 60]. Here we present only one example of such systems.

Consider the following Hamiltonian

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{\lambda}{2m}\sigma_i B_i + V, \tag{4.50}$$

where σ_i are Pauli matrices, $B_i = B_i(\mathbf{x})$ are vector components of magnetic field strength, $V = V(\mathbf{x})$ is a potential and vector \mathbf{x} represents independent variables. In addition, λ denotes the constant of anomalous coupling which is usually represented as $\lambda = g\mu_0$, where μ_0 is the Bohr magneton and g is the Landé factor.

Formula (4.50) presents a generalization of the Pron'ko-Stroganov Hamiltonian for the case of arbitrary external field. And some Schrödinger equations with Hamiltonians (4.50) appears to be shape invariant. The example is given by the following equation:

$$\begin{aligned}
H\psi \equiv & (-\nabla^2 + \lambda(1 - 2\nu) \exp(-x_2)(\sigma_1 \cos x_1 - \sigma_2 \sin x_1) + \\
& + \lambda^2 \exp(-2x_2))\psi = \hat{E}\psi. \tag{4.51}
\end{aligned}$$

Here λ is the integrated coupling constant, and independent variables are rescaled to obtain more compact formulae.

Hamiltonian H in (4.51) admits integral of motion $Q = p_1 - \frac{\sigma_3}{2}$. Thus it is possible to expand solutions of (4.51) via eigenvectors of Q which look as follows:

$$\psi_p = \begin{pmatrix} \exp(i(p + \frac{1}{2})x_1) \varphi(x_2) \\ \exp(i(p - \frac{1}{2})x_1) \xi(x_2) \end{pmatrix} \quad (4.52)$$

and satisfy the condition $Q\psi_p = p\psi_p$.

Substituting (4.52) into (4.51) we come to the following equation

$$\hat{H}_\nu \psi \equiv \left(-\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \hat{V}_\nu \right) \psi = E\psi,$$

where

$$\begin{aligned} \hat{V}_\nu &= \lambda^2 \exp(-2y) - \lambda(2\nu - 1) \exp(-y)\sigma_1 - p\sigma_3, \\ y = x_2, \quad E &= \tilde{E} - p^2 - \frac{1}{4}, \quad \psi = \begin{pmatrix} \varphi \\ \xi \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (4.53)$$

Potential \hat{V}_ν (4.53) belongs to the list of shape invariant matrix potentials presented in the above, see equation (4.41). Thus equation (4.51) can be solved exactly using tools of SUSY quantum mechanics [60]. Notice that this equation is also superintegrable [57].

4.4.6. Dual shape invariance. Starting with (4.33)-(4.36) we found the related potentials (4.40)-(4.44) in a unique fashion. But it is interesting to study also the inverse problem: to find possible superpotentials corresponding to given potentials. To do it is sufficient to find all solutions of the Riccati equation (4.21) for W with given potential V . Such solutions depend on two arbitrary parameters (ν and the integration constant), and there is some ambiguity in choosing such of them which should be changing to generate the superpartner potential. Notice that the mentioned inverse problem is very interesting since it opens a way to generate families of isospectral Hamiltonians [19].

In the case of matrix superpotentials the considered problem is more interesting and complicated than in the scalar case since the corresponding solutions are not unique. Namely, in some cases there exist two superpotentials compatible with the shape invariance condition. And both these superpotential can be requested to generate solutions of the related eigenvalue problem.

To find the mentioned additional superpotentials we use the invariance of potentials (4.40), (4.42) and (4.44) with respect to the simultaneous change of arbitrary parameters:

$$\mu \rightarrow \nu - \frac{1}{2}, \quad \nu \rightarrow \mu + \frac{1}{2}. \quad (4.54)$$

This means that in addition to the shape invariance w.r.t. shifts of ν potentials (4.40), (4.42) and (4.44) should be shape invariant w.r.t. shifts of parameter μ too.

Thus, it is possible to represent potentials (4.33), (4.35) and (4.36) in the following alternative form

$$\widetilde{W}_{\mu,\nu}^2 - \widetilde{W}'_{\mu,\nu} = \hat{V}_\mu + c_\mu, \tag{4.55}$$

where $\hat{V}_\mu = \hat{V}_\nu$, and

$$\widetilde{W}_{\mu,\nu} = \frac{\nu\sigma_3 - \mu - 1}{x} + \frac{\omega}{2(\mu + 1)}\sigma_1, \quad c_\mu = \frac{\omega^2}{4(\mu + 1)^2} \tag{4.56}$$

for \hat{V}_k given by equation (4.40),

$$\widetilde{W}_{\mu,\nu} = \frac{\lambda}{2} \left((2\mu + 1) \tan \lambda x + (2\nu - 1) \sec \lambda x \sigma_3 + \frac{4\omega}{2\mu + 1} \sigma_1 \right) \tag{4.57}$$

for potential (4.42), and

$$\widetilde{W}_{\mu,\nu} = \frac{\lambda}{2} \left(-(2\mu + 1) \coth \lambda x + (2\nu - 1) \operatorname{csch} \lambda x \sigma_3 - \frac{4\omega}{2\mu + 1} \sigma_1 \right) \tag{4.58}$$

for potential (4.44). The related constant c_μ is:

$$c_\mu = \lambda^2 \left(\pm \frac{1}{4} (2\mu + 1)^2 + \frac{4\omega^2}{(2\mu + 1)^2} \right), \tag{4.59}$$

where the sign “+” and “-” corresponds to the cases (4.57) and (4.58) respectively.

We stress that superpartners of potentials (4.55) constructed using superpotentials $\widetilde{W}_{\mu,\nu}$, i.e.,

$$\hat{V}_\mu^+ = \widetilde{W}_{\mu,\nu}^2 + \widetilde{W}'_{\mu,\nu} \tag{4.60}$$

satisfy the shape invariance condition since

$$\hat{V}_\mu^+ = \hat{V}_{\mu+1} + C_\mu \quad \text{with} \quad C_\mu = c_{\mu+1} - c_\mu.$$

Thus potentials are shape invariant w.r.t. shifts of two parameters, namely, ν and μ . More exactly, superpartners for potentials (4.40), (4.42) and (4.44) can be obtained either by shifts of ν or by shifts of μ while simultaneous shifts are forbidden. We call this phenomena *dual shape invariance*.

Notice that the dual shape invariance makes it possible to construct the complete set of ground state solutions for all admissible values of quantum numbers enumerating these solutions.

4.4.7. *Exact solutions for shape invariant systems.* An important consequence of the shape invariance is the nice possibility to construct exact solutions of the related stationary Schrödinger equation. The procedure of construction of exact solutions for the case of scalar shape invariant potentials is described in various surveys, see, e.g., [19]. Here we present this procedure for the more general case of matrix potentials.

Consider the stationary Schrödinger equation

$$\hat{H}_\nu \psi \equiv \left(-\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \hat{V}_\nu \right) \psi = E_\nu \psi, \tag{4.61}$$

where $\hat{H}_\nu = a_{\nu,\mu}^+ a_{\nu,\mu}^- + c_\nu$ and \hat{V}_ν is a shape invariant potential. An algorithm for construction of exact solutions of supersymmetric and shape invariant Schrödinger equations includes the following steps (see, e.g., [19]):

- To find the ground state solutions $\psi_0(\nu, \mu, x)$ which are proportional to square integrable solutions of the first order equation

$$a_{\nu,\mu}^- \psi_0(\nu, \mu, x) \equiv \left(\frac{\partial}{\partial x} + W_{\nu,\mu} \right) \psi_0(\nu, \mu, x) = 0. \tag{4.62}$$

Function $\psi_0(\nu, \mu, x)$ solves equation (4.61) with

$$E_\nu = E_{\nu,0} = -c_\nu. \tag{4.63}$$

- To find a solution $\psi_1(\nu, \mu, x)$ for the first excited state which is defined by the following relation:

$$\psi_1(\nu, \mu, x) = a_{\nu,\mu}^+ \psi_0(\nu + 1, \mu, x) \equiv \left(-\frac{\partial}{\partial x} + W_{\nu,\mu} \right) \psi_0(\nu + 1, \mu, x). \tag{4.64}$$

Since $a_{\nu,\mu}^\pm$ and \hat{H}_ν satisfy the intertwining relations

$$\hat{H}_\nu a_{\nu,\mu}^+ = a_{\nu,\mu}^+ \hat{H}_{\nu+1} \tag{4.65}$$

function (4.64) solves equation (4.61) with $E_\nu = E_{\nu,1} = -c_{\nu+1}$.

- Solutions for the second excited state $\psi_2(\nu, \mu, x)$ can be found acting by the first order differential operator a^+ on the first excited state, i.e., $\psi_2(\nu, \mu, x) = a_{\nu,\mu}^+ \psi_1(\nu + 1, \mu, x)$, etc. Finally, solutions which correspond to n^{th} excited state for any admissible natural number $n > 0$ can be represented as

$$\psi_n(\nu, \mu, x) = a_{\nu,\mu}^+ a_{\nu+1,\mu}^+ \cdots a_{\nu+n-1,\mu}^+ \psi_0(\nu + n, \mu, x). \tag{4.66}$$

The corresponding eigenvalue $E_{\nu,n}$ is equal to $-c_{\nu+n}$.

- For systems admitting the dual shape invariance it is necessary to repeat the steps enumerated above using alternative (or additional) superpotentials.

All matrix potentials presented in the above generate integrable models with Hamiltonian (4.61). However, it is necessary to examine their consistency, in particular, to verify that there exist square integrable solutions of equation (4.62) for the ground states.

In the following sections we find such solutions for all superpotentials given by equations (4.33)-(4.36) and (4.56)-(4.58). However, to obtain normalizable ground state solutions it is necessary to impose certain conditions on parameters of these superpotentials.

Let us present the energy spectra for models (4.61) with potentials (4.40)-(4.44) which can be found applying the presented algorithm:

$$E = -\frac{\omega^2}{(2N+1)^2}$$

for potential (4.40),

$$E = -\lambda^2 \left(N^2 + \frac{\omega^2}{N^2} \right)$$

for potentials (4.41), (4.44), (4.46), and

$$E = \lambda^2 \left(N^2 - \frac{\omega^2}{N^2} \right)$$

for potentials (4.42).

Here N is the spectral parameter which can take the following values

$$N = n + \nu,$$

and (or)

$$N = n + \mu + \frac{1}{2},$$

where $n = 0, 1, 2, \dots$ are natural numbers which can take any values for potentials (4.40)-(4.42). For potentials (4.41), (4.46) and (4.44) with a fixed $\nu < 0$ the admissible values of n are bound by the condition $(\nu + n)^2 > |\omega|$.

In order to find the ground state solutions for equations (4.61) with potentials (4.40)-(4.44) it is sufficient to solve equations (4.62) where $W_{\nu,\mu}$ are superpotentials (4.33)-(4.36), and analogous equation with superpotentials (4.56)-(4.58). We will not present these solutions there but draw the readers attention to reference [68] where the complete list of them can be found. Let us remind that the related solutions for the excited states are easily found applying relations (4.66).

5. SUPERINTEGRABLE SYSTEMS WITH POSITION DEPENDENT MASS

5.1. First order integrals of motion. In this and the following sections we study superintegrable stationary Schrödinger equations (2.3) with

position dependent mass, which formally coincide with (2.3) but include Hamiltonians (2.7) with variable mass parameters.

In paper [70] all Hamiltonians (2.2) admitting first order integrals of motion are classified, refer also to Section 5.1 of the present paper. Some of the systems specified in Table 3.10 appear to be superintegrable since they admit more than three integrals of motion. Namely, it is the case for the cases presented in Items 12-17 of this table.

Here we consider only the systems specified in Items 12 and 13 and present their exact solutions.

5.1.1. *System invariant w.r.t. algebra so(4)*. Consider Hamiltonian (2.6) with functions f and V presented in line 15 of Table 3.10:

$$H = \mu (p_a(1 + r^2)^2 p_a - 6r^2 + \nu). \tag{5.1}$$

The eigenvalue problem for this Hamiltonian can be written in the following form:

$$\hat{H}\psi \equiv -(\partial_a(1 + r^2)^2 \partial_a + 6r^2) \psi = \tilde{E}\psi, \tag{5.2}$$

where

$$\hat{H} = \frac{1}{\mu}(H - \nu) \quad \text{and} \quad \tilde{E} = \frac{E}{\mu} - \frac{\nu}{\mu}. \tag{5.3}$$

Equation (5.2) admits six integrals of motion M^{AB} , $A, B = 1, 2, 3, 4$:

$$M^{ab} = x^a p^b - x^b p^a, \quad M^{4a} = \frac{1}{2}(r^2 - 1)p^a - x^a x^b p^b + \frac{3i}{2}x^a, \tag{5.4}$$

which form a basis of algebra $\mathfrak{so}(4)$. Defining a new basis

$$q_a = \frac{1}{2} \left(M^{4a} + \frac{1}{2} \varepsilon^{abc} M^{bc} \right), \quad g_a = \frac{1}{2} \left(-M^{4a} + \frac{1}{2} \varepsilon^{abc} M^{bc} \right)$$

we decouple algebra $\mathfrak{so}(4)$ to the direct sum of two algebras $\mathfrak{so}(3)$ since q^a and g^a satisfy

$$[q^a, q^b] = i\varepsilon^{abc} q^c, \quad [g^a, g^b] = i\varepsilon^{abc} g^c, \quad [q^a, g^b] = 0.$$

Thus system (5.2), like the Hydrogen atom, admits six integrals of motion belonging to algebra $\mathfrak{so}(4)$ and is maximally superintegrable. However, in contrast with the Fock symmetry of the Hydrogen atom, integrals of motion (5.4) are the first order differential operators.

Using this symmetry it is possible to find eigenvalues \tilde{E} algebraically, before solving equation (5.2). To do it we calculate Casimir operators of algebra $\mathfrak{o}(4)$ for representation (5.4):

$$\begin{aligned} C_1 &= \frac{1}{2} M^{AB} M^{AB} = 2(\mathbf{q}^2 + \mathbf{g}^2) \equiv \frac{1}{4}(\hat{H} - 9), \\ C_2 &= \frac{1}{2} \varepsilon_{abc} M^{4a} M^{bc} = 2(\mathbf{q}^2 - \mathbf{g}^2) \equiv 0. \end{aligned} \tag{5.5}$$

where $\mathbf{q}^2 = (q^1)^2 + (q^2)^2 + (q^3)^2$, etc.

In accordance with (5.5) the Hamiltonian eigenvalues can be expressed via eigenvalues of C_1 . Since C_2 is trivial, eigenvalues of C_1 take the following values

$$C_1\psi = 4q(q+1)\psi = (n^2 - 1)\psi, \quad n = 1, 2, \dots \quad (5.6)$$

and so eigenvalues of Hamiltonians H (5.1) and \tilde{H} are:

$$E = \mu(4n^2 + 5) + \nu \quad \text{and} \quad \tilde{E} = 4n^2 + 5. \quad (5.7)$$

The next step is to find eigenvectors of Hamiltonian (5.1) corresponding to eigenvalues (5.7). It can be easily done coming to the spherical variables [70].

5.1.2. *System invariant w.r.t. algebra $\mathfrak{so}(1,3)$.* The next Hamiltonian we consider corresponds to functions f and V presented in line 16 of Table 3.10:

$$H = \mu (p_a(1 - r^2)^2 p_a - 6r^2 + \nu). \quad (5.8)$$

The related eigenvalue problem is based on the following equation:

$$\hat{H}\psi \equiv -(\partial_a(1 - r^2)^2 \partial_a + 6r^2)\psi = \tilde{E}\psi, \quad (5.9)$$

where notations (5.3) are used.

Equation (5.9) admits six integrals of motion $M^{\mu\nu}$, $\mu, \nu = 0, 1, 2, 3$:

$$\begin{aligned} M^{ab} &= x^a p^b - x^b p^a, \quad a, b = 1, 2, 3, \\ M^{0a} &= \frac{1}{2}(r^2 + 1)p^a - x^a x^b p^b + \frac{3i}{2}x^a, \end{aligned} \quad (5.10)$$

which form a basis of algebra $\mathfrak{so}(1,3)$. Calculating the corresponding Casimir operators, we obtain:

$$\begin{aligned} C_1 &= \frac{1}{2}M^{ab}M^{ab} - M^{0a}M^{0a} = \frac{1}{4}(\hat{H} + 9), \\ C_2 &= \frac{1}{2}\varepsilon_{abc}M^{0a}M^{bc} = 0. \end{aligned} \quad (5.11)$$

Like in previous section, the first Casimir is proportional to the (shifted) Hamiltonian.

Let us suppose that operators (5.10) generate a unitary representation (IR) of group $\text{SO}(1,3)$. The admissible eigenvalues c_1 and c_2 of Casimir operators C_1 and C_2 (5.11) are given by the following formulae [48]:

$$c_1 = 1 - j_0^2 - j_1^2, \quad c_2 = 2ij_0j_1,$$

where j_0 and j_1 are quantum numbers labeling irreducible representations. Using our knowledge of these representations [48] we easily find that the admissible values of j_1 and c_1 are

$$j_1 = i\lambda, \quad c_1 = 1 - j_1^2 = \lambda^2 + 1,$$

where λ is an arbitrary real number, or, alternatively,

$$0 \leq j_1 \leq 1, \quad c_1 = 1 - j_1^2.$$

In accordance with (5.11) the related eigenvalues \tilde{E} in (5.9) can be expressed as:

$$\tilde{E} = -5 - j_1^2.$$

They correspond to the continuous spectrum, and so there are no bound states. Moreover, the possible values of \tilde{E} should belong to the following intervals:

$$-6 \leq \tilde{E} \leq -5 \text{ (principal series),} \quad -5 \leq \tilde{E} < \infty \text{ (subsidiary series).}$$

Thus we can find admissible energies applying purely group-theoretical arguments. For the corresponding eigenfunctions refer to [70].

5.2. Rotationally invariant systems. By definition, the rotationally invariant systems include the following functions f and V :

$$f = f(x), \quad \tilde{V} = \tilde{V}(x), \quad x = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}.$$

In accordance with [70] there are four Hamiltonians which are rotationally invariant and admit a more extended symmetry with respect to continuous groups of transformations. The corresponding Schrödinger equations admit second order integrals of motion belonging to the enveloping algebras of the Lie algebras of these transformation groups. Such Hamiltonians are specified by the following inverse masses and potentials:

$$\begin{aligned} f &= r^2, & \tilde{V} &= 0, \\ f &= (1 + r^2)^2, & \tilde{V} &= -6r^2, \\ f &= (1 - r^2)^2, & \tilde{V} &= -6r^2, \\ f &= r^4, & \tilde{V} &= -6r^2. \end{aligned}$$

Let us find all other rotationally invariant PDM Schrödinger equations admitting second order integrals of motion of the following generic form

$$Q = \mu^{ab} \partial_a \partial_b + \xi^a \partial_a + \eta, \tag{5.12}$$

where $\mu^{ab} = \mu^{ba}$, ξ^a and η are functions of \mathbf{x} and summation from 1 to 3 is imposed over all repeating indices.

By definition, operators Q should commute with \hat{H} :

$$[\hat{H}, Q] \equiv \hat{H}Q - Q\hat{H} = 0.$$

Calculating the commutator and equating the coefficients for different differential operators we come to the following system of determining equations:

$$5\left(\mu_c^{ab} + \mu_b^{ac} + \mu_a^{bc}\right) = \delta^{ab}(\mu_c^{nn} + 2\mu_n^{cn}) + \delta^{bc}(\mu_a^{nn} + 2\mu_n^{an}) + \delta^{ac}(\mu_b^{nn} + 2\mu_n^{bn}) = 0, \quad (5.13)$$

$$(\mu_a^{nn} + 2\mu_n^{na})f - 5\mu^{an}x_n \frac{f'}{x} = 0, \quad (5.14)$$

$$\left(\mu_{nn}^{ab} + \xi_b^a + \xi_a^b\right)f + \left(\mu_n^{ab}x^n - 2\mu^{ab} - \delta^{ab}(\mu^{nn} + \xi^n x^n)\right)\frac{f'}{x} + \left(\mu^{an}x^b + \mu^{bn}x^a + \delta^{ab}\mu^{kn}x^k\right)x^n \frac{1}{x^2}\left(\frac{f'}{x} - f''\right) = 0, \quad (5.15)$$

$$(2\eta_a + \xi_{nn}^a)f + (\xi_n^a x^n - \xi^a)\frac{f'}{x} - \frac{1}{x^4}(x^a \xi^n x^n + 2\mu^{an}x^n + x^a \mu^{nn})(x^2 f'' - x f') - \frac{1}{x^6}x^a \mu^{mn}x^m x^n (x^3 f''' - 3x^2 f'' + 3x f') + 2\mu^{an}x^n \frac{V'}{x} = 0, \quad (5.16)$$

$$x^2 f \eta_{mn} + \eta_m x^n x f' + (\xi^n x^n + \mu^{nn})x \tilde{V}' + \frac{1}{x^2}\mu^{mn}x^m x^n (x^2 \tilde{V}'' - x \tilde{V}') = 0, \quad (5.17)$$

where $f' = \frac{\partial f}{\partial x}$, $\xi_n^a = \frac{\partial \xi^a}{\partial x_n}$, etc.

Thus to classify Hamiltonians (2.2) admitting second order integrals of motion (5.12) it is necessary to find all inequivalent solutions of system (5.13)-(5.17). We will not present here the rather complicated solution procedure which had been carried in [63].

Table 5.1: Functions f and V specifying non-equivalent Hamiltonians (2.2) which admit vector integrals of motion

No	f	V	Solution approach	Effective potentials
1	x	αx	direct or two-step	3d osc. or Coulomb
2	x^4	αx	direct or two-step	Coulomb or 3d osc.
3	$x(x-1)^2$	$\frac{\alpha x}{(x+1)^2}$	direct or two-step	Eckart or hyperbolic Pöschl-Teller

Table 5.1, continued

No	f	V	Solution approach	Effective potentials
4	$x(x+1)^2$	$\frac{\alpha x}{(x-1)^2}$	direct or two-step	Eckart or trig. Pöschl-Teller
5	$(1+x^2)^2$	$\frac{\alpha(1-x^2)}{x}$	direct	trig. Rosen-Morse
6	$(1-x^2)^2$	$\frac{\alpha(1+x^2)}{x}$	direct	Eckart
7	$\frac{x}{x+1}$	$\frac{\alpha x}{x+1}$	two-step	Coulomb
8	$\frac{x-1}{x}$	$\frac{\alpha x}{x-1}$	two-step	Coulomb
9	$\frac{(x^2-1)^2 x}{x^2-2\nu x+1}$	$\frac{\alpha x}{x^2-2\nu x+1}$	two-step	Eccart
10	$\frac{(x^2+1)^2 x}{x^2-2\nu x-1}$	$\frac{\alpha x}{x^2-2\nu x-1}$	two-step	trig. Rosen-Morse

In the third columns of the tables the effective radial potentials appearing after the variables separation are indicated. They are shape invariant, i.e., can be expressed in the form (4.21) where the related superpotentials W_ν are enumerated in formulae (4.32). The kinds of the superpotentials are fixed in the fifth columns. Notice that the trigonometric and hyperbolic Pöshl-Teller potentials are equivalent to the Scraft 1 and generalized Pöshl-Teller potentials (presented in (4.32)) correspondingly.

The content of the terms presented in the fourth columns is explained in the next section.

We see that there exist exactly twenty superintegrable systems invariant with respect to 3d rotations. The majority of them is defined up to one arbitrary parameter. In addition, there exist four systems dependent on two parameters, see Items 9 and 10 in both tables.

Table 5.2: Functions f and V specifying non-equivalent Hamiltonians (2.2) which admit tensor integrals of motion

No	f	V	Solution approach	Effective radial potential
1	$\frac{1}{x^2}$	$\frac{\alpha}{x^2}$	direct or two-step	Coulomb or 3d osc.
2	x^4	$-\frac{\alpha}{x^2}$	direct or two-step	3d osc. or Coulomb

Table 5.2, continued

No	f	V	Solution approach	Effective radial potential
3	$(x^2 - 1)^2$	$\frac{\alpha x^2}{(x^2 + 1)^2}$	direct or two-step	Eckart or hyperbolic Pöschl-Teller
4	$(x^2 + 1)^2$	$\frac{\alpha x^2}{(x^2 - 1)^2}$	direct or two-step	Eckart or Pöschl-Teller
5	$\frac{(x^4 - 1)^2}{x^2}$	$\frac{\alpha(x^4 + 1)}{x^2}$	direct	Eckart
6	$\frac{(x^4 + 1)^2}{x^2}$	$\frac{\alpha(x^4 - 1)}{x^2}$	direct	trig. Rosen-Morse
7	$\frac{1}{x^2 + 1}$	$\frac{\alpha}{x^2 + 1}$	two-step	3d osc.
8	$\frac{1}{x^2 - 1}$	$\frac{\alpha}{x^2 - 1}$	two-step	3d osc.
9	$\frac{(x^4 - 1)^2}{x^4 - 2\nu x^2 + 1}$	$\frac{\alpha x^2}{x^4 - 2\nu x^2 + 1}$	two-step	Eckart
10	$\frac{(x^4 + 1)^2}{x^4 - 2\nu x^2 - 1}$	$\frac{\alpha x^2}{x^4 - 2\nu x^2 - 1}$	two-step	trig. Rosen-Morse

5.3. Two strategies in construction of exact solutions. Let us consider equations (4.25) where H are Hamiltonians (2.2) whose mass and potential terms are specified in the presented tables. We will search for square integrable solutions of these systems vanishing at $x = 0$.

First let us transform (4.25) to the following equivalent form

$$\tilde{H}\Psi = E\Psi, \tag{5.18}$$

where

$$\tilde{H} = \sqrt{f}H\frac{1}{\sqrt{f}} = fp^2 + V, \quad \Psi = \sqrt{f}\psi. \tag{5.19}$$

Then, introducing spherical variables and expanding solutions via spherical functions Y_m^l

$$\Psi = \frac{1}{x} \sum_{l,m} \phi_{lm}(x)Y_m^l \tag{5.20}$$

we obtain the following equation for radial functions:

$$-f\frac{\partial^2\phi_{lm}}{\partial x^2} + \left(\frac{fl(l+1)}{x^2} + V\right)\phi_{lm} = E\phi_{lm}. \tag{5.21}$$

There are two possible ways to solve equation (5.21). They can be treated as particular cases of Liouville transformation (refer to [73] for definitions) and include commonly known steps. But it is necessary to fix them as concrete algorithms to obtain shape invariant potentials presented in the tables.

The first way (which we call direct) includes consequent changes of independent and dependent variables:

$$\phi_{lm} \rightarrow \Phi_{lm} = f^{\frac{1}{4}} \phi_{lm}, \quad \frac{\partial}{\partial x} \rightarrow f^{\frac{1}{4}} \frac{\partial}{\partial x} f^{-\frac{1}{4}} = \frac{\partial}{\partial x} + \frac{f'}{4f} \quad (5.22)$$

and then

$$x \rightarrow y(x), \quad (5.23)$$

where y solves the equation $\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{1}{\sqrt{f}}$. As a result equation (5.20) will be reduced to a more customary form

$$-\frac{\partial^2 \Phi_{lm}}{\partial y^2} + \tilde{V} \Phi_{lm} = E \Phi_{lm} \quad (5.24)$$

where \tilde{V} is an effective potential

$$\tilde{V} = V + f \left(\frac{l(l+1)}{x^2} - \left(\frac{f'}{4f} \right)^2 - \left(\frac{f'}{4f} \right)' \right), \quad x = x(y). \quad (5.25)$$

Equations (5.18), (5.19) with functions f and V specified in Items 1-6 of both Tables 5.1 and 5.2 can be effectively solved using the presented reduction. All the corresponding potentials (5.25) appears to be shape invariant, and just these potentials are indicated in the fifth columns of the tables. The related equations (5.24) are shape invariant too and can be solved using the SUSY routine.

However, the presented algorithm is not valid for the remaining systems indicated in Items 7-10 of both the tables. To solve these systems we need a more sophisticated procedure which consists in the previous multiplication (5.21) by αV^{-1} which leads the following equation:

$$-\tilde{f} \frac{\partial^2 \phi_{lm}}{\partial x^2} + \left(\frac{\tilde{f} l(l+1)}{x^2} + \tilde{V} \right) \phi_{lm} = \mathcal{E} \phi_{lm}, \quad (5.26)$$

where $\tilde{f} = \frac{\alpha f}{V}$, $\tilde{V} = -\frac{\alpha E}{V}$ and $\mathcal{E} = -\alpha$. Then treating \mathcal{E} as an eigenvalue and solving equation (5.26) we can find α as a function of E , which defines admissible energy values at least implicitly. To do it is convenient to make changes (5.22) and (5.23) where $f \rightarrow \tilde{f}$.

The presented trick with a formal changing the roles of constants α and E is well known. Our point is that *any of the presented superintegrable systems can be effectively solved using either the direct approach presented*

in equations (5.19)-(5.25), or the two-step approach. Moreover, some of the presented systems can be solved using both the direct and two-step approaches, as indicated in the fourth columns of Tables 16 and 17. In all cases we obtain shape invariant effective potentials and can use tools of SUSY quantum mechanics.

5.4. Example: system with two arbitrary parameters. Consider the systems specified in Item 10 of Table 5.2. The corresponding Hamiltonian (5.19) and radial equation (5.21) have the following form:

$$H = \frac{(x^4 + 1)^2}{x^4 - 2\nu x^2 - 1} p^2 + \frac{\alpha x^2}{x^4 - 2\nu x^2 - 1}$$

and

$$\left(-\frac{(x^4 + 1)^2}{x^4 - 2\nu x^2 - 1} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{l(l+1)}{x^2} \right) + \frac{\alpha x^2}{x^4 - 2\nu x^2 - 1} \right) \phi_{lm} = E \phi_{lm}. \quad (5.27)$$

Multiplying (5.27) from the left by $\frac{x^4 - 2\nu x^2 - 1}{x^2}$ we come to the following equation:

$$\left(-\frac{(x^4 + 1)^2}{x^2} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{l(l+1)}{x^2} \right) + \frac{\tilde{\alpha}(x^4 - 1)}{x^2} \right) \phi_{lm} = \mathcal{E} \phi_{lm}, \quad (5.28)$$

where

$$\tilde{\alpha} = -E \quad \text{and} \quad \mathcal{E} = -\alpha - 2\nu E. \quad (5.29)$$

Notice that equation (5.28) with $\tilde{\alpha} \rightarrow \alpha$ and $\mathcal{E} \rightarrow E$ is needed also to find eigenvectors of the Hamiltonian whose mass and potential terms are specified in Item 6 of Table 5.2.

Making transformations (5.23) and (5.22) with $y = \frac{1}{2} \arctan(x^2)$ and $f = \frac{(x^4 + 1)^2}{x^2}$ we reduce equation (5.28) to the following form:

$$-\frac{\partial^2 \Phi_{lm}}{\partial y^2} + (\mu(\mu - 4) \csc^2(4y) + 2\tilde{\alpha} \cot(4y)) \Phi_{lm} = \tilde{\mathcal{E}} \Phi_{lm}, \quad (5.30)$$

where

$$\tilde{\mathcal{E}} = \mathcal{E} + 4, \quad \mu = 2l + 3. \quad (5.31)$$

Thus we come to equation with a shape invariant (Rosen-Morse I) potential. It is consistent provided parameters $\tilde{\alpha}$ and μ are positive. Solving this equation using the standard tools or SUSY QM we easily find its eigenfunctions and eigenvalues; the corresponding eigenvalues for equation (5.27) are given by the following formula [63]

$$E_n = (2l + 3 + 4n)^2 \left(\nu - \sqrt{\nu^2 + 1 + \frac{\alpha - 4}{(2l + 3 + 4n)^2}} \right), \quad (5.32)$$

where both n and l are integers.

In analogous manner it is possible to find the complete sets of solutions of the eigenvalues problem (5.21) for all systems presented in Tables 16 and 17.

6. RUNGE-LENTZ VECTORS

The LRL vector is one of corner stones of celestial mechanics. In some aspects the same is true also for quantum mechanics. In particular, using this vector, Pauli found the spectrum of the Hydrogen atom before the Schrödinger equation was discovered.

There are important examples of 3d quantum mechanical systems with spin admitting the LRL vector. They are the MICZ-Kepler system [43], a dyon with gyromagnetic ratio $g = 4$, interacting with a magnetic monopole field plus a Coulomb plus a fine-tuned inverse-square potential [44], and a neutral particle a non-trivial dipole momentum [57]. All the mentioned systems include particles with spin $1/2$.

Following papers [59, 61, 62] we will classify LRL vectors with arbitrary spin. It will be done for 2d and 3d systems, and partially for systems of arbitrary dimension.

6.1. The Hydrogen atom. We start with the LRL vector corresponding to the Hydrogen atom. This system is described by Hamiltonian (2.2), where $V = -\frac{\alpha}{x}$ is Coulomb potential.

Hamiltonian (2.3) commutes with orbital momentum $\mathbf{L} = \mathbf{x} \times \mathbf{p}$. An additional integral of motion is the LRL vector

$$\mathbf{K} = \frac{1}{2m}(\mathbf{p} \times \mathbf{L} - \mathbf{L} \times \mathbf{p}) + \mathbf{x}V, \quad (6.1)$$

which is the second order differential operator and so belongs to higher symmetries. These integrals of motion satisfy the following commutation relations:

$$[L_a, H] = [K_a, H] = 0, \quad (6.2)$$

$$= i\varepsilon_{abc}L_c, \quad [K_a, L_b] = i\varepsilon_{abc}K_c, \quad (6.3)$$

$$[K_a, K_b] = -\frac{2i}{m}\varepsilon_{abc}L_cH.$$

In accordance with (6.2) the Hydrogen atom admits five independent integrals of motion three of which are commuting. Thus this QM system is maximally superintegrable.

On the set of eigenvectors of Hamiltonian H corresponding to eigenvalue E relations (6.3) specify the Lie algebra which is isomorphic to $\mathfrak{so}(4)$ for $E < 0$ and $\mathfrak{so}(1, 3)$ for $E > 0$. Using this symmetry and our knowledge of

irreducible representations of algebra $\mathfrak{so}(4)$ it is possible to find admissible eigenvalues E algebraically.

6.2. Systems with spin.

6.2.1. *2d system.* The non-relativistic model of Hydrogen atom ignores the spin of electron. The first (historically) model with spin which admits an analogue of the LRL vector was discovered by Pron'ko and Stroganov as far back as in 1977 [77].

Hamiltonian (4.24) commutes with the third component of the total orbital momentum

$$J_3 = x_1 p_2 - x_2 p_1 + S_3, \quad (6.4)$$

where $S_3 = \frac{1}{2}\sigma_3$. There are also two more constants of motion for (4.24), namely:

$$\begin{aligned} K_1 &= \frac{1}{2}(J_3 p_1 + p_1 J_3) + \frac{m}{r}\mu(\mathbf{n})x_2, \\ K_2 &= \frac{1}{2}(J_3 p_2 + p_2 J_3) - \frac{m}{r}\mu(\mathbf{n})x_1, \end{aligned} \quad (6.5)$$

where $\mu(\mathbf{n}) = \lambda(S_1 n_2 - S_2 n_1)$, $n_a = \frac{x_a}{r}$ and $\mathbf{n} = (n_1, n_2)$.

Operators (6.4) and (6.5) commute \mathcal{H} and satisfy the following relations:

$$[J_3, K_1] = iK_2, \quad [J_3, K_2] = -iK_1, \quad [K_1, K_2] = -2imJ_3\mathcal{H}. \quad (6.6)$$

Algebra spanned on basis elements K_1, K_2 and J_3 can be defined on sets of solutions of the eigenvalue problem:

$$\mathcal{H}\psi = E\psi. \quad (6.7)$$

Changing Hamiltonian \mathcal{H} by its eigenvalue E we obtain the Lie algebra isomorphic to $\mathfrak{so}(3)$ provided $E < 0$ or to $\mathfrak{so}(1, 2)$ if E is positive.

Using this symmetry it is possible to find eigenvalues E for coupled states algebraically [57]. To do this it is sufficient to rescale operators K_1 and K_2 :

$$K_1 = \sqrt{-2mE}J_1, \quad K_2 = \sqrt{-2mE}J_2. \quad (6.8)$$

Then J_1, J_2 and J_3 realize a representation of algebra $\mathfrak{so}(3)$. Supposing this representation be irreducible we obtain the following constraint for eigenvectors

$$C\psi \equiv (J_1^2 + J_2^2 + J_3^2)\psi = n(n+1)\psi. \quad (6.9)$$

In addition, ψ is supposed to be an eigenvector of operator J_3 commuting with \mathcal{H} and C :

$$J_3\psi = k\psi, \quad k = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \dots \quad (6.10)$$

Substituting (6.4) and (6.5), (6.8) into (6.9) and using (6.7) and (6.10) we obtain the energy spectrum in the following form:

$$E = -\frac{m\lambda^2}{(2n + 2k + 1)^2}, \quad (6.11)$$

where $n = 0, 1, 2, \dots$.

The corresponding eigenvectors can be found using supersymmetry and shape invariance of Hamiltonian (4.24) [57].

6.2.2. *3d system.* To construct a 3d system with spin it is necessary to change the angular momentum \mathbf{L} by the total angular momentum

$$\mathbf{L} \rightarrow \mathbf{J} = \mathbf{L} + \mathbf{S}, \quad (6.12)$$

where \mathbf{S} is a spin vector whose components satisfy the conditions:

$$[S_a, S_b] = i\varepsilon_{abc}S_c, \quad S_1^2 + S_2^2 + S_3^2 = s(s + 1)I.$$

For spin $\frac{1}{2}$ we have $\mathbf{S} = (\frac{1}{2}\sigma_1, \frac{1}{2}\sigma_2, \frac{1}{2}\sigma_3)$.

The LRL vector with spin is supposed to have the following form:

$$\hat{\mathbf{K}} = \frac{1}{2m}(\mathbf{p} \times \mathbf{J} - \mathbf{J} \times \mathbf{p}) + \mathbf{x}\hat{V} \quad (6.13)$$

where \hat{V} is a potential which specifies the corresponding Hamiltonian (2.3). Now it is a matrix of dimension $(2s + 1)(2s + 1)$ depending on \mathbf{x} .

Let us note that components of vector (6.13) can be rewritten in the following form:

$$K_a = \frac{1}{2}(p_b J_{ab} + J_{ab} p_b) + x_a \hat{V}, \quad (6.14)$$

where $J_{ab} = \varepsilon_{abc}J_c$, $a, b, c = 1, 2, 3$ and ε_{abc} is the Levi-Civita symbol. This uniform representation is valid for both 2d and 3d cases, compare (6.14) for $a, b = 1, 2$ and (6.8).

By definition vector (6.13) should commute the following Hamiltonian

$$\hat{H} = \frac{p^2}{2m} + \hat{V}. \quad (6.15)$$

The necessary and sufficient conditions for this commutativity are given by the following equations [62]:

$$[\hat{V}, J_{ab}] = 0, \quad (6.16)$$

$$x_a \nabla_a \hat{V} + \hat{V} = 0, \quad (6.17)$$

$$S_{ab} \nabla_b \hat{V} + \nabla_b \hat{V} S_{ab} = 0, \quad (6.18)$$

where $\nabla_a = \frac{\partial}{\partial x_a}$ and $S_{ab} = \varepsilon_{abc}S_c$.

If conditions (6.16)-(6.18) are fulfilled, operators \mathbf{J} , $\hat{\mathbf{K}}$ and \hat{H} satisfy the same commutation relations (6.2) and (6.3) as the orbital momentum, LRL vector and Hamiltonian of the Hydrogen atom.

It can be proven that up to a constant multiplier α there is the unique choice for \hat{V} [62]:

$$\hat{V} = \alpha \frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{x}}{x^2}. \quad (6.19)$$

Moreover, this potential can be found without a priori restrictions on the generic form of vector integrals of motion given by equation (6.13) [62].

Thus the total angular momentum and LRL vector for spin $\frac{1}{2}$ have the following form

$$\begin{aligned} \mathbf{J} &= \mathbf{L} + \frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma}, \\ \hat{\mathbf{K}} &= \frac{1}{2m}(\mathbf{p} \times \mathbf{J} - \mathbf{J} \times \mathbf{p}) + \alpha \mathbf{x} \frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{x}}{x^2}, \end{aligned}$$

while the corresponding Hamiltonian is given by equations (6.15) and (6.19).

Let us note that Hamiltonian (6.15), (6.19) is shape invariant, which makes it possible to find energy spectrum (6.15) using tools of supersymmetric quantum mechanics. It has been done in paper [62], where the corresponding eigenvectors have been calculated also.

6.2.3. Systems of arbitrary dimension. It is well known that LRL vector can be generalized to the case of multidimensional Schrödinger equation with Coulomb potential. Let us show that it is the case also for the case of multidimensional systems with spin.

Consider a multidimensional Hamiltonian:

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \hat{V},$$

where $\hat{p}^2 = p_1^2 + p_2^2 + \dots + p_d^2$ and V_d is a matrix potential. We suppose that this Hamiltonian is invariant with respect to the rotation group in d dimensions whose generators have the following standard form:

$$J_{\mu\nu} = x_\mu p_\nu - x_\nu p_\mu + S_{\mu\nu}, \quad (6.20)$$

where $S_{\mu\nu}$ are matrices satisfying the familiar $\mathfrak{so}(d)$ commutation relations

$$[S_{\mu\nu}, S_{\lambda\sigma}] = i(\delta_{\mu\lambda} S_{\nu\sigma} + \delta_{\nu\sigma} S_{\mu\lambda} - \delta_{\mu\sigma} S_{\nu\lambda} - \delta_{\nu\lambda} S_{\mu\sigma}),$$

where subindices run from 1 to d . One more supposition is that when reducing this matrix algebra to its subalgebra $\mathfrak{so}(3)$ one obtains a direct sum of irreducible representations $D\left(\frac{1}{2}\right)$. This means that eigenvalues of

matrices $S_{\mu\nu}$ are equal to $\pm\frac{1}{2}$ and these matrices can be expressed via basis elements γ_ν of Clifford algebra

$$S_{\mu\nu} = \frac{1}{4} (\gamma_\mu\gamma_\nu - \gamma_\nu\gamma_\mu). \tag{6.21}$$

The generic form of potential satisfying (6.16) and (6.17) is:

$$\hat{V} = \frac{\alpha}{r} \gamma_a n_a. \tag{6.22}$$

Thus we construct a d -dimensional quantum mechanical system with spin $\frac{1}{2}$ which is invariant with respect to the rotation group in d dimensions and admits the generalized LRL vector. This system is specified by Hamiltonian (3.93) with potential (6.22), i.e.,

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{\alpha}{r^2} \gamma_a x_a, \tag{6.23}$$

while the corresponding basis elements of algebra $\mathfrak{so}(d)$ and the additional vector integral of motion are given by equations (6.20), (6.21) and (6.14), (6.21). These operators satisfy the following commutation relations:

$$[J_{ab}, \hat{H}] = [\hat{K}_a, \hat{H}] = 0, \tag{6.24}$$

$$[\hat{K}_a, J_{bc}] = i(\delta_{ac}\hat{K}_b - \delta_{ab}\hat{K}_c), \tag{6.25}$$

$$[\hat{K}_a, \hat{K}_b] = -\frac{2i}{m} J_{ab} \hat{H},$$

$$[J_{ab}, J_{cd}] = i(\delta_{ac}J_{bd} + \delta_{bd}J_{ac} - \delta_{ad}J_{bc} - \delta_{bc}J_{ad}). \tag{6.26}$$

Changing in (6.25), (6.26) \hat{H} by its eigenvalue $E < 0$ we obtain algebra isomorphic to $\mathfrak{so}(d+1)$. More exactly, operators J_{ab} and $J_{d+1a} = \sqrt{-\frac{m}{2E}} K_a$ satisfy commutation relations (6.26) where indices run from 1 to $d+1$.

Let us note that all Hamiltonians discussed in previous sections are nothing but particular cases of (6.23). Like in Sections 4.1 and 4.2 it is possible to use the hidden symmetry of Hamiltonian (6.23) w.r.t. algebra $\mathfrak{so}(d+1)$ to find its spectrum algebraically. As a result we obtain [62]:

$$E = -\frac{2m\alpha^2}{d(d-1) + 4c_2}. \tag{6.27}$$

Notice that the 2d spectrum (6.11) is a particular case of (6.27).

7. DISCUSSION

The present survey includes rather complete information about various symmetries of fundamental equations of quantum mechanics. At the first play they are symmetries with respect to continuous groups of transformation (Lie symmetries) which form the grounds of other more general

symmetries. Secondly, we discuss supersymmetries which present powerful tools for construction of general solutions of various quantum mechanical problems. Finally, we represent integrals of motion belonging to the second order differential operators which are important constituents of superintegrable systems.

We present the complete group classification of Schrödinger equations with scalar and vector potentials. This classification supplies us by the a priori information on all inequivalent quantum mechanical models of particles interacting with external (electromagnetic and more general) external fields and symmetries which they can admit. In particular we correct generally accepted list of inequivalent Hamiltonians with scalar potentials.

Our contribution into the SUSY approach to quantum mechanics is the complete classification of matrix superpotentials realized by 2×2 matrices. Such potentials naturally appear in many realistic problems, but we present the completed list of them.

The next contribution is the classification of quantum mechanical problems whose higher symmetries are realized by the Runge-Lenz vector. Among them are systems with two, three and arbitrary number of spatial dimensions. In the present paper we restrict ourselves to systems with spin $1/2$, while the systems with arbitrary spins are discussed in papers [59,61].

To construct QM systems with extended SUSY we essentially use discrete symmetries, i.e., reflections and rotations to the fixed angles. The idea itself to apply reflections to construct $N = 2$ SUSY was proposed in paper [34]. Then it was applied to generate extended supersymmetries [51, 53, 85], moreover, in the latter paper the discrete rotations were applied also. In addition, using these discrete symmetries, it is possible to make a reduction of SUSY algebras as it was shown in paper [16] and some others.

One more important field of our research are quantum systems with position dependent masses. We discuss their symmetries, supersymmetries and higher order integrals of motion.

We believe that the present paper would serve as a small handbook on symmetries of the main equations of quantum mechanics. In particular it include as many as 14 tables enumerating all inequivalent Lie symmetries. In addition, we present the list of shape invariant systems and PDM systems admitting second order integrals of motion.

The quantum mechanical systems we discuss are rather general but surely there exist more general ones. In particular we did not discuss symmetries of the non-linear Schrödinger equations which have been classified in [69] and its generalization called Ginsburg-Landau equation whose symmetries were specified in [55], see also [56] for more general quasi linear systems of

diffusion equations. In addition, the conditional symmetries were applied in [31] to construct exact solutions of the nonlinear SE.

One more very attractive research field which however is not well studied yet are superintegrable systems with position dependent masses. We discuss them in the above but only rotationally invariant ones. More general systems are subjects of our current research.

REFERENCES

- [1] Y. Aharonov, A. Casher, L. Susskind. Dual-parton model for mesons and baryons. *Phys. Lett. B*, 35(6):512–514, 1971, doi: 10.1016/0370-2693(71)90386-8.
- [2] R. L. Anderson, V. A. Baikov, R. K. Gazizov, W. Hereman, N. H. Ibragimov, F. M. Mahomed, S. V. Meleshko, M. C. Nucci, P. J. Olver, M. B. Sheftel', A. V. Turbiner, E. M. Vorob'ev. *CRC handbook of Lie group analysis of differential equations. Vols. 1–3*. CRC Press, Boca Raton, FL, 1996.
- [3] A. A. Andrianov, N. V. Borisov, M. V. Ioffe. Factorization method and Darboux transformation for multidimensional Hamiltonians. *Theoret. and Math. Phys.*, 61(2):1078–1088, 1984, doi: 10.1007/BF01029109.
- [4] A. A. Andrianov, F. Cannata, M. V. Ioffe, D. N. Nishnianidze. Matrix Hamiltonians: SUSY approach to hidden symmetries. *J. Phys. A*, 30(14):5037–5050, 1997, doi: 10.1088/0305-4470/30/14/015.
- [5] A. A. Andrianov, M. V. Ioffe. From supersymmetric quantum mechanics to a parasupersymmetric one. *Phys. Lett. B*, 255(4):543–548, 1991, doi: 10.1016/0370-2693(91)90263-P.
- [6] A. A. Andrianov, M. V. Ioffe. Nonlinear supersymmetric quantum mechanics: concepts and realizations. *J. Phys. A*, 45(50):503001, 62 pp., 2012, doi: 10.1088/1751-8113/45/50/503001.
- [7] A. A. Andrianov, M. V. Ioffe, V. P. Spiridonov, L. Vinet. Parasupersymmetry and truncated supersymmetry in quantum mechanics. *Phys. Lett. B*, 272(3-4):297–304, 1991, doi: 10.1016/0370-2693(91)91834-I.
- [8] B. K. Bagchi. *Supersymmetry in quantum and classical mechanics*, volume 116 of *Chapman & Hall/CRC Monographs and Surveys in Pure and Applied Mathematics*. Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, FL, 2001.
- [9] P. Basarab-Horwath, V. Lahno, R. Zhdanov. The structure of Lie algebras and the classification problem for partial differential equations. *Acta Appl. Math.*, 69(1):43–94, 2001, doi: 10.1023/A:1012667617936.
- [10] J. Beckers, N. Debergh. Parastatistics and supersymmetry in quantum mechanics. *Nuclear Phys. B*, 340(2-3):767–776, 1990, doi: 10.1016/0550-3213(90)90469-T.
- [11] J. Beckers, N. Debergh, A. G. Nikitin. On pararelativistic quantum oscillators. *J. Math. Phys.*, 33(10):3387–3392, 1992, doi: 10.1063/1.529886.
- [12] J. Beckers, N. Debergh, A. G. Nikitin. On supersymmetries in nonrelativistic quantum mechanics. *J. Math. Phys.*, 33(1):152–160, 1992, doi: 10.1063/1.529954.
- [13] J. Beckers, N. Debergh, A. G. Nikitin. More on parasupersymmetries of the Schrödinger equation. *Modern Phys. Lett. A*, 8(5):435–444, 1993, doi: 10.1142/S0217732393000453.
- [14] J. Beckers, N. Debergh, A. G. Nikitin. On parasupersymmetries and relativistic descriptions for spin one particles. I. The free context. *Fortschr. Phys.*, 43(1):67–80, 1995, doi: 10.1002/prop.2190430104.

- [15] J. Beckers, N. Debergh, A. G. Nikitin. On parasupersymmetries and relativistic descriptions for spin one particles. II. The interacting context with (electro)magnetic fields. *Fortschr. Phys.*, 43(1):81–96, 1995, doi: 10.1002/prop.2190430105.
- [16] J. Beckers, N. Debergh, A. G. Nikitin. Reducibility of supersymmetric quantum mechanics. *Internat. J. Theoret. Phys.*, 36(9):1991–2003, 1997, doi: 10.1007/BF02435955.
- [17] C. P. Boyer. The maximal ‘kinematical’ invariance group for an arbitrary potential. *Helv. Phys. Acta*, 47:589–605, 1974.
- [18] F. Cooper, A. Khare, U. Sukhatme. Supersymmetry and quantum mechanics. *Phys. Rep.*, 251(5-6):267–385, 1995, doi: 10.1016/0370-1573(94)00080-M.
- [19] F. Cooper, A. Khare, U. Sukhatme. Supersymmetry and quantum mechanics. *Phys. Rep.*, 251(5-6):267–385, 1995, doi: 10.1016/0370-1573(94)00080-M.
- [20] F. Correa, V. Jakubský, M. S. Plyushchay. Finite-gap systems, tri-supersymmetry and self-isospectrality. *J. Phys. A*, 41(48):485303, 35 pages, 2008, doi: 10.1088/1751-8113/41/48/485303.
- [21] J. David, C. Fernández. Supersymmetric quantum mechanics. *AIP Conf. Proc.*, 1287:3–36, 2010, doi: 10.1063/1.3507423.
- [22] R. de Lima Rodrigues, V. B. Bezerra, A. N. Vaidyac. An application of supersymmetric quantum mechanics to a planar physical system. *Phys. Lett. A*, 287(1-2):45–49, 2001, doi: 10.1016/S0375-9601(01)00450-9.
- [23] E. Ferraro, A. Messina, A. G. Nikitin. Exactly solvable relativistic model with the anomalous interaction. *Phys. Rev. A*, 81(4):042108, 8 pages, 2010, doi: 10.1103/PhysRevA.81.042108.
- [24] M. Flato, P. Hillion. Poincaré-like group associated with neutrino physics, and some applications. *Phys. Rev. D*, 1:1667–1673, 1970, doi: 10.1103/PhysRevD.1.1667.
- [25] T. Fukui. Shape-invariant potentials for systems with multi-component wave functions. *Phys. Lett. A*, 178(1-2):1–6, 1993, doi: 10.1016/0375-9601(93)90717-E.
- [26] V. I. Fushchich, I. F. Barannik, A. F. Barannik. *Subgroup analysis of Galilei and Poincaré groups and reduction of nonlinear equations*. Naukova Dumka, Kiev, 1991. extended English version of this monographs which includes subalgebras of algebra $\tilde{e}(3)$ is unpublished.
- [27] W. I. Fushchich, A. G. Nikitin. On the new invariance groups of the Dirac and Kemmer–Duffin–Petiau equations. *Lett. Nuovo Cimento*, 19(9):347–349, 1977, doi: 10.1007/BF02748547.
- [28] W. I. Fushchich, A. G. Nikitin. On the new invariance algebras and superalgebras of relativistic wave equations. *J. Phys. A*, 20(3):537–549, 1987, doi: 10.1088/0305-4470/20/3/016.
- [29] W. I. Fushchich, A. G. Nikitin. The complete sets of conservation laws for the electromagnetic field. *J. Phys. A*, 25(5):L231–L233, 1992, doi: 10.1088/0305-4470/25/1/026.
- [30] W. I. Fushchich, A. G. Nikitin. *Symmetries of equations of quantum mechanics*. Allerton Press, Inc., New York, 1994.
- [31] W. I. Fushchich, A. G. Nikitin. Higher symmetries and exact solutions of linear and nonlinear Schrödinger equation. *J. Math. Phys.*, 38(11):5944–5959, 1997, doi: 10.1063/1.532180.
- [32] L. Gendenshtein. Derivation of exact spectra of the schrödinger equation by means of supersymmetry. *JETP Lett.*, 38:356–359, 1983.
- [33] L. E. Gendenshtein, I. V. Krive. Supersymmetry in quantum mechanics. *Soviet Phys. Uspekhi*, 28(8):645–666, 1985, doi: 10.1070/PU1985v028n08ABEH003882.
- [34] L. E. Gendenshtein, I. V. Krive. Supersymmetry in quantum mechanics. *Soviet Phys. Uspekhi*, 28(8):645–666, 1985, doi: 10.1070/PU1985v028n08ABEH003882.

- [35] J.-L. Gervais, B. Sakita. Field theory interpretation of supergauges in dual models. *Nuclear Phys. B*, 34:632–639, 1971, doi: 10.1016/0550-3213(71)90351-8.
- [36] Yu. A. Gol’fand, E. P. Lichtman. Extension of the algebra of poincaré group generators and violation of p invariance. *Sov. Phys. JETP*, 13:323–325, 1971.
- [37] M. V. Ioffe. Supersymmetrical separation of variables in two-dimensional quantum mechanics. *SIGMA*, 6:075, 10 pp., 2010, doi: 10.3842/SIGMA.2010.075.
- [38] M. V. Ioffe, S. Kuru, J. Negro, L. M. Nieto. SUSY approach to Pauli Hamiltonians with an axial symmetry. *J. Phys. A*, 39(22):6987–7001, 2006, doi: 10.1088/0305-4470/39/22/013.
- [39] A. Joseph. Realizations of Lie algebras from the canonical anticommutation relations. *Nuovo Cimento A*, 8:217–234, 1972, doi: 10.1007/BF02732650.
- [40] G. Junker. *Supersymmetric methods in quantum and statistical physics*. Texts and Monographs in Physics. Springer-Verlag, Berlin, 1996, doi: 10.1007/978-3-642-61194-0.
- [41] J. Lipkin. A possible higher symmetry scheme for strongly interacting particles. *Phys. Lett.*, 9(2):203–204, 1964, doi: 10.1016/0031-9163(64)90145-3.
- [42] A. Marchesiello, L. Šnobl. An infinite family of maximally superintegrable systems in a magnetic field with higher order integrals. *SIGMA*, 14:092, 11 pp., 2018, doi: 10.3842/SIGMA.2018.092.
- [43] L. Mardoyan. The generalized MIC-Kepler system. *J. Math. Phys.*, 44(11):4981–4987, 2003, doi: 10.1063/1.1619205.
- [44] I. Marquette. Generalized MICZ-Kepler system, duality, polynomial, and deformed oscillator algebras. *J. Math. Phys.*, 51(10):102105, 10 pp., 2010, doi: 10.1063/1.3496900.
- [45] H. Miyazawa. Spinor currents and symmetries of baryons and mesons. *Phys. Rev.*, 170(4):1586–1590, 1968, doi: 10.1103/PhysRev.170.1586.
- [46] R. A. Morrow, K. R. Brownstein. Model effective-mass Hamiltonians for abrupt heterojunctions and the associated wave-function-matching conditions. *Phys. Rev. B*, 30(2):678–680, 1984, doi: 10.1103/PhysRevB.30.680.
- [47] G. M. Mubarakzjanov. Classification of real structures of Lie algebras of fifth order. *Izv. Vysh. Uchebn. Zaved. Matematika*, 1963(3 (34)):99–106, 1963.
- [48] M. A. Naimark. *Linear representations of the Lorentz group*. The Macmillan Co., New York, 1964.
- [49] A. Neveu, J. M. Schwartz. Factorizable dual model of pions. *Nuclear Phys. B*, 31(1):86–112, 1971, doi: 10.1016/0550-3213(71)90448-2.
- [50] U. Niederer. The group theoretical equivalence of the free particle, the harmonic oscillator and the free fall. In *Proceedings of the 2nd International Colloquium on Group Theoretical Methods in Physics*. University of Nijmegen, The Netherlands, 1973.
- [51] J. Niederle, A. G. Nikitin. Extended supersymmetries for the Schrödinger–Pauli equation. *J. Math. Phys.*, 40(3):1280–1293, 1999, doi: 10.1063/1.532801.
- [52] A. G. Nikitin. Generalized Killing tensors of arbitrary rank and order. *Ukrain. Math. J.*, 43(6):734–743, 1991, doi: 10.1007/BF01058941.
- [53] A. G. Nikitin. Algebras of discrete symmetries and supersymmetries for the Schrödinger–Pauli equation. *Internat. J. Modern Phys. A*, 14(6):885–897, 1999, doi: 10.1142/S0217751X99000439.
- [54] A. G. Nikitin. Higher-order symmetry operators for Schrödinger equation. In *Superintegrability in Classical and Quantum Systems*, volume 37 of *CRM Proc. Lecture Notes*, pages 137–144. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2004.
- [55] A. G. Nikitin. Group classification of systems of non-linear reaction-diffusion equations with general diffusion matrix. I. Generalized Ginzburg–Landau equations. *J. Math. Anal. Appl.*, 324(1):615–628, 2006, doi: 10.1016/j.jmaa.2005.12.022.

- [56] A. G. Nikitin. Group classification of systems of nonlinear reaction-diffusion equations with triangular diffusion matrix. *Ukrainian Mathematical Journal*, 59(3):439–458, March 2007, doi: 10.1007/s11253-007-0028-x.
- [57] A. G. Nikitin. Integrability and supersymmetry of Schrödinger–Pauli equations for neutral particles. *J. Math. Phys.*, 53(12):122103, 14 pp., 2012, doi: 10.1063/1.4768464.
- [58] A. G. Nikitin. Matrix superpotentials and superintegrable systems for arbitrary spin. *J. Phys. A*, 45(22):225205, 13 pp., 2012, doi: 10.1088/1751-8113/45/22/225205.
- [59] A. G. Nikitin. Laplace–Runge–Lenz vector for arbitrary spin. *J. Math. Phys.*, 54(12):123506, 14 pp., 2013, doi: 10.1063/1.4843435.
- [60] A. G. Nikitin. Superintegrable and supersymmetric systems of Schrödinger equations. In *Group Analysis of Differential Equations and Integrable Systems*, pages 155–169. University of Cyprus, Nicosia, 2013.
- [61] A. G. Nikitin. Superintegrable systems with arbitrary spin. *Ukr. J. Phys.*, 58:1046–1054, 2013, doi: 10.15407/ujpe58.11.1046.
- [62] A. G. Nikitin. Laplace–Runge–Lenz vector with spin in any dimension. *J. Phys. A*, 47(37):375201, 16 pp., 2014, doi: 10.1088/1751-8113/47/37/375201.
- [63] A. G. Nikitin. Superintegrable and shape invariant systems with position dependent mass. *J. Phys. A*, 48(33):335201, 24 pp., 2015, doi: 10.1088/1751-8113/48/33/335201.
- [64] A. G. Nikitin. Kinematical invariance groups of the 3d Schrödinger equations with position dependent masses. *J. Math. Phys.*, 58(8):083508, 16 pp., 2017, doi: 10.1063/1.4986171.
- [65] A. G. Nikitin. Symmetries of Schrödinger equation with scalar and vector potentials. *J. Phys. A*, 53(45):455202, 23 pp., 2020, doi: 10.1088/1751-8121/abb956.
- [66] A. G. Nikitin. Symmetries of the Schrödinger–Pauli equation for neutral particles, 2020. arXiv:2004.08305.
- [67] A. G. Nikitin, Yu. Karadzhov. Enhanced classification of matrix superpotentials. *J. Phys. A*, 44(44):445202, 24 pp., 2011, doi: 10.1088/1751-8113/44/44/445202.
- [68] A. G. Nikitin, Yu. Karadzhov. Matrix superpotentials. *J. Phys. A*, 44(30):305204, 21 pp., 2011, doi: 10.1088/1751-8113/44/30/305204.
- [69] A. G. Nikitin, R. O. Popovych. Group classification of nonlinear Schrödinger equations. *Ukrainian Math. J.*, 53(8):1255–1265, 2001, doi: 10.1023/A:1013347626895.
- [70] A. G. Nikitin, T. M. Zasadko. Superintegrable systems with position dependent mass. *J. Math. Phys.*, 56(4):042101, 13 pp., 2015, doi: 10.1063/1.4908107.
- [71] A. G. Nikitin, T. M. Zasadko. Group classification of Schrödinger equations with position dependent mass. *J. Phys. A*, 49(36):365204, 17 pp., 2016, doi: 10.1088/1751-8113/49/36/365204.
- [72] V. Yu. Novokshenov. Generalized Hermite polynomials and monodromy-free Schrödinger operators. *SIGMA*, 14:106, 13 pp., 2018, doi: 10.3842/SIGMA.2018.106.
- [73] F. W. J. Olver. *Asymptotics and special functions*. Computer Science and Applied Mathematics. Academic Press, New York – London, 1974.
- [74] L. V. Ovsiannikov. *Group analysis of differential equations*. Academic Press, Inc., New York – London, 1982.
- [75] J. Patera, P. Winternitz, H. Zassenhaus. Quantum numbers for particles in de Sitter space. *J. Math. Phys.*, 17(5):717–728, 1976, doi: 10.1063/1.522969.
- [76] R. O. Popovych, V. M. Boyko, M. O. Nesterenko, M. W. Lutfullin. Realizations of real low-dimensional Lie algebras. *J. Phys. A*, 36(26):7337–7360, 2003, doi: 10.1088/0305-4470/36/26/309.
- [77] G. P. Pron’ko, Y. G. Stroganov. A new example of a quantum mechanical problem with a hidden symmetry. *Sov. Phys. JETP*, 45(3):1075, 1977.

- [78] C. Quesne. Quadratic algebra approach to an exactly solvable position-dependent mass Schrödinger equation in two dimensions. *SIGMA*, 3:067, 14 pp., 2007, doi: 10.3842/SIGMA.2007.067.
- [79] V. A. Rubakov, V. P. Spiridonov. Parasupersymmetric quantum mechanics. *Modern Phys. Lett. A*, 3(14):1337–1347, 1988, doi: 10.1142/S0217732388001616.
- [80] J. Schwinger. Particles and sources. *Phys. Rev.*, 152(4):1219–1226, 1966, doi: 10.1103/PhysRev.152.1219.
- [81] G. L. Stavraki. On a generalization of Lie algebra. In *High Energy Physics and the Theory of Elementary Particles*, page 296. Naukova Dumka, Kiev, 1966.
- [82] T. Tanaka. Type A \mathcal{N} -fold supersymmetry and generalized Bender–Dunne polynomials. *Nuclear Phys. B*, 662(3):413–446, 2003, doi: 10.1016/S0550-3213(03)00341-9.
- [83] V. M. Tkachuk, P. Roy. Supersymmetry of a spin $\frac{1}{2}$ particle on the real line. *Phys. Lett. A*, 263(4-6):245–249, 1999, doi: 10.1016/S0375-9601(99)00776-8.
- [84] V. M. Tkachuk, P. Roy. Motion of a spin- $\frac{1}{2}$ particle in shape invariant scalar and magnetic fields. *J. Phys. A*, 33(22):4159–4167, 2000, doi: 10.1088/0305-4470/33/22/317.
- [85] V. M. Tkachuk, S. I. Vakarchuk. $\mathcal{N} = 4$ supersymmetry of electron in the magnetic field. *J. Phys. Stud.*, 1(1):39–41, 1996.
- [86] D. V. Volkov, V. P. Akulov. Is the neutrino a goldstone particle? *Phys. Lett. B*, 46(1):109–110, 1973, doi: 10.1016/0370-2693(73)90490-5.
- [87] O. von Roos. Position-dependent effective masses in semiconductor theory. *Phys. Rev. B*, 27(12):7547–7552, 1983, doi: 10.1103/PhysRevB.27.7547.
- [88] L. Šnobl, P. Winternitz. *Classification and identification of Lie algebras*, volume 33 of *CRM Monograph Series*. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2014, doi: 10.1090/crmm/033.
- [89] J. Wess, B. Zumino. Supergauge transformations in four dimensions. *Nuclear Phys. B*, 70:39–50, 1974, doi: 10.1016/0550-3213(74)90355-1.
- [90] P. Winternitz. Superintegrability with second- and third-order integrals of motion. *Phys. Atomic Nuclei*, 72:875–882, 2009, doi: 10.1134/S1063778809050184.
- [91] E. Witten. Dynamical breaking of supersymmetry. *Nuclear Phys. B*, 188(3):513–554, 1981, doi: 10.1016/0550-3213(81)90006-7.
- [92] E. Witten. Constraints on supersymmetry breaking. *Nuclear Phys. B*, 202(2):253–316, 1982, doi: 10.1016/0550-3213(82)90071-2.

A. G. Nikitin

INSTITUTE OF MATHEMATICS, NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF UKRAINE

Email: nikitin@imath.kiev.ua

ORCID: orcid.org/0000-0001-7349-4708

Псевдодиференціальні рівняння та α -стійкі випадкові процеси

М. М. Осипчук, М. І. Портенко

Abstract. The notion of a single-layer potential for a class of pseudodifferential equations associated with rotationally invariant α -stable stochastic processes is introduced. A certain analogy to the classical theorem on the jump of the conormal derivative of a single-layer potential is established. This result makes it possible to construct fundamental solutions of some initial-boundary value problems for the equations mentioned above. A probabilistic interpretation of those solutions is presented. The results of investigations on the topic published by the authors during 2014–2018 are expounded in this article in a systematized and modified form.

Анотація. Поняття потенціалу простого шару, що є важливим в теорії диференціальних рівнянь з частинними похідними, переноситься на псевдодиференціальні рівняння параболічного типу, асоційовані з ротатійно інваріантними α -стійкими випадковими процесами в евклідових просторах. Для таких потенціалів доводиться аналог класичної теореми про стрибок конормальної похідної потенціалу простого шару. З допомогою цього результату будуються фундаментальні розв'язки певних початково-крайових задач для псевдодиференціальних рівнянь згаданого типу та виясняється їх ймовірнісний сенс. Стаття носить оглядовий характер. В ній в систематизованій та модифікованій формі викладені результати, опубліковані авторами цієї статті протягом 2014–2018 рр.

2010 Mathematics Subject Classification: 35S11, 60G52

УДК 519.21, 517.95

Ключові слова: ротатійно інваріантний стійкий випадковий процес, псевдодиференціальне рівняння, потенціал простого шару, теорема про стрибок, початково-крайова задача

1. ВСТУП

Псевдодиференціальні рівняння є об'єктом численних публікацій математиків найрізноманітніших спеціалізацій (див., наприклад, книгу [5] і наведений там список літератури по темі). Для авторів цієї статті, як математиків-ймовірнісників, найближчими є ті роботи (наприклад, тритомник [6]), які присвячені псевдодиференціальним рівнянням параболічного типу, що відповідають певним класам випадкових процесів. Серед таких найпростішими є ротаційно інваріантні α -стійкі процеси. Їх роль у відповідній теорії потенціалу є такою ж, яку відіграє вінерів процес¹ в класичній теорії.

Однією з найважливіших (і найкрасивіших!) в класичній теорії є теорема про стрибок конормальної похідної потенціалу простого шару. Саме вона дає змогу будувати розв'язки початково-крайових задач типу задачі Неймана або змішаної крайової задачі (див., наприклад, книги [14, Гл. 4], [20, Гл. V]).

В наших роботах [8, 9, 16, 17] побудовано щось подібне до теорії потенціалу простого шару в ситуації, коли замість оператора Лапласа, пов'язаного з вінеровим процесом, розглянуто псевдодиференціальний оператор, що асоціюється з ротаційно інваріантним α -стійким випадковим процесом в d -вимірному евклідовому просторі \mathbb{R}^d , $d \geq 1$. В тих роботах ми вказали оператор, який в новій теорії відіграє роль градієнта в класиці і який фігурує в нашій теоремі про стрибок, що є аналогом згаданої вище класичної теореми. Також в тих роботах ми застосували теорему про стрибок до побудови розв'язків певних початково-крайових задач для згаданих псевдодиференціальних рівнянь.

Ця наша стаття є оглядовою. Її метою є подати в цілісному систематизованому викладі результати наших досліджень. Більшість тверджень цієї статті супроводжуються доведеннями, які є модифікованими в порівнянні з опублікованими раніше. В цих доведеннях часто доводиться оцінювати (зазвичай зверху) різноманітні вирази. Ми позначаємо літерою C (іноді з певними значками) сталі, значення яких не є важливими для даного конкретного викладу. Сподіваємось, це не буде створювати читачеві незручностей.

Зупинимось детальніше на тих рівняннях та початково-крайових задачах для них, з якими будемо мати справу. Нехай $(x(t), \mathcal{M}_t, \mathbb{P}_x)$ (або коротше $(x(t))_{t \geq 0}$) – ротаційно інваріантний α -стійкий випадковий процес в \mathbb{R}^d (ми використовуємо звичайні позначення для скалярного добутку (\cdot, \cdot) та норми $|\cdot|$ елементів цього простору). Позначимо через \mathbf{A} генератор (інфінітезимальний оператор) процесу $(x(t))_{t \geq 0}$. Оператор \mathbf{A}

¹Його ще називають процесом броунівського руху.

може бути заданий своїм символом $(-c|\xi|^\alpha)_{\xi \in \mathbb{R}^d}$. Тут $\alpha \in (0, 2]$, $c > 0$ – деякі сталі, що будуть вважатися фіксованими впродовж всієї роботи².

З процесом $(x(t))_{t \geq 0}$ пов'язане рівняння

$$\frac{\partial}{\partial t} u(t, x) = \mathbf{A}u(t, \cdot)(x), \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R}^d, \quad (1.1)$$

яке у випадку $\alpha \in (1, 2)$ є псевдодиференціальним, а у випадку $\alpha = 2$ – диференціальним рівнянням параболічного типу.

Зрозуміло, що коли $\alpha = 2$ (цей випадок ми вважаємо класичним), справджується рівність $\mathbf{A} = c\Delta$, в якій Δ – оператор Лапласа. В цій ситуації випадковий процес $(x(t))_{x \in \mathbb{R}^d}$ є вінеровим процесом, а відповідне рівняння є рівнянням теплопровідності. Надалі ми не будемо розглядати цей достатньо вивчений випадок, а здебільшого обмежимося розглядом ситуації $\alpha \in (1, 2)$ (хоча час від часу будемо для порівняння згадувати класичний випадок $\alpha = 2$). Іноді будуть формулюватись результати, що справджуються і для $0 < \alpha \leq 1$.

Дія оператора \mathbf{A} на досить гладку (принаймні з ліпшицевим градієнтом) обмежену разом зі своїми похідними функцію $(\varphi(x))_{x \in \mathbb{R}^d}$ визначається (ще раз зафіксуємо: у випадку $\alpha \in (1, 2)$) інтегралом

$$\mathbf{A}\varphi(x) = cq_\alpha \int_{\mathbb{R}^d} [\varphi(x+y) - \varphi(x) - (\nabla\varphi(x), y)] |y|^{-d-\alpha} dy,$$

де $q_\alpha = \frac{\Gamma(\alpha+1)\Gamma((d+\alpha)/2)\sin(\pi\alpha/2)}{\pi^{(d+1)/2}\Gamma((\alpha+1)/2)}$.

Визначимо оператор \mathbf{B} символом $(i|\xi|^{\alpha-2}\xi)_{\xi \in \mathbb{R}^d}$. Цей оператор переводить скалярні функції у векторні. Його дія на обмежену ліпшицеву функцію $(\varphi(x))_{x \in \mathbb{R}^d}$ визначається наступною формулою:

$$\mathbf{B}\varphi(x) = \frac{q_\alpha}{\alpha} \int_{\mathbb{R}^d} (\varphi(x+z) - \varphi(x)) |z|^{-d-\alpha} z dz.$$

Легко перевірити, що оператори \mathbf{A} і \mathbf{B} пов'язані між собою співвідношенням $\mathbf{A} = c \operatorname{div}(\mathbf{B})$, в якому div означає оператор дивергенції. Таким чином, оператор \mathbf{B} є деяким аналогом градієнта. Як стане зрозуміло далі, ця аналогія є досить повною.

Нехай S – деяка поверхня в \mathbb{R}^d ($(d-1)$ -вимірний многовид), яка розділяє множину $\mathbb{R}^d \setminus S$ на дві відкриті підмножини: внутрішню D_- та зовнішню D_+ таким чином, що $\mathbb{R}^d = D_- \cup S \cup D_+$. В цій статті ми обмежимося розглядом тільки таких поверхонь. Поняття *внутрішня* та *зовнішня* тут є умовними і мають свій сенс тільки тоді, коли

²Інфінітезимальний оператор визначається не лише своєю дією, а і областю визначення. Деякий опис області визначення оператора \mathbf{A} в одновимірному випадку є в статті [10]

поверхня обмежена і замкнена. Будемо припускати, що поверхня S настільки гладка, що в кожній її точці існує дотична до неї гіперплощина. Позначимо через $\nu(x)$ орт зовнішньої нормалі (направлений в сторону множини D_+) до поверхні S в точці $x \in S$.

При формулюванні граничних умов для рівняння (1.1) слід враховувати поведінку траєкторій процесу $(x(t))_{t \geq 0}$, який у випадку $1 < \alpha < 2$, стартуючи з однієї з множин D_- чи D_+ , перш ніж потрапити на поверхню S , відвідує іншу з цих множин. Тобто, множина $\mathbb{R}^d \setminus S = D_- \cup D_+$ виявляється “зв’язною” відносно траєкторій цього процесу, а поверхня S є її границею.

Таким чином, початково-крайову задачу для рівняння (1.1) будемо формулювати так: для заданих функцій $\varphi \in C_b(\mathbb{R}^d)$ (так ми позначаємо банахів простір обмежених неперервних заданих на \mathbb{R}^d дійснозначних функцій з нормою $\|f\| = \max_{x \in \mathbb{R}^d} |f(x)|$) та $(q(x))_{x \in S}$, $(r(x))_{x \in S}$ обмежених і неперервних (другу з них будемо вважати невід’ємною) знайти таку неперервну дійснозначну функцію $u(t, x)_{t > 0, x \in \mathbb{R}^d}$, яка задовольняє рівняння

$$\frac{\partial}{\partial t} u(t, x) = \mathbf{A}u(t, \cdot)(x), \quad t > 0, x \in \mathbb{R}^d \setminus S, \quad (1.2)$$

для неї виконується початкова умова

$$u(0+, x) = \varphi(x), \quad x \in \mathbb{R}^d, \quad (1.3)$$

і гранична умова: при всіх $t > 0$, $x \in S$ справджується рівність

$$\left(1 + \frac{q(x)}{2}\right) \mathbf{B}_{\nu(x)} u(t, \cdot)(x+) - \left(1 - \frac{q(x)}{2}\right) \mathbf{B}_{\nu(x)} u(t, \cdot)(x-) = r(x)u(t, x), \quad (1.4)$$

де $\mathbf{B}_{\nu(x)} = (c\nu(x), \mathbf{B})$, а $f(x+)$ чи $f(x-)$ означає недотичну границю функції f в точці $x \in S$ з боку множин D_+ чи D_- , відповідно. Подібно до теорії диференціальних рівнянь в частинних похідних другого порядку сформульовану граничну умову називатимемо змішаною (або третьою). В частковому випадку $r(x) \equiv 0$ маємо другу (типу Неймана) граничну умову. Якщо $q(x) \equiv 0$, то таку задачу називатимемо симетричною.

Як вже зазначалось, при $\alpha = 2$ процес $(x(t))_{t \geq 0}$ є вінеровим процесом. Його траєкторії неперервні і тому є сенс розглядати як внутрішню, так і зовнішню початково-крайові задачі для рівняння (1.1), яке в цьому випадку є рівнянням теплопровідності

$$\frac{\partial}{\partial t} u(t, x) = c\Delta u(t, \cdot)(x).$$

Сформульована початково-крайова задача для цього рівняння зазвичай відноситься до задач спряження. Як легко зрозуміти, в цьому випадку $\mathbf{B} = \nabla$ і оператор $\mathbf{B}_{\nu(x)}$, $x \in S$ стає оператором конормальної похідної. Розв'язанню таких задач (зватимемо їх класичними) присвячено велику кількість публікацій (див., наприклад, [14, 20] і цитовану там літературу).

Цікаво відзначити, що навіть у випадку $\alpha = 2$ розв'язки початково-крайових задач (1.2)–(1.4) не завжди пов'язані з певними випадковими процесами. Це буде так, якщо виконується умова $|q(x)| \leq 2$. В цьому випадку задача (1.2)–(1.4) породжує випадковий процес, який можна назвати багатовимірним аналогом асиметричного вінерового процесу (див. [18]) з убиванням в точках поверхні S з інтенсивністю $(r(x))_{x \in S}$. Якщо ж ця умова на функцію q не виконується, то наша задача породжує лише псевдопроцес (а не процес) в розумінні роботи [2].

Ситуація є кардинально іншою у випадку $\alpha \in (1, 2)$: розв'язок несиметричної задачі (тобто, коли $q(x) \not\equiv 0$) завжди породжує лише псевдопроцес, а не випадковий процес. Це впливає з того, що фундаментальний розв'язок відповідної початково-крайової задачі не є невід'ємною функцією. Вперше це було помічено в одновимірному випадку в роботі [15].

Що ж стосується загальної умови (1.4) в симетричному випадку, то задача (1.2)–(1.4) породжує випадковий процес, який є ротаційно інваріантним α -стійким процесом, що убивається в точках $x \in S$ з інтенсивністю $r(x)$ (див. пункт 4.2.1, де побудовано щільність ймовірності переходу цього процесу). В цьому випадку поверхню S можна розглядати, як еластичну мембрану для ротаційно інваріантного α -стійкого процесу по аналогії з тим, як в теорії дифузійних процесів зветься поверхні з подібними властивостями.

Слід зауважити ще, що в роботі [10] в одновимірному випадку побудовано теорію симетричних α -стійких процесів на інтервалі або на промені з граничними умовами, що відрізняються від наших. Ці умови там є аналогічними загальновідомим умовам Феллера-Вентцеля в теорії дифузійних процесів, в яких одновимірний оператор диференціювання замінено оператором взяття локальної дробової похідної порядку $\frac{\alpha}{2}$ в граничних точках.

Структура статті така. Розділ 2 містить деякі допоміжні результати авторів та інших дослідників, необхідні для розуміння основної частини статті. В третьому розділі будується теорія потенціалу простого шару для псевдодиференціального рівняння (1.1). Важливу роль в цій теорії відіграє означений вище оператор \mathbf{B} . В останньому, четвертому, розділі розглядаються початково-крайові задачі (друга, третя, в тому

числі і симетрична). Там також обговорюється питання ймовірнісної інтерпретації побудованих розв'язків цих задач.

Матеріал цієї статті є частиною монографії, яку автори готують до друку.

2. ДОПОМІЖНІ РЕЗУЛЬТАТИ

2.1. Щільність ймовірності переходу ротаційно інваріантного α -стійкого процесу. Зафіксувавши $\alpha \in (0, 2)$ та $c > 0$, розглянемо дійснозначну функцію $(g(t, x, y))_{t>0, x \in \mathbb{R}^d, y \in \mathbb{R}^d}$, яка задається рівністю

$$g(t, x, y) = (2\pi)^{-d} \int_{\mathbb{R}^d} \exp\{i(x - y, \xi) - ct|\xi|^\alpha\} d\xi. \quad (2.1)$$

З властивостей функції g зацентруємо увагу на таких:

Властивість 2.1 (див. [5, 13], а також [8, 16]). *Існують сталі N та N' , такі, що $0 < N' < N$ і при всіх $t > 0$, $x \in \mathbb{R}^d$ та $y \in \mathbb{R}^d$ виконуються нерівності*

$$N' \frac{t}{(t^{1/\alpha} + |y - x|)^{d+\alpha}} \leq g(t, x, y) \leq N \frac{t}{(t^{1/\alpha} + |y - x|)^{d+\alpha}}. \quad (2.2)$$

Властивість 2.2. *Функція g задовольняє рівняння Колмогорова-Чепмена:*

$$g(s + t, x, y) = \int_{\mathbb{R}^d} g(s, x, z)g(t, z, y) dz$$

при всіх $s > 0$, $t > 0$, $x \in \mathbb{R}^d$ та $y \in \mathbb{R}^d$.

Властивість 2.3. *При всіх $t > 0$ та $x \in \mathbb{R}^d$ виконується рівність*

$$\int_{\mathbb{R}^d} g(t, x, y) dy = 1.$$

Властивість 2.4. *Функція*

$$\left(\int_{\mathbb{R}^d} g(t, x, y) \varphi(y) dy \right)_{x \in \mathbb{R}^d}$$

при фіксованих $t > 0$ та $\varphi \in \hat{C}(\mathbb{R}^d)$ також є елементом простору $\hat{C}(\mathbb{R}^d)$ (нагадаємо, що $\hat{C}(\mathbb{R}^d)$ складається з таких функцій $\varphi \in C_b(\mathbb{R}^d)$, для яких множина $\{x \in \mathbb{R}^d : |\varphi(x)| \geq \varepsilon\}$ є компактом в \mathbb{R}^d при будь-якому $\varepsilon > 0$).

Ці властивості показують, що функція g є щільністю ймовірності переходу деякого процесу Маркова. Нескладно зрозуміти (див. нижче), що $\frac{\partial}{\partial t} g(t, x, y) = \mathbf{A}g(t, \cdot, y)(x)$, $t > 0$, $x \in \mathbb{R}^d$, $y \in \mathbb{R}^d$. Тобто,

функція g є щільністю ймовірності переходу введеного у вступі процесу $(x(t))_{t \geq 0}$. Крім того, вона є фундаментальним розв'язком задачі Коші для рівняння (1.1), оскільки при кожному $\varphi \in C_b(\mathbb{R}^d)$ функція $u(t, x) = \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(y)g(t, x, y) dy = \mathbb{E}_x \varphi(x(t))$ є розв'язком задачі Коші для рівняння (1.1) з початковою умовою (1.3) (див. нижче п. 2.3.1).

Наступне твердження свідчить про те, що ця ймовірність переходу є рівномірно стохастично неперервною при $\alpha < 2$. Якщо ж $\alpha = 2$, то функція (2.1) має явне представлення

$$g(t, x, y) = (4\pi ct)^{-d/2} \exp \left\{ -\frac{|y-x|^2}{4ct} \right\}, \quad t > 0, x \in \mathbb{R}^d, y \in \mathbb{R}^d \quad (2.3)$$

і для неї виконується умова існування неперервної модифікації відповідного процесу Маркова.

Для доповнення в \mathbb{R}^d до замкненої кулі $B_r(x)$ з центром в точці $x \in \mathbb{R}^d$ радіусу $r > 0$ будемо використовувати звичне позначення $B_r(x)^c$.

Лема 2.1. (а) При $\alpha \in (0, 2)$ виконується наступне: яким би не було $\varepsilon > 0$,

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^d} \int_{B_\varepsilon(x)^c} g(t, x, y) dy \rightarrow 0,$$

коли $t \rightarrow 0+$.

(б) Якщо ж $\alpha = 2$, то при фіксованому $\varepsilon > 0$

$$t^{-1} \sup_{x \in \mathbb{R}^d} \int_{B_\varepsilon(x)^c} g(t, x, y) dy \rightarrow 0,$$

коли $t \rightarrow 0+$.

Справедливість цих тверджень легко випливає з правої нерівності в (2.2) та представлення (2.3).

Тепер, пославшись на теорему 3.14 з [12], можемо стверджувати, що існує "цілком пристойний" процес Маркова в \mathbb{R}^d , для якого функція g є щільністю ймовірності переходу (відносно лебегової міри в \mathbb{R}^d).

Теорема 2.1. При $\alpha \in (0, 2)$ існує такий стандартний процес Маркова $(x(t), \mathcal{M}_t, \mathbb{P}_x)$ в \mathbb{R}^d , для якого

$$\mathbb{P}_x(\{x(t) \in \Gamma\}) = \int_{\Gamma} g(t, x, y) dy \quad (2.4)$$

при всіх $t > 0$, $x \in \mathbb{R}^d$ та борельових множинах $\Gamma \subset \mathbb{R}^d$.

Термін "стандартний" в цьому твердженні означає, що:

- (і) траєкторії такого процесу (тобто, функції $(x(t))_{t \geq 0}$) є неперервними справа функціями без розривів другого роду;

- (ii) при всіх $t \geq 0$ виконується умова $\overline{\mathcal{M}}_{t+} = \mathcal{M}_t$, де $\overline{\mathcal{M}}_t$ означає поповнення σ -алгебри \mathcal{M}_t по системі мір $(\mathbb{P}_x)_{x \in \mathbb{R}^d}$, а

$$\overline{\mathcal{M}}_{t+} = \bigcap_{\varepsilon > 0} \overline{\mathcal{M}}_{t+\varepsilon};$$

- (iii) процес є квазінеперервним зліва, тобто, якщо послідовність моментів зупинки $(\tau_n(\omega))_{n \geq 1}$ на деякій множині $\tilde{\Omega} \in \bigvee_{t \geq 0} \mathcal{M}_t$, монотонно зростаючи, збігається до $\tau(\omega) < +\infty$ при $\omega \in \tilde{\Omega}$, то $\lim_{n \rightarrow \infty} x(\tau_n(\omega), \omega) = x(\tau(\omega), \omega)$ \mathbb{P}_x -майже напевне на множині $\tilde{\Omega}$ для кожного $x \in \mathbb{R}^d$.

У випадку $\alpha = 2$ відповідне твердження формулюється так.

Теорема 2.2. *При $\alpha = 2$ існує такий стандартний процес Маркова $(x(t), \mathcal{M}_t, \mathbb{P}_x)$ в \mathbb{R}^d , для якого виконується (2.4), і його траєкторії є неперервними функціями.*

В цій статті ми розглядаємо саме ті процеси Маркова, існування яких гарантується в цих теоремах, і називаємо їх ротаційно інваріантними α -стійкими процесами в \mathbb{R}^d . У випадку $d = 1$ вони зватимуться симетричними α -стійкими процесами. Зауважимо, що стандартний вінерів процес в \mathbb{R}^d відповідає значенням параметрів $\alpha = 2$ та $c = \frac{1}{2}$.

Двостороння оцінка функції g наведена вище у Властивості 2.1. Нижче ми матимемо нагоду скористатись оцінками похідних (в тому числі і дробових порядків) функції g . Через \mathbf{D}_x^l для натуральних $l \geq 1$ та $x \in \mathbb{R}^d$ позначається операція взяття довільної частинної похідної порядку l за змінною x . Справедливим є таке твердження.

Властивість 2.5 (див. [5, 13]). *У випадку $0 < \alpha < 2$ існує додатня стала N_l (вона залежить лише від d, α, c і l), така, що при всіх $t > 0, x \in \mathbb{R}^d, y \in \mathbb{R}^d$ виконується нерівність*

$$|\mathbf{D}_x^l g(t, x, y)| \leq N_l \frac{t}{(t^{1/\alpha} + |y - x|)^{d+\alpha+l}}. \quad (2.5)$$

Далі, нехай $(Q_\beta(\xi))_{\xi \in \mathbb{R}^d}$ – однорідна функція порядку β , така, що задовольняє умову $|\mathbf{D}_\xi^l Q_\beta(\xi)| \leq \text{const} \cdot |\xi|^{\beta-l}$ при $\xi \neq 0$ та натуральних l . Через \mathbf{D}_x^β позначимо псевдодиференціальний оператор, символом якого є функція $(Q_\beta(\xi))_{\xi \in \mathbb{R}^d}$.

Властивість 2.6 (див. [5, 13]). *У випадку $0 < \alpha < 2$ існує додатня стала \tilde{N}_β (залежить лише від d, α, c та функції Q_β), така, що при*

всіх $t > 0$, $x \in \mathbb{R}^d$ та $y \in \mathbb{R}^d$ виконується нерівність

$$|\mathbf{D}_x^\beta g(t, x, y)| \leq \tilde{N}_\beta \frac{1}{(t^{1/\alpha} + |y - x|)^{d+\beta}}.$$

Зокрема, нерівність

$$|\mathbf{A}g(t, \cdot, y)(x)| \leq \tilde{N} \frac{1}{(t^{1/\alpha} + |y - x|)^{d+\alpha}} \tag{2.6}$$

справджується при всіх $t > 0$, $x \in \mathbb{R}^d$ та $y \in \mathbb{R}^d$ з деякою сталою $\tilde{N} > 0$, що залежить від α , d та c .

Випадковий процес $(x(t))_{t \geq 0}$ є однорідним і має властивість автомодельності. Тобто, маємо співвідношення

$$g(t, x, y) = t^{-d/\alpha} g(1, 0, (y - x)t^{-1/\alpha})$$

справедливе при всіх $t > 0$, $x \in \mathbb{R}^d$, $y \in \mathbb{R}^d$.

Добре відоме (див., наприклад, [3]) наступне зображення функції $(g(1, 0, x))_{x \in \mathbb{R}^d}$:

$$g(1, 0, x) = (2\pi)^{-d/2} |x|^{-d/2+1} \int_0^{+\infty} \rho^{d/2} e^{-c\rho^\alpha} J_{d/2-1}(\rho|x|) d\rho, \tag{2.7}$$

де J_μ означає бesselову функцію, тобто,

$$J_\mu(z) = \frac{(z/2)^\mu}{\sqrt{\pi}\Gamma(\mu + 1/2)} \int_{-1}^1 (1 - u^2)^{\mu-1/2} \cos(zu) du$$

при $\operatorname{Re} \mu > -1/2$ та $J_{-1/2}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \cos z$.

Наступне твердження виглядає майже очевидним, однак ми наведемо його аналітичне доведення.

Лема 2.2. *Нехай $d \geq 2$, ν — фіксований орт в \mathbb{R}^d , а \tilde{x} — довільний вектор в \mathbb{R}^d ортогональний до ν . Тоді для довільного $\xi \in \mathbb{R}^1$ виконується рівність*

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^1} e^{i\lambda\xi} g(1, 0, \lambda\nu + \tilde{x}) d\lambda &= \\ &= (2\pi)^{-\frac{d-1}{2}} |\tilde{x}|^{-\frac{d-3}{2}} \int_0^{+\infty} \exp\{-c(\xi^2 + \rho^2)^{\alpha/2}\} \rho^{\frac{d-1}{2}} J_{\frac{d-3}{2}}(\rho|\tilde{x}|) d\rho. \end{aligned} \tag{2.8}$$

Доведення. Позначимо інтеграл в лівій частині (2.8) через I . З формули (2.7) випливає рівність

$$I = \frac{2}{(2\pi)^{d/2}} \int_0^{+\infty} \rho^{d/2} e^{-c\rho^\alpha} d\rho \times \int_0^{+\infty} J_{d/2-1}(\rho\sqrt{\lambda^2 + b^2})(\lambda^2 + b^2)^{-\frac{d-2}{4}} \cos(\lambda\xi) d\lambda,$$

де $b = |\tilde{x}|$. Внутрішній інтеграл в цій формулі обчислюється (див. [4, Гл. 3, § 16]), а саме

$$\int_0^{+\infty} J_{d/2-1}(\rho\sqrt{\lambda^2+b^2})(\lambda^2+b^2)^{-\frac{d-2}{4}} \cos(\lambda\xi) d\lambda = \begin{cases} 0, & \text{якщо } |\xi| > \rho \\ \sqrt{\frac{\pi}{2}}\rho^{-\frac{d-2}{2}} J_{\frac{d-3}{2}}\left(b\sqrt{\rho^2-\xi^2}\right) \left(\frac{\sqrt{\rho^2-\xi^2}}{b}\right)^{\frac{d-3}{2}}, & \text{якщо } |\xi| < \rho. \end{cases}$$

Тому,

$$I = (2\pi)^{-\frac{d-1}{2}} b^{-\frac{d-3}{2}} \int_{|\xi|}^{+\infty} e^{-c\rho^\alpha} \rho J_{\frac{d-3}{2}}\left(b\sqrt{\rho^2-\xi^2}\right) \left(\sqrt{\rho^2-\xi^2}\right)^{\frac{d-3}{2}} d\rho.$$

Зробивши в цьому виразі підстановку $\rho' = \sqrt{\rho^2 - \xi^2}$, прийдемо до формули (2.8). \square

Наслідок 2.2.1. Нехай \mathbb{L} — підпростір \mathbb{R}^d , $\dim \mathbb{L} = k$, $1 \leq k < d$. Для довільних $\xi \in \mathbb{L}$ та $\tilde{x} \in \mathbb{L}^\perp$ справедлива рівність

$$\int_{\mathbb{L}} e^{i(x,\xi)} g(1, 0, x + \tilde{x}) dx = (2\pi)^{-\frac{d-k}{2}} |\tilde{x}|^{-\frac{d-k-2}{2}} \times \\ \times \int_0^{+\infty} \rho^{\frac{d-k}{2}} \exp\left\{-c(|\xi|^2 + \rho^2)^{\alpha/2}\right\} J_{\frac{d-k-2}{2}}(\rho|\tilde{x}|) d\rho.$$

Зокрема, якщо ν — фіксований орт в \mathbb{R}^d , $S = \{x \in \mathbb{R}^d : (x, \nu) = 0\}$, то для $\xi \in S$ та $\lambda \in \mathbb{R}^1$ справедливим є таке співвідношення

$$\int_S e^{i(x,\xi)} g(1, 0, x + \lambda\nu) dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} e^{-c(|\xi|^2 + \rho^2)^{\alpha/2}} \cos(\rho\lambda) d\rho. \quad (2.9)$$

2.2. Поверхні класу $H^{1+\gamma}$ та деякі леми. Нехай тепер $d \geq 2$ і S — деяка поверхня в \mathbb{R}^d . Припустимо, що існує таке дійсне число $r_0 > 0$, що для кожної точки $x \in S$ частина поверхні $S_{r_0}(x) = S \cap B_{r_0}(x)$ може бути задана в локальній системі координат³ (з початком в точці x) рівнянням $y^d = F_x(y^1, y^2, \dots, y^{d-1})$, де F_x — деяка однозначна функція.

Поверхня S зветься поверхнею класу $H^{1+\gamma}$ для деякого $\gamma \in (0, 1)$ (див., наприклад, [20, Гл. III, §8], де такі поверхні називаються поверхнями класу $C^{1+\gamma}$), якщо для кожного $x \in S$ відповідна функція F_x в

³Локальною системою координат в точці $x \in S$ називатимемо таку ортогональну систему координат (y^1, y^2, \dots, y^d) з початком в точці x , що $y^d = (\nu(x), y)$.

області, що задається нерівністю $\sum_{k=1}^{d-1} (y^k)^2 \leq r_0^2/4$, має неперервні частинні похідні $\frac{\partial F_x}{\partial y^k}$, $k = 1, 2, \dots, d-1$, які задовольняють в цій області умову Гельдера з показником γ і з константою, що не залежить від x .

З властивостей обмеженої замкненої поверхні класу $H^{1+\gamma}$ ми регулярно будемо використовувати ту, згідно з якою існують додатне число δ_0 та натуральне число m такі, що для кожної точки $x \in S$ існує скінченний набір точок $\{x_1, x_2, \dots, x_l\}$ на поверхні S , для яких справджується співвідношення $S \setminus S_{r_0/2}(x) \subset \bigcup_{k=1}^l S_{r_0/2}(x_k)$ з деяким $l \leq m$ і при цьому $\min_{1 \leq k \leq l} \inf_{y \in S_{r_0/2}(x_k)} |y - x| \geq \delta_0$.

На завершення цього пункту наведемо два твердження, які знадобляться в подальшому.

Лема 2.3. *Нехай S – обмежена замкнена поверхня в \mathbb{R}^d ($d \geq 2$) класу $H^{1+\gamma}$ з деяким $\gamma \in (0, 1)$ або ж гіперплощина. Для кожних $t > 0$, $x \in \mathbb{R}^d$ та $\theta > -1$ справджується нерівність*

$$\int_S \frac{d\sigma_y}{(t^{1/\alpha} + |y - x|)^{d+\theta}} \leq H t^{-\frac{1}{\alpha}(\theta+1)} \quad (2.10)$$

з деякою сталою $H > 0$.

Доведення. Розглянемо випадок обмеженої замкненої поверхні S . Позначивши через I інтеграл в лівій частині нерівності (2.10), при $t \geq 1$, очевидно, можемо записати (оскільки $d \geq 2$)

$$I \leq |S| \cdot t^{-\frac{1}{\alpha}(d+\theta)} \leq |S| \cdot t^{-\frac{1}{\alpha}(\theta+1)},$$

де $|S|$ – площа поверхні S .

Якщо ж $0 < t < 1$ і $\rho(x, S) = \inf_{y \in S} |y - x| \geq \rho_0$ з деякою сталою $\rho_0 > 0$, то $I \leq |S| \cdot \rho_0^{-d-\theta} < |S| \cdot \rho_0^{-d-\theta} t^{-\frac{1}{\alpha}(\theta+1)}$. Виберемо тепер $\rho_0 > 0$ досить малим і розглянемо випадок $x \in \mathbb{R}^d$ з $\rho(x, S) < \rho_0$. Нехай $\tilde{x} \in S$ задовольняє рівність $\rho(x, S) = |x - \tilde{x}|$. Позначимо через \tilde{y} проекцію точки $y \in S$ на гіперплощину дотичну до S в точці \tilde{x} . Розіб'ємо поверхню S на дві частини: $S_{r_0/2}(\tilde{x})$ та $S \setminus S_{r_0/2}(\tilde{x})$. Враховуючи властивості поверхні S (див. вище), можемо записати

$$I \leq \int_{S_{r_0/2}(\tilde{x})} \frac{d\sigma_y}{(t^{1/\alpha} + |\tilde{y} - \tilde{x}|)^{d+\theta}} + \sum_{k=1}^l \int_{S_{r_0/2}(x_k)} \frac{d\sigma_y}{(t^{1/\alpha} + |y - \tilde{x}| - |x - \tilde{x}|)^{d+\theta}} = I' + I''.$$

Для I' справджується нерівність

$$I' \leq C \int_0^\infty \frac{\xi^{d-2} d\xi}{(1+\xi)^{d+\theta}} \cdot t^{-\frac{1}{\alpha}(\theta+1)},$$

де C – деяка додатна стала.

Вибравши тепер $\rho_0 < \delta_0$ (число δ_0 означено вище), матимемо

$$|y - \tilde{x}| - |x - \tilde{x}| > \delta_0 - \rho_0 > 0$$

і тому

$$I'' \leq m|S|(\delta_0 - \rho_0)^{-d-\theta} < m|S|(\delta_0 - \rho_0)^{-d-\theta} t^{-\frac{1}{\alpha}(\theta+1)}.$$

Цим і завершується доведення леми у випадку обмеженої замкненої поверхні. Доведення у випадку гіперплощини значно простіше і ми залишаємо його читачеві. \square

Зауваження 2.1. Стала в нерівності (2.10) залежить тільки від d , θ і поверхні S .

Нерівність (2.10) разом з (2.2) приводить до оцінки (нагадаємо, що функція $(g(t, x, y))_{t>0, x \in \mathbb{R}^d, y \in \mathbb{R}^d}$ є щільністю ймовірності переходу процесу Маркова $(x(t))_{t \geq 0}$)

$$\int_S g(t, x, y) d\sigma_y \leq K t^{-1/\alpha}, \quad (2.11)$$

при всіх $t > 0$ та $x \in \mathbb{R}^d$ з деякою сталою $K > 0$; ця оцінка справедлива для кожної поверхні S , яка задовольняє умови Леми 2.3.

При доведенні наступного твердження ми використовуємо запропонований в роботі [13] (див. також [5, Ch. 4]) метод доведення нерівностей того ж типу, що і тут.

Лема 2.4. Нехай S – така поверхня в \mathbb{R}^d , що виконується твердження Леми 2.3. Тоді для кожних $k > -1$, $l > -1$, $\varkappa > k - \alpha + 1$, $\lambda > l - \alpha + 1$ і для всіх $t > 0$, $x \in \mathbb{R}^d$ та $y \in \mathbb{R}^d$ справджується нерівність

$$\begin{aligned} & \int_0^t d\tau \int_S \frac{(t-\tau)^{\varkappa/\alpha}}{((t-\tau)^{1/\alpha} + |z-x|)^{d+k}} \frac{\tau^{\lambda/\alpha}}{(\tau^{1/\alpha} + |y-z|)^{d+l}} d\sigma_z \leq \\ & \leq L \left(B \left(1 + \frac{1}{\alpha}(\varkappa - k - 1), 1 + \frac{\lambda}{\alpha} \right) \frac{t^{1+\frac{1}{\alpha}(\varkappa+\lambda-k-1)}}{(t^{1/\alpha} + |y-x|)^{d+l}} + \right. \\ & \quad \left. + B \left(1 + \frac{1}{\alpha}(\lambda - l - 1), 1 + \frac{\varkappa}{\alpha} \right) \frac{t^{1+\frac{1}{\alpha}(\varkappa+\lambda-l-1)}}{(t^{1/\alpha} + |y-x|)^{d+k}} \right) \end{aligned} \quad (2.12)$$

з деякою сталою $L > 0$, що залежить тільки від d , l , k та поверхні S . Тут $B(\cdot, \cdot)$ є бета-функцією Ейлера.

Доведення. Зафіксуємо деякі $t > 0$, $x \in \mathbb{R}^d$, $y \in \mathbb{R}^d$ і розіб'ємо множину інтегрування в лівій частині нерівності, що доводиться, на частини:

$$\Pi_1 = \{(\tau, z) : \tau \in (0, t/2], z \in S\}, \quad \Pi_2 = \{(\tau, z) : \tau \in (t/2, t], z \in S\},$$

а їх в свою чергу – на такі частини:

$$\Pi_{11} = \left\{(\tau, z) \in \Pi_1 : (t - \tau)^{1/\alpha} + |z - x| \leq \frac{1}{2}(t^{1/\alpha} + |y - x|)\right\},$$

$$\Pi_{12} = \Pi_1 \setminus \Pi_{11};$$

$$\Pi_{21} = \left\{(\tau, z) \in \Pi_2 : \tau^{1/\alpha} + |y - z| \leq \frac{1}{2}(t^{1/\alpha} + |y - x|)\right\},$$

$$\Pi_{22} = \Pi_2 \setminus \Pi_{21}.$$

Скориставшись очевидною нерівністю $(u - v)^\rho \geq u^\rho - v^\rho$, справедливою при всіх $0 < v < \frac{u}{2}$, $0 < \rho < 1$, та нерівністю трикутника

$$|y - x| \leq |y - z| + |z - x|,$$

можемо записати:

$$\tau^{1/\alpha} + |y - z| \geq \frac{1}{2}(t^{1/\alpha} + |y - x|) \quad \text{при } (\tau, z) \in \Pi_{11};$$

$$(t - \tau)^{1/\alpha} + |z - x| \geq \frac{1}{2}(t^{1/\alpha} + |y - x|) \quad \text{при } (\tau, z) \in \Pi_{21}.$$

Крім того, очевидно, що

$$(t - \tau)^{1/\alpha} + |z - x| > \frac{1}{2}(t^{1/\alpha} + |y - x|) \quad \text{при } (\tau, z) \in \Pi_{12};$$

$$\tau^{1/\alpha} + |y - z| > \frac{1}{2}(t^{1/\alpha} + |y - x|) \quad \text{при } (\tau, z) \in \Pi_{22}.$$

Тому для лівої частини нерівності (2.12) (позначимо її через I) виконується

$$\begin{aligned} I &\leq \frac{2^{d+l}}{(t^{1/\alpha} + |y - x|)^{d+l}} \int_{\Pi_{11} \cup \Pi_{22}} \frac{(t - \tau)^{\alpha/\alpha} \tau^{\lambda/\alpha}}{((t - \tau)^{1/\alpha} + |z - x|)^{d+k}} d\tau d\sigma_z + \\ &+ \frac{2^{d+k}}{(t^{1/\alpha} + |y - x|)^{d+k}} \int_{\Pi_{12} \cup \Pi_{21}} \frac{(t - \tau)^{\alpha/\alpha} \tau^{\lambda/\alpha}}{(\tau^{1/\alpha} + |y - z|)^{d+l}} d\tau d\sigma_z \leq \\ &\leq \frac{2^{d+l}}{(t^{1/\alpha} + |y - x|)^{d+l}} \int_0^t d\tau \int_S \frac{(t - \tau)^{\alpha/\alpha} \tau^{\lambda/\alpha}}{((t - \tau)^{1/\alpha} + |z - x|)^{d+k}} d\sigma_z + \\ &+ \frac{2^{d+k}}{(t^{1/\alpha} + |y - x|)^{d+k}} \int_0^t d\tau \int_S \frac{(t - \tau)^{\alpha/\alpha} \tau^{\lambda/\alpha}}{(\tau^{1/\alpha} + |y - z|)^{d+l}} d\sigma_z. \end{aligned}$$

Нерівність (2.10) дозволяє тепер записати

$$I \leq L \left(\frac{1}{(t^{1/\alpha} + |y - x|)^{d+l}} \int_0^t (t - \tau)^{\frac{1}{\alpha}(\alpha - k - 1)} \tau^{\lambda/\alpha} d\tau + \right.$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{(t^{1/\alpha} + |y-x|)^{d+k}} \int_0^t (t-\tau)^{\varkappa/\alpha} \tau^{\frac{1}{\alpha}(\lambda-l-1)} d\tau = \\
& = L \left(B \left(1 + \frac{1}{\alpha}(\varkappa - k - 1), 1 + \frac{\lambda}{\alpha} \right) \frac{t^{1+\frac{1}{\alpha}(\varkappa+\lambda-k-1)}}{(t^{1/\alpha} + |y-x|)^{d+l}} + \right. \\
& \quad \left. + B \left(1 + \frac{1}{\alpha}(\lambda - l - 1), 1 + \frac{\varkappa}{\alpha} \right) \frac{t^{1+\frac{1}{\alpha}(\varkappa+\lambda-l-1)}}{(t^{1/\alpha} + |y-x|)^{d+k}} \right),
\end{aligned}$$

де L – деяка додатна стала, що залежить тільки від d, l, k та поверхні S . \square

2.3. Задача Коші.

2.3.1. *Розв'язок однорідної задачі.* З формули (2.1) та з означення оператора \mathbf{A} випливає рівність

$$\mathbf{A}g(t, \cdot, y)(x) = -\frac{c}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} \exp\{i(x-y, \xi) - ct|\xi|^\alpha\} |\xi|^\alpha d\xi,$$

справедлива при всіх $t > 0$, $x \in \mathbb{R}^d$ та $y \in \mathbb{R}^d$. Очевидно, що $\frac{\partial}{\partial t}g(t, x, y)$ визначається цим же інтегралом, а отже, при фіксованому $y \in \mathbb{R}^d$ функція $(g(t, x, y))_{t>0, x \in \mathbb{R}^d}$ є розв'язком рівняння

$$\frac{\partial}{\partial t}g(t, x, y) - \mathbf{A}g(t, \cdot, y)(x) = 0. \quad (2.13)$$

При $\alpha = 2$, як зазначалось вище, $\mathbf{A} = c\Delta$ (Δ – оператор Лапласа) і рівняння (2.13) є рівнянням теплопровідності.

Доведемо тепер таке твердження.

Теорема 2.3. *Якою б не була функція $\varphi \in C_b(\mathbb{R}^d)$, функція*

$$u(t, x, \varphi) = \int_{\mathbb{R}^d} g(t, x, y)\varphi(y) dy = \mathbb{E}_x\varphi(x(t)), \quad t > 0, x \in \mathbb{R}^d,$$

є розв'язком задачі Коші.

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t}u(t, x, \varphi) - \mathbf{A}u(t, \cdot, \varphi)(x) = 0, & t > 0, x \in \mathbb{R}^d \\ u(0+, x, \varphi) = \varphi(x), & x \in \mathbb{R}^d. \end{cases} \quad (2.14)$$

Доведення. При $\alpha = 2$ це добре відомий факт. Доведення цього факту при $1 < \alpha < 2$ можна знайти в [5, 13]. Ми відтворюємо його тут для повноти викладу.

Нехай $1 < \alpha < 2$. Спочатку перевіримо, що $u(\cdot, \cdot, \varphi)$ задовольняє початкову умову. Для $t > 0$ та $x \in \mathbb{R}^d$ можемо записати

$$u(t, x, \varphi) - \varphi(x) = \int_{\mathbb{R}^d} [\varphi(y) - \varphi(x)]g(t, x, y) dy = I + II,$$

де I означає інтеграл від тієї ж функції, розповсюджений на кулю $B_\delta(x)$ з деяким $\delta > 0$, а II – на доповнення до неї, тобто, на $B_\delta(x)^c$. Оскільки функція φ неперервна, для заданого $\varepsilon > 0$ вибором $\delta > 0$ можемо забезпечити нерівність $\max_{y \in B_\delta(x)} |\varphi(y) - \varphi(x)| < \varepsilon$, з якої випливає $|I| < \varepsilon$.

Вибравши таке $\delta > 0$ і зафіксувавши його, для II дістанемо оцінку

$$|II| \leq 2\|\varphi\| \sup_{x \in \mathbb{R}^d} \int_{B_\delta(x)^c} g(t, x, y) dy \rightarrow 0,$$

коли $t \rightarrow 0+$ (див. Лема 2.1(a)). Звідси випливає, що

$$\lim_{t \rightarrow 0+} u(t, x, \varphi) = \varphi(x)$$

при кожному $x \in \mathbb{R}^d$, тобто, виконується початкова умова в (2.14).

Далі, зрозуміло, що рівняння (2.13) має своїм наслідком такий факт: функція $(u(t, x, \varphi))_{t>0, x \in \mathbb{R}^d}$ задовольняє рівняння в (2.14), якщо виконуються рівності

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} u(t, x, \varphi) &= \int_{\mathbb{R}^d} \frac{\partial}{\partial t} g(t, x, y) \varphi(y) dy, \quad t > 0, x \in \mathbb{R}^d, \\ \mathbf{A}u(t, \cdot, \varphi)(x) &= \int_{\mathbb{R}^d} \mathbf{A}g(t, \cdot, y)(x) \varphi(y) dy, \quad t > 0, x \in \mathbb{R}^d. \end{aligned} \tag{2.15}$$

Обидва інтеграли в правих частинах цих рівностей існують, бо з нерівності (2.6) випливає

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^d} \left| \frac{\partial}{\partial t} g(t, x, y) \right| dy &\leq \tilde{N} \int_{\mathbb{R}^d} \frac{dy}{(t^{1/\alpha} + |y - x|)^{d+\alpha}} = \\ &= t^{-1} \tilde{N} \int_{\mathbb{R}^d} \frac{dz}{(1 + |z|)^{d+\alpha}} < \infty \end{aligned}$$

при $t > 0$ та $x \in \mathbb{R}^d$.

Зауважимо, що внаслідок Властивості 2.5 функція $(u(t, x, \varphi))_{x \in \mathbb{R}^d}$ при фіксованому $t > 0$ має обмежені похідні по x будь-якого порядку, як показує наступна викладка

$$\int_{\mathbb{R}^d} \left| \mathbf{D}_x^l g(t, x, y) \right| dy \leq N_l t \int_{\mathbb{R}^d} \frac{dy}{(t^{1/\alpha} + |y - x|)^{d+\alpha+l}} =$$

$$= N_l t^{-l/\alpha} \int_{\mathbb{R}^d} \frac{dz}{(1+|z|)^{d+\alpha+l}}.$$

Звідси випливає, що оператор \mathbf{A} можна застосовувати до функції $u(t, \cdot, \varphi)$ при фіксованому $t > 0$.

Маємо, далі,

$$\begin{aligned} \mathbf{A}u(t, \cdot, y)(x) &= c q_\alpha \int_{\mathbb{R}^d} \frac{dz}{|z|^{d+\alpha}} \int_{\mathbb{R}^d} [g(t, x+z), y) - g(t, x, y) - \\ &\quad - (\nabla_x g(t, x, y), z)] \varphi(y) dy = I + II, \end{aligned}$$

де I та II визначається таким же виразом із заміною \mathbb{R}^d в зовнішньому інтегралі відповідно на кулю $B_\delta(0)$ (з деяким $\delta > 0$) та на її доповнення, тобто, множину $B_\delta(0)^c$.

Для оцінки інтеграла по кулі $B_\delta(0)$ скористаємось формулою Лагранжа

$$\begin{aligned} g(t, x+z, y) - g(t, x, y) - (\nabla_x g(t, x, y), z) &= \\ &= \frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^d \frac{\partial^2}{\partial x^j \partial x^k} g(t, \bar{x}, y) z^j z^k, \end{aligned}$$

де $\bar{x} = x + \theta z$ для деякого $\theta = \theta_{t,x,y,z} \in (0, 1)$ і нерівністю (2.5) при $l = 2$. Дістаємо оцінку (C – деяка додатна стала)

$$|g(t, x+z, y) - g(t, x, y) - (\nabla_x g(t, x, y), z)| \leq C \frac{|z|^2 t}{(t^{1/\alpha} + |y - \bar{x}|)^{d+\alpha+2}},$$

з якої випливає

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^d} |g(t, x+z, y) - g(t, x, y) - (\nabla_x g(t, x, y), z)| dy &\leq \\ &\leq C |z|^2 t^{-2/\alpha} \int_{\mathbb{R}^d} \frac{dy}{(1+|y|)^{d+\alpha+2}}. \end{aligned}$$

Тому при фіксованому $t > 0$ можемо записати

$$|I| \leq C t^{-2/\alpha} \|\varphi\| \int_{B_\delta(0)} \frac{dz}{|z|^{d+\alpha-2}} < \infty,$$

а це, в свою чергу, дозволяє записати I в такій формі (користуємось теоремою Фубіні)

$$\begin{aligned} I &= c q_\alpha \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(y) dy \times \\ &\quad \times \int_{B_\delta(0)} [g(t, x+z, y) - g(t, x, y) - (\nabla_x g(t, x, y), z)] \frac{dz}{|z|^{d+\alpha}}. \end{aligned} \quad (2.16)$$

Щоб показати, що

$$II = cq_\alpha \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(y) dy \times \int_{B_\delta(0)^c} [g(t, x+z, y) - g(t, x, y) - (\nabla_x g(t, x, y), z)] \frac{dz}{|z|^{d+\alpha}}, \quad (2.17)$$

знову скористуємось формулою Лагранжа, цього разу в такій формі

$$g(t, x+z, y) - g(t, x, y) = (\nabla_x g(t, \hat{x}, y), z),$$

де $\hat{x} = x + \hat{\theta}z$ для деякого $\hat{\theta} = \hat{\theta}_{t,x,y,z} \in (0, 1)$. Тепер з (2.5) виводимо нерівність

$$|g(t, x+z, y) - g(t, x, y) - (\nabla_x g(t, x, y), z)| \leq N_1 \left(\frac{|z| t}{(t^{1/\alpha} + |y - \hat{x}|)^{d+\alpha+1}} + \frac{|z| t}{(t^{1/\alpha} + |y - x|)^{d+\alpha+1}} \right),$$

яка дозволяє оцінити II в такий спосіб (C – деяка додатна стала)

$$|II| \leq cq_\alpha \int_{B_\delta(0)^c} \frac{dz}{|z|^{d+\alpha}} \times \int_{\mathbb{R}^d} (|g(t, x+z, y) - g(t, x, y)| + |(\nabla_x g(t, x, y), z)|) |\varphi(y)| dy \leq C \|\varphi\| t^{-1/\alpha} \int_{B_\delta(0)^c} \frac{dz}{|z|^{d+\alpha-1}} < \infty.$$

Теорема Фубіні знову дозволяє стверджувати, що II задається рівністю (2.17). Склавши тепер (2.16) та (2.17), дістаємо другу з рівностей (2.15).

Щоб довести першу рівність в (2.15), запишемо (Δt – досить мале)

$$u(t + \Delta t, x, \varphi) - u(t, x, \varphi) = \int_{\mathbb{R}^d} [g(t + \Delta t, x, y) - g(t, x, y)] \varphi(y) dy = \Delta t \int_{\mathbb{R}^d} \frac{\partial}{\partial t} g(\hat{t}, x, y) \varphi(y) dy,$$

де $\hat{t} \in (t, t + \Delta t)$, якщо $\Delta t > 0$, або $\hat{t} \in (t + \Delta t, t)$, якщо $\Delta t < 0$. Але $\frac{\partial}{\partial t} g(\hat{t}, x, y) = \mathbf{A}g(\hat{t}, \cdot, y)(x)$ і тому

$$\left| \frac{\partial}{\partial t} g(\hat{t}, x, y) \right| \leq \frac{\tilde{N}}{(\hat{t}^{1/\alpha} + |y - x|)^{d+\alpha}} \leq \frac{\tilde{N}}{(\delta^{1/\alpha} + |y - x|)^{d+\alpha}}, \quad (2.18)$$

оскільки можна вважати, що $t - |\Delta t| \geq \delta > 0$. Таким чином, маємо $\frac{\partial}{\partial t} g(\hat{t}, x, y) \rightarrow \frac{\partial}{\partial t} g(t, x, y)$, коли $\Delta t \rightarrow 0$, і виконується (2.18). З теореми Лебега про мажоровану збіжність тепер і впливає перша рівність в (2.15). Теорему доведено. \square

Зауваження 2.2. Початкова умова в задачі Коші (2.14) фактично означає, що $\lim_{t \rightarrow 0^+} g(t, x, y) = \delta_x(y)$ для $x \in \mathbb{R}^d$ та $y \in \mathbb{R}^d$, де через $(\delta_x(y))_{y \in \mathbb{R}^d}$ позначено дельта-функцію Дірака, сконцентровану в точці $x \in \mathbb{R}^d$, тобто маємо $\int_{\mathbb{R}^d} \delta_x(y) \varphi(y) dy = \varphi(x)$ при $x \in \mathbb{R}^d$, якою б не була функція $\varphi \in C_b(\mathbb{R}^d)$.

При $\alpha = 2$ функція g , визначена формулою (2.3), зветься фундаментальним розв'язком задачі Коші для рівняння теплопровідності. По аналогії будемо називати функцію, визначену рівністю (2.1), також фундаментальним розв'язком задачі Коші (2.14) і у випадку $\alpha \in (0, 2)$.

2.3.2. Єдиність розв'язку. Для початку сформулюємо одне допоміжне твердження. Це добре відомий принцип максимуму для псевдодиференціальних (при $1 < \alpha < 2$) або диференціальних (при $\alpha = 2$) рівнянь параболічного типу (див., наприклад, [5, Ch. 4], [20, Гл. 2]).

Лема 2.5. *Нехай неперервна функція $(u(t, x))_{t > 0, x \in \mathbb{R}^d}$ є таким розв'язком задачі Коші (із заданою $\varphi \in C_b(\mathbb{R}^d)$)*

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} u(t, x) = \mathbf{A}u(t, \cdot)(x), & t > 0, x \in \mathbb{R}^d \\ u(0+, x) = \varphi(x), & x \in \mathbb{R}^d, \end{cases}$$

який задовольняє умову $\lim_{|x| \rightarrow +\infty} u(t, x) = 0$ при кожному фіксованому $t > 0$. Тоді $u(t, x) \geq 0$ при всіх $t > 0$ та $x \in \mathbb{R}^d$, якщо тільки $\varphi(x) \geq 0$ при всіх $x \in \mathbb{R}^d$.

Лема 2.5 та Властивість 2.4 показують, що при фіксованому $t > 0$ таке перетворення простору $\hat{C}(\mathbb{R}^d)$ самого в себе, яке функції $\varphi \in \hat{C}(\mathbb{R}^d)$ ставить у відповідність функцію

$$\left(\int_{\mathbb{R}^d} g(t, x, y) \varphi(y) dy \right)_{x \in \mathbb{R}^d},$$

є ін'єктивним, тобто, взаємно однозначним. Постає запитання, чи таке твердження залишається справедливим і для простору $C_b(\mathbb{R}^d)$.

У випадку $\alpha = 2$ відповідь на це запитання позитивна, оскільки для рівняння теплопровідності розв'язок задачі Коші єдиний (див. [20, Гл. 1]) в класі функцій $(u(t, x))_{t > 0, x \in \mathbb{R}^d}$, що допускають оцінку

$$|u(t, x)| \leq B e^{\varkappa|x|^2}, \quad t \in (0, T], \quad x \in \mathbb{R}^d$$

при довільному $T > 0$ з деякими додатними сталими \varkappa та B .

У випадку $1 < \alpha < 2$ позитивна відповідь на поставлене запитання міститься в наступному твердженні, що належить А. Н. Кочубею.

Нагадаємо деякі позначення. Через $S(\mathbb{R}^d)$ позначається підпростір $C_b^\infty(\mathbb{R}^d)$, що складається з функцій, які самі, а також всі їх похідні спадають на нескінченності швидше, ніж $|x|^{-n}$ при довільному натуральному n . Добре відомо, що перетворення Фур'є функцій цього простору переводить їх у функції з нього ж. Далі, нескладно довести (див. [13]), що при $\psi \in S(\mathbb{R}^d)$ функція $(\mathbf{A}\psi(x))_{x \in \mathbb{R}^d}$ є абсолютно інтегровною на \mathbb{R}^d .

Тепер дамо означення узагальненого розв'язку задачі Коші (2.14).

Означення 2.1. *Функцію $(u(t, x))_{t \geq 0, x \in \mathbb{R}^d}$ з класу $L_\infty([0, \infty) \times \mathbb{R}^d)$ назовемо узагальненим розв'язком задачі Коші (2.14), якщо виконується рівність*

$$\int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^d} u(t, x) \left[\frac{\partial}{\partial t} \psi(t, x) + \mathbf{A}\psi(t, \cdot)(x) \right] dt dx = - \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(x) \psi(0, x) dx,$$

якою б не була функція $\psi \in S(\mathbb{R}^{d+1})$.

Ясно, що розв'язок задачі Коші (2.14), побудований в Теоремі 2.3, є і її узагальненим розв'язком, що легко доводиться множенням обох частин рівняння в (2.14) на функцію $\psi \in S(\mathbb{R}^{d+1})$ та інтегруванням їх по множині $[0, \infty) \times \mathbb{R}^d$.

Наступне твердження показує, що кожен узагальнений розв'язок задачі (2.14) збігається майже всюди з тим, що його побудовано в Теоремі 2.3. Нагадаємо, що елементами простору $L_\infty([0, +\infty) \times \mathbb{R}^d)$ є класи еквівалентних між собою функцій (тобто, таких, які можуть відрізнятися одна від іншої лише на множині нульової міри).

Теорема 2.4. *Узагальнений розв'язок задачі Коші (2.14) єдиний в класі $L_\infty([0, +\infty) \times \mathbb{R}^d)$.*

Ця теорема разом з її доведенням були змістом приватного повідомлення А.Н. Кочубея другому з авторів цієї статті на початку 80-х років 20-го століття. Автори мають намір відтворити цей результат в повному обсязі (з доведенням) в монографії, яка зараз готується до друку.

2.3.3. Теплові потенціали і розв'язок неоднорідної задачі. Нехай тепер $(f(t, x))_{t > 0, x \in \mathbb{R}^d}$ – деяка вимірна функція. Розглянемо при $t > 0$ та $x \in \mathbb{R}^d$ інтеграл

$$F(t, x) = \int_0^t d\tau \int_{\mathbb{R}^d} g(t - \tau, x, z) f(\tau, z) dz. \quad (2.19)$$

При $\alpha = 2$ такі інтеграли зводяться тепловими потенціалами. Їх властивості добре вивчені (див., наприклад, [20, Гл. 1], [14, Гл. 4]). У випадку $1 < \alpha < 2$ їх властивості описані в книзі [5]. Там вони також називаються тепловими.

Достатньою умовою існування інтеграла (2.19) є наступна умова на функцію f : яким би не було $T > 0$, при $(t, x) \in (0, T] \times \mathbb{R}^d$ справджується нерівність

$$|f(t, x)| \leq B_T t^\varkappa \quad (2.20)$$

з деякими сталими $B_T > 0$ та $\varkappa > -1$. Якщо f задовольняє цю умову, то функція F визначена в (2.19), є неперервною функцією аргументів $t > 0$ та $x \in \mathbb{R}^d$. Крім того, виконується нерівність $|F(t, x)| \leq B_T(1 + \varkappa)^{-1}t^{1+\varkappa}$ при всіх $t \in (0, T]$ та $x \in \mathbb{R}^d$, з якої випливає, що $F(t, x) \rightarrow 0$, коли $t \rightarrow 0+$ рівномірно відносно $x \in \mathbb{R}^d$. Більше того, за умови (2.20) функція F неперервно диференційовна по змінній x . Це випливає з (2.5) при $l = 1$ та наступної оцінки

$$\begin{aligned} & \int_0^t d\tau \int_{\mathbb{R}^d} |D_x^1 g(t - \tau, x, z)| |f(\tau, z)| dz \leq \\ & \leq B_T N_1 \int_0^t \tau^\varkappa (t - \tau) d\tau \int_{\mathbb{R}^d} \frac{dz}{((t - \tau)^{1/\alpha} + |z - x|)^{d+\alpha+1}} = \\ & = B_T N_1 \int_0^t \tau^\varkappa (t - \tau)^{-1/\alpha} d\tau \int_{\mathbb{R}^d} \frac{dz}{(1 + |z|)^{d+\alpha+1}} = \tilde{B}_T t^{1-1/\alpha+\varkappa}, \end{aligned}$$

що справджується при всіх $(t, x) \in (0, T] \times \mathbb{R}^d$ з деякою додатною сталою \tilde{B}_T при фіксованому $T > 0$.

Що стосується виразів $\frac{\partial}{\partial t} F(t, x)$ та $\mathbf{A}F(t, \cdot)(x)$, то для їх існування виконання умови (2.20) не є достатнім. Проте, як і в класичній теорії теплових потенціалів (тобто, при $\alpha = 2$), у випадку $1 < \alpha < 2$ умова Гельдера по просторовій змінній на функцію f :

$$|f(t, x) - f(t, y)| \leq L_T t^{\gamma_1} |x - y|^{\gamma_2}, \quad (2.21)$$

що виконується при $t \in (0, T]$, $x \in \mathbb{R}^d$ та $y \in \mathbb{R}^d$ з деякими сталими $\gamma_1 > -1$, $\gamma_2 \in (0, 1)$ та $L_T > 0$ при фіксованому $T > 0$, забезпечує існування інтеграла

$$I(t, x) = \int_0^t d\tau \int_{\mathbb{R}^d} \mathbf{A}g(t - \tau, \cdot, z)(x) f(\tau, z) dz, \quad t > 0, x \in \mathbb{R}^d.$$

Це випливає з того, що

$$\int_{\mathbb{R}^d} \mathbf{A}g(t - \tau, \cdot, z)(x) dz = 0, \quad 0 < \tau < t, x \in \mathbb{R}^d.$$

Тому при $t \in (0, T]$ та $x \in \mathbb{R}^d$ можемо записати

$$I(t, x) = \int_0^t d\tau \int_{\mathbb{R}^d} \mathbf{A}g(t - \tau, \cdot, z)(x)[f(\tau, z) - f(\tau, x)] dz,$$

звідки, використовуючи (2.21) та (2.6), дістаємо

$$\begin{aligned} |I(t, x)| &\leq \int_0^t d\tau \int_{\mathbb{R}^d} |\mathbf{A}g(t - \tau, \cdot, z)(x)| |f(\tau, z) - f(\tau, x)| dz \leq \\ &\leq \tilde{N} L_T \int_0^t \tau^{\gamma_1} d\tau \int_{\mathbb{R}^d} \frac{|z - x|^{\gamma_2} dz}{((t - \tau)^{1/\alpha} + |z - x|)^{d+\alpha}} = \\ &= \tilde{N} L_T \int_0^t (t - \tau)^{\gamma_2/\alpha - 1} \tau^{\gamma_1} d\tau \int_{\mathbb{R}^d} \frac{|z|^{\gamma_2} dz}{(1 + |z|)^{d+\alpha}}. \end{aligned}$$

Оскільки $\int_{\mathbb{R}^d} |z|^{\gamma_2} (1 + |z|)^{-d-\alpha} dz < \infty$ при $\alpha \in (1, 2)$ та $\gamma_2 \in (0, 1)$, маємо оцінку $|I(t, x)| \leq \tilde{L}_T \cdot t^{\gamma_1 + \gamma_2/\alpha}$ при $t \in (0, T]$ та $x \in \mathbb{R}^d$ з деякою сталою $\tilde{L}_T > 0$.

Далі, використовуючи ту ж аргументацію, що і при доведенні Теорему 2.3, можемо твердити, що $\mathbf{A}F(t, \cdot)(x) = I(t, x)$ при всіх $t > 0$ та $x \in \mathbb{R}^d$.

Тепер, якщо додатково припустити, що функція f неперервна по сукупності змінних, то похідну $\frac{\partial}{\partial t} F$ можна обчислювати за формулою (при $t > 0$ та $x \in \mathbb{R}^d$)

$$\frac{\partial}{\partial t} F(t, x) = f(t, x) + \int_0^t d\tau \int_{\mathbb{R}^d} \frac{\partial}{\partial t} g(t - \tau, x, y)[f(\tau, y) - f(\tau, x)] dy$$

Цим доведено таке твердження.

Теорема 2.5. *Нехай задано функцію $\varphi \in C_b(\mathbb{R}^d)$ та неперервну по сукупності змінних функцію*

$$(f(t, x))_{t>0, x \in \mathbb{R}^d},$$

яка задовольняє умови (2.20) та (2.21). Тоді функція ($t > 0, x \in \mathbb{R}^d$)

$$u(t, x) = \int_{\mathbb{R}^d} g(t, x, y)\varphi(y) dy + \int_0^t d\tau \int_{\mathbb{R}^d} g(t - \tau, x, y)f(\tau, y) dy,$$

є розв'язком неоднорідної задачі Коші

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} u(t, x) - \mathbf{A}u(t, \cdot)(x) = f(t, x), & t > 0, x \in \mathbb{R}^d \\ u(0+, x) = \varphi(x), & x \in \mathbb{R}^d. \end{cases} \quad (2.22)$$

Зауважимо, що питання про єдиність обмеженого розв'язку задачі (2.22) вирішується з допомогою Теорему 2.4, однак слід мати на увазі, що розв'язок цієї задачі може бути необмеженим. Наприклад,

при $\varphi(x) \equiv 0$, а $f(t, x) \equiv 1$ розв'язком задачі (2.22) є функція $u(t, x) = t$ при $t > 0$, $x \in \mathbb{R}^d$.

Якщо функція f в правій частині рівняння зростає (як функція аргументу t) не дуже швидко, то, перейшовши до перетворення Лапласа в задачі (2.22), можна звести справу до псевдодиференціального рівняння еліптичного типу і вже для нього вирішувати питання про єдиність розв'язку.

3. ПОТЕНЦІАЛИ ПРОСТОГО ШАРУ

3.1. Означення, умови існування та основні властивості. Розглянемо деяку двосторонню вимірну поверхню S в \mathbb{R}^d . Як і вище, нехай функція $(g(t, x, y))_{t>0, x \in \mathbb{R}^d, y \in \mathbb{R}^d}$ – щільність ймовірності переходу ротаційно інваріантного α -стійкого випадкового процесу $(x(t))_{t \geq 0}$ (чи фундаментальний розв'язок задачі Коші для відповідного псевдодиференціального рівняння).

Означення 3.1. *Потенціалом простого шару на поверхні S (носії потенціалу) з густиною $(\psi(t, x))_{t>0, x \in S}$ називатимемо функцію*

$$v(t, x, \psi) = \int_0^t d\tau \int_S g(t - \tau, x, y) \psi(\tau, y) d\sigma_y, \quad t > 0, x \in \mathbb{R}^d, \quad (3.1)$$

де внутрішній інтеграл є поверхневим інтегралом першого роду.

Ми здебільшого розглядатимемо ситуацію, коли носій потенціалу є досить гладкою обмеженою замкненою поверхнею. Хоча будуть згадуватись результати і у випадку гіперплощини, як носія потенціалу. Особливістю другої ситуації в порівнянні з першою є необмеженість гіперплощини, з одного боку, та можливість проводити деякі явні обчислення, з іншого боку. Окремо будемо говорити про одновимірний випадок, в якому носієм потенціалу є точка.

Припустимо, що на множині $(0, \infty) \times S$ задана неперервна дійснозначна функція ψ , яка задовольняє нерівність $|\psi(t, x)| \leq M t^{-\beta}$ при всіх $(t, x) \in (0, \infty) \times S$ з деякими сталими $M > 0$ та $\beta < 1$.

Для початку розглянемо випадок, коли S – обмежена замкнена поверхня в \mathbb{R}^d , $d \geq 2$, яка належить до класу $H^{1+\gamma}$ (див. п. 2.2) з деяким $\gamma \in (0, 1)$.

Неважко бачити, що функція v , яка задається рівністю (3.1), коректно визначена, є неперервною за сукупністю аргументів в області $(t, x) \in (0, \infty) \times \mathbb{R}^d$, та задовольняє таку нерівність

$$|v(t, x, \psi)| \leq M K \frac{\Gamma(1 - \beta)\Gamma(1 - 1/\alpha)}{\Gamma(2 - \beta - 1/\alpha)} t^{1-\beta-1/\alpha}, \quad (3.2)$$

де K – стала з (2.11).

Покажемо, що функція v задовольняє рівняння

$$\frac{\partial}{\partial t} v(t, x, \psi) = \mathbf{A}v(t, \cdot, \psi)(x) \tag{3.3}$$

в області $(t, x) \in (0, \infty) \times (\mathbb{R}^d \setminus S)$. Для цього доведемо можливість внесення оператора \mathbf{A} за змінною x під знаки інтегралів в (3.1). Зауважимо спочатку, що з нерівності (2.5) випливає той факт, що функція $v(t, \cdot, \psi)$ для кожного фіксованого $t > 0$ допускає диференціювання довільну кількість раз в кожній точці множини $\mathbb{R}^d \setminus S$. Зафіксувавши довільну точку $(t, x) \in (0, \infty) \times (\mathbb{R}^d \setminus S)$, використаємо інтегральне представлення оператора \mathbf{A} (див. п. 1). А саме,

$$\begin{aligned} \mathbf{A}v(t, \cdot, \psi)(x) &= \\ &= cq_\alpha \int_{\mathbb{R}^d} (v(t, x + u, \psi) - v(t, x, \psi) - (u, \nabla v(t, \cdot, \psi)(x))) \frac{du}{|u|^{d+\alpha}} = \\ &= cq_\alpha \int_{\mathbb{R}^d} \frac{du}{|u|^{d+\alpha}} \int_0^t d\tau \int_S (g(t - \tau, x + u, y) - g(t - \tau, x, y) - \\ &\quad - (u, \nabla g(t - \tau, \cdot, y)(x))) \psi(\tau, y) d\sigma_y = I_1 + I_2, \end{aligned}$$

де I_1 та I_2 інтеграли від тієї ж підінтегральної функції по (u, τ, y) на множинах $B_\delta(0) \times (0, t) \times S$ та $B_\delta(0)^c \times (0, t) \times S$, відповідно, з деяким $\delta > 0$.

Враховуючи нерівність (2.5), підінтегральну функцію в I_1 оцінимо зверху за абсолютною величиною виразом

$$\begin{aligned} \frac{1}{|u|^{d+\alpha-2}} \frac{1}{2} \sum_{k,l=1}^d \left| \frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_l} g(t - \tau, x, y) \Big|_{x=\hat{x}} \right| |\psi(\tau, y)| &\leq \\ &\leq \frac{N_2 d^2 M}{2|u|^{d+\alpha-2}} \frac{(t - \tau)\tau^{-\beta}}{((t - \tau)^{1/\alpha} + |y - \hat{x}|)^{d+\alpha+2}} \end{aligned}$$

з деякою точкою $\hat{x} = x + \theta u$, де $\theta = \theta_{t-\tau, x, y} \in (0, 1)$.

Вибравши $\delta < \rho(x, S)$ (нагадаємо, що $\rho(x, S)$ – відстань від точки x до поверхні S , а x – фіксована точка), для правої частини останньої нерівності (без сталих множників) одержимо мажоранту

$$\begin{aligned} \frac{1}{|u|^{d+\alpha-2}} \frac{(t - \tau)\tau^{-\beta}}{((t - \tau)^{1/\alpha} + \rho(x, S) - \delta)^{d+\alpha+2}} &\leq \\ &\leq \frac{1}{(\rho(x, S) - \delta)^{d+\alpha+2}} \frac{(t - \tau)\tau^{-\beta}}{|u|^{d+\alpha-2}}, \end{aligned}$$

яка інтегровна на всій множині інтегрування інтеграла I_1 . Отже, в цьому інтегралі можлива довільна зміна порядку інтегрування.

Підінтегральна функція в інтегралі I_2 оцінюється наступним виразом (користуємось оцінками (2.2), (2.5))

$$\begin{aligned} & \frac{|\psi(\tau, y)|}{|u|^{d+\alpha}} (|g(t-\tau, x+u, y)| + |g(t-\tau, x, y)| + |u| |\nabla g(t-\tau, \cdot, y)(x)|) \leq \\ & \leq \frac{M \max(N, N_1) \tau^{-\beta} (t-\tau)}{|u|^{d+\alpha}} \left(\frac{1}{((t-\tau)^{1/\alpha} + |y-x-u|)^{d+\alpha}} + \right. \\ & \quad \left. + \frac{1}{((t-\tau)^{1/\alpha} + \rho(x, S))^{d+\alpha}} + \frac{|u|}{((t-\tau)^{1/\alpha} + \rho(x, S))^{d+\alpha+1}} \right) \end{aligned}$$

Маємо суму трьох функцій, в якій останні дві, очевидно, інтегровні за (u, τ, y) на $B_\delta(0)^c \times (0, t) \times S$. Розглянемо інтеграл від першого доданка без сталих множників (змінивши порядок інтегрування). Зробивши в ньому заміну змінної u на w за формулою $(t-\tau)^{1/\alpha} w = y-x-u$, одержимо

$$\begin{aligned} & \int_0^t d\tau \int_S d\sigma_y \int_{B_\delta(0)^c} \frac{\tau^{-\beta} (t-\tau)}{|u|^{d+\alpha}} \frac{du}{((t-\tau)^{1/\alpha} + |y-x-u|)^{d+\alpha}} = \\ & = \int_0^t d\tau \int_S d\sigma_y \int_{D(\tau, y)} \frac{\tau^{-\beta}}{|y-x-(t-\tau)^{1/\alpha} w|^{d+\alpha}} \frac{dw}{(1+|w|)^{d+\alpha}} < \infty, \end{aligned}$$

де $D(\tau, y) = \{w \in \mathbb{R}^d : |y-x-(t-\tau)^{1/\alpha} w| > \delta\}$. Таким чином, в інтегралі I_2 можлива довільна зміна порядку інтегрування.

Отже, при $t > 0$, $x \in \mathbb{R}^d \setminus S$

$$\mathbf{A}v(t, \cdot, \psi)(x) = \int_0^t d\tau \int_S \mathbf{A}g(t-\tau, \cdot, y)(x) \psi(\tau, y) d\sigma_y.$$

Оскільки $g(t-\tau, x, y)$, як функція аргументів $(t, x) \in (\tau, \infty) \times \mathbb{R}^d$, задовольняє рівняння (3.3) при фіксованих $\tau > 0$ та $y \in \mathbb{R}^d$, нам залишається довести, що при фіксованих $x \notin S$ та $t > 0$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_S g(\varepsilon, x, y) \psi(t, y) d\sigma_y = 0.$$

Але це випливає з нерівності (2.2):

$$\int_S g(\varepsilon, x, y) |\psi(t, y)| d\sigma_y \leq M N |S| t^{-\beta} \frac{\varepsilon}{(\varepsilon^{1/\alpha} + \rho(x, S))^{d+\alpha}}.$$

Таким чином, рівність (3.3) справджується в області $(t, x) \in (0, \infty) \times (\mathbb{R}^d \setminus S)$.

Цей результат кореспондується з відповідним класичним результатом: поза поверхнею-носієм потенціалу простого шару він є розв'язком відповідного параболічного рівняння (див. [20, Гл. V]).

Нехай тепер $S = \{x \in \mathbb{R}^d : (x, \nu) = 0\}$ – гіперплощина в \mathbb{R}^d ортогональна до заданого одиничного вектора $\nu \in \mathbb{R}^d$. Зосередимось на випадку $d \geq 2$. Одновимірний випадок буде розглянуто в пункті 3.3. Враховуючи (2.9), одержуємо рівність

$$\int_S e^{i(\xi, y)} g(t, x, y) d\sigma_y = e^{i(\tilde{x}, \xi)} \frac{1}{\pi} \int_0^\infty e^{-ct(|\xi|^2 + \rho^2)^{\alpha/2}} \cos(\rho(x, \nu)) d\rho, \quad (3.4)$$

що справджується при всіх $t > 0$, $x \in \mathbb{R}^d$, $\xi \in S$, де \tilde{x} – ортогональна проекція точки x на гіперплощину S . Комбінуючи (2.1), (2.2) при $d = 1$ та (3.4) з $\xi = 0$, одержимо оцінку

$$\int_S g(t, x, y) d\sigma_y \leq N \frac{t}{(t^{1/\alpha} + |(x, \nu)|)^{1+\alpha}}, \quad (3.5)$$

правильну при всіх $t > 0$ та $x \in \mathbb{R}^d$ з деякою сталою $N > 0$ (N – стала з (2.2) при $d = 1$).

З нерівності (3.5) випливає наступна оцінка для потенціалу простого шару (3.1) (N – стала з (3.5))

$$|v(t, x, \psi)| \leq MN \frac{\Gamma(1 - \beta)\Gamma(1 - 1/\alpha)}{\Gamma(2 - \beta - 1/\alpha)} t^{1-\beta-1/\alpha}, \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R}^d,$$

яка, очевидно, збігається з оцінкою (3.2). Це дозволяє стверджувати, що функція v є не тільки добре визначеною, а і неперервною відносно аргументів $t > 0$ та $x \in \mathbb{R}^d$.

Доведення того факту, що виконується (3.3) в області

$$(t, x) \in (0, \infty) \times (\mathbb{R}^d \setminus S)$$

майже нічим (крім деяких технічних моментів) не відрізняється від наведеного вище. Пропонуємо зацікавленому читачеві зробити це самостійно.

3.2. Теорема про стрибок. Почнемо з розгляду випадку, коли S є обмеженою замкненою поверхнею в \mathbb{R}^d , яка належить до класу $H^{1+\gamma}$ з деяким $\gamma \in (0, 1)$. Фіксуємо точку $x_0 \in S$ і покажемо, що при $0 < \tau < t$ існує інтеграл

$$\int_S g^{\nu(x_0)}(t - \tau, x_0, y) \psi(\tau, y) d\sigma_y,$$

де ψ – функція задана на $(0, \infty) \times S$, що задовольняє умови пункту 3.1, а $g^{\nu(x)}(t, x, y) = \mathbf{B}_{\nu(x)} g(t, \cdot, y)(x)$. Позначивши цей інтеграл через I і

врахувавши співвідношення ($\nu \in \mathbb{R}^d$ – довільний орт)

$$g^\nu(t, x, y) = \frac{1}{\alpha} \frac{(y - x, \nu)}{t} g(t, x, y), \quad (3.6)$$

яке легко доводиться (використовуємо означення оператора \mathbf{B} та інтегрування частинами), можемо записати

$$I = \frac{1}{\alpha(t - \tau)} \int_S (y - x_0, \nu(x_0)) g(t - \tau, x_0, y) \psi(\tau, y) d\sigma_y = I' + I'',$$

де I' відповідає інтегралу по $S_{r_0/2}(x_0) = S \cap B_{r_0/2}(x_0)$, а I'' – інтегралу по $S \setminus S_{r_0/2}(x_0)$ (число r_0 визначене в п. 2.2).

При всіх $x \in S$ для $y \in S_{r_0/2}(x)$, використовуючи локальну систему координат (див. там же), будемо мати

$$|(y - x, \nu(x))| \leq P |y - x|^{1+\gamma}, \quad (3.7)$$

де $P > 0$ – деяка стала, що не залежить від x .

Справді, в локальній системі координат, пов'язаній з точкою x , можемо записати ($u^{(d)} = (u^1, u^2, \dots, u^{d-1})$, $P > 0$ – деяка стала)

$$(y - x, \nu(x)) = F_x(u^{(d)}), \quad |F_x(u^{(d)})| \leq P |u^{(d)}|^{1+\gamma}.$$

Але ж $|u^{(d)}|^2 = |y - x|^2 - (y - x, \nu(x))^2 \leq |y - x|^2$ і (3.7) справджується.

Оцінка (2.2) дозволяє тепер твердити, що (C – деяка додатна стала)

$$|I'| \leq MNP \tau^{-\beta} \int_{S_{r_0/2}(x_0)} \frac{|y|^{1+\gamma} d\sigma_y}{((t - \tau)^{1/\alpha} + |y|)^{d+\alpha}} \leq C \tau^{-\beta} (t - \tau)^{-1+\gamma/\alpha}.$$

Далі, існують додатне число δ_0 і скінченна кількість точок x_1, x_2, \dots, x_{m_0} на поверхні S , таких, що

$$S \setminus S_{r_0/2}(x_0) \subseteq \bigcup_{k=1}^{m_0} S_{r_0/2}(x_k)$$

і при цьому

$$\inf_{y \in S_{r_0/2}(x_k)} |y - x_0| \geq \delta_0 \quad \text{при всіх } k = 1, 2, \dots, m_0.$$

Але тоді $|I''| \leq C \tau^{-\beta} ((t - \tau)^{1/\alpha} + \delta_0)^{-d-\alpha}$, де C – деяка додатна стала.

З нерівностей для I' та I'' випливає таке твердження.

Лема 3.1. *Нехай S – обмежена замкнена поверхня класу $H^{1+\gamma}$, а $(\psi(t, x))_{t>0, x \in S}$ – неперервна функція, що задовольняє умову*

$$|\psi(t, x)| \leq M t^{-\beta}, \quad t > 0, x \in S$$

з деякими сталими $M > 0$ та $\beta < 1$, то для будь-якого $T > 0$ існує така стала $C_T > 0$, що при всіх $(t, x) \in (0, T] \times S$ справджується оцінка

$$\left| \int_0^t d\tau \int_S g^{\nu(x)}(t - \tau, x, y) \psi(\tau, y) d\sigma_y \right| \leq C_T t^{-\beta + \gamma/\alpha}. \quad (3.8)$$

Зауваження 3.1. Умова неперервності функції ψ в доведенні леми не використовується, як і при доведенні коректності визначення потенціалу простого шару та виконання рівності (3.3). Ця вимога відіграє свою роль при доведенні тереми про стрибок (див. Теорему 3.1, нижче).

Інтеграл в лівій частині (3.8) зветься прямим значенням дії оператора $\mathbf{B}_{\nu(x)}$, $x \in S$, на потенціал простого шару $v(t, x, \psi)$ за просторовою змінною в точці $x \in S$. Позначатимемо його через $\mathbf{B}_{\nu(x)}^{d.v.} v(t, \cdot, \psi)(x)$. Лема 3.1 в класичній теорії звучить так: пряме значення конормальної похідної за просторовою змінною потенціалу простого шару існує.

Зауваження 3.2. Як і в класичній теорії, $\mathbf{B}_{\nu(x)}^{d.v.} v(t, \cdot, \psi)(x)$ є неперервною функцією аргументів $(t, x) \in (0, \infty) \times S$.

Для кожних $t > 0$, $x_0 \in S$ та $x \notin S$ розглянемо тепер інтеграл

$$\int_0^t d\tau \int_S g^{\nu(x_0)}(t - \tau, x, y) \psi(\tau, y) d\sigma_y. \quad (3.9)$$

Його існування випливає з наступних міркувань:

$$\begin{aligned} \left| \int_S g^{\nu(x_0)}(t - \tau, x, y) \psi(\tau, y) d\sigma_y \right| &\leq \\ &\leq \frac{1}{\alpha} N M \tau^{-\beta} \int_S \frac{|y - x| d\sigma_y}{((t - \tau)^{1/\alpha} + |y - x|)^{d+\alpha}} \leq \\ &\leq \frac{1}{\alpha} N M \tau^{-\beta} \int_S \frac{d\sigma_y}{((t - \tau)^{1/\alpha} + |y - x|)^{d+\alpha-1}} \leq \\ &\leq \frac{1}{\alpha} N M |S| \tau^{-\beta} ((t - \tau)^{1/\alpha} + \rho(x, S))^{-d-\alpha+1}, \end{aligned}$$

де N – стала з оцінки (2.2), звідки

$$\begin{aligned} \int_0^t d\tau \int_S |g^{\nu(x_0)}(t - \tau, x, y) \psi(\tau, y)| d\sigma_y &\leq \\ &\leq \frac{1}{\alpha} N M |S| \int_0^t \tau^{-\beta} ((t - \tau)^{1/\alpha} + \rho(x, S))^{-d-\alpha+1} d\tau, \end{aligned}$$

і права частина тут скінченна при всіх $t > 0$ та $x \notin S$.

Інтеграл (3.9) є результатом застосування оператора $\mathbf{B}_{\nu(x_0)}$, $x_0 \in S$, до потенціалу простого шару (3.1) в точці $(t, x) \in (0, \infty) \times (\mathbb{R}^d \setminus S)$. Позначимо інтеграл (3.9) через $v^{\nu(x_0)}(t, x, \psi)$. Нашим завданням тепер буде дослідити поведінку функції $v^{\nu(x_0)}(t, x, \psi)$ коли $x \rightarrow x_0$. Як і в класиці, функція $v^{\nu(x_0)}$ при переході через поверхню S робить стрибок. Точніше, справедливе таке твердження.

Теорема 3.1. *Нехай S – обмежена замкнена поверхня в \mathbb{R}^d класу $H^{1+\gamma}$, що розділяє множину $\mathbb{R}^d \setminus S$ на дві відкриті підмножини: внутрішню D_- та зовнішню D_+ , $\nu(x)$ – орт зовнішньої нормалі до поверхні S в точці $x \in S$. Нехай дійснозначна функція $(\psi(t, x))_{t>0, x \in S}$ – неперервна та задовольняє умову $|\psi(t, x)| \leq M t^{-\beta}$ з деякими сталими $M > 0$ та $\beta < 1$.*

Тоді при фіксованих $t > 0$ та $x_0 \in S$ справджуються співвідношення

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0 \pm} \int_0^t d\tau \int_S g^{\nu(x_0)}(t - \tau, x, y) \psi(\tau, y) d\sigma_y = \\ = \mp \frac{1}{2} \psi(t, x_0) + \int_0^t d\tau \int_S g^{\nu(x_0)}(t - \tau, x_0, y) \psi(\tau, y) d\sigma_y, \end{aligned}$$

де $x \rightarrow x_0+$ (відповідно x_0-) означає, що x наближається до x_0 вздовж довільної кривої, розташованої в деякому замкненому обмеженому конусі \mathcal{K} в \mathbb{R}^d з вершиною в точці x_0 , такому, що $\mathcal{K} \subset D_+ \cup \{x_0\}$ (відповідно $\mathcal{K} \subset D_- \cup \{x_0\}$).

Доведення. Доведення цієї теореми багато в чому повторює доведення класичного результату (див. [20, Гл. V, Теорема 1]), хоча є і певні відмінності. Зокрема, досить розглянути лише випадок, коли x наближається до x_0 вздовж нормалі $\nu(x_0)$, тобто, $x = x_0 + \delta \nu(x_0)$, де $\delta \in \mathbb{R}$ і $\delta \rightarrow 0$. Тоді, враховуючи (3.6), матимемо

$$\begin{aligned} v^{\nu(x_0)}(t, x, \psi) = \frac{1}{\alpha} \int_0^t \frac{d\tau}{t - \tau} \int_S (y - x_0, \nu(x_0)) g(t - \tau, x, y) \psi(\tau, y) d\sigma_y - \\ - \frac{1}{\alpha} \delta \int_0^t \frac{d\tau}{t - \tau} \int_S g(t - \tau, x, y) \psi(\tau, y) d\sigma_y = J_1 + J_2. \end{aligned}$$

Доданок J_1 в цій рівності можна записати так:

$$\begin{aligned} J_1 = \mathbf{B}_{\nu(x_0)}^{d.v.} v(t, \cdot, \psi)(x_0) + \\ + \frac{1}{\alpha} \int_0^t \frac{d\tau}{t - \tau} \int_S (y - x_0, \nu(x_0)) (g(t - \tau, x, y) - g(t - \tau, x_0, y)) \times \\ \times \psi(\tau, y) d\sigma_y = \mathbf{B}_{\nu(x_0)}^{d.v.} v(t, \cdot, \psi)(x_0) + J'_1. \end{aligned}$$

Доведемо, що $\lim_{\delta \rightarrow 0} J'_1 = 0$. Для цього подамо J'_1 у вигляді суми інтегралів (помножених на $\frac{1}{\alpha}$) від тієї ж функції по множинах:

$$(0, t - \rho) \times S, \quad (t - \rho, t) \times S_{r_0/2}(x_0), \quad (t - \rho, t) \times S \setminus S_{r_0/2}(x_0),$$

з деяким $0 < \rho < t$ (зауважимо, що $t > 0$ фіксоване). Називатимемо їх першим, другим та третім, відповідно. Почнемо з оцінювання другого та третього інтегралів. Оцінюючи другий інтеграл, можемо записати (згадуємо нерівність (3.7))

$$\begin{aligned} & \left| \int_{t-\rho}^t \frac{d\tau}{t-\tau} \int_{S_{r_0/2}(x_0)} (y - x_0, \nu(x_0)) (g(t - \tau, x, y) - g(t - \tau, x_0, y)) \psi(\tau, y) d\sigma_y \right| \leq \\ & \leq MNP \int_{t-\rho}^t \frac{d\tau}{\tau^\beta} \int_{S_{r_0/2}(x_0)} \frac{|y - x_0|^{1+\gamma}}{((t - \tau)^{1/\alpha} + |y - x|)^{d+\alpha}} d\sigma_y + \\ & + MNP \int_{t-\rho}^t \frac{d\tau}{\tau^\beta} \int_{S_{r_0/2}(x_0)} \frac{|y - x_0|^{1+\gamma}}{((t - \tau)^{1/\alpha} + |y - x_0|)^{d+\alpha}} d\sigma_y = I_2. \end{aligned}$$

Позначимо через \tilde{y} ортогональну проекцію $y \in S_{r_0/2}(x_0)$ на площину, дотичну до S в точці x_0 . Очевидно, $|y - x| \geq |\tilde{y} - x_0|$. З іншого боку, виконується нерівність

$$0 < C_1 \leq \frac{|y - z|}{|\tilde{y} - z|} \leq C_2$$

для $y \in S_{r_0/2}(x_0)$ та $z = x_0 + \zeta \nu(x_0)$ при $\zeta \in [-|\delta|, |\delta|]$ з деякими сталими C_1 і C_2 (це доведено в §1 глави V книги [20]). Тому, переходячи до локальних координат з початком в точці x_0 , запишемо нерівність (через Δ_{x_0} позначено певну обмежену область в \mathbb{R}^{d-1} , а \tilde{C} та \hat{C} деякі додатні сталі)

$$\begin{aligned} I_2 & \leq \tilde{C} \int_{t-\rho}^t \frac{d\tau}{\tau^\beta} \int_{\Delta_{x_0}} \frac{|\tilde{y}|^{1+\gamma} d\tilde{y}}{((t - \tau)^{1/\alpha} + |\tilde{y}|)^{d+\alpha}} \leq \\ & \leq \frac{\tilde{C}}{(t - \rho)^\beta} \int_{t-\rho}^t d\tau \int_{\mathbb{R}^{d-1}} \frac{|\tilde{y}|^{1+\gamma} d\tilde{y}}{((t - \tau)^{1/\alpha} + |\tilde{y}|)^{d+\alpha}} = \frac{\hat{C}}{(t - \rho)^\beta} \rho^{\frac{\gamma}{\alpha}}. \end{aligned}$$

Тому другий інтеграл можна зробити як завгодно малим вибором малого ρ .

Третій інтеграл оцінюється наступним чином:

$$\begin{aligned} & \left| \int_{t-\rho}^t \frac{d\tau}{t-\tau} \int_{S \setminus S_{r_0/2}(x_0)} (y-x_0, \nu(x_0))(g(t-\tau, x, y) - g(t-\tau, x_0, y)) \psi(\tau, y) d\sigma_y \right| \leq \\ & \leq MN \int_{t-\rho}^t \frac{d\tau}{\tau^\beta} \int_{S \setminus S_{r_0/2}(x_0)} \frac{|y-x_0|}{((t-\tau)^{1/\alpha} + |y-x|)^{d+\alpha}} d\sigma_y + \\ & + MN \int_{t-\rho}^t \frac{d\tau}{\tau^\beta} \int_{S \setminus S_{r_0/2}(x_0)} \frac{|y-x_0|}{((t-\tau)^{1/\alpha} + |y-x_0|)^{d+\alpha}} d\sigma_y = I_3. \end{aligned}$$

Врахуємо вимірність та обмеженість поверхні S , а також нерівності

$$|y-x_0| \geq \delta_0, \quad |y-x| \geq |y-x_0| - |\delta| \geq \delta_0 - |\delta|,$$

які справджуються при всіх $y \in S \setminus S_{r_0/2}(x_0)$. Тоді, взявши $|\delta| < \delta_0$ матимемо (C – деяка додатна стала)

$$I_3 \leq C (\delta_0 - |\delta|)^{-d-\alpha} (t^{1-\beta} - (t-\rho)^{1-\beta}).$$

Права частина тут може бути зроблена як завгодно малою вибором малого ρ .

Тепер зафіксуємо таке $\rho > 0$, щоб сума другого та третього інтегралів була досить малою, і розглянемо перший інтеграл

$$\int_0^{t-\rho} \frac{d\tau}{t-\tau} \int_S (y-x_0, \nu(x_0))(g(t-\tau, x, y) - g(t-\tau, x_0, y)) \psi(\tau, y) d\sigma_y.$$

Позначивши цей інтеграл через Q , зауважимо, що функція $g(t-\tau, x, y)$ рівномірно неперервна на множинах $[0, t-\rho] \times K_1 \times K_2$ зміни (τ, x, y) , де K_1 та K_2 – довільні компакти в \mathbb{R}^d . Тому

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} Q = 0$$

(нагадаємо, що $x = x_0 + \delta\nu(x_0)$). Цим завершується доведення співвідношення: $\lim_{\delta \rightarrow 0} J'_1 = 0$. Отже,

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} J_1 = \mathbf{B}_{\nu(x_0)}^{d.v.} v(t, \cdot, \psi)(x_0). \quad (3.10)$$

Залишається дослідити поведінку J_2 при $\delta \rightarrow 0$. Представимо J_2 у вигляді суми $J_2 = \sum_{k=1}^4 J_2^{(k)}$, де

$$J_2^{(1)} = -\frac{\delta}{\alpha} \psi(t, x_0) \int_{t-\rho}^t \frac{d\tau}{t-\tau} \int_{S_\varepsilon(x_0)} g(t-\tau, x, y) d\sigma_y,$$

$$J_2^{(2)} = \frac{\delta}{\alpha} \int_{t-\rho}^t \frac{d\tau}{t-\tau} \int_{S_\varepsilon(x_0)} g(t-\tau, x, y) (\psi(t, x_0) - \psi(\tau, y)) d\sigma_y,$$

$$J_2^{(3)} = -\frac{\delta}{\alpha} \int_0^{t-\rho} \frac{d\tau}{t-\tau} \int_{S_\varepsilon(x_0)} g(t-\tau, x, y) \psi(\tau, y) d\sigma_y,$$

$$J_2^{(4)} = -\frac{\delta}{\alpha} \int_0^t \frac{d\tau}{t-\tau} \int_{S \setminus S_\varepsilon(x_0)} g(t-\tau, x, y) \psi(\tau, y) d\sigma_y$$

з деякими сталими $0 < \varepsilon < \frac{r_0}{2}$ (r_0 означено в п. 2.2), $0 < \rho < t$.

Для оцінки $J_2^{(4)}$ при фіксованому $\varepsilon > 0$ використаємо міркування, подібні до тих, що доводять Лему 3.1 (див. оцінювання там величини I''), а саме, існують такі точки $x_k \in S \setminus S_\varepsilon(x_0)$, $k = 1, 2, \dots, m_0$, та таке число $p_0 > 0$, що $S \setminus S_\varepsilon(x_0) \subseteq \bigcup_{k=1}^{m_0} S_{r_0/2}(x_k)$ і при цьому $\inf_{|\zeta| \leq |\delta|} \inf_{y \in S_{r_0/2}(x_k)} |y - x_0 - \zeta \nu(x_0)| \geq p_0$ при всіх $k = 1, 2, \dots, m_0$ (числа m_0 та p_0 залежать від ε). Тому для фіксованого $\varepsilon > 0$ маємо

$$|J_2^{(4)}| \leq \frac{1}{\alpha} m_0 M N |\delta| \int_0^t \tau^{-\beta} ((t-\tau)^{1/\alpha} + p_0)^{-d-\alpha} d\tau \rightarrow 0,$$

коли $\delta \rightarrow 0$.

Далі, при фіксованому $\rho > 0$, маємо оцінку

$$|J_2^{(3)}| \leq \frac{1}{\alpha(1-\beta)} M N |S| \rho^{-\frac{d+\alpha}{\alpha}} |\delta| \rightarrow 0,$$

коли $\delta \rightarrow 0$.

Якщо тепер довести, що існує $\lim_{\delta \rightarrow 0} J_2^{(1)}$ при фіксованих $\rho > 0$ та $\varepsilon > 0$, то звідси буде впливати, що значення $\overline{\lim}_{\delta \rightarrow 0} |J_2^{(2)}|$ може бути зроблене як завгодно малим вибором ρ та ε внаслідок того, що функція ψ неперервна в точці (t, x_0) .

Позначимо через Π_{x_0} гіперплощину в \mathbb{R}^d , дотичну до S в точці x_0 і обчислимо границю інтеграла

$$R = \frac{\delta}{\alpha} \int_{t-\rho}^t \frac{d\tau}{t-\tau} \int_{\Pi_{x_0}} g(t-\tau, x_0 + \delta \nu(x_0), y) d\sigma_y,$$

коли $\delta \rightarrow 0$. Використовуючи формулу (2.9), можемо записати

$$R = \frac{\delta}{\pi\alpha} \int_{t-\rho}^t \frac{d\tau}{t-\tau} \int_0^\infty e^{-c(t-\tau)r^\alpha} \cos(r\delta) dr.$$

Інтегрування частинами у внутрішньому інтегралі приводить до виразу

$$R = \frac{c}{\pi} \int_{t-\rho}^t d\tau \int_0^\infty e^{-c(t-\tau)r^\alpha} r^\alpha \frac{\sin(r\delta)}{r} dr.$$

Так звана друга теорема про середнє значення в інтегральному численні дозволяє тут змінити порядок інтегрування (див., наприклад, [4, с. 18], [19, т. 2, с. 117, 600]). Тому

$$R = \frac{1}{2} \operatorname{sign} \delta - \frac{1}{\pi} \int_0^\infty e^{-c\rho r^\alpha} \frac{\sin(r\delta)}{r} dr,$$

звідки $\lim_{\delta \rightarrow 0^\pm} R = \pm \frac{1}{2}$.

Тепер неважко зрозуміти, що

$$\lim_{\delta \rightarrow 0^\pm} J_2^{(1)} = \mp \frac{1}{2} \psi(t, x_0) + R_1(\varepsilon, \rho),$$

де числа $\varepsilon > 0$ та $\rho > 0$ вибрані досить малими, а (нагадаємо, що $x = x_0 + \delta\nu(x_0)$)

$$R_1(\varepsilon, \rho) = \lim_{\delta \rightarrow 0^\pm} \frac{1}{\alpha} \delta \psi(t, x_0) \left(\int_0^\rho \frac{d\tau}{\tau} \int_{S_\varepsilon(x_0)} g(\tau, x, z) d\sigma_z - \int_0^\rho \frac{d\tau}{\tau} \int_{\Pi_{x_0}} g(\tau, x, z) d\sigma_z \right).$$

Розглянемо

$$\begin{aligned} & \delta \left(\int_0^\rho \frac{d\tau}{\tau} \int_{S_\varepsilon(x_0)} g(\tau, x, z) d\sigma_z - \int_0^\rho \frac{d\tau}{\tau} \int_{\Pi_{x_0}} g(\tau, x, z) d\sigma_z \right) = \\ & = \delta \left(\int_0^\rho \frac{d\tau}{\tau} \int_{S_\varepsilon(x_0)} g(\tau, x, z) d\sigma_z - \int_0^\rho \frac{d\tau}{\tau} \int_{\Pi_\varepsilon(x_0)} g(\tau, x, z) d\sigma_z \right) - \\ & \quad - \delta \int_0^\rho \frac{d\tau}{\tau} \int_{\Pi_{x_0} \setminus \Pi_\varepsilon(x_0)} g(\tau, x, z) d\sigma_z = J' - J'', \end{aligned}$$

де $\Pi_\varepsilon(x_0)$ ортогональна проекція $S_\varepsilon(x_0)$ на Π_{x_0} .

Зважаючи на властивості поверхні S , легко зрозуміти, що існує така стала $\theta > 0$, що для кожного $z \in \Pi_{x_0} \setminus \Pi_\varepsilon(x_0)$ виконується $|z| \geq \theta$. Тому

$$|J''| \leq C|\delta|\rho \int_\theta^\infty \frac{r^{d-2} dr}{(\delta^2 + r^2)^{(d+\alpha)/2}} = C\rho \int_{\theta/|\delta|}^\infty \frac{r^{d-2} dr}{(1+r^2)^{(d+\alpha)/2}} \frac{1}{|\delta|^\alpha}$$

з деякою сталою $C > 0$. Звідси, користуючись правилом Лопітала, одержуємо, що $J'' \rightarrow 0$ при $\delta \rightarrow 0$.

Для оцінки J' перейдемо до локальної системи координат з початком в точці x_0 та ортом останньої осі $\nu(x_0)$. Оскільки

$$S_\varepsilon(x_0) = \{u \in \mathbb{R}^d : u^d = F_{x_0}(u^{(d)}), u^{(d)} \in D_{x_0} \subset \mathbb{R}^{d-1}\},$$

$$\Pi_\varepsilon(x_0) = \{u \in \mathbb{R}^d : u^d = 0, u^{(d)} \in D_{x_0} \subset \mathbb{R}^{d-1}\},$$

де D_{x_0} – деяка обмежена замкнена множина, яка залежить тільки від особливостей поверхні S , і через $u^{(d)}$ позначено вектор $(u^1, u^2, \dots, u^{d-1})$, перетворюючи поверхневі інтеграли на кратні, одержуємо

$$\begin{aligned} & \int_{S_\varepsilon(x_0)} g(\tau, x, z) d\sigma_z - \int_{\Pi_\varepsilon(x_0)} g(\tau, x, z) d\sigma_z = \\ & = \int_{D_{x_0}} g\left(\tau, (0^{(d)}, \delta), (u^{(d)}, F_{x_0}(u^{(d)}))\right) \left(\sqrt{1 + (\nabla F_{x_0}(u^{(d)}))^2} - 1\right) du^{(d)} + \\ & + \int_{D_{x_0}} \left(g\left(\tau, (0^{(d)}, \delta), (u^{(d)}, F_{x_0}(u^{(d)}))\right) - g\left(\tau, (0^{(d)}, \delta), (u^{(d)}, 0)\right)\right) du^{(d)} = \\ & = Q_1 + Q_2 \end{aligned}$$

Далі врахуємо, що поверхня S належить до класу $H^{1+\gamma}$. Це приводить до нерівностей

$$\begin{aligned} \sqrt{1 + (\nabla F_{x_0}(u^{(d)}))^2} - 1 & \leq (\nabla F_{x_0}(u^{(d)}))^2 \leq C |u^{(d)}|^{2\gamma}, \\ |F_{x_0}(u^{(d)})| & \leq C |u^{(d)}|^{1+\gamma}, \end{aligned}$$

що справджуються при всіх $u^{(d)} \in D_{x_0}$ з деякою сталою $C > 0$. Тоді, використавши властивості поверхні S та нерівність (2.2), одержимо

$$\begin{aligned} |Q_1| & \leq C \int_{D_{x_0}} \frac{\tau |v|^{2\gamma} dv}{\left(\tau^{1/\alpha} + \sqrt{|v|^2 + (F_{x_0}(v) - \delta)^2}\right)^{d+\alpha}} \leq \\ & \leq C \int_{D_{x_0}} \frac{\tau |v|^{2\gamma} dv}{\left(\tau^{1/\alpha} + k_1 \sqrt{|v|^2 + \delta^2}\right)^{d+\alpha}}, \\ |Q_2| & \leq C \int_{D_{x_0}} \frac{\tau |v|^{1+\gamma} dv}{\left(\tau^{1/\alpha} + \sqrt{|v|^2 + (\theta F_{x_0}(v) - \delta)^2}\right)^{d+\alpha+1}} \leq \\ & \leq C \int_{D_{x_0}} \frac{\tau |v|^\gamma dv}{\left(\tau^{1/\alpha} + k_2 \sqrt{|v|^2 + \delta^2}\right)^{d+\alpha}}, \end{aligned}$$

де $C > 0$, $k_1 > 0$, $k_2 > 0$ деякі сталі, $\theta = \theta_{\tau, \delta} \in (0, 1)$.

Таким чином, маємо

$$\left| \delta \int_0^\rho \frac{d\tau}{\tau} \left(\int_{S_\varepsilon(x_0)} - \int_{\Pi_{x_0}} \right) g(\tau, x, z) d\sigma_z \right| \leq$$

$$\begin{aligned} &\leq C|\delta| \int_0^\rho \frac{d\tau}{\tau} \int_{D_{x_0}} \frac{\tau|v|^\gamma(1+|v|^\gamma) dv}{\left(\tau^{1/\alpha} + k\sqrt{|v|^2 + \delta^2}\right)^{d+\alpha}} \leq \\ &\leq \hat{C}|\delta| \int_0^\rho d\tau \int_0^{\varepsilon_0} \frac{r^{d-2+\gamma} dr}{\left(\tau^{1/\alpha} + k\sqrt{r^2 + \delta^2}\right)^{d+\alpha}} = J, \end{aligned}$$

де $\hat{C} > 0$, $\varepsilon_0 > 0$ деякі сталі, $k = \min(k_1, k_2)$. Змінюючи порядок інтегрування та враховуючи рівність

$$\int_0^\infty \frac{d\tau}{(\tau^{1/\alpha} + a)^{d+\alpha}} = \alpha B(d, \alpha) a^{-d},$$

що правильна при кожному $a > 0$, одержуємо оцінку

$$J \leq \tilde{C}|\delta| \int_0^{\varepsilon_0} \frac{r^{d-2+\gamma} dr}{(\sqrt{r^2 + \delta^2})^d} \leq \tilde{C} \int_0^\infty \frac{r^{d-2+\gamma} dr}{(\sqrt{r^2 + 1})^d} |\delta|^\gamma$$

з деякою сталою $\tilde{C} > 0$. Тому $J' \rightarrow 0$ при $\delta \rightarrow 0$.

Цим завершується доведення факту $\lim_{\delta \rightarrow 0^\pm} J_2 = \mp \frac{1}{2} \psi(t, x_0)$, який разом з (3.10) і завершує доведення теореми. \square

Нехай тепер $S = \{x \in \mathbb{R}^d : (x, \nu) = 0\}$ із заданим одиничним вектором $\nu \in \mathbb{R}^d$ ($d \geq 2$). Зрозуміло, що $\mathbf{B}_\nu^{d.v.\nu}(t, \cdot, \psi)(x) = 0$ для $t > 0$ та $x \in S$, оскільки $g^\nu(t - \tau, x, y) = 0$ для $x \in S$ та $y \in S$ відповідно до (3.6). Тому теорема про стрибок (в даному випадку) має наступне формулювання.

Теорема 3.2. *Нехай S – гіперплощина ортогональна до деякого одиничного вектора $\nu \in \mathbb{R}^d$, функція $(\psi(t, x))_{t>0, x \in S}$ – неперервна та задовольняє нерівність $|\psi(t, x)| \leq M t^{-\beta}$ при всіх $t > 0$, $x \in S$ з деякими сталими $M > 0$ і $\beta < 1$. Тоді справджуються співвідношення*

$$\lim_{z \rightarrow x^\pm} \int_0^t d\tau \int_S g^\nu(t - \tau, z, y) \psi(\tau, y) d\sigma_y = \mp \frac{1}{2} \psi(t, x) \quad (3.11)$$

для всіх $t > 0$ та $x \in S$, де $z \rightarrow x+$ (відповідно, $z \rightarrow x-$) означає, що z наближається до x вздовж довільної кривої, що лежить в скінченному замкненому конусі \mathcal{K} в \mathbb{R}^d з вершиною в точці x такому, що

$$\mathcal{K} \subset \{z \in \mathbb{R}^d : (z, \nu) > 0\} \cup \{x\}$$

(відповідно, $\mathcal{K} \subset \{z \in \mathbb{R}^d : (z, \nu) < 0\} \cup \{x\}$).

Зауваження 3.3. В деяких випадках умови на густину потенціалу простого шару виявляються занадто обмежливими. Твердження Теорем 3.1 та 3.2 справджуються і при наступних умовах на функцію

$(\psi(t, x))_{t>0, x \in S}$. Досить вимагати щоб функція $(\psi(t, x))_{t>0, x \in S}$ була неперервною та для кожного $T > 0$ існувала така стала $M_T > 0$, що при всіх $t \in (0, T]$, $x \in S$ виконувалася б нерівність $|\psi(t, x)| \leq M_T t^{-\beta}$ з деякою сталою $\beta < 1$.

3.3. Одновимірний випадок. В попередніх пунктах розглядалася ситуація, коли $d \geq 2$. Нехай тут $d = 1$. Тоді, не применшуючи загальності, можемо вважати, що поверхня $S = \{0\}$ і слід розуміти

$$\int_S f(x) d\sigma_x = f(0).$$

Таким чином, задавши неперервну функцію $(\psi(t))_{t>0}$, яка задовольняє нерівність $|\psi(t)| \leq M t^{-\beta}$ з деякими $M > 0$ та $\beta < 1$, визначимо потенціал простого шару рівністю

$$v(t, x, \psi) = \int_0^t g(t - \tau, x, 0)\psi(\tau) d\tau, \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Всі міркування щодо коректності такого визначення, оцінок та властивостей функції $(v(t, x, \psi))_{t>0, x \in \mathbb{R}}$, наведені вище, залишаються в силі. Сформулюємо окремі з них.

По-перше, функція $(v(t, x, \psi))_{t>0, x \in \mathbb{R}}$ неперервна на своїй області визначення та справджується нерівність

$$|v(t, x, \psi)| \leq K t^{1-\beta-1/\alpha}, \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R}$$

з деякою додатною сталою K .

Наступне, функція $(v(t, x, \psi))_{t>0, x \in \mathbb{R}}$ задовольняє в області

$$(t, x) \in (0, \infty) \times (\mathbb{R} \setminus \{0\})$$

рівняння

$$\frac{\partial}{\partial t} v(t, x, \psi) = \mathbf{A}v(t, \cdot, \psi)(x).$$

Крім того, при всіх $t > 0$ та $x \in \mathbb{R}$ вона допускає застосування оператора \mathbf{B} за просторовою змінною під знаком інтеграла, тобто,

$$\mathbf{B}v(t, \cdot, \psi) = \int_0^t \mathbf{B}g(t - \tau, \cdot, 0)(x)\psi(\tau) d\tau.$$

Використовуючи рівності (2.9), (3.6) та інтегрування частинами одержуємо, що при $t > 0$ та $x \neq 0$ справджується рівність

$$c \int_0^t \mathbf{B}g(\tau, \cdot, 0)(x) d\tau = -\frac{1}{2} \text{sign } x + \frac{1}{\pi} \int_0^\infty e^{-ct\xi^\alpha} \frac{\sin(\xi x)}{\xi} d\xi.$$

Тому аналогічно доведенню теореми про стрибок (Теорема 3.1) без будь-яких особливостей (навіть з деяким спрощенням) доводиться співвідношення

$$\lim_{x \rightarrow 0_{\pm}} \mathbf{B}v(t, \cdot, \psi)(x) = \mp \frac{1}{2c} \psi(t), \quad t > 0.$$

4. ПОЧАТКОВО-КРАЙОВІ ЗАДАЧІ

Крайові чи початково-крайові задачі посідають важливе місце в теорії диференціальних рівнянь з частинними похідними. Для диференціальних рівнянь параболічного та еліптичного типу узагальнені розв'язки згаданих задач мають явні ймовірнісні представлення (див., наприклад, [12, с. 4-7]). В цьому параграфі ми розглядатимемо псевдодиференціальне рівняння параболічного типу (1.1) яке, як ми вже неодноразово згадували, пов'язане з ротаційно інваріантним α -стійким випадковим процесом. Початковою умовою є рівність (1.3), а граничні умови задаватимуться рівністю (1.4).

Як і в класичній теорії, сформульовану задачу ми будемо розв'язувати з використанням потенціалів простого шару та теореми про стрибок конормальної похідної від них (в нашому випадку, похідна порядку $\alpha - 1$, що задається оператором \mathbf{B}). При цьому окремо розглянемо випадок $q(x) \equiv 0$, це – так звана симетрична початково-крайова задача, та випадок $r(x) \equiv 0$ – друга початково-крайова задача. Кожного разу шукатимемо функцію Гріна чи, як ми далі будемо її називати, фундаментальний розв'язок. Для симетричної другої початково-крайової задачі це – функція g , очевидно. Тому цей випадок не потребує додаткового розгляду. В кожному випадку нас цікавитиме питання про ймовірнісні сенс та представлення відповідних розв'язків.

Необмеженість гіперплощини на відміну від обмеженої замкненої поверхні класу $H^{1+\gamma}$ та деяка відмінність теорем про стрибок в цих випадках спонукають розглядати їх окремо. Крім того, ситуація з гіперплощиною поширюється і на випадок $d = 1$, що ми регулярно робитимемо.

Якщо $\alpha = 2$ (та $c = \frac{1}{2}$), то $(x(t))_{t \geq 0}$ є вінеровим процесом. Деякі результати стосовно сформульованої задачі в цьому випадку можна знайти, зокрема, в книгах [11, 12] чи статті [1].

4.1. Друга початково-крайова задача. Нехай поверхня S в \mathbb{R}^d , (при $d \geq 2$), є замкненою обмеженою та належить до класу $H^{1+\gamma}$ з деяким $\gamma \in (0, 1)$, і нехай задані функція $\varphi \in C_b(\mathbb{R}^d)$ та неперервна

функція $(q(x))_{x \in S}$. Задача полягає в побудові такої неперервної функції $(u(t, x, \varphi))_{t > 0, x \in \mathbb{R}^d}$, яка задовольняє рівняння (1.2), початкову умову (1.3) та граничну умову

$$\left(1 + \frac{q(x)}{2}\right) \mathbf{B}_{\nu(x)} u(t, x, \varphi)(x+) = \left(1 - \frac{q(x)}{2}\right) \mathbf{B}_{\nu(x)} u(t, x, \varphi)(x-) \quad (4.1)$$

при всіх $t > 0, x \in S$.

Фундаментальний розв'язок $(\tilde{g}(t, x, y))_{t > 0, x \in \mathbb{R}^d, y \in \mathbb{R}^d}$ цієї задачі розшукуємо у такій формі:

$$\tilde{g}(t, x, y) = g(t, x, y) + \int_0^t d\tau \int_S g(t - \tau, x, z) w(\tau, z, y) q(z) d\sigma_z \quad (4.2)$$

з деякою невідомою функцією $(w(t, x, y))_{t > 0, x \in S, y \in \mathbb{R}^d}$.

Нашою метою в цьому пункті є побудова такої функції w , щоб для кожної $\varphi \in C_b(\mathbb{R}^d)$ функція

$$\tilde{u}(t, x, \varphi) = \int_{\mathbb{R}^d} \tilde{g}(t, x, y) \varphi(y) dy, \quad t > 0, x \in \mathbb{R}^d$$

задовольняла умови (1.2), (1.3), (4.1). Це і означатиме, що функція \tilde{g} є фундаментальним розв'язком другої початково-крайової задачі (1.2), (1.3), (4.1). Очевидно, що для виконання умов (1.2), (1.3) досить, щоб при кожній $\varphi \in C_b(\mathbb{R}^d)$ функція

$$v(t, x, \varphi) = \int_{\mathbb{R}^d} w(t, x, y) \varphi(y) dy, \quad t > 0, x \in S \quad (4.3)$$

задовольняла умови Зауваження 3.3 (див. с. 316). Це негайно впливатиме з властивостей функції g та потенціалу простого шару, яким є функція

$$\int_0^t d\tau \int_S g(t - \tau, x, z) v(\tau, z, \varphi) q(z) d\sigma_z$$

(див. пункти 2.3.1 та 3.1, відповідно).

Теорема про стрибок (див. п. 3.2) дозволяє твердити, що умова (4.1) буде виконуватись, якщо функція w задовольнятиме рівняння ($t > 0, x \in S, y \in \mathbb{R}^d$)

$$w(t, x, y) = g^{\nu(x)}(t, x, y) + \int_0^t d\tau \int_S g^{\nu(x)}(t - \tau, x, z) w(\tau, z, y) q(z) d\sigma_z. \quad (4.4)$$

Спочатку оцінимо функцію $(g^{\nu(x)}(t, x, y))_{t > 0, x \in S, y \in \mathbb{R}^d}$, згадавши, що для неї справджується представлення (3.6). Враховуючи оцінку (2.2) та властивості поверхні S (див. п. 2.2), одержуємо при $t > 0, x \in S$,

$y \in S$ оцінку

$$|g^{\nu(x)}(t, x, y)| \leq \frac{\hat{N}}{(t^{1/\alpha} + |y - x|)^{d+\alpha-1-\gamma}}, \quad (4.5)$$

з деякою сталою $\hat{N} > 0$. Справді, з (2.2) та (3.6) випливає

$$|g^{\nu(x)}(t, x, y)| \leq \frac{1}{\alpha} \frac{N|(y - x, \nu(x))|}{(t^{1/\alpha} + |y - x|)^{d+\alpha}}. \quad (4.6)$$

Тепер при $y \in S_{r_0/2}(x)$, використовуючи нерівність (3.7), для правої частини J нерівності (4.6) одержуємо ($C > 0$ – деяка стала)

$$J \leq \frac{C|y - x|^{1+\gamma}}{(t^{1/\alpha} + |y - x|)^{d+\alpha}}.$$

Для $y \in S \setminus S_{r_0/2}(x)$, враховуючи, що $|y - x| \geq \delta_0$, запишемо

$$J \leq \frac{1}{\alpha} \frac{N}{(t^{1/\alpha} + |y - x|)^{d+\alpha-1}} \leq \frac{1}{\alpha} \frac{N\delta_0^{-\gamma}}{(t^{1/\alpha} + |y - x|)^{d+\alpha-1-\gamma}}$$

Отже, нерівність (4.5) доведена.

Якщо ж $t > 0$, $x \in S$, $y \in \mathbb{R}^d \setminus S$, то можемо записати, що

$$|g^{\nu(x)}(t, x, y)| \leq \frac{\hat{N}}{(\rho(y, S))^{d+\alpha-1}}, \quad (4.7)$$

де $\rho(y, S) = \inf_{x \in S} |y - x|$.

Далі, розв'язуватимемо рівняння (4.4) при $t > 0$, $x \in S$, $y \in S$ методом послідовних наближень. Визначимо при $t > 0$, $x \in S$, $y \in S$ нульове наближення рівності $w_0(t, x, y) = g^{\nu(x)}(t, x, y)$ та для $k \geq 1$

$$w_k(t, x, y) = \int_0^t d\tau \int_S g^{\nu(x)}(t - \tau, x, z) w_{k-1}(\tau, z, y) q(z) dz.$$

Наступні технічні моменти залишаємо для обґрунтування читачеві. Насамперед індукцією по k , використовуючи твердження Лема 2.4, доводимо, що при всіх $t > 0$, $x \in S$, $y \in S$ та $k \geq 0$ виконуються нерівності

$$|w_k(t, x, y)| \leq R_k \frac{t^{k\gamma/\alpha}}{(t^{1/\alpha} + |y - x|)^{d+\alpha-1-\gamma}}, \quad (4.8)$$

де числова послідовність $\{R_k : k \geq 0\}$ визначається співвідношеннями:

$$R_0 = \hat{N}, \quad R_k = \hat{N} \|q\| L \left(\frac{\alpha}{k\gamma} + B \left(\frac{\gamma}{\alpha}, 1 + (k-1) \frac{\gamma}{\alpha} \right) \right) R_{k-1}$$

при $k \geq 1$, в яких \hat{N} – стала із (4.5), а L – з (2.12). Тут (і далі) для функції $(\psi(x))_{x \in S}$ позначено $\|\psi\| = \sup_{x \in S} |\psi(x)|$.

Одержані оцінки функцій $(w_k(t, x, y))_{t>0, x \in S, y \in S}$ дозволяють стверджувати, що ряд $\sum_{k=0}^{\infty} w_k(t, x, y)$ збігається абсолютно при

$$(t, x, y) \in (0, \infty) \times S \times S$$

та рівномірно по $(x, y) \in S \times S$ і локально рівномірно по $t > 0$. Його сума $(w(t, x, y))_{t>0, x \in S, y \in S}$ є неперервним розв'язком рівняння (4.4) і для кожного $T > 0$ існує така стала $C_T > 0$, що при всіх $t \in (0, T]$, $x \in S$, $y \in S$ виконується нерівність

$$|w(t, x, y)| \leq C_T \frac{1}{(t^{1/\alpha} + |y - x|)^{d+\alpha-1-\gamma}}. \quad (4.9)$$

Крім того, функція w задовольняє рівняння ($t > 0$, $x \in S$, $y \in S$)

$$w(t, x, y) = g^{\nu(x)}(t, x, y) + \int_0^t d\tau \int_S w(t - \tau, x, z) g^{\nu(z)}(\tau, z, y) q(z) d\sigma_z. \quad (4.10)$$

Останнє випливає із співвідношень ($t > 0$, $x \in S$, $y \in S$)

$$w_k(t, x, y) = \int_0^t d\tau \int_S w_{k-1}(t - \tau, x, z) g^{\nu(z)}(\tau, z, y) q(z) d\sigma_z, \quad k \geq 1, \quad (4.11)$$

які легко доводяться з допомогою індукції по k та нерівностей (4.5) і (4.8).

Співвідношення (4.10) продовжує функцію w на множину

$$(t, x, y) \in (0, \infty) \times S \times \mathbb{R}^d.$$

Підставивши одержану функцію w в праву частину (4.4) та змінюючи порядок інтегрування з врахуванням оцінок (4.5) і (4.9), доводимо, що побудована функція $(w(t, x, y))_{t>0, x \in S, y \in \mathbb{R}^d}$ задовольняє рівняння (4.4).

Оцінки (4.7) та (4.9) разом з нерівністю (2.10) дозволяють записати

$$|w(t, x, y)| \leq C_T \frac{1}{(\rho(y, S))^{d+\alpha-1}} \quad (4.12)$$

при $t \in (0, T]$, $x \in S$ та $y \in \mathbb{R}^d \setminus S$ для кожного $T > 0$ з деякою сталою $C_T > 0$.

Враховуючи нерівність (2.2) та співвідношення (3.6), можемо записати оцінку

$$|g^{\nu(x)}(t, x, y)| \leq \frac{N}{\alpha} \frac{1}{(t^{1/\alpha} + |y - x|)^{d+\alpha-1}}, \quad t > 0, \quad x \in S, \quad y \in \mathbb{R}^d.$$

Тому, домноживши обидві частини співвідношення (4.10) на $\varphi(y)$ та зінтегрувавши його по $y \in \mathbb{R}^d$ (тут враховуємо нерівність (4.12)), для

функції $(w(t, x, y))_{t>0, x \in S}$, заданої рівністю (4.3), одержуємо, що для кожної $\varphi \in C_b(\mathbb{R}^d)$, при кожному $T > 0$ виконується нерівність

$$|v(t, x, \varphi)| \leq K_T \|\varphi\| t^{-1+1/\alpha}, \quad t \in (0, T], \quad x \in S,$$

з деякою сталою $K_T > 0$.

Отже, функція $(v(t, x, \varphi))_{t>0, x \in S}$ задовольняє умови Зауваження 3.3.

Сформулюємо тепер одержаний основний результат цього пункту у вигляді теореми.

Теорема 4.1. *Функція $(\tilde{g}(t, x, y))_{t>0, x \in \mathbb{R}^d, y \in \mathbb{R}^d}$, задана рівністю (4.2), де $(w(t, x, y))_{t>0, x \in S, y \in \mathbb{R}^d}$ задовольняє рівняння (4.4), є фундаментальним розв'язком задачі (1.2), (1.3), (4.1).*

Зауважимо, що для функції \tilde{g} можна запропонувати деяке інше зображення. А саме, покладемо для $t > 0$, $x \in \mathbb{R}^d$ та $y \in S$

$$\tilde{w}(t, x, y) = g(t, x, y) + \int_0^t d\tau \int_S g(t - \tau, x, z) w(\tau, z, y) q(z) d\sigma_z.$$

Використовуючи зображення $w(\tau, z, y)$ при $\tau > 0$, $z \in S$, $y \in S$ у вигляді ряду $\sum_{k=0}^{\infty} w_k(\tau, z, y)$ та враховуючи (4.11), одержуємо, що \tilde{w} є розв'язком рівняння

$$\tilde{w}(t, x, y) = g(t, x, y) + \int_0^t d\tau \int_S \tilde{w}(t - \tau, x, z) g^{\nu(z)}(\tau, z, y) q(z) d\sigma_z$$

при $t > 0$, $x \in \mathbb{R}^d$ та $y \in S$. Як наслідок, з врахуванням (4.2) маємо наступне, дуальне до (4.2), зображення функції \tilde{g}

$$\tilde{g}(t, x, y) = g(t, x, y) + \int_0^t d\tau \int_S \tilde{w}(t - \tau, x, z) g^{\nu(z)}(\tau, z, y) q(z) d\sigma_z,$$

правильне при всіх $t > 0$, $x \in \mathbb{R}^d$ та $y \in \mathbb{R}^d \setminus S$.

Звідси легко дістати формули

$$\tilde{g}(t, x, y_{\pm}) = \left(1 \pm \frac{1}{2}q(y)\right) \tilde{w}(t, x, y),$$

справедливі при $t > 0$, $x \in \mathbb{R}^d$ та $y \in S$. Справді, з теореми про стрибок (Теорема 3.1) маємо

$$\begin{aligned} \tilde{g}(t, x, y_{\pm}) &= g(t, x, y) + \\ &+ \int_0^t d\tau \int_S \tilde{w}(t - \tau, x, z) g^{\nu(z)}(\tau, z, y) q(z) d\sigma_z \pm \\ &\pm \frac{1}{2}q(y) \tilde{w}(t, x, y) = \left(1 \pm \frac{1}{2}q(y)\right) \tilde{w}(t, x, y). \end{aligned}$$

Тому цілком природно покласти для $t > 0$, $x \in \mathbb{R}^d$ та $y \in S$

$$\tilde{g}(t, x, y) = \frac{1}{2} [\tilde{g}(t, x, y+) + \tilde{g}(t, x, y-)] = \tilde{w}(t, x, y).$$

Зауважимо, що з рівності (4.2) при $t > 0$, $x \in S$ та $y \in \mathbb{R}^d$ випливають співвідношення

$$\mathbf{B}_{\nu(x)} \tilde{g}(t, \cdot, y)(x \pm) = \left(1 \mp \frac{1}{2} q(x) \right) w(t, x, y).$$

Нехай тепер

$$S = \{x \in \mathbb{R}^d : (x, \nu) = 0\},$$

де $\nu \in \mathbb{R}^d$ – фіксований орт. Враховуючи нескінченність поверхні S , вимагатимемо додатково (до неперервності), щоб функція $(q(x))_{x \in S}$ була обмеженою. Рівняння (4.4) тепер перетворюється в рівність

$$w(t, x, y) = g^\nu(t, x, y),$$

правильну при $t > 0$, $x \in S$, $y \in \mathbb{R}^d$. Тому будемо фундаментальний розв'язок задачі (1.2), (1.3), (4.1) у вигляді ($t > 0$, $x \in \mathbb{R}^d$ та $y \in \mathbb{R}^d$)

$$\tilde{g}(t, x, y) = g(t, x, y) + \int_0^t d\tau \int_S g(t - \tau, x, z) g^\nu(\tau, z, y) q(z) d\sigma_z.$$

Для доведення того факту, що функція \tilde{g} є фундаментальним розв'язком задачі (1.2), (1.3), (4.1) зауважимо наступне. По-перше, для фіксованого $y \notin S$ вона задовольняє рівняння (1.2) в області

$$(t, x) \in (0, \infty) \times (\mathbb{R}^d \setminus S).$$

Якщо $y \in S$, то $\tilde{g}(t, x, y) = g(t, x, y)$ і отже, це рівняння задовольняється функцією $(\tilde{g}(t, x, y))_{t > 0, x \in \mathbb{R}^d}$ у всій області $(t, x) \in (0, \infty) \times \mathbb{R}^d$.

По-друге, поклавши для заданої функції $\varphi \in C_b(\mathbb{R}^d)$

$$\tilde{u}(t, x, \varphi) = \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(y) \tilde{g}(t, x, y) dy, \quad t > 0, x \in \mathbb{R}^d,$$

можемо записати

$$\tilde{u}(t, x, \varphi) = u(t, x, \varphi) + \int_0^t d\tau \int_S g(t - \tau, x, y) u^\nu(\tau, y, \varphi) q(y) d\sigma_y, \quad (4.13)$$

де

$$u^\nu(\tau, y, \varphi) = \int_{\mathbb{R}^d} g^\nu(\tau, y, z) \varphi(z) dz = \mathbf{B}_\nu u(\tau, \cdot, \varphi)(y), \quad \tau > 0, y \in S,$$

а функція u визначається рівністю

$$u(t, x, \varphi) = \int_{\mathbb{R}^d} g(t, x, y) \varphi(y) dy, \quad t > 0, x \in \mathbb{R}^d.$$

Як випливає з результатів пункту 3.1, функція \tilde{u} задовольняє умови (1.2) та (1.3). Застосовуючи тепер оператор \mathbf{B}_ν до обох сторін рівності (4.13) та використовуючи співвідношення (3.11), приходимо до наступних рівностей

$$\mathbf{B}_\nu \tilde{u}(t, \cdot, \varphi)(x \pm) = \left(1 \mp \frac{1}{2}q(x)\right) u^\nu(t, x, \varphi), \quad t > 0, x \in S.$$

Таким чином, функція \tilde{u} задовольняє граничну умову (4.1).

В одновимірному випадку функція \tilde{g} задається рівністю (див. [15])

$$\tilde{g}(t, x, y) = g(t, x, y) + \frac{qy}{\alpha} \int_0^t g(t - \tau, x, 0)g(\tau, 0, y) \frac{d\tau}{\tau} \quad (4.14)$$

для всіх $t > 0$, $x \in \mathbb{R}$ та $y \in \mathbb{R}$. Як було показано в [15], ця функція приймає не лише невід'ємні, а й від'ємні значення (якщо $q \neq 0$). Те саме стосується і функції \tilde{g} у випадку $d \geq 2$ (та $q(x) \neq 0$).

4.2. Третя початково-крайова задача.

4.2.1. *Симетрична задача.* В цьому пункті вважаємо, що в граничній умові (1.4) функція q тотожно дорівнює нулю. Тоді умова (1.4) набуває вигляду

$$\mathbf{B}_{\nu(x)} u(t, \cdot, \varphi)(x+) - \mathbf{B}_{\nu(x)} u(t, \cdot, \varphi)(x-) = r(x)u(t, x, \varphi), \quad (4.15)$$

при $t > 0$, $x \in S$. Спочатку виконаємо деякі побудови, а про фундаментальний розв'язок симетричної третьої початково-крайової задачі поговоримо під кінець цього пункту.

4.2.1.1. **Рівняння збурення.** Неважко здогадатися, що для отримання напівгрупи, пов'язаної із задачею (1.2), (1.3), (4.15), ми повинні адитивно збурити генератор \mathbf{A} процесу $(x(t))_{t \geq 0}$ оператором, чия дія на дану функцію полягає у множенні її на функцію $(r(x)\delta_S(x))_{x \in \mathbb{R}^d}$. Тут δ_S є узагальненою функцією на \mathbb{R}^d , що визначається співвідношенням $\langle \delta_S, \psi \rangle = \int_S \psi(x) d\sigma$, яке справджується для кожної пробної функції $(\psi(x))_{x \in \mathbb{R}^d}$. Відповідно до теорії збурень (див. [7]), така збурена напівгрупа буде визначатися ядром $\hat{g}(t, x, y)$, $t > 0$, $x \in \mathbb{R}^d$, $y \in \mathbb{R}^d$, що задовольняє кожне з наступної пари рівнянь

$$\hat{g}(t, x, y) = g(t, x, y) - \int_0^t d\tau \int_S g(t - \tau, x, z) \hat{g}(\tau, z, y) r(z) d\sigma_z, \quad (4.16)$$

$$\hat{g}(t, x, y) = g(t, x, y) - \int_0^t d\tau \int_S \hat{g}(t - \tau, x, z) g(\tau, z, y) r(z) d\sigma_z. \quad (4.17)$$

Таким чином, для заданої неперервної невід'ємної функції $(r(x))_{x \in S}$ розглянемо функцію $(\hat{g}(t, x, y))_{t > 0, x \in \mathbb{R}^d, y \in \mathbb{R}^d}$, що є розв'язком рівняння (4.16)

Для початку зауважимо, що рівняння (4.16) може бути розв'язане методом послідовних наближень. А саме, шукатимемо розв'язок цього рівняння у вигляді

$$\hat{g}(t, x, y) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k g_k(t, x, y), \quad (4.18)$$

де $g_0(t, x, y) = g(t, x, y)$ при всіх $t > 0$, $x \in \mathbb{R}^d$, $y \in \mathbb{R}^d$ та для $k = 1, 2, \dots$

$$g_k(t, x, y) = \int_0^t d\tau \int_S g(t - \tau, x, z) g_{k-1}(\tau, z, y) r(z) d\sigma_z. \quad (4.19)$$

Займемось тепер оцінюванням членів ряду з рівності (4.18). Із співвідношень (4.19) та нерівності (2.2) одержуємо, що

$$0 < g_k(t, x, y) \leq N \|r\| \int_0^t d\tau \int_S \frac{\tau}{(\tau^{1/\alpha} + |z - x|)^{d+\alpha}} g_{k-1}(t - \tau, z, y) d\sigma_z$$

при всіх $t > 0$, $x \in \mathbb{R}^d$, $y \in \mathbb{R}^d$ та $k = 1, 2, \dots$, де $\|r\| = \sup_{x \in S} r(x)$, а N стала з (2.2).

Індукцією по k з допомогою Лема 2.4 доводимо, що при всіх $t > 0$, $x \in \mathbb{R}^d$, $y \in \mathbb{R}^d$ та $k = 0, 1, 2, \dots$ справджується нерівність

$$g_k(t, x, y) \leq R_k \frac{t^{1+k(1-1/\alpha)}}{(t^{1/\alpha} + |y - x|)^{d+\alpha}}, \quad (4.20)$$

де числова послідовність $\{R_k : k \geq 0\}$ задовольняє рекурентне співвідношення (при $k \geq 1$)

$$R_k = R_{k-1} N L \|r\| \left(B(1 - \frac{1}{\alpha}, 2 + (k - 1)(1 - \frac{1}{\alpha})) + B(2, k(1 - \frac{1}{\alpha})) \right)$$

з $R_0 = N$, де $L > 0$ – стала з нерівності (2.12).

Таким чином, ряд в рівності (4.18) збігається абсолютно при всіх $t > 0$, $x \in \mathbb{R}^d$, $y \in \mathbb{R}^d$ та рівномірно на множині $(0, T] \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$ зміни аргументів (t, x, y) для кожного $T > 0$. Звідси робимо висновок, що його сума $(\hat{g}(t, x, y))_{t>0, x \in \mathbb{R}^d, y \in \mathbb{R}^d}$ є неперервною функцією, яка задовольняє рівняння (4.16), причому для кожного $T > 0$ існує стала $C_T > 0$ така, що при всіх $t \in (0, T]$, $x \in \mathbb{R}^d$, $y \in \mathbb{R}^d$ справджується нерівність

$$|\hat{g}(t, x, y)| \leq C_T \frac{t}{(t^{1/\alpha} + |y - x|)^{d+\alpha}}. \quad (4.21)$$

Зауваження 4.1. Функція $(\hat{g}(t, x, y))_{t>0, x \in \mathbb{R}^d, y \in \mathbb{R}^d}$ задовольняє також і рівняння (4.17).

Це стає зрозумілим, якщо довести, наприклад, індукцією по k співвідношення

$$g_k(t, x, y) = \int_0^t d\tau \int_S g_{k-1}(t - \tau, x, z) g(\tau, z, y) r(z) d\sigma_z$$

для всіх $t > 0$, $x \in \mathbb{R}^d$, $y \in \mathbb{R}^d$ та $k = 1, 2, \dots$.

Зауважимо, що розв'язки кожного з рівнянь (4.16) та (4.17) єдині в класі функцій, які задовольняють нерівність (4.21). Це впливає з того, що оцінка (4.20) при всіх $k \geq 1$ справджується для різниці кожних двох розв'язків кожного із згаданих рівнянь.

Далі буде встановлено той факт, що функція $(\hat{g}(t, x, y))_{t>0, x \in \mathbb{R}^d, y \in \mathbb{R}^d}$ є щільністю ймовірності переходу процесу Маркова, який утворюється з процесу $(x(t))_{t \geq 0}$ обривом (з інтенсивністю $(r(x))_{x \in S}$) в точках поверхні S .

4.2.1.2. ФОРМУЛА ФЕЙНМАНА-КАЦА ТА АПРОКСИМАЦІЙНА ПРОЦЕДУРА. З точки зору теорії випадкових процесів функція $f_t(x)$, $t \geq 0$, $x \in \mathbb{R}^d$, що визначається рівністю

$$f_t(x) = \int_0^t d\tau \int_S g(\tau, x, y) r(y) d\sigma_y,$$

є W-функцією для процесу $(x(t))_{t \geq 0}$, яка задовольняє умову

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^d} f_t(x) \rightarrow 0 \quad \text{коли} \quad t \rightarrow 0+$$

(див. (3.5)).

Відповідно до Теорема 6.6 з [12], існує W-функціонал $(\eta_t(r))_{t \geq 0}$ від процесу $(x(t))_{t \geq 0}$ такий, що $f_t(x) = \mathbb{E}_x \eta_t(r)$ при всіх $t > 0$ та $x \in \mathbb{R}^d$. При $r_0(x) \equiv 1$ позначимо $\eta_t = \eta_t(r_0)$, $t \geq 0$. Функціонал $(\eta_t)_{t \geq 0}$ називається локальним часом на поверхні S процесу $(x(t))_{t \geq 0}$. Ясно, що

$$\eta_t(r) = \int_0^t r(x(s)) d\eta_s, \quad t \geq 0.$$

В цьому пункті нашою метою є показати, що при всіх $t > 0$, $x \in \mathbb{R}^d$ та $\varphi \in C_b(\mathbb{R}^d)$ справджується співвідношення

$$\mathbb{E}_x \varphi(x(t)) e^{-\eta_t} = \int_{\mathbb{R}^d} \hat{g}(t, x, y) \varphi(y) dy, \quad (4.22)$$

в якому

$$(\hat{g}(t, x, y))_{t>0, x \in \mathbb{R}^d, y \in \mathbb{R}^d}$$

– побудований вище розв'язок рівнянь (4.16) та (4.17).

Для початку апроксимуємо функціонал η_t деякими простішими функціоналами від процесу $(x(t))_{t \geq 0}$. Для кожних $h > 0$ та $x \in \mathbb{R}^d$ покладемо

$$v_h(x) = \int_S g(h, x, y)r(y) d\sigma_y.$$

При фіксованому $h > 0$ ця функція є неперервною та обмеженою на \mathbb{R}^d . Визначимо (для фіксованого $h > 0$) адитивний функціонал $(\eta_t^{(h)})_{t \geq 0}$ від процесу $(x(t))_{t \geq 0}$ з допомогою співвідношення $\eta_t^{(h)} = \int_0^t v_h(x(\tau)) d\tau$. Це – W-функціонал з характеристикою

$$\mathbb{E}_x \eta_t^{(h)} = \int_0^t d\tau \int_{\mathbb{R}^d} g(\tau, x, y)v_h(y) dy = \int_0^t d\tau \int_S g(\tau + h, x, y)r(y) d\sigma_y.$$

Після нескладних перетворень одержуємо, що

$$\mathbb{E}_x \eta_t^{(h)} - \mathbb{E}_x \eta_t = \int_t^{t+h} d\tau \int_S g(\tau, x, y)r(y) d\sigma_y - \int_0^h d\tau \int_S g(\tau, x, y)r(y) d\sigma_y.$$

З нерівності (2.2) та твердження Лема 2.3 при $\theta = \alpha$ випливає, що для кожного $T > 0$ при всіх $t \in (0, T]$, $x \in \mathbb{R}^d$ та $h > 0$ справджується нерівність

$$|\mathbb{E}_x \eta_t^{(h)} - \mathbb{E}_x \eta_t| \leq C_T \frac{\alpha}{\alpha - 1} \left((t+h)^{1-1/\alpha} - t^{1-1/\alpha} + h^{1-1/\alpha} \right),$$

де $C_T > 0$ – деяка стала. Теорема 6.4 з [12] дозволяє стверджувати, що $\eta_t^{(h)} \rightarrow \eta_t$ при $h \rightarrow 0+$ в середньому квадратичному при кожному $t > 0$. Звідси одержуємо, що для кожної $\varphi \in C_b(\mathbb{R}^d)$ між функціями ($t > 0$, $x \in \mathbb{R}^d$)

$$u^{(h)}(t, x, \varphi) = \mathbb{E}_x \varphi(x(t))e^{-\eta_t^{(h)}} \quad \text{та} \quad \hat{u}(t, x, \varphi) = \mathbb{E}_x \varphi(x(t))e^{-\eta_t}$$

справджується співвідношення $\lim_{h \rightarrow 0+} u^{(h)}(t, x, \varphi) = \hat{u}(t, x, \varphi)$ в сенсі поточної збіжності.

При кожному $h > 0$ функція $(u^{(h)}(t, x, \varphi))_{t > 0, x \in \mathbb{R}^d}$ є розв'язком рівняння

$$u^{(h)}(t, x, \varphi) = u(t, x, \varphi) - \int_0^t d\tau \int_{\mathbb{R}^d} g(t - \tau, x, y)u^{(h)}(\tau, y, \varphi)v_h(y) dy, \tag{4.23}$$

в якому

$$u(t, x, \varphi) = \int_{\mathbb{R}^d} g(t, x, y)\varphi(y) dy. \tag{4.24}$$

Перейдемо тепер до границі при $h \rightarrow 0+$ в рівнянні (4.23). Зробити це нам допоможе доведена нижче лема.

Для вимірної комплекснозначної функції $(\psi(t, x))_{t \geq 0, x \in \mathbb{R}^d}$ такої, що при кожному $T > 0$ виконується $\sup_{0 \leq t \leq T, x \in \mathbb{R}^d} |\psi(t, x)| < \infty$, розглянемо її перетворення ($t > 0, x \in \mathbb{R}^d, h > 0$)

$$\psi_h(t, x) = \int_0^t d\tau \int_{\mathbb{R}^d} g(t - \tau, x, y) \psi(\tau, y) v_h(y) dy.$$

Лема 4.1. Для даних чисел $\varepsilon > 0, L > 0$ та $T > 0$ існує таке число $\delta > 0$, що нерівність

$$|\psi_h(t', x') - \psi_h(t, x)| < \varepsilon$$

виконується при всіх $h > 0, t' \in (0, T], t \in (0, T], x' \in \mathbb{R}^d, x \in \mathbb{R}^d$ і для кожної функції $(\psi(t, x))_{t \geq 0, x \in \mathbb{R}^d}$ з властивістю

$$\sup_{0 \leq t \leq T, x \in \mathbb{R}^d} |\psi(t, x)| < L,$$

якщо тільки $|t' - t| + |x' - x| < \delta$.

Доведення. Розглянемо при $0 < t < t' \leq T$ та $x' \in \mathbb{R}^d, x \in \mathbb{R}^d$ різницю $\psi_h(t', x') - \psi_h(t, x)$, подавши її у вигляді суми двох доданків

$$I_1 = \int_0^t d\tau \int_{\mathbb{R}^d} [g(t' - \tau, x', y) - g(t - \tau, x, y)] \psi(\tau, y) v_h(y) dy,$$

$$I_2 = \int_t^{t'} d\tau \int_{\mathbb{R}^d} g(t' - \tau, x', y) \psi(\tau, y) v_h(y) dy.$$

З нерівності (2.12) впливає оцінка

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^d} g(t, x, y) v_h(y) dy &= \int_S g(h + t, x, z) r(z) d\sigma_z \leq \\ &\leq \|r\| K (t + h)^{-1/\alpha} \leq \|r\| K t^{-1/\alpha}, \end{aligned}$$

тому $|I_2| \leq C (t' - t)^{1-1/\alpha}$ з деякою сталою $C > 0$. Це означає, що I_2 може бути зроблено як завгодно малим, якщо тільки малим вибрати $t' - t$.

Візьмемо тепер деяке число $\rho \in (0, t)$ і подамо I_1 у вигляді суми двох інтегралів за змінними (τ, y) від тієї ж підінтегральної функції: перший, I_1' , по множині $(0, t - \rho) \times \mathbb{R}^d$, а другий, I_1'' , по $(t - \rho, t) \times \mathbb{R}^d$.

Ввівши позначення $Q = \max(t^{-\beta}, (t - \rho)^{-\beta})$, враховуючи доведену вище нерівність запишемо

$$|I_1''| \leq M Q \int_{t-\rho}^t d\tau \int_{\mathbb{R}^d} g(t' - \tau, x', y) v_h(y) dy +$$

$$\begin{aligned} &+ M Q \int_{t-\rho}^t d\tau \int_{\mathbb{R}^d} g(t-\tau, x, y) v_h(y) dy \leq \\ &\leq M Q \|r\| K \int_{t-\rho}^t \left[(t'-\tau)^{-1/\alpha} + (t-\tau)^{-1/\alpha} \right] d\tau = \\ &= M Q \|r\| K \frac{\alpha}{\alpha-1} \left[(t'-t+\rho)^{1-1/\alpha} - (t'-t)^{1-1/\alpha} + \rho^{1-1/\alpha} \right]. \end{aligned}$$

Це дозволяє вибрати ρ таким, щоб I_1'' стало достатньо малим рівномірно відносно $t \in (0; T]$, $t' \in (0; T]$ ($t < t'$), $x \in \mathbb{R}^d$, $x' \in \mathbb{R}^d$.

Якщо тепер врахувати, що функція g рівномірно неперервна на множині $[\rho, \infty) \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$ для кожного $\rho > 0$, то для доведення того, що I_1' можна зробити малим при достатньо малих $t' - t$ та $|x' - x|$, досить довести, що

$$\sup_{h>0} \int_{\mathbb{R}^d} v_h(y) dy < \infty.$$

Але, оскільки

$$\int_{\mathbb{R}^d} v_h(y) dy = \int_S r(z) d\sigma_z \leq \|r\| |S| < \infty,$$

то лема доведена. □

З властивостей функції g , як фундаментального розв'язку задачі Коші для рівняння (1.1), випливає рівність

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(x) v_h(x) dx = \int_S \varphi(x) r(x) d\sigma, \tag{4.25}$$

справедлива для будь-якої $\varphi \in C_b(\mathbb{R}^d)$.

Лема 4.1 дозволяє вибрати послідовність $h_n \rightarrow 0^+$, $n \rightarrow \infty$ таку, що для кожної $\varphi \in C_b(\mathbb{R}^d)$ виконується

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u^{(h_n)}(t, x, \varphi) = \hat{u}(t, x, \varphi)$$

локально рівномірно по $t \geq 0$ та рівномірно по $x \in \mathbb{R}^d$.

З рівності (4.25), використовуючи твердження Лема 4.1, одержуємо

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^t d\tau \int_{\mathbb{R}^d} g(t-\tau, x, y) u^{(h_n)}(\tau, y, \varphi) v_{h_n}(y) dy &= \\ &= \int_0^t d\tau \int_S g(t-\tau, x, y) \hat{u}(\tau, y, \varphi) r(y) d\sigma_y. \end{aligned}$$

Перехід до границі в (4.23) по послідовності h_n при $n \rightarrow \infty$ приводить нас до наступного рівняння для функції \hat{u}

$$\hat{u}(t, x, \varphi) = u(t, x, \varphi) - \int_0^t d\tau \int_S g(t - \tau, x, y) \hat{u}(\tau, y, \varphi) r(y) d\sigma_y. \quad (4.26)$$

Це ж рівняння можна отримати домноживши обидві частини рівняння (4.17) на $\varphi(y)$ та зінтегрувати їх по $y \in \mathbb{R}^d$. Оскільки обмежений розв'язок рівняння (4.26) єдиний, то

$$\hat{u}(t, x, \varphi) = \int_{\mathbb{R}^d} \hat{g}(t, x, y) \varphi(y) dy \quad (4.27)$$

і рівність (4.22) доведена.

4.2.1.3. ФУНДАМЕНТАЛЬНИЙ РОЗВ'ЯЗОК.

Теорема 4.2. Побудована вище функція $(\hat{g}(t, x, y))_{t>0, x \in \mathbb{R}^d, y \in \mathbb{R}^d}$ є фундаментальним розв'язком задачі (1.2), (1.3), (4.15).

Доведення. Візьмемо довільну функцію $\varphi \in C_b(\mathbb{R}^d)$ і доведемо, що функція (4.27), яка є розв'язком рівняння (4.26), задовольняє умови задачі (1.2), (1.3), (4.15).

Функція g є фундаментальним розв'язком задачі Коші для рівняння (1.1). Таким чином, функція

$$(u(t, x, \varphi))_{t>0, x \in \mathbb{R}^d},$$

задана рівністю (4.24), задовольняє рівняння (1.1) в області

$$(t, x) \in (0, \infty) \times \mathbb{R}^d$$

та початкову умову (1.3) із заданою функцією $\varphi \in C_b(\mathbb{R}^d)$.

Нескладно зрозуміти, що функція

$$V(t, x, \varphi) = \int_0^t d\tau \int_S g(t - \tau, x, y) \hat{u}(\tau, y, \varphi) r(y) d\sigma_y,$$

визначена для $(t, x) \in (0, \infty) \times \mathbb{R}^d$, є потенціалом простого шару. З його властивостей маємо, що функція

$$(V(t, x, \varphi))_{t>0, x \in \mathbb{R}^d}$$

при кожній $\varphi \in C_b(\mathbb{R}^d)$ задовольняє умову (1.2) та при всіх $t > 0$, $x \in S$ рівності

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_{\nu(x)} V(t, \cdot, \varphi)(x \pm) &= \mp \frac{1}{2} r(x) \hat{u}(t, x, \varphi) + \\ &+ \int_0^t d\tau \int_S g^{\nu(x)}(t - \tau, x, y) \hat{u}(\tau, y, \varphi) r(y) d\sigma_y. \end{aligned}$$

Звідси одержуємо, що функція $(\hat{u}(t, x, \varphi))_{t>0, x \in \mathbb{R}^d}$, визначена у (4.27), задовольняє умову (4.15). Очевидна тотожність $V(0+, x, \varphi) \equiv 0$ завершує доведення теореми. \square

4.2.1.4. S – ГІПЕРПЛОЩИНА. Нехай тепер поверхня S задається рівністю $S = \{x \in \mathbb{R}^d : (x, \nu) = 0\}$ з деяким ортом $\nu \in \mathbb{R}^d$, в граничній умові (4.15) функція r додатково вважатиметься обмеженою. Схема побудови фундаментального розв'язку задачі (1.2), (1.3), (4.15) в цьому випадку аналогічна застосованій вище. Єдине, що варте уваги, це дещо інший варіант апроксимаційної Лема 4.1 (зберігаємо позначення прийняті в тій лемі).

Лема 4.2. Для заданих чисел $\varepsilon > 0$, $L > 0$, $T > 0$ та $R > 0$ існує число $\delta > 0$ таке, що нерівність

$$|\psi_h(t', x') - \psi_h(t, x)| < \varepsilon$$

справджується при всіх

$$h > 0, \quad t \in [0, T], \quad t' \in [0, T], \quad x \in B_R(0), \quad x' \in B_R(0)$$

та всіх вимірних функціях $(\psi(t, x))_{t \geq 0, x \in \mathbb{R}^d}$, що задовольняють умову

$$\sup_{(t,x) \in [0,T] \times \mathbb{R}^d} |\psi(t, x)| \leq L,$$

якщо тільки виконується нерівність $|t' - t| + |x' - x| < \delta$.

4.2.1.5. Випадок $d = 1$. В цьому випадку рівняння (4.16), (4.17) можуть бути переписані наступним чином

$$\begin{aligned} \hat{g}(t, x, y) &= g(t, x, y) - r \int_0^t g(t - \tau, x, 0) \hat{g}(\tau, 0, y) d\tau, \\ \hat{g}(t, x, y) &= g(t, x, y) - r \int_0^t \hat{g}(t - \tau, x, 0) g(\tau, 0, y) d\tau, \end{aligned} \tag{4.28}$$

де r деяке невід'ємне число. Позначивши $\theta = 1 - \frac{1}{\alpha}$, індукцією по n одержуємо

$$g_n(t, 0, 0) = \frac{(\alpha c^{1/\alpha} \sin \frac{\pi}{\alpha})^{-n-1}}{\Gamma((n+1)\theta)} t^{-\frac{1}{\alpha} + n\theta}, \quad t > 0, \quad n = 0, 1, \dots$$

Отже,

$$\hat{g}(t, 0, 0) = \sum_{n=0}^{\infty} (-r)^n \frac{(\alpha c^{1/\alpha} \sin \frac{\pi}{\alpha})^{-n-1}}{\Gamma((n+1)\theta)} t^{-\frac{1}{\alpha} + n\theta}.$$

Маючи $\hat{g}(t, 0, 0)$, $t > 0$ знаходимо $\hat{g}(t, x, 0)$, $t > 0$, $x \in \mathbb{R}$ з першого рівняння в (4.28), а після цього, функція $\hat{g}(t, x, y)$, $t > 0$, $x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$ виражається з другого рівняння в (4.28).

Як і в багатовимірному випадку, функція \hat{g} є щільністю ймовірності переходу процесу Маркова $(\hat{x}(t))_{t \geq 0}$, утвореного з процесу $(x(t))_{t \geq 0}$ убиванням з інтенсивністю r в початку координат.

4.2.2. Загальна задача. В цьому пункті розглянемо, сформульовану вище, загальну третю початково-крайову задачу (1.2)–(1.4).

Візьмемо функцію $\tilde{g}(t, x, y)$, $t > 0$, $x \in \mathbb{R}^d$, $y \in \mathbb{R}^d$ побудовану в пункті 4.1. За аналогією до рівнянь (4.16), (4.17) запишемо ці рівняння, замінивши функцію g на \tilde{g} . Шукаю функцію позначимо через g^* . Одержимо наступну пару рівнянь

$$g^*(t, x, y) = \tilde{g}(t, x, y) - \int_0^t d\tau \int_S \tilde{g}(t - \tau, x, z) g^*(\tau, z, y) r(z) d\sigma_z, \quad (4.29)$$

$$g^*(t, x, y) = \tilde{g}(t, x, y) - \int_0^t d\tau \int_S g^*(t - \tau, x, z) \tilde{g}(\tau, z, y) r(z) d\sigma_z. \quad (4.30)$$

Зауважимо, що рівняння (4.29), (4.30) досить розв'язувати на множині $(t, x, y) \in (0, \infty) \times S \times S$. Тоді співвідношення (4.30) продовжить одержаний розв'язок на множину $(t, x, y) \in (0, \infty) \times S \times \mathbb{R}^d$, а (4.29) – на множину $(t, x, y) \in (0, \infty) \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$.

Спільний розв'язок рівнянь (4.29), (4.30) шукаємо у вигляді суми ряду

$$g^*(t, x, y) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k g_k^*(t, x, y), \quad (4.31)$$

де $g_0^*(t, x, y) = \tilde{g}(t, x, y)$, а при $k \geq 1$

$$\begin{aligned} g_k^*(t, x, y) &= \int_0^t d\tau \int_S \tilde{g}(t - \tau, x, z) g_{k-1}^*(\tau, z, y) r(z) d\sigma_z = \\ &= \int_0^t d\tau \int_S g_{k-1}^*(t - \tau, x, z) \tilde{g}(\tau, z, y) r(z) d\sigma_z. \end{aligned}$$

Зауваження 4.2. Справедливість другої рівності доводиться індукцією по k з допомогою доведених нижче оцінок.

Співвідношення (4.2), нерівності (2.2), (4.9) та твердження Лема 2.4 приводять нас до оцінки

$$|\tilde{g}(t, x, y)| \leq C_T \frac{t^{1-1/\alpha}}{(t^{1/\alpha} + |y - x|)^{d+\alpha-1}},$$

яка правильна при всіх $t \in (0, T]$, $x \in S$, $y \in S$ для кожного $T > 0$ з деякою сталою $C_T > 0$.

З допомогою індукції по k встановлюємо справедливості для кожних $k \geq 0$, $T > 0$ наступних нерівностей

$$|g_k^*(t, x, y)| \leq R_k \frac{t^{(k+1)(1-1/\alpha)}}{(t^{1/\alpha} + |y-x|)^{d+\alpha-1}}, \quad t \in (0, T], \quad x \in S, \quad y \in S, \quad (4.32)$$

де числова послідовність $\{R_k : k \geq 0\}$ задається співвідношеннями: $R_0 = C_T$ та при $k \geq 1$

$$R_k = L \left(B \left(1 - \frac{1}{\alpha}, 1 + k \left(1 - \frac{1}{\alpha} \right) \right) + B \left(2 - \frac{1}{\alpha}, k \left(1 - \frac{1}{\alpha} \right) \right) \right) R_{k-1},$$

в яких $C_T > 0$, $L > 0$ – деякі сталі (перша можливо залежить від T).

З оцінок (4.32) випливає, що ряд у співвідношенні (4.31) збігається абсолютно при $(t, x, y) \in (0, \infty) \times S \times S$ та рівномірно по $(x, y) \in S \times S$ і локально рівномірно по $t > 0$. Його сума

$$(g^*(t, x, y))_{t>0, x \in S, y \in S}$$

задовольняє рівняння (4.29), (4.30) на множині $(t, x, y) \in (0, \infty) \times S \times S$. Крім того, справджується оцінка

$$|g^*(t, x, y)| \leq C_T \frac{t^{1-1/\alpha}}{(t^{1/\alpha} + |y-x|)^{d+\alpha-1}} \quad (4.33)$$

при всіх $t \in (0, T]$, $x \in S$, $y \in S$ для кожного $T > 0$ з деякою сталою $C_T > 0$. Рівності (4.29), (4.30) продовжують функцію g^* на множини $(t, x, y) \in (0, \infty) \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$ зі збереженням справедливості нерівності (4.33). Тут знову нам стала в нагоді Лема 2.4.

Для кожної $\varphi \in C_b(\mathbb{R}^d)$ покладемо

$$u^*(t, x, \varphi) = \int_{\mathbb{R}^d} g^*(t, x, y) \varphi(y) dy, \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R}^d. \quad (4.34)$$

З рівняння (4.29) випливає співвідношення

$$u^*(t, x, \varphi) = \tilde{u}(t, x, \varphi) - \int_0^t d\tau \int_S \tilde{g}(t-\tau, x, z) u^*(\tau, z, \varphi) r(z) d\sigma_z, \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R}^d, \quad (4.35)$$

де $\tilde{u}(t, x, \varphi) = \int_{\mathbb{R}^d} \tilde{g}(t, x, y) \varphi(y) dy$, $t > 0$, $x \in \mathbb{R}^d$.

Функція \tilde{u} задовольняє умови (1.2), (1.3) та умову (1.4) з функцією $r(x) \equiv 0$.

Позначимо інтеграл в правій частині (4.35) через $(\varkappa(t, x))_{t>0, x \in \mathbb{R}^d}$. Для нього справджується представлення

$$\varkappa(t, x) = \int_0^t d\tau \int_S g(t-\tau, x, z) k(\tau, z, \varphi) d\sigma_z,$$

в якому

$$k(t, x, \varphi) = r(x)u^*(t, x, \varphi) + q(x) \int_0^t d\tau \int_S w(\tau, x, z)u^*(t - \tau, z, \varphi)r(z) d\sigma_z,$$

де функція w визначена в 4.1.

Формула (4.34) та безпосередні обчислення дозволяють стверджувати, що функція $(k(t, x, \varphi))_{t>0, x \in S}$ при кожній $\varphi \in C_b(\mathbb{R}^d)$ задовольняє умови Зауваження 3.3 (див. с. 316).

Використовуючи твердження теореми про стрибок для потенціалу простого шару, одержуємо (на деякий час припускаємо, що S – обмежена замкнена поверхня з класу $H^{1+\gamma}$ з деяким $\gamma \in (0, 1)$) при всіх $t > 0, x \in S$

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_{\nu(x)}\varkappa(t, \cdot)(x\pm) &= \mp \frac{1}{2}r(x)u^*(t, x, \varphi) \mp \\ &\mp \frac{1}{2}q(x) \int_0^t d\tau \int_S w(\tau, x, z)u^*(t - \tau, z, \varphi)r(z) d\sigma_z + \\ &+ \int_0^t d\tau \int_S g^{\nu(x)}(t - \tau, x, z)k(\tau, z, \varphi) d\sigma_z. \end{aligned}$$

Тому, враховуючи (4.4), приходимо до рівностей (при всіх $t > 0, x \in S$)

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{q(x)}{2}\right) \mathbf{B}_{\nu(x)}\varkappa(t, \cdot)(x+) - \left(1 - \frac{q(x)}{2}\right) \mathbf{B}_{\nu(x)}\varkappa(t, \cdot)(x-) &= \\ = -r(x)u^*(t, x, \varphi) - q(x) \int_0^t d\tau \int_S w(\tau, x, z)u^*(t - \tau, z, \varphi)r(z) d\sigma_z + \\ + q(x) \int_0^t d\tau \int_S g^{\nu(x)}(t - \tau, x, z)k(\tau, z, \varphi) d\sigma_z &= \\ = -r(x)u^*(t, x, \varphi) + q(x) \int_0^t d\tau \int_S u^*(t - \tau, z, \varphi)r(z)h(\tau, x, z) d\sigma_z &= \\ = -r(x)u^*(t, x, \varphi), \end{aligned}$$

в останній з яких враховано, що

$$\begin{aligned} h(\tau, x, z) &= -w(\tau, x, z) + g^{\nu(x)}(\tau, x, z) + \\ &+ \int_0^\tau d\rho \int_S g^{\nu(x)}(\tau - \rho, x, y)w(\rho, y, z)q(y) d\sigma_y \equiv 0. \end{aligned}$$

Якщо ж S – гіперплощина з нормаллю ν , то кілька останніх рівностей спрощуються за рахунок тотожної рівності нулю прямого значення результату дії оператора \mathbf{B}_ν на потенціал простого шару в точках поверхні-носія.

Таким чином, функція $(u^*(t, x, \varphi))_{t>0, x \in \mathbb{R}^d}$, задана рівністю (4.34), задовольняє умову (1.4). Потенціал простого шару \varkappa задовольняє умову (1.2) та нульову початкову умову. Отже, ми одержали наступне твердження.

Теорема 4.3. *Функція $(g^*(t, x, y))_{t>0, x \in \mathbb{R}^d, y \in \mathbb{R}^d}$, задана рівністю (4.31), є фундаментальним розв'язком задачі (1.2)–(1.4).*

В одновимірному випадку (коли $S = \{0\}$ і $r(x) \equiv r$) рівняння (4.29), (4.30) мають вигляд

$$g^*(t, x, y) = \tilde{g}(t, x, y) - r \int_0^t \tilde{g}(t - \tau, x, 0) g^*(\tau, 0, y) d\tau,$$

$$g^*(t, x, y) = \tilde{g}(t, x, y) - r \int_0^t g^*(t - \tau, x, 0) \tilde{g}(\tau, 0, y) d\tau.$$

Їх розв'язання залишаємо читачеві, як вправу. Нагадаємо тільки, що функція \tilde{g} задається рівністю (4.14).

4.3. Ймовірнісна інтерпретація. З усіх розглянутих вище задач лише розв'язок симетричної третьої початково-крайової задачі допускає ймовірнісне представлення. А саме, при $t \geq 0$, $x \in \mathbb{R}^d$ справджується рівність

$$\hat{u}(t, x, \varphi) = \hat{\mathbb{E}}_x(\varphi(\hat{x}(t))) = \mathbb{E}_x \left(\varphi(x(t)) e^{-\eta_t(r)} \right), \quad (4.36)$$

де випадковий процес $(\hat{x}(t))_{t \geq 0}$ утворений з процесу $(x(t))_{t \geq 0}$ убиванням його з інтенсивністю $(r(x))_{x \in S}$ на поверхні S (див. [12, Ch. 10, §4]). Функція \hat{g} (див. пункт 4.2.1) є щільністю ймовірності переходу цього процесу Маркова.

Функція \tilde{g} не може бути щільністю ймовірності переходу жодного процесу Маркова, оскільки її значення не є невід'ємними при всіх значеннях її аргументів. Але її можна розглядати такою для псевдопроцесу $(y(t))_{t \geq 0}$ в розумінні [2], і тому функція g^* повинна бути пов'язана з цим псевдопроцесом за аналогією з (4.36) так, що для $t > 0$, $x \in \mathbb{R}^d$ виконується рівність

$$u^*(t, x, \varphi) = \int_{\mathbb{R}^d} g^*(t, x, y) \varphi(y) dy = \mathbb{E}_x^* \left(\varphi(y(t)) e^{-\eta_t^*(r)} \right),$$

де \mathbb{E}_x^* позначає “математичне сподівання” відносно псевдопроцесу та $(\eta_t^*(r))_{t \geq 0}$ позначає деякий “адитивний функціонал від псевдопроцесу $(y(t))_{t \geq 0}$ ”.

ЛІТЕРАТУРА

- [1] O. V. Aryasova, M. I. Portenko. One class of multidimensional stochastic differential equations having no property of weak uniqueness of a solution. *Theory Stoch. Process.*, 11(27)(3-4):14–28, 2005, http://tsp.imath.kiev.ua/files/18/2005_11_3-4_2.pdf.
- [2] L. Beghin, E. Orsingher. The distribution of the local time for “pseudoprocesses” and its connection with fractional diffusion equations. *Stochastic Processes and their Applications*, 115(6):1017–1040, 2005, doi: <https://doi.org/10.1016/j.spa.2005.02.001>.
- [3] R. M. Blumenthal, R. K. Getoor. Some theorems on stable processes. *Transactions of the American Mathematical Society*, 95(2):263–273, 1960, doi: 10.2307/1993291.
- [4] S. Bochner. *Lectures on Fourier integrals*. Princeton University Press, 1959, doi: 10.2307/j.ctt1b9s09r.
- [5] S. D. Eidelman, S. D. Ivasyshen, A. N. Kochubei. *Analytic methods in the theory of differential and pseudo-differential equations of parabolic type*, volume 152 of *Operator theory: Adv. and Appl.* Birkhäuser, Basel, 2004, doi: 10.1007/978-3-0348-7844-9.
- [6] N. Jacob. *Pseudo differential operators and markov processes*. Imperial college press and distributed by world scientific publishing co., 2001, 2002, 2005, doi: 10.1142/p245, 10.1142/p264, 10.1142/p395.
- [7] T. Kato. *Perturbation theory for linear operators*, volume 132 of *Classics in mathematics*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1995, doi: 10.1007/978-3-642-66282-9.
- [8] M. M. Osypchuk, M. I. Portenko. One type of singular perturbations of a multidimensional stable process. *Theory Stoch. Process.*, 19(35)(2):42–51, 2014, http://tsp.imath.kiev.ua/files/1920/art1920_04.pdf.
- [9] M. M. Osypchuk, M. I. Portenko. On the third initial-boundary value problem for some class of pseudo-differential equations related to a symmetric α -stable process. *J. Pseudo-Differ. Oper. Appl.*, 9(4):811–835, 2018, doi: 10.1007/s11868-017-0210-3.
- [10] S. Watanabe. On stable processes with boundary conditions. *Journal of the Mathematical Society of Japan*, 14(2):170 – 198, 1962, doi: 10.2969/jmsj/01420170.
- [11] И. И. Гихман, А. В. Скороход. *Теория случайных процессов*, volume 2. Москва: Наука, 1975.
- [12] Е. Б. Дынкин. *Марковские процессы*. Москва: Физматгиз, 1963.
- [13] А. Н. Кочубей. Параболические псевдодифференциальные уравнения, гиперсингулярные интегралы и марковские процессы. *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, 52(5):909–934, 1988.
- [14] О. А. Ладыженская, В. А. Солонников, Н. Н. Уральцева. *Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа*. Москва: Наука, 1967.
- [15] Й.-У. Льюбус, М. І. Портенко. Про один клас збурень стійкого процесу. *Теорія ймовірностей і математична статистика*, 52:102–111, 1995, <http://probability.univ.kiev.ua/tims/issues-new/52/PDF/16.pdf>.
- [16] М. М. Осипчук, М. І. Портенко. Про потенціали простого шару для одного класу псевдодифференціальних рівнянь. *Укр. мат. журн.*, 67(11):1512–1524, 2015, doi: 10.1007/s11253-016-1184-7.
- [17] М. М. Осипчук, М. І. Портенко. Симетричний α -стійкий випадковий процес та третя початково-крайова задача для відповідного псевдодифференціального рівняння. *Укр. мат. журн.*, 69(10):1406–1421, 2017, doi: 10.1007/s11253-018-1459-2.
- [18] М. І. Портенко. *Процеси дифузії в середовищах з мембранами*, volume 10 of *Труди інституту математики НАН України*. Київ: Ін-т мат. НАНУ, 1995.

- [19] Г. М. Фихтенгольц. *Курс дифференциального и интегрального исчисления*. Москва: Наука, 1966.
- [20] А. Фридман. *Уравнения с частными производными параболического типа*. Москва: Мир, 1968.

М. М. Осипчук

ПРИКАРПАТСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ІМЕНІ ВАСИЛЯ СТЕФАНІКА,
М. ІВАНО-ФРАНКІВСЬК

Email: mykhailo.osypchuk@pnu.edu.ua

ORCID: orcid.org/0000-0001-6100-1654

М. І. Портенко

ІНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ НАН УКРАЇНИ, М. КИЇВ

Email: portenko@imath.kiev.ua

Статистична механіка систем з посилено надстійкою взаємодією

О. Л. Ребенко

Abstract. The paper provides an overview of the works of the author and his Yang colleagues, in which the condition of strong superstability of interaction makes it possible to greatly simplify the proof of some important results of the mathematical description of infinite systems of interacting point particles and helps to introduce the so-called it cell gas model (see [37]). This model allows to approximate continuous lattice systems and apply the appropriate mathematical technique.

Анотація. В роботі приведений огляд робіт автора та його учнів, в яких умова посиленої надстійкості взаємодії дає можливість значно спростити доведення деяких важливих результатів математичного опису нескінченних систем взаємодіючих точкових частинок і допомагає ввести так звану модель *коміркового газу* (див. [37]). Ця модель дозволяє апроксимувати неперервні системи ґратковими і застосовувати відповідну математичну техніку.

1. ВСТУП

Основною метою цього огляду є нове математичне формулювання деяких відомих підходів, а також нових результатів, які з'явилися в другій половині минулого століття і перші десятиліття нового. В основі нашого підходу лежать методи нескінченновимірного аналізу, які найбільш адекватно відповідають математичним потребам опису фізичних систем з великою кількістю елементів. Важливою мотивацією для автора є також суттєве збільшення застосувань математичних методів нескінченновимірного аналізу не тільки до фізичних систем, які є предметом класичної та квантової теорії поля і статистичної механіки, а й до екологічних, економічних, соціальних та інших модельних систем (див., наприклад, [3, 4, 14–16, 30], та багаточисельні посилання в цих роботах).

Термодинамічні характеристики системи залежать від характеру взаємодії, яка визначається поведінкою потенціалів взаємодії V . У випадку

нескінченної системи потенціали залежать тільки від відстані між частинками та їх сортів, тобто вони є трансляційно-інваріантними функціями координат частинок системи. У найбільш звичайному випадку, коли враховують тільки парні взаємодії, взаємодія між i -ю і j -ю частинками

$$V_{ij}^{(2)}(x, y) := \phi_{ij}(|x - y|), \quad x, y \in \mathbb{R}^d, \quad (1.1)$$

або просто $\phi(|x - y|)$ у випадку системи тотожних частинок. У цьому випадку енергія N частинок конфігурації $\gamma := \{x_1, \dots, x_N\}$ є

$$U(\gamma) = U_N(x_1, \dots, x_N) := \sum_{1 \leq i < j \leq N} \phi(|x_i - x_j|). \quad (1.2)$$

В загальному випадку можна припустити¹, що існують взаємодії, які притаманні тільки трьом, чотирьом, і т.д. k -частинкам з довільним $k \in \{2, 3, \dots\}$ і описуються потенціалами $V^{(k)}(x_1, \dots, x_k)$, ($x_i \in \mathbb{R}^d$). Потенціальна енергія частинок конфігурації γ дорівнює

$$U(\gamma) = \sum_{\substack{\eta \subseteq \gamma \\ |\eta| \geq 2}} V^{(|\eta|)}(\eta) = \sum_{k=2}^{|\gamma|} \sum_{\{x_1, \dots, x_k\} \subseteq \gamma} V^{(k)}(x_1, \dots, x_k). \quad (1.3)$$

Зауважимо також, що інколи розглядаються системи, для яких $V^{(1)}(x_1) \neq 0$. Це означає, що вся система знаходиться у деякому зовнішньому полі, яке діє на кожен частинку системи.

Вигляд потенціалу взаємодії визначає модель, в рамках якої описують термодинамічні характеристики системи. Найважливішою характеристикою у такому описі є енергія $U(\gamma)$, яка повинна задовольняти певним умовам в залежності від проблеми, яку ми хочемо описати.

Стійкість (Stability) **(S)** взаємодії є необхідною умовою для опису термодинамічних характеристик нескінченних статистичних систем. Цю умову записують за допомогою нескінченної системи нерівностей на потенціальну енергію взаємодії між довільними скінченими підсистемами, що налічують N частинок, які розташовані в точках x_1, \dots, x_N простору \mathbb{R}^d .

(S) Стійкість. Існує постійна $B \geq 0$ така, що

$$U(x_1, \dots, x_N) \geq -B N \quad (1.4)$$

для довільних $N \geq 2$ і довільних конфігурацій $\{x_1, \dots, x_N\}$.

¹Таке припущення є не тільки теоретичною гіпотезою, але й базується на деяких спостереженнях (див., наприклад, [46]).

Іншою важливою умовою є умова *інтегровності* потенціалів на нескінченності. У випадку парної взаємодії для довільного $R > 0$

$$\int_{|x| \geq R} \phi(|x|) dx < +\infty. \quad (1.5)$$

Умови (1.4) і (1.5) є достатніми для побудови міри Гіббса нескінченної системи частинок в області регулярних значень параметрів $\beta = \frac{1}{k_B T}$ і z , де T це температура системи, а z активність, яка безпосередньо пов'язана з густиною частинок (див., наприклад, [52, Гл.4]).

Щоб вирішити проблему побудови міри Гіббса для нескінченних систем при всіх додатних значеннях параметрів β і z , необхідно ввести більш обмежувальну умову на характер взаємодії між частинками. Такою умовою є умова *надстійкості* (superstability) **(SS)** (див. [22, 43]). Для визначення надстійкості використовуємо розбиття простору \mathbb{R}^d на кубики Δ , довжини ребер яких дорівнює a , центри яких розташовані в точках $r \in a\mathbb{Z}^d \subset \mathbb{R}^d$:

$$\Delta_a(r) := \{x \in \mathbb{R}^d \mid (r^i - a/2) \leq x^i < (r^i + a/2), i = 1, \dots, 3\}. \quad (1.6)$$

Будемо писати Δ замість $\Delta_a(r)$, якщо не має потреби вказувати, де знаходиться центр кубика. Позначимо таке розбиття через $\overline{\Delta}_a$.

(SS) Надстійкість. *Взаємодія називається надстійкою якщо існують постійні $A > 0$, $B \geq 0$ та розбиття $\overline{\Delta}_a$ такі, що для довільної конфігурації $\gamma = \{x_1, \dots, x_N\}$ справедлива нерівність:*

$$U(\gamma) \geq \sum_{\Delta \in \overline{\Delta}_a} [A|\gamma_\Delta|^2 - B|\gamma_\Delta|]. \quad (1.7)$$

Дещо інше визначення було запропоновано в роботі [22] Женібром: взаємодія є надстійкою якщо існують дві дійсні константи $B \geq 0$ і $A_1 \geq 0$ такі, що для довільної конфігурації γ справедлива наступна нерівність:

$$U(\gamma) \geq A_1 \frac{|\gamma|^2}{\xi^3} - B|\gamma|, \quad (1.8)$$

де $\xi = \max_{\{x,y\} \subset \gamma} |x - y|$. Нехай обмежений контейнер Λ об'ємом $V = \text{vol}(\Lambda)$ такий, що $\gamma \subset \Lambda$. Тоді умову (1.8) можна записати у такому вигляді:

$$U(\gamma) \geq A_\Lambda \frac{|\gamma|^2}{V} - B|\gamma|, \quad (1.9)$$

де постійна A_Λ не залежить від об'єму V заданої форми, але може залежати від цієї форми. Легко побачити, що якщо ми розглянемо Λ як об'єднання кубиків Δ , визначених в (1.6) і включає хоча б одну

точку конфігурації γ , тоді, використовуючи нерівність Коші-Шварца, можна записати наступну нерівність:

$$|\gamma|^2 = \left(\sum_{\Delta \in \overline{\Delta_a}} |\gamma_\Delta| \right)^2 \leq \sum_{\Delta \in \overline{\Delta_a} \cap \gamma} 1 \cdot \sum_{\Delta \in \overline{\Delta_a}} |\gamma_\Delta|^2 = \frac{V}{a^d} \sum_{\Delta \in \overline{\Delta_a}} |\gamma_\Delta|^2.$$

Таким чином, умова (1.9) випливає прямо з (1.7) з $A_\Lambda = Aa^d$.

Існує більш сильна умова на взаємодію ніж (1.7).

SSS *Посилена надстійкість (Strong superstability).* Взаємодія називається посилено надстійкою якщо існують константи $A > 0$, $B \geq 0$, $p \geq 2$, та розбиття $\overline{\Delta_a}$ такі, що для довільної конфігурації $\gamma = \{x_1, \dots, x_N\}$ справедлива наступна нерівність:

$$U(\gamma) \geq \sum_{\Delta \in \overline{\Delta_a}} [A|\gamma_\Delta|^p - B|\gamma_\Delta|], \quad \gamma_\Delta = \gamma \cap \Delta. \quad (1.10)$$

В. М. Парк (див. [31]) використав умову (1.10) з $p > 2$ для доведення обмеженості експонент від операторів числа частинок квантових систем взаємодіючого Бозе газу.

У наступних розділах ми будемо розглядати системи, взаємодія в яких задовольняє нерівностям (1.7) або (1.10). У другому розділі будуть введені основні величини, які визначають термодинамічну поведінку системи: термодинамічні потенціали тиску та вільної енергії, кореляційні функції для системи, яка знаходиться в деякому обмеженому об'ємі і побудові відповідних величин для безмежної системи. У третьому розділі ми запропонуємо так звану квазі-граткову апроксимацію неперервних систем, яка дозволяє опис станів неперервної системи розглядати на просторах розріджених конфігурацій, що визначаються у другому розділі. Це дозволяє визначити модель так званого *коміркового газу* – неперервної системи взаємодіючих точкових частинок, які рухаються в \mathbb{R}^d , але кожної миті положення частинок системи є таким, що для заданого розбиття $\overline{\Delta_a}$ простору \mathbb{R}^d на елементарні кубики Δ , у кожному кубіку буде знаходитись не більше однієї частинки. Цю модель ми визначимо в останньому четвертому розділі і обговоримо перспективи вирішення найбільш амбіційної проблеми – проблеми математично строгого опису фазових переходів першого роду в системах, які ми розглядаємо.

2. ОПИС МІКРО ТА МАКРО СТАНІВ

Усі відомі системи, які ми вивчаємо, є скінченними, але навіть в невеликому об'ємі 1cm^3 міститься $10^{23} - 10^{25}$ молекул. Тому нескінченні системи є деякою математичною ідеалізацією великих скінченних систем, яку зручно застосувати при вивченні реальних великих систем.

Реальна фізична чи біологічна система у кожний момент часу перебуває у постійному русі, тобто кожна частинка описує якусь неперервну траєкторію, а мікроскопічний стан усієї системи визначається усіма такими траєкторіями. Але для дослідження системи необхідно знати не мікроскопічну поведінку, а макроскопічні наслідки такої поведінки, тобто деякі макроскопічні характеристики: тиск, енергія, теплоємність тощо. Такі фізичні характеристики називають *спостережуваними величинами*. Спостережувані величини описують вимірними функціями на фазовому просторі, тобто для нескінченних систем це функції від нескінченної кількості змінних, які у нашому випадку для рівноважних систем є множиною координат частинок, а їх сукупність утворює *простір нескінченних конфігурацій*.

2.1. Простори конфігурацій систем статистичної механіки. Нехай σ – це міра Лебега в \mathbb{R}^d . Позначимо через $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$, борелівську σ -алгебру відкритих множин в \mathbb{R}^d , а через $\mathcal{B}_c(\mathbb{R}^d)$ усі підмножини, що мають компактне замикання. *Конфігураційний простір* $\Gamma := \Gamma_{\mathbb{R}^d}$ буде складатися з усіх локально скінчених підмножин простору \mathbb{R}^d , тобто

$$\Gamma = \Gamma_{\mathbb{R}^d} := \left\{ \gamma \subset \mathbb{R}^d \mid |\gamma \cap \Lambda| < \infty, \text{ для всіх } \Lambda \in \mathcal{B}_c(\mathbb{R}^d) \right\}, \quad (2.1)$$

де $|A|$ є число, що означає кількість точок в A . Це досить природне визначення з точки зору застосувань, оскільки в обмеженому об'ємі не може знаходитися нескінченна кількість частинок.

Позначимо множину усіх скінчених конфігурацій простору Γ через Γ_0 . Насправді Γ_0 є підмножиною Γ , але вона буде розглядатися як самостійний конфігураційний простір, в якому незалежним чином можна ввести свою топологію. Визначимо спершу конфігураційний простір з фіксованою кількістю точок:

$$\Gamma^{(n)} := \{ \gamma \in \Gamma \mid |\gamma| = n, n \in \mathbb{N} \}, \quad \Gamma^{(0)} := \emptyset.$$

Якщо усі такі конфігурації знаходяться в деякій обмеженій множині $\Lambda \in \mathcal{B}_c(\mathbb{R}^3)$, то відповідний простір буде:

$$\Gamma_{\Lambda}^{(n)} := \left\{ \gamma \in \Gamma^{(n)} \mid \gamma \subset \Lambda \right\}. \quad (2.2)$$

Тоді простори скінчених конфігурацій в \mathbb{R}^d і в $\Lambda \in \mathcal{B}_c(\mathbb{R}^d)$ можна представити у вигляді диз'юнктивних об'єднань:

$$\Gamma_0 := \prod_{n=0}^{\infty} \Gamma^{(n)}, \quad \text{і} \quad \Gamma_{\Lambda} := \prod_{n=0}^{\infty} \Gamma_{\Lambda}^{(n)}. \quad (2.3)$$

2.1.1. *Простори щільних та розріджених конфігурацій.* В дослідженні багатьох термодинамічних характеристик нескінченних систем важливе значення має розбиття (1.6) простору \mathbb{R}^d на елементарні кубики.

Для довільного $\Lambda \in \mathcal{B}_c(\mathbb{R}^d)$ і довільного розбиття $\bar{\Delta}_a$ позначимо через

$$\bar{\Delta}_{a,\Lambda} := \{\Delta \in \bar{\Delta}_a \mid \Delta \cap \Lambda \neq \emptyset\}$$

мінімальне покриття Λ гіперкубиками $\Delta \in \bar{\Delta}_a$ таким чином, що

$$\Lambda \subseteq \Lambda_a \quad \text{і} \quad \lim_{a \rightarrow 0} \Lambda_a = \Lambda. \quad (2.4)$$

Розбиття (1.6) було застосовано Рюелем [43] для доведення обмеженості кореляційних функцій. У цьому огляді ми наведемо ідею більш прозорого і простішого доведення аналогічного результату за допомогою кластерних розкладів, які були запропоновані в роботі [36]. Для побудови таких кластерних розкладів введемо два типи конфігурацій. Для довільного розбиття $\bar{\Delta}_a$ введемо простір *розріджених* конфігурацій:

$$\Gamma^{(dil)} = \Gamma^{(dil)}(\bar{\Delta}_a) := \{\gamma \in \Gamma \mid |\gamma_\Delta| = 0 \vee 1, \text{ для всіх } \Delta \in \bar{\Delta}_a\} \quad (2.5)$$

і простір *щільних* конфігурацій:

$$\Gamma^{(den)} = \Gamma^{(den)}(\bar{\Delta}_a) := \{\gamma \in \Gamma \mid |\gamma_\Delta| \geq 2, \text{ для всіх } \Delta \in \bar{\Delta}_a\}. \quad (2.6)$$

Для довільного $\Lambda \in \mathcal{B}_c(\mathbb{R}^d)$ простори $\Gamma_\Lambda^{(dil)}$ і $\Gamma_\Lambda^{(den)}$ визначаються аналогічно згідно формул (2.2), (2.3) та (2.5), (2.6).

Щоб не складалося враження, що розріджені конфігурації описують фізичні системи розріджених газів, наведемо наступне зауваження.

Зауваження 2.2. Однією з найважливіших характеристик фізичного стану системи взаємодіючих частинок є густина, тобто кількість частинок в одиниці об'єму. Скільки завгодно велике значення цієї характеристики можна отримати і в рамках опису системи у просторі розріджених конфігурацій, вибираючи розмір a ребер кубиків достатньо малим.

У наступному розділі нам буде потрібне ще одне розбиття конфігурацій $\Gamma_\Delta^{(den)}$ на два підпростори в залежності від деякої фіксованої конфігурації η і $0 < \varepsilon \leq 1$. Для заданих η , ε і довільного $\Delta \in \bar{\Delta}_a$ визначимо $\Gamma_\Delta^{(>)} = \Gamma_\Delta^{(>)}(\eta, \varepsilon)$ і $\Gamma_\Delta^{(<)} = \Gamma_\Delta^{(<)}(\eta, \varepsilon)$, формулами:

$$\Gamma_\Delta^{(>)}(\eta, \varepsilon) = \Gamma_\Delta^{(>)} := \left\{ \gamma \in \Gamma_\Delta^{den} \mid |\gamma| > d_\eta^\varepsilon(\Delta), \quad |\gamma| \geq 2 \right\} \quad (2.7)$$

$$\Gamma_\Delta^{(<)}(\eta, \varepsilon) = \Gamma_\Delta^{(<)} := \left\{ \gamma \in \Gamma_\Delta^{den} \mid |\gamma| \leq d_\eta^\varepsilon(\Delta), \quad |\gamma| \geq 2 \right\}, \quad (2.8)$$

де $\Delta \in \bar{\Delta}_a$, $0 < \varepsilon \leq 1$ і $d_\eta^\varepsilon(\Delta) = (\text{dist}(\eta, \Delta))^\varepsilon$.

Очевидно, що $\Gamma_{\Delta}^{(den)} = \Gamma_{\Delta}^{(>)} \cup \Gamma_{\Delta}^{(<)}$. Для довільних $X = \cup_{\Delta \in \bar{\Delta}_{a,X}} \Delta$, де

$$\bar{\Delta}_{a,X} = \{\Delta \in \bar{\Delta}_a \mid \Delta \cap X \neq \emptyset\}, \quad X \subset \mathbb{R}^d,$$

позначимо

$$\Gamma_X^{(sign)} := \bigsqcup_{\Delta \in \bar{\Delta}_{a,X}} \Gamma_{\Delta}^{(sign)}, \quad \text{sign} \in \{dil, >, <\}. \quad (2.9)$$

2.3. Міри на просторах конфігурацій неперервних систем. Згідно з ідеями Гіббса фізичний стан системи описується ймовірнісною мірою, яка будується спершу в деякому обмеженому об'ємі простору \mathbb{R}^d в залежності від ансамблю (мікроканонічного, канонічного або великого канонічного), який розглядається для конкретної задачі і подальшому граничному термодинамічному переході. Ми будемо розглядати системи статистичної механіки в рамках великого канонічного ансамблю і почнемо цей розгляд з системи невзаємодіючих точкових частинок (*ідеальний газ*).

2.3.1. Міра Пуассона. Стан ідеального газу в рівноважній статистичній механіці описується мірою Пуассона $\pi_{z\sigma}$ на конфігураційному просторі Γ , де $z > 0$ – це активність (фізичний параметр, який пов'язаний з густиною частинок в системі). Міру $\pi_{z\sigma}$ з мірою інтенсивності $z\sigma$ ми визначимо трохи нижче. Для цього спершу введемо так звану міру Лебега-Пуассона

$$\lambda_{z\sigma} = \lambda_{z\sigma}^{\Lambda}$$

на просторі скінчених конфігурацій Γ_{Λ} , $\Lambda \in \mathcal{B}_c(\mathbb{R}^d)$ (або Γ_0) за формулою:

$$\int_{\Gamma_{\Lambda}} F(\gamma) \lambda_{z\sigma}(d\gamma) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \int_{\Lambda} \cdots \int_{\Lambda} F_n(x_1, \dots, x_n) dx_1 \cdots dx_n, \quad (2.10)$$

для всіх вимірних функцій

$$F = \{F_n\}_{n \geq 0},$$

$F_n \in L^{\infty}(\Lambda^n)$ (або $F_n \in L^1(\mathbb{R}^{dn})$). Мабуть вперше цю міру побудував Р. А. Минлос [27, 28] (див. детальніше [26]) разом з визначенням розподілу Гіббса, а приведена тут назва була запропонована в [1], де аналіз на просторах конфігурацій і побудова міри були подані в більш сучасній формі.

За допомогою міри $\lambda_{z\sigma}$ побудуємо сім'ю ймовірнісних мір

$$\pi_{z\sigma}^{\Lambda} := e^{-z\sigma(\Lambda)} \lambda_{z\sigma}^{\Lambda}, \quad \Lambda \in \mathcal{B}_c(\mathbb{R}^d). \quad (2.11)$$

Легко переконатись, використовуючи визначення (2.10), що сім'я (2.11) є попарно узгоджена і за теоремою Колмогорова (див., наприклад, [34]) існує єдина ймовірнісна міра $\pi_{z\sigma}$ на конфігураційному просторі Γ .

Найбільш важливою характеристикою мір $\pi_{z\sigma}$ та $\lambda_{z\sigma}$, яку ми інтенсивно використовуємо, є властивість нескінченно-подільності (див., наприклад, [18, Розділ 4.4]). На мові інтегралів за мірою $\lambda_{z\sigma}$ цю властивість можна сформулювати у вигляді наступної леми.

Лема 2.4. *Нехай $X_1 \in \mathcal{B}_c(\mathbb{R}^d)$, $X_2 \in \mathcal{B}_c(\mathbb{R}^d)$, $X_1 \cap X_2 = \emptyset$, $X_1 \cup X_2 = \Lambda$, а функції $F_1, F_2 \in \mathcal{B}(\Gamma_{X_i})$ -вимірними. Тоді*

$$\int_{\Gamma_\Lambda} F_1(\gamma)F_2(\gamma)\lambda_{z\sigma}(d\gamma) = \int_{\Gamma_{X_1}} F_1(\gamma)\lambda_{z\sigma}(d\gamma) \int_{\Gamma_{X_2}} F_2(\gamma)\lambda_{z\sigma}(d\gamma). \quad (2.12)$$

Доведення. За означенням (2.10)

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_\Lambda} F_1(\gamma)F_2(\gamma)\lambda_\sigma(d\gamma) &= \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\int_{\Lambda} \sigma(dx) \right)^n F_1(\{x\}_1^n \cap X_1)F_2(\{x\}_1^n \cap X_2) = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\int_{X_1} \sigma(dx) + \int_{X_2} \sigma(dx) \right)^n F_1(\{x\}_1^n \cap X_1)F_2(\{x\}_1^n \cap X_2) = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!(n-k)!} \left(\int_{X_1} \sigma(dx) \right)^k \left(\int_{X_2} \sigma(dx') \right)^{n-k} F_1(\{x\}_1^k)F_2(\{x'\}_1^{n-k}) = \\ &= \int_{\Gamma_{X_1}} F_1(\gamma)\lambda_\sigma^{X_1}(d\gamma) \int_{\Gamma_{X_2}} F_2(\gamma)\lambda_\sigma^{X_2}(d\gamma). \end{aligned}$$

Для скорочення запису ми використали дещо нестандартне позначення для кратних інтегралів. □

Ця властивість була вперше використана автором в роботах [35, 36] для побудови кластерних розкладів, один з яких ми детально опишемо в третьому розділі.

2.4.1. Міра Гіббса. Умови стійкості, надстійкості та посиленої надстійкості, сформульовані в (1.4), (1.7) і (1.10), накладають загальні умови на характер енергії взаємодії. В рамках наближення таких взаємодій двохчастинковими (парними) потенціалами треба знайти найбільш оптимальні достатні умови їх виконання. Такі умови досліджувалися багатьма авторами. Ми радимо читачу звернутись до найбільш пізнього огляду [38], в якому детально обговорені попередні результати цієї проблеми та отримані деякі нові результати.

Умови, які забезпечують посилену надстійкість, можна сформулювати таким чином.

(А): Умови на потенціал взаємодії. Нехай ϕ є неперервним на $\mathbb{R}_+ \setminus \{0\}$, для якого існують константи $r_0 > 0$, $R > r_0$, $\phi_0 > 0$, $\phi_1 > 0$, та $\varepsilon_0 > 0$ такі, що:

$$\phi(|x|) \equiv -\phi^- (|x|) \geq -\frac{\phi_1}{|x|^{d+\varepsilon_0}} \quad \text{для } |x| \geq R, \quad (2.13)$$

$$\phi(|x|) \equiv \phi^+ (|x|) \geq \frac{\phi_0}{|x|^s}, \quad s \geq d \quad \text{для } |x| \leq r_0, \quad (2.14)$$

де

$$\phi^+ (|x|) := \max\{0, \phi(|x|)\}, \quad \phi^- (|x|) := -\min\{0, \phi(|x|)\}. \quad (2.15)$$

З умови (2.13) слідує, що для $\varepsilon < \varepsilon_0$

$$\varphi_\varepsilon = \varphi_\varepsilon(a) := \sup_{x \in \mathbb{R}^3} \sum_{\Delta \in \overline{\Delta}_a} \sup_{y \in \Delta} \phi^- (|x-y|) |x-y|^\varepsilon < \infty. \quad (2.16)$$

Справедлива наступна лема.

Лема 2.5. Нехай потенціал взаємодії задовольняє **(А)**. Тоді для довільних $\gamma \in \Gamma_0$ і $a < r_0$ нерівність (1.10) виконується з

$$A(a) = C_{s,d} - \frac{\varphi_0}{2^{s/d}}, \quad B(a) = \frac{\varphi_0}{2}, \quad p = 1 + \frac{s}{d}, \quad (2.17)$$

$$C_{s,d} = \frac{1}{2^{2s+1}} \left(\frac{2\pi^{\frac{d}{2}}}{d\Gamma(\frac{d}{2})} \right)^{\frac{s}{d}} \frac{\phi_0}{a^s}.$$

Доведення. Доведення наведено в [38], але далі буде використовуватись лише такий випадок

$$A(a) = \frac{\phi_0}{4(\sqrt{da})^s} - \frac{\varphi_0}{2}, \quad B(a) = \frac{\varphi_0}{2}, \quad p = 2.$$

У цьому випадку доведення значно спрощується. Для довільного $\gamma \in \Gamma_0$ та довільного розбиття $\overline{\Delta}_a$:

$$\begin{aligned} U(\gamma) &= \sum_{\{x,y\} \subset \gamma} \phi(|x-y|) = \\ &= \sum_{\Delta \in \overline{\Delta}_a: |\gamma_\Delta| \geq 2} U(\gamma_\Delta) + \sum_{\{\Delta, \Delta'\} \subset \overline{\Delta}_a} \sum_{\substack{x \in \gamma_\Delta \\ y \in \gamma_{\Delta'}}} \phi(|x-y|). \end{aligned}$$

Враховуючи умови **(А)** на потенціал взаємодії, визначення (2.16) і нерівності

$$|\gamma_\Delta| |\gamma_{\Delta'}| \leq \frac{1}{2} (|\gamma_\Delta|^2 + |\gamma_{\Delta'}|^2), \quad |\gamma_\Delta| |\gamma_\Delta - 1| \geq \frac{1}{4} |\gamma_\Delta|^2,$$

отримаємо:

$$U(\gamma) \geq \sum_{\Delta \in \overline{\Delta_a}: |\gamma_\Delta| \geq 2} \left[\frac{\phi_0}{4(\sqrt{da})^s} - \frac{\varphi_0}{2} \right] |\gamma_\Delta|^2 - \frac{\varphi_0}{2} |\gamma|. \quad (2.18) \quad \square$$

Зауваження 2.6. З означення (2.16) і нерівності (2.13) зрозуміло, що $\varphi_0 \sim \frac{c}{a^d}$. Тоді, для достатньо малих a константа $A(a) > 0$ для $s > d$ і для достатньо великих ϕ_0 у випадку $s = d$.

Міра Гіббса скінченних систем для великого канонічного ансамблю на просторі конфігурацій Γ_Λ має вигляд:

$$\mu_\Lambda(d\gamma) = \frac{1}{\Xi_\Lambda} e^{-\beta U(\gamma)} \lambda_{z\sigma}(d\gamma), \quad (2.19)$$

$$\Xi_\Lambda = \int_{\Gamma_\Lambda} e^{-\beta U(\gamma)} \lambda_{z\sigma}(d\gamma), \quad (2.20)$$

де $\Xi = \Xi(z, \beta)$ – велика статистична сума.

У випадку малого канонічного ансамблю на просторі конфігурацій $\Gamma_\Lambda^{(N)}$

$$\mu_\Lambda(d\gamma) = \frac{1}{Z_\Lambda} e^{-\beta U(\gamma)} \lambda_{\tilde{\sigma}}(d\gamma),$$

$$Z_\Lambda = \int_{\Gamma_\Lambda^{(N)}} e^{-\beta U(\gamma)} \lambda_{\tilde{\sigma}}(d\gamma), \quad \tilde{\sigma} := \left(\frac{2\pi m}{\beta \hbar^2} \right)^{d/2} \sigma, \quad (2.21)$$

де $Z_\Lambda = Z_\Lambda(N, \beta)$ – статистична сума малого канонічного ансамблю.

Спостережувані величини описують вимірними функціями на фазовому просторі, тобто для нескінченних систем це функції від нескінченної кількості змінних. Нехай $F(\gamma)$ є такою функцією, яка описує деяку спостережувану величину. Тоді макроскопічна характеристика, яка їй відповідає, і яку ми можемо спостерігати на експерименті, є середнє значення цієї величини. Воно обраховується за відомою формулою:

$$\overline{F} = \langle F(\cdot) \rangle_\mu = \int_\Gamma F(\gamma) \mu(d\gamma),$$

якщо міра на Γ існує.

2.7. Термодинамічні потенціали. Мікроскопічну поведінку станів статистичних систем описують кореляційні функції, які пов'язані з їх макроскопічними властивостями через значення середніх від спостережуваних величин (див. далі рівняння (2.27)). Макроскопічні властивості рівноважних станів вивчає термостатика, тобто рівноважна термодинаміка, яка є по суті феноменологічною наукою і яка тільки починаючи з середини минулого століття набула вирішального наукового

значення завдяки впливу стрімкого розвитку методів статистичної фізики (як класичної так і квантової). Тому з математичної точки зору важливо отримати вирази основних макроскопічних характеристик в термінах фундаментальних законів, які визначають поведінку мікросистеми, тобто в термінах розподілів Гіббса. Ці характеристики називають *термодинамічними параметрами* або *термодинамічними функціями* термодинамічних параметрів. Очевидно, що ці поняття не можна чітко розділити, бо вони пов'язані рівняннями стану і можуть у деяких випадках бути параметрами, які є постійними для системи, що знаходиться в заданій рівновазі, а в іншому випадку бути функціями інших термодинамічних параметрів. До таких параметрів відноситься перш за все температура системи або її обернене значення β , а також питомий об'єм v (середній об'єм, що припадає на одну частинку, див. (2.48)) або густина частинок в системі $\rho = 1/v$, тиск, та інші. Для нерівноважних систем вказані параметри можуть ставати невизначеними. Термодинамічна рівновага визначається тільки відносно достатньо великої групи параметрів, але питання їх кількості є складним і залежить від задачі конкретного дослідження. Для більш детального розуміння ми радимо звернутись, наприклад, до монографії [51]. З точки зору побудови математично строгої теорії статистичних систем найбільшої уваги заслуговують термодинамічні функції енергії, тиску, ентропії, теплоємності для неперервних систем і намагніченість, поляризація, для електромагнітних явищ, та багато інших.

2.7.1. *Енергія.* Однією з характеристик статистичних систем є *вільна енергія*, яку іноді називають *вільною енергією Гельмгольца* (на відміну від вільної енергії Гіббса, яку ми визначимо нижче), і яка в канонічному ансамблі визначається формулою:

$$F(T, V, N) = -kT \ln Z_{\Lambda}(N, \beta), \quad \beta = \frac{1}{kT}, \quad V = \sigma(\Lambda). \quad (2.22)$$

Ця величина залежить від розміру системи і тому в термодинамічній границі зручно ввести її питомі значення, які припадають на одну частинку:

$$f(v, \beta) = \lim_{\substack{N \rightarrow \infty, \\ V/N \rightarrow v}} \frac{F(T, V, N)}{N}. \quad (2.23)$$

Доведення існування границі (2.23) започатковане Ван-Ховом [44], але містило деякі прогалини. Мабуть вперше строге доведення існування границі (2.23) дав Рюель [41], а пізніше Фішер [17], користуючись методом Рюеля узагальнив його результат на більш широкий клас потенціалів. І, нарешті, в роботі Добрушина [6] приведені загальні умови існування скінченної границі, які в деякому сенсі є також необхідними.

Зауваження 2.7.2. В усіх вищезгаданих роботах встановлені також властивості функції $f(v, \beta)$. В усіх інтервалах де вона приймає скінчені значення функція $f(v, \beta)$ є монотонно неспадною випуклою неперервною функцією змінної v .

2.7.3. *Тиск. Рівняння стану.* Тиск є одним з найважливіших термодинамічних параметрів, який разом з іншими термодинамічними величинами визначають фізичний стан системи взаємодіючих частинок. Рівняння, яке пов'язує між собою тиск, об'єм і температуру називають *рівнянням стану*. Найпростішим таким рівнянням є *рівняння Клапейрона*, яке описує поведінку ідеальних газів. Системи реальних газів, які перебувають у розрідженому стані і мають не високий тиск описують феноменологічним *рівнянням Ван дер Ваальса*. Для довільних значень цих параметрів і для систем, які ми розглядаємо, таким співвідношенням є формула

$$e^{\beta P_{\Lambda} V} = \Xi_{\Lambda}(\beta, \mu).$$

яку вводять для опису розподілу Гіббса великого канонічного ансамблю. Запишемо його у такому вигляді:

$$P_{\Lambda} V = kT \ln \Xi_{\Lambda}(\beta, \mu). \quad (2.24)$$

Наприклад для системи ідеального газу $\Xi_{\Lambda}(\beta, z)$ має вигляд

$$\Xi_{\Lambda}^{PG}(\beta, z) = e^{zV}, \quad V = \sigma(\Lambda), \quad (2.25)$$

а рівняння (2.24) запишеться у вигляді:

$$P_{\Lambda} = kTz.$$

Враховуючи, що для ідеального газу $z = N/V$, ми отримуємо рівняння Клапейрона.

Рівняння (2.24) та існування границі для функції

$$\chi_V(\mu, \beta) := \frac{\ln \Xi_{\Lambda}(\mu, \beta)}{V},$$

яке було доведене в [41, 45], фактично визначає тиск в термодинамічній границі (див., також, [12]) $\Lambda \uparrow \mathbb{R}^d (V \rightarrow \infty)$:

$$p(\mu, \beta) = kT \lim_{\Lambda \uparrow \mathbb{R}^d} \frac{\ln \Xi_{\Lambda}(\mu, \beta)}{V} = \frac{1}{\beta} \chi(\mu, \beta). \quad (2.26)$$

В роботі Рюеля [43] для надстійких потенціалів взаємодії була встановлена неперервна залежність тиску від густини ρ , яка в свою чергу у великому канонічному ансамблі теж визначається через потенціал $\chi(\mu, \beta)$ за допомогою формули:

$$\rho(\mu, \beta) = \lim_{\Lambda \uparrow \mathbb{R}^d} \frac{1}{\Xi_{\Lambda}(\mu, \beta)} \int_{\Gamma_{\Lambda}} \frac{N}{V} e^{\mu N - H(\tilde{\gamma})} \lambda_{\tilde{\sigma}}(d\tilde{\gamma}) =$$

$$= \lim_{\Lambda \uparrow \mathbb{R}^d} \frac{\partial \ln \Xi_\Lambda(\mu, \beta)}{\partial \mu} \frac{1}{V} = \frac{\partial \chi(\mu, \beta)}{\partial \mu}, \quad N = |\tilde{\gamma}|, \quad V = \sigma(\Lambda).$$

2.8. Кореляційні функції мір Гіббса. Фізичні спостережувані є функціями на просторі конфігурацій Γ . Вони як правило мають суматорну форму: $F(\gamma) = \sum_{\eta \in \gamma} H(\eta)$ (див., наприклад, енергію (1.2) або (1.3)). Тоді середнє значення такої спостережуваної величини можна записати у такому вигляді:

$$\bar{F} = \int_{\Gamma} \sum_{\eta \in \gamma} H(\eta) \mu(d\gamma) = \int_{\Gamma_0} H(\eta) \rho(\eta) \lambda_\sigma(d\eta). \quad (2.27)$$

У цій формулі $\rho(\eta) \lambda_\sigma(d\eta)$ є кореляційною мірою, а у випадку коли кореляційна міра є абсолютно неперервною відносно міри Лебега-Пуассона λ_σ відповідну похідну Радона-Нікодіма називають *кореляційною функцією* $\rho(\eta)$. У випадку обмеженого об'єму її можна записати у вигляді:

$$\rho_\Lambda(\eta) = \frac{z^{|\eta|}}{\Xi_\Lambda} \int_{\Gamma_\Lambda} e^{-\beta U(\eta \cup \gamma)} \lambda_{z\sigma}(d\gamma). \quad (2.28)$$

2.9. Розклад кореляційних функцій за щільностями конфігурацій. Нехай $X \subseteq \Lambda$ є об'єднання кубиків Δ , в яких знаходиться дві або більше частинок, а $X_n := \{\Delta_1, \dots, \Delta_n\}$ це множина n кубів. Внезок щільності міри Гіббса $\exp\{-\beta U(\gamma)\}$ з $\gamma \in \Gamma_\Delta^{(den)}$, $\Delta \subset X$ грає роль малого параметру, оскільки

$$\exp\{-\beta \phi(|x - y|)\} \simeq \exp\{-\beta \frac{c}{a^s}\}, \quad c > 0, \quad s \geq 3,$$

якщо $x, y \in \Delta \subset X$ і достатньо малих a . Основна ідея полягає в тому, щоб відокремити інтегрування по щільних конфігураціях від інтегрувань по розріджених конфігураціях. Щоб це зробити, введемо функцію-індикатор для розріджених та щільних конфігурацій. Для розріджених конфігурацій таку функцію визначимо формулою:

$$\chi_-^\Delta(\gamma) = \begin{cases} 1, & \text{якщо } |\gamma_\Delta| = 0 \vee 1, \\ 0, & \text{в іншому випадку,} \end{cases} \quad (2.29)$$

а для *щільних* конфігурацій формулою:

$$\chi_+^\Delta(\gamma) = 1 - \chi_-^\Delta(\gamma).$$

Щоб побудувати такий розклад, запишемо наступний розклад одиниці для $\gamma \in \Gamma_\Lambda$:

$$\begin{aligned} \prod_{\Delta \in \bar{\Delta}_{a,\Lambda}} [\chi_-^\Delta(\gamma) + \chi_+^\Delta(\gamma)] &= \\ &= \sum_{n=0}^{N_\Lambda} \sum_{X_n \subseteq \bar{\Delta}_{a,\Lambda}} \prod_{\Delta \in X_n} \chi_+^\Delta(\gamma) \prod_{\Delta \in \bar{\Delta}_{a,\Lambda} \setminus X_n} \chi_-^\Delta(\gamma) = \\ &= \sum_{\emptyset \subseteq X \subseteq \bar{\Delta}_{a,\Lambda}} \tilde{\chi}_+^X(\gamma) \tilde{\chi}_-^{\bar{\Delta}_{a,\Lambda} \setminus X}(\gamma) = 1, \end{aligned} \quad (2.30)$$

де N_Λ – це кількість кубів Δ у покритті Λ_a (див. (2.4)) і

$$\tilde{\chi}_\pm^X(\gamma) = \prod_{\Delta \in X} \chi_\pm^\Delta(\gamma).$$

Підставляючи (2.30) в (2.28), отримуємо:

$$\rho_\Lambda(\eta) = \frac{z^{|\eta|}}{\Xi_\Lambda} \sum_{\emptyset \subseteq X \subseteq \bar{\Delta}_{a,\Lambda}} \int_{\Gamma_\Lambda} \tilde{\chi}_+^X(\gamma) \tilde{\chi}_-^{\bar{\Delta}_{a,\Lambda} \setminus X}(\gamma) e^{-\beta U(\eta \cup \gamma)} \lambda_{z\sigma}(d\gamma). \quad (2.31)$$

Визначимо потенціал "твердих"кубиків:

$$\chi^{cor}(\Delta_1, \dots, \Delta_n) = \begin{cases} 1, & \text{якщо } \Delta_i \cap \Delta_j = \emptyset \text{ для всіх } i \neq j \\ 0, & \text{в інших випадках.} \end{cases} \quad (2.32)$$

Тоді (2.31) можна записати у вигляді:

$$\begin{aligned} \rho_\Lambda(\eta) &= \frac{z^{|\eta|}}{\Xi_\Lambda} \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!} \sum_{(\Delta_1, \dots, \Delta_n) \subset \bar{\Delta}_{a,\Lambda}} \chi^{cor}(\Delta_1, \dots, \Delta_n) \times \\ &\quad \times \int_{\Gamma_\Lambda} \tilde{\chi}_+^{X_n}(\gamma) \tilde{\chi}_-^{\bar{\Delta}_{a,\Lambda} \setminus X_n}(\gamma) e^{-\beta U(\eta \cup \gamma)} \lambda_{z\sigma}(d\gamma), \end{aligned} \quad (2.33)$$

де $(\Delta_1, \dots, \Delta_n)$ – це послідовність кубиків на відміну від множини кубиків у формулі (2.31). Сумування по кожному Δ_i в (2.33) виконується незалежно по кожному кубу.

Наступним кроком є представлення експоненти в (2.33):

$$\begin{aligned} e^{-\beta U(\eta \cup \gamma)} &= e^{-\beta U(\eta)} \prod_{i=1}^n e^{-\beta U(\gamma_{\Delta_i}) - \beta W(\eta; \gamma_{\Delta_i})} \prod_{1 \leq i < j \leq n} e^{-\beta W(\gamma_{\Delta_i}; \gamma_{\Delta_j})} \times \\ &\quad \times e^{-\beta W(\eta; \gamma_{\Lambda_a \setminus X_n})} e^{-\beta U(\gamma_{\Lambda_a \setminus X_n})} \prod_{i=1}^n e^{-\beta W(\gamma_{\Delta_i}; \gamma_{\Lambda_a \setminus X_n})}, \end{aligned} \quad (2.34)$$

де Λ_a визначене в (2.4). Тоді, використовуючи розклад (2.34) і властивість (2.12), отримуємо:

$$\rho_\Lambda(\eta) = \frac{z^{|\eta|}}{\Xi_\Lambda} \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!} \tilde{\rho}_n^\Lambda(\eta), \quad (2.35)$$

де

$$\begin{aligned} \tilde{\rho}_n^\Lambda(\eta) = & \sum_{(\Delta_1, \dots, \Delta_n) \subset \bar{\Delta}_{a,\Lambda}} \chi^{cor}(\Delta_1, \dots, \Delta_n) e^{-\beta U(\eta)} \times \\ & \times \prod_{i=1}^n \left(\int_{\Gamma_{\Delta_i}^{(den)}} \lambda_\sigma(d\gamma_{\Delta_i}) e^{-\beta U(\gamma_{\Delta_i}|\eta)} \right) \prod_{1 \leq i < j \leq n} e^{-\beta W(\gamma_{\Delta_i}; \gamma_{\Delta_j})} \times \\ & \times \int_{\Gamma_{\Lambda_a \setminus X_n}^{(dil)}} \lambda_\sigma(d\gamma_{\Lambda_a \setminus X_n}) e^{-\beta U(\gamma_{\Lambda_a \setminus X_n}|\eta)} \prod_{i=1}^n e^{-\beta W(\gamma_{\Delta_i}; \gamma_{\Lambda_a \setminus X_n})}, \end{aligned} \quad (2.36)$$

де $U(\gamma_{\Delta_i}|\eta) = U(\gamma_{\Delta_i}) + W(\gamma_{\Delta_i}; \eta)$. Враховуючи розбиття (2.7)-(2.9) розіб'ємо кожний інтеграл у першому добутку формули (2.36) на два інтеграли

$$\int_{\Gamma_{\Delta_i}^{(den)}} \lambda_\sigma(d\gamma_{\Delta_i})(\dots) = \int_{\Gamma_{\Delta_i}^{(>)}} \lambda_\sigma(d\gamma_{\Delta_i})(\dots) + \int_{\Gamma_{\Delta_i}^{(<)}} \lambda_\sigma(d\gamma_{\Delta_i})(\dots). \quad (2.37)$$

З формули (2.37) випливає, що суму по всіх можливих положеннях $(\Delta_1, \dots, \Delta_n) \subset \bar{\Delta}_{a,\Lambda}$ можна розбити на 2^n член, у кожному з яких сума по $(\Delta_1, \dots, \Delta_n)$ розбивається на суму по $(\Delta_1, \dots, \Delta_k) \subset \bar{\Delta}_{a,\Lambda}$, де інтегрування виконується по конфігураціях $\gamma_{\Delta_i} \in \Gamma_{\Delta_i}^{(<)}$, і суму по $(\Delta'_1, \dots, \Delta'_{n-k}) \subset \bar{\Delta}_{a,\Lambda}$, де інтегрування виконується по конфігураціях $\gamma_{\Delta'_i} \in \Gamma_{\Delta'_i}^{(>)}$, а k змінюється від $k = 0$ до $k = n$.

Тоді вираз (2.35) можна записати у вигляді:

$$\rho_\Lambda(\eta) = \frac{z^{|\eta|}}{\Xi_\Lambda} \sum_{n \geq 0} \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!(n-k)!} \tilde{\rho}_{n;k}^\Lambda(\eta), \quad (2.38)$$

де

$$\begin{aligned} \tilde{\rho}_{n;k}^\Lambda(\eta) = & \sum_{\substack{(\Delta_1, \dots, \Delta_k) \subset \bar{\Delta}_{a,\Lambda} \\ (\Delta'_1, \dots, \Delta'_{n-k}) \subset \bar{\Delta}_{a,\Lambda}}} \chi^{cor}(\Delta_1, \dots, \Delta_k, \Delta'_1, \dots, \Delta'_{n-k}) \times \\ & \times \prod_{i=1}^k \int_{\Gamma_{\Delta_i}} \lambda_\sigma(d\gamma_{\Delta_i}) e^{-\beta U(\gamma_{\Delta_i}|\eta)} \times \prod_{1 \leq i < j \leq k} e^{-\beta W(\gamma_{\Delta_i}; \gamma_{\Delta_j})} \times \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \times \prod_{i=1}^{n-k} \left(\int_{\Gamma_{\Delta'_i}^{(>)}} \lambda_\sigma(d\gamma_{\Delta'_i}) e^{-\beta U(\gamma_{\Delta'_i}|\eta)} \right) e^{-\beta U(\eta)} \times \\
 & \times \prod_{1 \leq i < j \leq n-k} e^{-\beta W(\gamma_{\Delta'_i}|\gamma_{\Delta'_j})} \times \\
 & \times \prod_{i=1}^k \prod_{j=1}^{n-k} e^{-\beta W(\gamma_{\Delta_i}|\gamma_{\Delta'_j})} \int_{\Gamma_{\Lambda_a \setminus X_n}^{(dil)}} \lambda_\sigma(d\gamma_{\Lambda_a \setminus X_n}) e^{-\beta W(\eta|\gamma_{\Lambda_a \setminus X_n})} \times \\
 & \times \prod_{j=1}^{n-k} e^{-\beta W(\gamma_{\Delta'_j}|\gamma_{\Lambda_a \setminus X_n})} \times \prod_{i=1}^k e^{-\beta W(\gamma_{\Delta_i}|\gamma_{\Lambda_a \setminus X_n})} e^{-\beta U(\gamma_{\Lambda_a \setminus X_n})}
 \end{aligned} \tag{2.39}$$

та $X_n = \left(\bigcup_{i=1}^k \Delta_i \right) \cup \left(\bigcup_{j=1}^{n-k} \Delta'_j \right)$.

Зауваження 2.10. В тих кубиках, які перетинають межу області Λ (і.e. $\Delta \cap \Lambda \neq \Delta$, але $\Delta \cap \Lambda \neq \emptyset$), інтегрування в (2.39) виконується по конфігураціях $\Gamma_{\Delta \cap \Lambda}^{(\text{sign})}$, $\text{sign} \in \{dil, >, <\}$.

2.10.1. *Рівномірна обмеженість за об'ємом у випадку довільних значень z, β .* Питання термодинамічного граничного переходу для кореляційних функцій в області регулярних значень параметрів z, β , для яких існує єдина міра Гіббса $\mu \in \mathcal{G}_V$ добре висвітлено в літературі (див., наприклад, [50, 52]). Для довільних значень z, β вирішальною є оцінка

$$\rho_m(x_1, \dots, x_m) \leq \xi^m, \tag{2.40}$$

яка була отримана в роботі [43]. Доведення цієї рівності у роботі [43] є досить громіздким (див. детальніше [50]). У роботі [36] було запропоновано інше, більш прозоре, доведення, яке спирається на використання властивостей інтегралів за мірою Пуассона. Це доведення дуже співзвучне темі цієї статті і тому ми в скороченому вигляді наведемо це доведення. Воно спирається на розкладі кореляційних функцій $\rho_\Lambda(\eta)$, які визначаються інтегралом (2.28), в ряд, кожний член якого також представляється подібними інтегралами, але інтегрування в них виконується окремо по щільних конфігураціях (2.6) і окремо по розріджених конфігураціях (2.5). В роботі [36] був розглянутий випадок фінітного потенціалу взаємодії, а узагальнення на випадок довільного надстійкого потенціалу дивись в роботі [33].

У цьому підрозділі, використовуючи розклад (2.38)-(2.39), буде встановлена нерівність, з якої буде випливати нерівність (2.40). Сформулюємо результат у вигляді наступної теореми.

Теорема 2.11. Нехай потенціал взаємодії ϕ задовольняє умовам **(А)**, (2.13)-(2.15). Тоді для довільного $\Lambda \in \mathcal{B}_c(\mathbb{R}^d)$ і довільних $\beta, z \geq 0$ існує константа $\xi = \xi(\beta, z)$ (що не залежить від Λ) така, що кореляційні функції $\rho^\Lambda(\eta)$ задовольняють наступну нерівність:

$$\rho^\Lambda(\eta) \leq \xi^{|\eta|} e^{-\delta \beta U_{\phi^+}(\eta)} \quad (2.41)$$

для довільного $0 < \delta < 1$.

Перш ніж давати доведення теореми 2.11 сформулюємо дві допоміжні леми.

Лема 2.12. Нехай $\phi(|x|)$ задовольняє умовам **(А)**,

$$\gamma_{\Delta_i} \in \Gamma_{\Delta_i}^{(<)}, \quad \gamma_{\Delta'_j} \in \Gamma_{\Delta'_j}^{(>)},$$

тоді для $\varepsilon < \varepsilon_0$ буде виконуватись наступна нерівність:

$$-\beta \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{n-k} W_{\phi^-}(\gamma_{\Delta_i}; \gamma_{\Delta'_j}) \leq \beta \sum_{j=1}^{n-k} |\gamma_{\Delta'_j}| (v_\varepsilon + (|\gamma_{\Delta'_j}| + 1)\varphi_0).$$

Доведення. Для скорочення запису введемо позначення:

$$\sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{n-k} (\dots) := \sum_{i,j=1}^{k,n-k} (\dots).$$

Тоді

$$\begin{aligned} -\beta \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{n-k} W_{\phi^-}(\gamma_{\Delta_i}; \gamma_{\Delta'_j}) &= \beta \sum_{i,j=1}^{k,n-k} \sum_{\substack{x \in \gamma_{\Delta_i} \\ y \in \gamma_{\Delta'_j}}} \phi^-(|x-y|) \leq \\ &\leq \beta \sum_{i,j=1}^{k,n-k} |\gamma_{\Delta_i}| |\gamma_{\Delta'_j}| \sup_{\substack{x \in \Delta_i \\ y \in \Delta'_j}} \phi^-(|x-y|) \leq \\ &\beta \sum_{i,j=1}^{k,n-k} |\gamma_{\Delta'_j}| \sup_{\substack{x \in \Delta_i \\ y \in \Delta'_j}} \phi^-(|x-y|) |x-p|^\varepsilon, \end{aligned}$$

де $p \in \eta$. Ця нерівність слідує з того, що $|\gamma_{\Delta_i}| \leq d_\eta^\varepsilon(\Delta_i) \leq |x-p|^\varepsilon$ для будь яких $x \in \Delta_i$ і $p \in \eta$. Далі використаємо модифіковану нерівність трикутника $|x-p|^\varepsilon \leq |x-y|^\varepsilon + |y-p|^\varepsilon$, для $\varepsilon \in [0, 1]$, $x, y, p \in \mathbb{R}^d$. Тоді

для довільного $y \in \Delta'_j$ з $\gamma_{\Delta'_j} \in \Gamma_{\Delta'_j}^{(>)}$

$$\begin{aligned} & \beta \sum_{i,j=1}^{k,n-k} |\gamma_{\Delta'_j}| \sup_{\substack{x \in \Delta_i \\ y \in \Delta'_j}} \phi^- (|x - y|) |x - p|^\varepsilon \leq \\ & \leq \beta \sum_{i,j=1}^{k,n-k} |\gamma_{\Delta'_j}| \sup_{\substack{x \in \Delta_i \\ y \in \Delta'_j}} \phi^- (|x - y|) |x - y|^\varepsilon + \\ & \quad + \beta \sum_{i,j=1}^{k,n-k} |\gamma_{\Delta'_j}| \sup_{\substack{x \in \Delta_i \\ y \in \Delta'_j}} \phi^- (|x - y|) |y - p|^\varepsilon \leq \\ & \leq \beta \sum_{i,j=1}^{k,n-k} |\gamma_{\Delta'_j}| \sup_{\substack{x \in \Delta_i \\ y \in \Delta'_j}} \phi^- (|x - y|) |x - y|^\varepsilon + \\ & \quad + \beta \sum_{i,j=1}^{k,n-k} |\gamma_{\Delta'_j}| \sup_{\substack{x \in \Delta_i \\ y \in \Delta'_j}} \phi^- (|x - y|) (|\gamma_{\Delta'_j}| + 1) \leq \\ & \leq \beta \sum_{j=1}^{n-k} |\gamma_{\Delta'_j}| (v_\varepsilon + (|\gamma_{\Delta'_j}| + 1) \varphi_0). \end{aligned}$$

Другий доданок в передостанній нерівності виникає внаслідок того, що $y \in \gamma_{\Delta'_j}$ і $p \in \eta$, а також для достатньо малого a , а саме $a < \frac{1}{\sqrt{3}}$, виконується наступна нерівність:

$$|y - p|^\varepsilon \leq d_\eta^\varepsilon(\Delta'_j) + (a\sqrt{3})^\varepsilon \leq |\gamma_{\Delta'_j}| + 1.$$

Остання нерівність, яка слідує з визначень величин φ_ε і φ_0 (див. (2.16)), завершує доведення. \square

Лема 2.13. *Має місце рівність:*

$$\sum_{\Delta' \subset \Lambda} e^{-\delta'' \beta d_\eta^\varepsilon(\Delta')} = |\eta| K_2(\lambda, \beta, \varepsilon) = |\eta| K_2,$$

де K_2 це постійна, яка залежить від a, β, ε і не залежить від Λ .

Доведення. Нехай $\eta = \{x_1, \dots, x_m\}$. Розкладемо Λ на області (об'єднання кубиків) $\Lambda_1, \dots, \Lambda_m$ так щоб $d_\eta^\varepsilon(\Delta') = d_{x_k}^\varepsilon(\Delta')$ при $\Delta' \subset \Lambda_k$. Тоді

$$\sum_{\Delta' \subset \Lambda} e^{-\delta'' \beta d_\eta^\varepsilon(\Delta')} = \sum_{\Delta' \subset \Lambda_1} e^{-\delta'' \beta d_{x_1}^\varepsilon(\Delta')} + \dots + \sum_{\Delta' \subset \Lambda_m} e^{-\delta'' \beta d_{x_m}^\varepsilon(\Delta')} \leq$$

$$\leq |\eta| \sum_{\Delta' \subset \Lambda} e^{-\delta'' \beta d_{x_0}^{\varepsilon}(\Delta')} = |\eta| K_2(\lambda, \beta, \varepsilon),$$

де $d_{x_0}^{\varepsilon}(\Delta')$ – це відстань від фіксованої точки $x_0 \in \mathbb{R}^d$ до Δ' . □

Доведення теореми 2.11. Щоб довести теорему використаємо розклад (2.38)-(2.39). Це дозволяє інтеграл (2.28) по усіх можливих конфігураціях Γ_{Λ} представити у вигляді розкладу, кожний член якого містить інтеграли, у яких інтегрування виконується в окремих кубиках в одному з просторів $\Gamma_{\Delta}^{(<)}, \Gamma_{\Delta}^{(>)}$ або $\Gamma_{\Delta}^{(dil)}$. Враховуючи визначення (2.16), отримуємо оцінку:

$$-\beta \sum_{i=1}^k W(\eta|\gamma_{\Delta_i}) \leq \beta |\eta| \sup_{x \in \eta} \sum_{i=1}^k \sup_{y \in \gamma_{\Delta_i}} \phi^{-}(|x - y|) |\gamma_{\Delta_i}| \leq \beta |\eta| \varphi_{\varepsilon}.$$

Остання нерівність справедлива тому, що $\gamma_{\Delta_i} \in \Gamma_{\Delta_i}^{(<)}$. Таким чином

$$|\gamma_{\Delta_i}| \leq d_{\eta}^{\varepsilon}(\Delta_i) \leq |x - y|^{\varepsilon},$$

де ми вибираємо $\varepsilon < \varepsilon_0$.

Враховуючи, що $\gamma_{\Delta} \in \Gamma_{\Delta}^{(dil)}$, $|\gamma_{\Delta_i}| \leq 1, \forall \Delta \in \Lambda_a \setminus X_n$, отримаємо оцінки:

$$-\beta W(\eta|\gamma_{\Lambda_a \setminus X_n}) \leq \beta |\eta| \varphi_0, \tag{2.42}$$

$$-\beta W(\gamma_{\Delta'_j}|\gamma_{\Lambda_a \setminus X_n}) \leq \beta |\gamma_{\Delta'_j}| \varphi_0. \tag{2.43}$$

Умови **(А)** (див. (2.13)-(2.15)) дозволяють розбити потенціал ϕ на дві частини:

$$\phi = \delta \phi^+ + \phi_{\delta}^{st}, \quad \phi_{\delta}^{st} := (1 - \delta) \phi^+ + \phi^{-},$$

і так само, як ми отримали оцінку (2.18) за допомогою (2.18), маємо

$$U_{\phi_{\delta}^{st}}(\gamma) \geq \sum_{\Delta \in \bar{\Delta}_{\lambda}: |\gamma_{\Delta}| \geq 2} \left[\frac{(1 - \delta) \phi_0}{4(\sqrt{da})^s} - \frac{\varphi_0}{2} \right] |\gamma_{\Delta}|^2 - \frac{\varphi_0}{2} |\gamma|. \tag{2.44}$$

Для того, щоб мати додатне значення виразу у квадратних дужках, треба вибрати достатньо мале значення параметра a . Виберемо деяке максимальне значення $a = a_*(\delta)$, для якого зберігається умова стійкості:

$$U_{\phi_{\delta}^{st}}(\gamma) \geq -B_{\delta} |\gamma|, \quad B_{\delta} = \frac{\varphi_0(a_*)}{2}.$$

Ця нерівність дозволяє записати наступну оцінку:

$$\sum_{i=1}^{n-k} \left(U_{\phi_{\delta}^{st}}(\gamma_{\Delta'_i}) + W_{\phi_{\delta}^{st}}(\eta|\gamma_{\Delta'_i}) \right) + U_{\phi_{\delta}^{st}}(\eta) +$$

$$+ \sum_{1 \leq i < j \leq n-k} W_{\phi_\delta^{st}}(\gamma_{\Delta'_i} | \gamma_{\Delta'_j}) \geq -B_\delta (|\eta| + \sum_{i=1}^{n-k} |\gamma_{\Delta'_i}|).$$

Для того, щоб проконтролювати збіжність інтегралів по просторах

$$\Gamma_{\Delta'_i}^{(>)}, \quad i = 1, \dots, n - k$$

і сум по кубиках $(\Delta'_1, \dots, \Delta'_{n-k}) \subset \bar{\Delta}_{a,\Lambda}$, розіб'ємо енергію

$$U_{\delta\phi^+}(\gamma_{\Delta'_i}) = \delta U_{\phi^+}(\gamma_{\Delta'_i})$$

на дві частини, вибравши $\delta = \delta' + \delta''$ з деякими додатними малими константами δ', δ'' . Використовуючи умову (2.14) і те, що для $\gamma_{\Delta'} \in \Gamma_{\Delta'}^{(>)}$ кількість точок $|\gamma_{\Delta'}| > d_\eta^\varepsilon(\Delta')$ (див. (2.7)), можна записати наступну нерівність:

$$U_{\delta\phi^+}(\gamma_{\Delta'_i}) \geq \frac{1}{2} \delta' \frac{\phi_0}{(\sqrt{da})^s} |\gamma_{\Delta'_i}| (|\gamma_{\Delta'_i}| - 1) + \delta'' \frac{\phi_0}{(\sqrt{da})^s} d_\eta^\varepsilon(\Delta'_i).$$

Ця оцінка забезпечує збіжність інтегралу

$$\int_{\Gamma_{\Delta}^{(>)}} \lambda_{z\sigma}(d\gamma_{\Delta}) e^{-\frac{1}{2}\beta\delta' \frac{\phi_0}{(\sqrt{da})^s} |\gamma_{\Delta'_i}| (|\gamma_{\Delta'_i}| - 1) + \beta(B_\delta + \phi_0(2+|\gamma_{\Delta}|) + \varphi_\varepsilon)|\gamma_{\Delta}|} = \tag{2.45}$$

$$= K_1(a, z, \beta, \phi)$$

для достатньо малого a і це допомагає оцінити наступні суми:

$$\sum_{(\Delta'_1, \dots, \Delta'_{n-k}) \subset \bar{\Delta}_{a,\Lambda}} \prod_{\Delta' \in \bar{\Delta}_{a,\Lambda}} e^{-\delta'' \frac{\phi_0}{(\sqrt{da})^s} d_\eta^\varepsilon(\Delta'_i)} \leq (|\eta| K_2(a, \beta, \varepsilon))^{n-k}. \tag{2.46}$$

Деталі доведення в [33, Лема 3.3]. Позначимо через $X_{n-k}^{(max)}$ об'єднання усіх кубів $\Delta'_1 \cup \dots \cup \Delta'_{n-k} = X'_{n-k}$, в яких інтеграл (2.39) по конфігураціях в $\Lambda_a \setminus X_n$ приймає максимальне значення. Тоді, враховуючи елементарну оцінку

$$\chi^{cor}(\Delta_1, \dots, \Delta_k, \Delta'_1, \dots, \Delta'_{n-k}) \leq \chi^{cor}(\Delta_1, \dots, \Delta_k)$$

(див. (2.32)) і в такій самій формі як (2.35), (2.36) для $\eta = \emptyset$ розклад для $\Xi_{\Lambda \setminus X_l^{(max)}}$, отримаємо наступну оцінку

$$\begin{aligned} \rho_{\Lambda}(\eta) &\leq \frac{1}{\Xi_{\Lambda}} e^{-\delta\beta U_{\phi^+}(\eta)} \bar{\xi}^{|\eta|} \sum_{n=0}^{N_{\Lambda}} \sum_{k=0}^n \frac{(|\eta|K)^{n-k}}{k!(n-k)!} \tilde{\rho}_k^{\Lambda_a \setminus X_{n-k}^{(max)}}(\emptyset) = \\ &= \frac{1}{\Xi_{\Lambda}} e^{-\delta\beta U_{\phi^+}(\eta)} \bar{\xi}^{|\eta|} \sum_{l=0}^{N_{\Lambda}} \frac{(|\eta|K)^l}{l!} \sum_{k=0}^{N_{\Lambda}-l} \frac{1}{k!} \tilde{\rho}_k^{\Lambda_a \setminus X_l^{(max)}}(\emptyset) = \quad (2.47) \\ &= e^{-\delta\beta U_{\phi^+}(\eta)} \bar{\xi}^{|\eta|} \sum_{l=0}^{N_{\Lambda}} \frac{(|\eta|K)^l}{l!} \frac{\Xi_{\Lambda \setminus X_l^{(max)}}}{\Xi_{\Lambda}}, \end{aligned}$$

де $K = K_1 K_2$ (див. (2.45), (2.46)), $\bar{\xi} := ze^{\beta(B_{\delta} + \varphi_0 + \varphi_{\varepsilon})}$, а $\tilde{\rho}_k^{\Lambda \setminus X_l^{(max)}}(\emptyset)$ визначається формулою (2.36). З того, що $\Xi_{\Lambda_1} \leq \Xi_{\Lambda_2}$ для $\Lambda_1 \subset \Lambda_2$, слідує нерівність (2.41) з $\xi = \xi e^K$. \square

Зауваження 2.14. В нерівностях (2.42)-(2.46) константи φ_{ε} , φ_0 , B_{δ} , K_1 , K_2 залежать від параметра a , тому ξ залежить від a , який є фіксованим. Але $\Delta \in \bar{\Delta}_a$ повинні бути такими, щоб взаємодія двох частинок в одному кубіку була позитивною, тобто $a < r_0$ (див. (2.14)). Це забезпечує виконання нерівності (2.44).

2.15. Існування граничних мір Гіббса. Термодинамічний граничний перехід $N \rightarrow \infty$, $\Lambda \uparrow \mathbb{R}^d$ є необхідною операцією при вивченні макроскопічних властивостей фізичних систем. Це обумовлено перш за все тим, що при скінчених значеннях об'ємів $V = \sigma(\Lambda)$ поведінка термодинамічних функцій є регулярною (аналітичною). Тому точку фазового переходу на строго математичному рівні не можна виявити. У зв'язку з цим введемо поняття *термодинамічного граничного переходу*.

Нехай Λ_n це послідовність об'ємів, таких, що

$$\Lambda_1 \subset \Lambda_2 \subset \dots \subset \Lambda_n \subset \dots,$$

і $\cup_{n=1}^{\infty} \Lambda_n = \mathbb{R}^d$, а відповідна кількість частинок N_n зростає таким чином, щоб існувала границя

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{V_n}{N_n} = v, \quad V_n = \sigma(V_n). \quad (2.48)$$

Отже, з точки зору фізичних міркувань важливою математичною проблемою є строге доведення існування границі у виразах для середніх спостережуваних величин:

$$\bar{F} = \lim_{\Lambda \uparrow \mathbb{R}^d} \int_{\Gamma_{\Lambda}} F(\gamma) \mu_{\Lambda}(d\gamma). \quad (2.49)$$

З іншої сторони, з точки зору строгого підходу до математичної проблеми побудови теорії зовсім не безпідставно з'ясувати чи існує міра Гіббса на просторі нескінченних конфігурацій Γ . Звичайно з визначень (2.19), (2.28), видно, що щільності цих мір не витримують граничного переходу, тобто ми не можемо написати їх аналітичний вигляд. Але міра, яка не є абсолютно неперервною відносно $d\gamma$ чи якоїсь іншої міри, пов'язаної з мірою Лебега σ , може існувати.

Вперше цю проблему розглянули у 1967 році незалежно Мінлос [27, 28] (див. також [26]) і Рюель [42]. Якщо у Рюеля це був алгебраїчний підхід, що опирався на модні на той час ідеї Сігала, Хаага, Кастлера і тому був більш абстрактним, то Мінлос побудував сімейство гіббсових мір на циліндричних множинах $S_{\Lambda;A}$ нескінченновимірного конфігураційного простору Γ і визначив гіббсовий стан (гіббсову міру) як граничну міру. Тобто, для довільної послідовності об'ємів $\Lambda_1, \dots, \Lambda_k, \dots$, які прямують до \mathbb{R}^d і довільного обмеженого $\Lambda \subset \mathbb{R}^d$ знайдеться таке $k(\Lambda)$, що $\Lambda \subset \Lambda_k$ при всіх $k > k(\Lambda)$. Тоді, якщо для кожного $S_{\Lambda;A}$ існує границя

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \mu_{\Lambda_k}(S_{\Lambda;A}) = \mu(S_{\Lambda;A}) \quad (2.50)$$

і виконуються умови узгодженості

$$\mu_{\Lambda_1}(S_{\Lambda;A}) = \mu_{\Lambda_2}(S_{\Lambda;A}) \quad \text{для} \quad \Lambda_1 \subset \Lambda_2,$$

тоді буде справедлива наступна теорема.

Теорема 2.16 ([27]). *Нехай на алгебрі циліндричних множин в $\mathfrak{B}(\Gamma)$ визначена скінченно-адитивна ймовірнісна міра μ , причому така, що її обмеження на будь яку підалгебру $\mathfrak{B}_\Lambda(\Gamma) \subset \mathfrak{B}(\Gamma)$ є цілком адитивною мірою. Тоді цю міру можна продовжити єдиним чином до цілком адитивної міри на всю σ -алгебру $\mathfrak{B}(\Gamma)$.*

В роботі [27] було встановлено існування такої міри у великому канонічному ансамблі для регулярних значень параметрів z, β . Теорема 2.16 є аналогом відомої теореми Колмогорова [48] про продовження скінченновимірних ймовірнісних розподілів до злічено-адитивної міри на функціональному просторі (див., також, [34]). В роботі [28] були встановлені ергодичність та властивість сильного перемішування граничної міри для регулярних значень параметрів (β, v) .

В серії робіт Добрушина [5, 7–11] як для гратчастих так і для неперервних нескінченних класичних систем було приведене більш загальне визначення гіббсової міри за допомогою умовних розподілів. Практично в той же час майже аналогічний підхід був також запропонований Ленфордом і Рюелем [25].

Побудова граничних виразів для кореляційних функцій (2.28) для регулярних значень параметрів z, β є завершеною задачею. З точки зору методів її розв'язання можна виділити два: метод інтегральних рівнянь, який, в свою чергу, можна розбити на операторний (див. посилання в монографіях [52], (див. посилання в монографіях [50, 52])) і аналітичний (у вигляді розкладів (див. [29]) та методи полімерних та кластерних розкладів, посилання на які заняло б декілька сторінок. З точки зору методів, які ми обговорюємо у цьому огляді, властивість нескінченноподільності міри $\lambda_{z\sigma}$ (див. Лему 2.4) вперше була застосована в роботі [35], а в роботі [36] була ключовим технічним моментом для доведення обмеженості кореляційних функцій при довільних значеннях параметрів z, β . Це питання ми детально обговоримо у наступному розділі.

Існування станів Гіббса. Позначимо через

$$\mathcal{G}(\phi, z, \beta)$$

множину мір Гіббса, що відповідають взаємодії ϕ активності z і температури $T = 1/k\beta$.

Як наслідок теореми 2.11 виконується наступна теорема.

Теорема 2.17. *Нехай взаємодія ϕ задовільняє умови **A**. Тоді для довільних $z \geq 0$ і $\beta \geq 0$ маємо, що:*

$$\mathcal{G}(\phi, z, \beta) \neq \emptyset.$$

Доведення. Існування відповідного стану Гіббса впливає з аргументів, які базуються на наступному спостереженні. Нехай

$$\psi \in L^1(\mathbb{R}^d) \cap C(\mathbb{R}^d)$$

– будь-яка додатна функція така, що $\psi(x) \leq 1$, $x \in \mathbb{R}^d$, і нехай $\alpha(t)$, $t \in \mathbb{R}_+$ це будь-яка неперервна спадна функція з наступними умовами:

- (1) $\alpha_0 := \lim_{t \rightarrow 0^+} \alpha(t) = +\infty$;
- (2) $\alpha_+ := \lim_{t \rightarrow +\infty} \alpha(t) \geq 1$;

Визначимо

$$\Gamma^{\alpha, \psi} = \left\{ \gamma \in \Gamma \mid \sum_{\{x, y\} \subset \gamma} \psi(x) \alpha(|x - y|) \psi(y) < \infty \right\},$$

$$E^{\alpha, \psi}(\gamma) = \sum_{\{x, y\} \subset \gamma} \psi(x) \alpha(|x - y|) \psi(y), \quad \gamma \in \Gamma^{\alpha, \psi}.$$

Як показано в [24], для довільних $0 < D < \infty$ множина

$$\left\{ \gamma \in \Gamma \mid |E^{\alpha, \psi}(\gamma)| \leq D \right\}$$

є прекомпактна в Γ , який є Польським простором.

У цій роботі ми розглядаємо α як деяку неперервно спадаючу функцію, таку, що

$$\alpha(|x - y|) \leq e^{\frac{1}{2}V_2^+(x,y)}.$$

Очевидно, обрана таким чином, функція задовольняє умовам вище. Використовуючи властивості так званого K -перетворення (див. [23]) і теореми 2.11, для довільних Λ маємо

$$\int_{\Gamma} E^{\alpha, \psi}(\gamma) d\mu_{\Lambda}(\gamma) = \int_{\mathbb{R}^{2d}} \psi(x)\alpha(|x - y|)\psi(y)\rho_{\Lambda}^{(2)}(\{x, y\}) dx dy < C,$$

де $C \in \mathbb{R}_+$ деяка константа.

Тому, за теоремою Прохорова, сімейство мір

$$\{\mu_{\Lambda} \mid \Lambda \in \mathcal{B}_c(\mathbb{R}^d)\}$$

є компактним, що передбачає існування принаймні однієї граничної міри μ коли $\Lambda \nearrow \mathbb{R}^d$. Ми доведемо, що відповідна гранична міра є гіббсівською. Нехай μ_{Λ_n} , $n \geq 1$, де $\Lambda_n \nearrow \mathbb{R}^d$, $n \rightarrow \infty$, є послідовністю, яка збігається (у значенні Теорема Прохорова) до міри μ , і нехай ρ^{Λ_n} , ρ є відповідними кореляційними функціями. Відомо, (див. [19]), що міра μ на Γ – Гіббсова, тоді і тільки тоді, коли μ задовольняє рівняння *Georgii-Nguyen-Zessin (GNZ)*, тобто для всіх додатних, $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d) \times \mathfrak{B}(\Gamma)$ -вимірних функцій H виконується наступна рівність

$$\int_{\Gamma} \sum_{x \in \gamma} H(x, \gamma) \mu(d\gamma) = \int_{\Gamma} \int_{\mathbb{R}^d} H(x, \gamma \cup \{x\}) e^{-\beta W(\{x\}|\gamma)} \sigma(dx) \mu(d\gamma). \quad (2.51)$$

Більше того, використовуючи формулу Мекке (див. [19]), можна показати, що рівнянню (2.51) задовольняє будь яка міра μ_{Λ_n} , $n \geq 1$.

Нехай $\Lambda \in \mathcal{B}_c(\mathbb{R}^d)$. Тоді σ -алгебра $\mathfrak{B}(\Gamma)$ генерується множинами вигляду $A \cap \tilde{A}$ з $A \in \mathfrak{B}_{\Lambda}(\Gamma)$, $\tilde{A} \in \mathfrak{B}_{\mathbb{R}^d \setminus \Lambda}(\Gamma)$ а кожна міра на Γ однозначно визначається його значеннями на цих множинах.

Доведемо (2.51) для функції

$$(x, \gamma) = \mathbb{1}_{\Lambda}(x) \mathbb{1}_A(\gamma) \mathbb{1}_{\tilde{A}}(\gamma).$$

Нехай $n \in \mathbb{N}$ є довільним. Використовуючи властивість K -перетворення (див. [23]), маємо

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_{\Lambda_n}} \sum_{x \in \gamma} \mathbb{1}_{\Lambda}(x) \mathbb{1}_A(\gamma) \mathbb{1}_{\tilde{A}}(\gamma) \mu_{\Lambda_n}(d\gamma) &\leq \\ &\leq \int_{\Gamma_{\Lambda_n}} \sum_{x \in \gamma} \mathbb{1}_{\Lambda}(x) \mu_{\Lambda_n}(d\gamma) = \int_{\Lambda} \rho^{\Lambda_n}(x) \sigma(dx) \leq z\xi|\Lambda|. \end{aligned}$$

Права частина (2.51) для міри μ_{Λ_n} обмежена виразом

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{1}_{\Lambda}(x) \int_{\Gamma_{\Lambda_n}} e^{-\beta W(\{x\}|\gamma)} \mu_{\Lambda_n}(d\gamma) \sigma(dx) = \\ = \int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{1}_{\Lambda}(x) \rho^{\Lambda_n}(x) \sigma(dx) \leq z\xi|\Lambda|, \end{aligned}$$

де ми використовували визначення кореляційної функції та теорему Фубіні.

Отже, існує деяка підпоследовність $\{\mu_{\Lambda_{n_k}}\}_{k \geq 1}$, яка забезпечує виконання (2.51) для граничного показника μ . Доведення загальної додатної функції H випливає з того, що будь-яка додатна вимірна функція може бути апроксимована простими функціями. \square

3. КВАЗИ-ГРАТКОВА АПРОКСИМАЦІЯ НЕПЕРЕРВНИХ СИСТЕМ

Квазі-неперервну апроксимацію класичної статистичної механіки було запропоновано в [40] для дослідження нескінченних систем точкових частинок, які взаємодіють за допомогою двочастинкового (парного) посилено надстійкого потенціалу. Суть такої апроксимації полягає у тому, що в інтегралах (інтегралах Лебега-Пуассона по усім можливим конфігураціям частинок), які входять в означення основних характеристик системи, таких як велика статистична сума та кореляційні функції, інтегрування виконується тільки по таким конфігураціям, які для заданого розбиття простору \mathbb{R}^d на неперетинні гіперкубики (*коміржки*) об'ємом a^d містять не більше ніж одну точку (частинку) у кожному кубіку розбиття. Кореляційні функції та тиск системи, визначені таким чином, збігаються поточно (при $a \rightarrow 0$) до відповідних величин, у яких інтегрування виконується по усім можливим конфігураціям, якщо потенціал взаємодії є достатньо сингулярним в точці початку координат. Більш точно, коли потенціал не є локально інтегровний в будь якій обмеженій області простору \mathbb{R}^d , яка містить точку початку координат. Цей факт хоч і є передбачуваний з точки зору фізичних міркувань, але є досить несподіваний з математичної точки зору, бо множина таких конфігурацій має міру нуль по відношенню до міри Пуассона чи міри Гіббса для нескінченної системи.

Разом з тим, визначені таким чином системи легко апроксимувати системами *ґраткових газів*, вивчення яких значно спрощується. Особливо важливим перехід від неперервних систем до ґратчастих газів може виявитись при дослідженні критичної поведінки нескінченних неперервних систем в області фазових переходів.

В роботі [40] було показано, що для довільних додатних значень температури системи T (або оберненої температури $\beta = 1/kT$) та активності z апроксимований тиск системи $p^{(-)}(z, \beta; a)$ прямує до справжнього тиску $p(z, \beta)$ при $a \rightarrow 0$. В роботі [49] цей результат був узагальнений для систем з багаточастинковою взаємодією. Пізніше, в роботі [39] такий самий результат був отриманий для сім'ї кореляційних функцій, але тільки в області достатньо малих значень параметра z , значення якого обмежувались радіусом збіжності розкладів Кірквуда-Зальцбургга для кореляційних функцій системи.

В роботі [32] результат роботи [39] були узагальнені на випадок довільних додатних значень параметрів β, z . Використовуючи розклад кореляційних функцій за так званими *щільними* конфігураціями, який був запропонований в роботі [36] для потенціалів фінітної дії і в роботі [33] для потенціалів з нескінченним радіусом взаємодії, було встановлено, що сім'я апроксимованих кореляційних функцій $\rho_{\Lambda}^{(-)}(z, \beta; a)$ для системи в обмеженому об'ємі $\Lambda \in \mathbb{R}^d$ є рівномірно обмежена константою, яка не залежить від параметра апроксимації a і об'єму Λ і поточково збігається до кореляційних функцій $\rho(z, \beta)$ при $\Lambda \uparrow \mathbb{R}^d$ і $a \rightarrow 0$ при довільних додатних значеннях оберненої температури β та активності z . Цей результат було встановлено як для парних потенціалів посилено надстійкого типу так і для багаточастинкових посилено суперстійких взаємодій. Пізніше в роботі [2] була розглянута апроксимація вільної енергії неперервного газу і встановлений аналогічний результат для будь-яких значень оберненої температури $\beta > 0$ та питомого об'єму $v > 0$.

У цьому розділі ми детально опишемо основні результати вищезгаданих робіт і введемо модель неперервної системи взаємодіючих точкових частинок, яку ми в роботі [37] назвали *комірковим газом*.

3.1. Тиск. Дуже важлива термодинамічна характеристика статистичної системи це тиск. У рамках великого канонічного ансамблю тиск визначається формулою (2.26).

Існування цієї границі для системи, яку ми розглядаємо, є добре відомий результат (див. [12]). Для визначення вищезазначеного наближення введемо наступну статистичну суму:

$$\begin{aligned} \Xi_{\Lambda}^{(-)} &= \Xi_{\Lambda}^{(-)}(a) = \int_{\Gamma_{\Lambda}^{(dil)}} e^{-\beta U(\gamma)} \lambda_{\sigma}(d\gamma) = \\ &= \int_{\Gamma_{\Lambda}} \prod_{\Delta \in \bar{\Delta}_a \cap \Lambda} \chi_{\Delta}^{\Delta}(\gamma) e^{-\beta U(\gamma)} \lambda_{\sigma}(d\gamma), \end{aligned} \quad (3.1)$$

де $\chi_{-}^{\Delta}(\gamma)$ визначено формулою (2.29). Відповідний вираз для тиску визначається таким чином:

$$p^{(-)}(z, \beta; a) = \lim_{V \rightarrow \infty} p_{\Lambda}^{(-)}(z, \beta; a) := \frac{1}{\beta} \lim_{V \rightarrow \infty} \frac{1}{V} \log \Xi_{\Lambda}^{(-)}. \quad (3.2)$$

Сформулюємо основний результат цього підрозділу.

Теорема 3.2. *Нехай потенціал взаємодії $\phi(|x|)$ задовольняє умовам (А) (див. (2.13)-(2.15)). Тоді для довільного $\varepsilon > 0$ існує $a = a(z, \varepsilon) > 0$ таке, що*

$$|p(z, \beta) - p^{(-)}(z, \beta; a)| < \varepsilon$$

для усіх додатних z, β .

Доведення. Вставимо у праву частину (2.20) розклад одиниці (2.30):

$$\Xi_{\Lambda} = \sum_{\emptyset \subseteq X_{+} \subseteq \Lambda} \int_{\Gamma_{\Lambda}} \tilde{\chi}_{+}^{X_{+}}(\gamma) \tilde{\chi}_{-}^{X_{-}}(\gamma) e^{-\beta U(\gamma)} \lambda_{\sigma}(d\gamma). \quad (3.3)$$

Неважко помітити, що перший член в (3.3) (при $X_{+} = \emptyset$) збігається з $\Xi_{\Lambda}^{(-)}(a)$ (див. (3.1)). Використовуючи нескінченно подільну властивість міри Лебега-Пуассона (див. (2.4)) маємо:

$$\Xi_{\Lambda} = \Xi_{\Lambda}^{(-)}(a) \left[1 + \sum_{\emptyset \not\subseteq X_{+} \subseteq \Lambda} \int_{\Gamma_{X_{+}}} \rho_{X_{-}}^{(-)}(\gamma; a) \lambda_{\sigma}(d\gamma) \right] := \Xi_{\Lambda}^{(-)}(a) \Xi_{\Lambda}^{(+)}(a), \quad (3.4)$$

де

$$\rho_{X_{-}}^{(-)}(\gamma_{X_{+}}; a) = \frac{e^{-\beta U(\gamma_{X_{+}})}}{\Xi_{\Lambda}^{(-)}(a)} \int_{\Gamma_{X_{-}}} \tilde{\chi}_{-}^{X_{-}}(\gamma') e^{-\beta U(\gamma_{X_{+}}|\gamma')} \lambda_{\sigma}(d\gamma'),$$

і

$$U(\gamma_{X_{+}} | \gamma') := W(\gamma_{X_{+}}; \gamma') + U(\gamma').$$

Отже, використовуючи визначення (2.26) і (3.2), можна записати

$$p_{\Lambda}(z, \beta) = p_{\Lambda}^{(-)}(z, \beta; a) + p_{\Lambda}^{(+)}(z, \beta; a).$$

Існування термодинамічної границі для

$$p_{\Lambda}(z, \beta), \quad p_{\Lambda}^{(-)}(z, \beta; a), \quad p_{\Lambda}^{(+)}(z, \beta; a)$$

для потенціалу, який ми розглядаємо є очевидним. Отже, для доведення теореми ми маємо оцінити величину $p^{(+)}(z, \beta; a)$. Перш за все, використовуючи **SSS** припущення (1.10), можна записати

$$e^{-\beta U(\gamma_{X_{+}})} \leq \prod_{\Delta \in \bar{\Delta}_a \cap X_{+}} e^{-\beta A|\gamma_{\Delta}|^p + B|\gamma_{\Delta}|}, \quad (3.5)$$

і враховуючи (2.16) маємо

$$e^{-\beta W(\gamma_{X_+}; \gamma'_{X_-})} \leq \prod_{\Delta \in \bar{\Delta}_a \cap X_+} e^{\beta \varphi_0 |\gamma_\Delta|}. \tag{3.6}$$

Враховуючи (3.5) і (3.6), легко отримати наступну нерівність

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_{X_+}} \rho_{X_-}^{(-)}(\gamma; a) \lambda_\sigma(d\gamma) &\leq \\ &\leq \prod_{\Delta \in \bar{\Delta}_a \cap X_+} \int_{\Gamma_\Delta} e^{-\beta A |\gamma_\Delta|^p + B |\gamma_\Delta| + \varphi_0 |\gamma_\Delta|} \chi_+^\Delta(\gamma_\Delta) \lambda_\sigma(d\gamma_\Delta) \frac{\Xi_{X_-}^{(-)}}{\Xi_\Lambda^{(-)}}. \end{aligned}$$

З визначення міри λ_σ і враховуючи нерівність (2.18) інтеграл

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_\Delta} \lambda_\sigma(d\gamma_\Delta) e^{-\beta A |\gamma_\Delta|^p + \beta(B + \varphi_0 |\gamma_\Delta|)} &\leq \\ &\leq \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(a^d z)^n}{n!} e^{-\frac{1}{4}\beta b n^p + 2\beta \varphi_0 n} \leq \epsilon(a), \end{aligned}$$

з

$$b = b(a) := \inf_{\{x,y\} \subset \Delta} \phi^+(|x-y|) = \frac{\phi_0}{(\sqrt{da})^s}$$

і

$$\epsilon(a) = \frac{1}{2} z^2 a^{2d} e^{-\beta(1/4b-2\varphi_0)} \exp\{z a^d e^{-\beta(3/4b-2\varphi_0)}\}. \tag{3.7}$$

Далі з означень N_Λ , $\Xi_\Lambda^{(+)}$ (див. (2.30) і (3.4)) і вищеприведених оцінок, маємо:

$$\begin{aligned} \log \Xi_\Lambda^{(+)} &\leq \log \left[1 + \sum_{\emptyset \neq X_+ \subseteq \Lambda} \epsilon(a)^{N_{X_+}} \right] = \\ &= \log \left[1 + \sum_{k=1}^{N_\Lambda} \frac{N_\Lambda!}{k!(N_\Lambda - k)!} \epsilon(a)^k \right] = \frac{V}{a^d} \log [1 + \epsilon(a)]. \end{aligned} \tag{3.8}$$

В результаті

$$p_+(z, \beta; a) \leq \frac{1}{\beta a^d} \log [1 + \epsilon(a)].$$

Таким чином завдяки $\epsilon(a) \sim a^{2d}$ (див. (3.7))

$$\lim_{a \rightarrow 0} p^{(+)}(z, \beta; a) = 0.$$

□

3.3. Вільна енергія. У цьому розділі ми встановлюємо подібний результат для вільної енергії системи. У канонічному ансамблі вона задається формулами (2.22)-(2.23).

Квазі-граткова апроксимація визначаються за тими ж формулами, але за допомогою статистичної суми

$$Z_{\Lambda}^{(-)}(N, \beta, a) = \int_{\Gamma_{\Lambda}^{(N)}} \prod_{\Delta \in \bar{\Delta}_{a, \Lambda}} \chi_{-}^{\Delta}(\gamma) e^{-\beta U(\gamma)} \lambda_{\sigma}(d\gamma).$$

Тоді відповідна функція $f_{\Lambda}^{(-)}(N, \beta)$ та її термодинамічна границя $f^{(-)}(v, \beta)$ задовольняють теореми 3.4 та 3.5:

Теорема 3.4. *Нехай потенціал взаємодії $\phi(|x|)$ задовольняє умовам (A) (див. (2.13)-(2.15)). Тоді існує деяке $0 \leq v_0 < \infty$, таке, що для $v > v_0$ існує границя*

$$f^{(-)}(v, \beta) = \lim_{\substack{N \rightarrow \infty \\ \Lambda \uparrow \mathbb{R}^d}} f_{\Lambda}^{(-)}(N, \beta) := \lim_{\substack{N \rightarrow \infty \\ \Lambda \uparrow \mathbb{R}^d}} \frac{1}{N} \log Z_{\Lambda}^{(-)}(N, \beta), \quad (3.9)$$

для довільного $v > v_0$. Функція $f^{(-)}(v, \beta)$ є монотонно неспадною зростаючою функцією змінної v .

Теорема 3.5. *Нехай потенціал взаємодії $\phi(|x|)$ задовольняє умовам (A), див. (2.13)-(2.15). Тоді для довільного $\varepsilon > 0$ існує $a_1 = a_1(v, \varepsilon) > 0$, таке, що нерівність*

$$|f(v, \beta) - f^{(a)}(v, \beta)| < \varepsilon$$

виконується для усіх додатних v, β і $a \in (0, a_1(v, \varepsilon))$.

Доведення теореми 3.4 є таким самим як і відповідне доведення такої самої теореми для функції $f(v, \beta)$ в роботі [6]. Єдине зауваження полягає у тому, що побудова допоміжного розбиття на куби в [6] повинно бути узгодженим з розбиттям $\bar{\Delta}_a$.

Щоб довести теорему 3.5 вставимо розбиття одиниці (2.30) у вираз (2.21). Тоді

$$Z_{\Lambda}(N, \beta) = \sum_{X \subseteq \bar{\Delta}_{a, \Lambda}} \int_{\Gamma_{\Lambda}^{(N)}} \tilde{\chi}_{+}^X(\gamma) \tilde{\chi}_{-}^{\bar{\Delta}_{a, \Lambda} \setminus X}(\gamma) e^{-\beta U(\gamma)} \lambda_{\tilde{\sigma}}(d\gamma), \quad (3.10)$$

Виділяючи перший член розкладу, який відповідає значенню $X = \emptyset$ можна переписати (3.10) у вигляді:

$$Z_{\Lambda}(N, \beta) = Z_{\Lambda}^{(-)}(N, \beta) Z_{\Lambda}^{(+)}(N, a, \beta), \quad (3.11)$$

де

$$Z_{\Lambda}^{(+)}(N, a, \beta) = 1 + \frac{1}{Z_{\Lambda}^{(-)}(N, \beta)} \times \sum_{\emptyset \neq X \subseteq \bar{\Delta}_{a, \Lambda}} \int_{\Gamma_{\Lambda}^{(N)}} \tilde{\chi}_{+}^X(\gamma) \tilde{\chi}_{-}^{\bar{\Delta}_{a, \Lambda} \setminus X}(\gamma) e^{-\beta U(\gamma)} \lambda_{\bar{\sigma}}(d\gamma). \quad (3.12)$$

З означень (2.22)-(2.23), (3.9) та рівняння (3.11) отримуємо співвідношення:

$$f_{\Lambda}(N, \beta) = f_{\Lambda}^{(-)}(N, \beta) + f_{\Lambda}^{(+)}(N, \beta), \quad (3.13)$$

$$f_{\Lambda}^{(+)}(N, \beta) := \frac{1}{N} \log Z_{\Lambda}^{(+)}(N, a, \beta).$$

Щоб оцінити другий член в (3.13) запишемо енергію $U(\gamma)$ в кожному доданку суми (3.12):

$$U(\gamma) = U(\gamma_X) + W(\gamma_X; \gamma_{\Lambda \setminus X}) + U(\gamma_{\Lambda \setminus X}),$$

і скористаємося нерівністю (1.10) та визначенням (2.16). Тоді

$$e^{-\beta U(\gamma_X)} e^{-\beta W(\gamma_X; \gamma_{\Lambda \setminus X})} \leq \prod_{\Delta \in \bar{\Delta}_{a, X}} e^{-\beta A(a)|\gamma_{\Delta}|^m + \beta C(a)|\gamma_{\Delta}|} := E_X, \quad (3.14)$$

де

$$C(a) = B(a) + \varphi_0(a). \quad (3.15)$$

Позначимо інтеграл в (3.12) (після оцінки (3.14)) через I_X і запишемо вираз для $I'_X = I_X N! / \sigma_0^N$ (σ_0 визначено в (2.21)) в наступній формі

$$I'_X = \left(\int_X dx_1 + \int_{\Lambda \setminus X} dx_1 \right) \dots \left(\int_X dx_N + \int_{\Lambda \setminus X} dx_N \right) E_X \times \times \tilde{\chi}_{+}^X(\gamma_X) e^{-\beta U(\gamma_{\Lambda \setminus X})} \tilde{\chi}_{-}^{\bar{\Delta}_{a, \Lambda} \setminus X}(\gamma_{\Lambda \setminus X}). \quad (3.16)$$

Кожна множина X є об'єднанням k кубів

$$\Delta_1, \dots, \Delta_k, \quad k \in \{1, \dots, N_{\Lambda}\}.$$

Принаймні дві змінні з конфігурації $\gamma = \{x_1, \dots, x_N\}$ є у кожному кубі Δ_j , $j \in \{1, \dots, k\}$. Позначаємо кількість змінних у кубах $\Delta_1, \dots, \Delta_k$ буквами

$$M = m_1 + \dots + m_k.$$

Зрозуміло, що $M \in \{2k, \dots, N\}$ і $m_j \geq 2$, $j \in \{1, \dots, k\}$. Серед усіх 2^N членів, які з'являються в правій частині (3.16) не зникають лише ті члени, в яких інтеграція виконується за змінними $\{x_1, \dots, x_M\}$ по області

$$X_k = \bigcup_{i=1}^k \Delta_i,$$

а за змінними $\{x_{M+1}, \dots, x_N\}$ по області

$$\Lambda \setminus X_k = \bigcup_{i=k+1}^N \Delta_i.$$

Завдяки симетрії інтегралу відносно перестановок змінних $\{x_1, \dots, x_N\}$ кількість членів у I_X , які відповідають фіксованому M , становить

$$\frac{N!}{(N - M)! M!}.$$

Таким же чином кожен інтеграл по області X_k можна представити як суму інтегралів по кубам $\Delta_1, \dots, \Delta_k$. Далі, ми враховуємо, що змінні $\{x_1, \dots, x_M\}$ можуть бути розміщені в k кубах, так що кожен куб Δ_j має рівно m_j змінних, $\frac{M!}{m_1! \dots m_k!}$ способами. В результаті маємо:

$$\begin{aligned} Z_{\Lambda}^{(+)}(N, a, \beta) \leq & 1 + \sum_{k=1}^{N_{\Lambda}} \sum_{\{\Delta_1, \dots, \Delta_k\} \subset \bar{\Delta}_{a, \Lambda}} \sum_{M=2k}^N a^{dM} e^{\beta C(a)M} \times \\ & \times \sum_{\substack{m_1, \dots, m_k: m_j \geq 2 \\ m_1 + \dots + m_k = M}} \left(\prod_{j=1}^k \frac{e^{-\beta A(a)m_j^{m_j}}}{m_j!} \right) \frac{Z_{\Lambda \setminus X_k}^{(-)}(N - M, \beta)}{Z_{\Lambda}^{(-)}(N, \beta)}. \end{aligned} \tag{3.17}$$

Для оцінки відношення статистичних сум в (3.17) скористаємося наступною лемою.

Лема 3.6. *Нехай потенціал взаємодії $\phi(|x|)$ задовольняє умовам (A) (див. (2.13)-(2.15)). Тоді існує константа $K > 0$ така що*

$$\frac{Z_{\Lambda \setminus X_k}^{(-)}(N - M, \beta)}{Z_{\Lambda}^{(-)}(N, \beta)} \leq K^M.$$

для довільного $\beta > 0$, $v > 0$ і достатньо великого куба Λ .

Доведення. Зафіксуємо деяке $\bar{v} > 0$ і досить великий куб Λ таким чином, щоб $\sigma(\Lambda)/N \geq \bar{v}$. Згідно Добрушину та Мінлосу [12], введемо допоміжний потенціал:

$$\phi_{\bar{a}}(|x|) = \begin{cases} 0, & \text{для } |x| \leq \bar{a}, \\ \phi(|x|), & \text{для } |x| > \bar{a} \end{cases} \tag{3.18}$$

з довільним $a < \bar{a} < r_0$ (див. (2.14)). Доведення леми 3.6 впливає з оцінки відношення конфігурації

$$Q^{(-)}(N, \Lambda, \beta, a) = N! Z_{\Lambda}^{(-)}(N, \beta, a)$$

(див. також [12, лема 3']):

$$\frac{Q^{(-)}(N + 1, \Lambda, \beta, a)}{Q^{(-)}(N, \Lambda, \beta, a)} \geq k\sigma(\Lambda) \tag{3.19}$$

з $k = k(\bar{a}, \bar{v})$. Щоб довести (3.19) запишемо $Q^{(-)}(N + 1, \Lambda, \beta, a)$ таким чином:

$$Q^{(-)}(N + 1, \Lambda, \beta, a) = \int_{\Gamma_{\Lambda}^{(N)}} e^{-\beta U(\gamma)} d\gamma \int_{\Lambda} dx e^{-\beta W(x; \gamma)} \prod_{\Delta \in \bar{\Delta}_{a, \Lambda}} \chi_{\Delta}^{\Delta}(\gamma \cup \{x\}),$$

де $\gamma = \{x_1, \dots, x_N\}$, $d\gamma = dx_1 \cdots dx_N$. Визначимо область

$$\tilde{\Lambda}_{\bar{a}}(\gamma) := \{x \in \Lambda \mid |x - x_j| \geq \bar{a}, x_j \in \gamma, \gamma \in \Gamma_{\Lambda}^{(N)}\}$$

і виберемо Λ достатньо великим і \bar{a} достатньо малою щоб задовольняли нерівність:

$$\sigma(\tilde{\Lambda}_{\bar{a}}(\gamma)) \geq \frac{1}{2}\sigma(\Lambda). \tag{3.20}$$

Тоді, враховуючи, що для $x \in \tilde{\Lambda}_{\bar{a}}(\gamma)$

$$\prod_{\Delta \in \bar{\Delta}_{a, \Lambda}} \chi_{\Delta}^{\Delta}(\gamma \cup \{x\}) = \prod_{\Delta \in \bar{\Delta}_{a, \Lambda}} \chi_{\Delta}^{\Delta}(\gamma),$$

і

$$W(x; \gamma) = W_{\bar{a}}(x; \gamma) = \sum_{y \in \gamma} \phi_{\bar{a}}(|x - y|),$$

отримуємо:

$$I_{\Lambda}(\gamma) := \int_{\Lambda} dx e^{-\beta W(x; \gamma)} \geq \int_{\tilde{\Lambda}_{\bar{a}}(\gamma)} dx e^{-\beta W_{\bar{a}}(x; \gamma)}. \tag{3.21}$$

Нерівність Гелдера в (3.21) з мірою $dx/\sigma(\tilde{\Lambda}_{\bar{a}}(\gamma))$ дає нерівність:

$$I_{\Lambda}(\gamma) \geq \sigma(\tilde{\Lambda}_{\bar{a}}(\gamma)) e^{\frac{-\beta}{\sigma(\tilde{\Lambda}_{\bar{a}}(\gamma))} \int_{\tilde{\Lambda}_{\bar{a}}(\gamma)} W_{\bar{a}}(x; \gamma) dx}. \tag{3.22}$$

З умови (2.13) і визначення (3.18) маємо:

$$\int_{\tilde{\Lambda}_{\bar{a}}(\gamma)} W_{\bar{a}}(x; \gamma) dx \leq N \int_{\mathbb{R}^d} |\phi_{\bar{a}}(|x|)| dx := N \|\phi_{\bar{a}}\|_{L_1}.$$

Використовуючи цю нерівність і враховуючи, що $N\bar{v} \leq \sigma(\Lambda)$ і (3.20) отримуємо (3.19) з

$$k = \frac{1}{2} e^{-\frac{2\beta}{\bar{v}} \|\phi_{\bar{a}}\|_{L_1}}.$$

Якщо врахувати, що

$$Z_{\Lambda \setminus X_k}^{(-)}(N - M, \beta, a) < Z_{\Lambda}^{(-)}(N - M, \beta, a)$$

отримаємо:

$$\frac{Z_{\Lambda \setminus X_k}^{(-)}(N - M, \beta, a)}{Z_{\Lambda}^{(-)}(N, \beta, a)} \leq \frac{Z_{\Lambda}^{(-)}(N - 1, \beta, a)}{Z_{\Lambda}^{(-)}(N, \beta, a)} \dots$$

$$\dots \frac{Z_{\Lambda}^{(-)}(N - M, \beta, a)}{Z_{\Lambda}^{(-)}(N - M + 1, \beta, a)} \leq K^M$$

з $K = 1/k\bar{v}$. □

Доведення теореми 3.5. Воно впливає з тривіальних оцінок комбінаторних сум у (3.17). Нехай для простоти $p = 2$ у припущенні (1.10). З умови $m_1 + \dots + m_k = M$, можна отримати, що $m_1^2 + \dots + m_k^2 \geq M^2/k$. Отже, маємо:

$$Z_{\Lambda}^{(+)}(N, \beta, a) \leq 1 + \sum_{k=1}^{N_{\Lambda}} \sum_{\{\Delta_1, \dots, \Delta_k\} \subset \bar{\Delta}_{a, \Lambda}} (ea^{2d})^k e^{-4\beta(A(a) - \frac{1}{2}C(a))k} \times$$

$$\times \sum_{M'=0}^{\infty} a^{dM'} e^{-4\beta(A(a) - \frac{1}{2}C(a))M'} \leq (1 + \epsilon(a))^{N_{\Lambda}},$$

з

$$\epsilon(a) := 2ea^{2d} e^{-4\beta(A(a) - \frac{1}{2}C(a))}.$$

Зрозуміло, з рівнянь (2.17), (2.16), (3.15), що

$$\lim_{a \rightarrow 0} \frac{1}{a^d} \log(1 + \epsilon(a)) = 0,$$

а це завершує доведення теореми. □

3.7. Апроксимація кореляційних функцій. Згідно визначення *розріджених* конфігурацій (2.4)-(2.5) сім'я апроксимованих кореляційних функцій $\rho_{\Lambda}^{(-)}(z, \beta; a)$ для системи в обмеженому об'ємі $\Lambda \in \mathcal{B}_c(\mathbb{R}^d)$ визначається таким чином:

$$\rho_{\Lambda}^{(-)}(\eta; z, \beta, a) :=$$

$$:= \frac{1}{\Xi_{\Lambda}^{(-)}(z, \beta, a)} \int_{\Gamma_{\Lambda}} e^{-\beta U(\eta \cup \gamma)} \prod_{\Delta \in \bar{\Delta}_{a, \Lambda}} \chi_{-}^{\Delta}(\eta \cup \gamma) \lambda_{z\sigma}(d\gamma), \quad (3.23)$$

$$\Xi_{\Lambda}^{(-)}(z, \beta, a) := \int_{\Gamma_{\Lambda}} e^{-\beta U(\gamma)} \prod_{\Delta \in \bar{\Delta}_{a, \Lambda}} \chi_{-}^{\Delta}(\gamma) \lambda_{z\sigma}(d\gamma), \quad (3.24)$$

де

$$\chi_{-}^{\Delta}(\gamma) = \begin{cases} 1, & \text{для } \gamma \text{ з } |\gamma_{\Delta}| = 0 \vee 1, \\ 0, & \text{в інших випадках,} \end{cases}$$

а $\overline{\Delta}_{a,\Lambda}$ визначено перед формулою (2.4).

В розділі 2.10.1 (теорема 2.11) була встановлена рівномірна за Λ обмеженість кореляційних функцій $\rho_\Lambda(z, \beta)$ (нерівність (2.41)). Аналогічна нерівність справедлива і для функцій $\rho_\Lambda^{(-)}(\eta; z, \beta, a)$. Сформулюємо цей результат.

Лема 3.8. *Нехай потенціали ϕ задовольняє умови (A). Тоді для довільного $\eta \in \Gamma_\Lambda$ існує деяка додатна константа ξ_- , яка не залежить від Λ і a , такі, що*

$$\rho_\Lambda^{(-)}(\eta; z, \beta, a) \leq \xi_-^{|\eta|} e^{-\beta U_\delta^+(\eta)}. \quad (3.25)$$

Доведення. Так само, як і при доведенні теореми 2.11, потрібно використати розклад кореляційних функцій за щільними конфігураціями, тільки розбиття (2.30) треба побудувати з $\Delta \in \overline{\Delta}_{a_*}$, де a_* таке, що $a_*/a \in \mathbb{N}$, тобто в кожному кубіку розбиття $\overline{\Delta}_{a_*}$ вкладалось ціле число кубиків розбиття $\overline{\Delta}_a$. Не обмежуючи загальності, виберемо $a_* = 2a$. Тоді у кожному гіперкубі $\Delta' \in \overline{\Delta}_{a_*}$, що належать множинам X_n в розкладі може бути від 2-х до 2^d гіперкубів $\Delta \in \overline{\Delta}_a$. Крім того треба врахувати нерівність

$$\chi_+^{\Delta'}(\gamma) \prod_{\Delta \in \Delta'} \chi_-^\Delta(\gamma) \leq \prod_{\Delta \in \Delta'} \chi_-^\Delta(\gamma),$$

яка забезпечує появи у розкладі типу (2.47) для $\rho_\Lambda^{(-)}(\eta; z, \beta, a)$ відношення статистичних сум $\Xi_{\Lambda \setminus X_l^{(max)}}^{(-)} / \Xi_\Lambda^{(-)}$. \square

Нерівності (2.41) і (3.25) забезпечують існування термодинамічних границь для функцій $\rho_\Lambda(\eta; z, \beta, a)$ і $\rho_\Lambda^{(-)}(\eta; z, \beta, a)$.

Розглянемо послідовність (Λ_l) обмежених вимірних областей простору \mathbb{R}^d :

$$\Lambda_1 \subset \Lambda_2 \subset \dots \subset \Lambda_n \subset \dots, \quad \bigcup_l \Lambda_l = \mathbb{R}^d,$$

де послідовність (Λ_l) прямує до \mathbb{R}^d в сенсі Фішера (див. [52, Гл. 2, п. 2.1]).

Добре відомо, що для довільної конфігурації $\eta \in \Gamma_0$ і довільної послідовності (2.30) такої, що $\eta \subset \Lambda_1$ існує підпослідовність (Λ'_k) послідовності (Λ_l) така, що

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \rho_{\Lambda'_k}(\eta; z, \beta) = \rho(\eta; z, \beta) < \infty \quad (3.26)$$

для довільних додатних z, β рівномірно на $\mathfrak{B}(\Gamma_0)$. Цей результат є наслідком рівномірної обмеженості сім'ї кореляційних функцій. Тоді, так

само як і у попередньому випадку, існує підпослідовність (Λ''_m) послідовності (Λ_l) така, що існує границя:

$$\rho^{(-)}(\eta; z, \beta, a) = \lim_{m \rightarrow \infty} \rho_{\Lambda''_m}^{(-)}(\eta; z, \beta, a) < \infty. \quad (3.27)$$

Зауваження 3.9. Граничні функції $\rho(\eta; z, \beta)$ і $\rho^{(-)}(\eta; z, \beta, a)$ в (3.26) та (3.27) можуть бути різні для різних підпослідовностей Λ'_k і Λ''_m . Тому, для того, щоб функція $\rho^{(-)}(\eta; z, \beta, a)$ була апроксимацією функції $\rho(\eta; z, \beta)$ треба вибрати підпослідовність Λ''_m в граничному переході (3.27) як підпослідовність послідовності Λ'_k .

Тепер ми можемо сформулювати основний результат наступною теоремою.

Теорема 3.10. *Нехай потенціали ϕ задовольняють умови (А). Тоді для довільного $\varepsilon > 0$, довільних додатних z і β і довільної конфігурації $\eta \in \Gamma_0$ існує $a = a(z, \beta, \varepsilon) > 0$ таке, що:*

$$|\rho(\eta; z, \beta) - \rho^{(-)}(\eta; z, \beta, a)| < \varepsilon, \quad (3.28)$$

де $\rho(\eta; z, \beta)$ і $\rho^{(-)}(\eta; z, \beta, a)$ є граничними значеннями функцій

$$\rho_{\Lambda''_m}(\eta; z, \beta) \quad \text{і} \quad \rho_{\Lambda''_m}^{(-)}(\eta; z, \beta, a)$$

відповідно з тією самою підпослідовністю послідовності (Λ_l) (див. Зауваження 3.9)

Доведення. Доведення ґрунтується на існуванні границь (3.26), (3.27) і наступній лемі.

Лема 3.11. *Нехай потенціали ϕ задовольняють умови (А). Тоді для довільної послідовності Λ_l вигляду (2.30)*

$$\lim_{a \rightarrow 0} \rho_{\Lambda_l}^{(-)}(\eta; z, \beta, a) = \rho_{\Lambda_l}(\eta; z, \beta).$$

звідки слідує, що для довільного $\varepsilon > 0$ існує $a < a_*$ таке, що має місце наступна нерівність:

$$|\rho_{\Lambda_l}^{(-)}(\eta; z, \beta, a) - \rho_{\Lambda_l}(\eta; z, \beta)| \leq \frac{\varepsilon}{3}. \quad (3.29)$$

Внаслідок існування границь (3.26) і (3.27) для довільного $\varepsilon > 0$ $\exists K_1 \in \mathbb{N}$ таке, що для $k \geq K_1$ справедлива нерівність:

$$|\rho_{\Lambda''_m}(\eta; z, \beta) - \rho(\eta; z, \beta)| \leq \frac{\varepsilon}{3} \quad (3.30)$$

і існує $K_2 \in \mathbb{N}$, таке, що для $k \geq K_2$ справедлива нерівність:

$$|\rho_{\Lambda''_m}^{(-)}(\eta; z, \beta, a) - \rho^{(-)}(\eta; z, \beta, a)| \leq \frac{\varepsilon}{3}. \quad (3.31)$$

Тоді твердження теореми 3.2 слідує з (3.29) при $\Lambda_l \equiv \Lambda_m''$ і нерівностей (3.30), (3.31):

$$\begin{aligned} |\rho(\eta; z, \beta) - \rho^{(-)}(\eta; z, \beta, a)| &= \\ &= |\rho(\eta; z, \beta) - \rho_{\Lambda_m''}(\eta; z, \beta) + \\ &+ \rho_{\Lambda_m''}(\eta; z, \beta) - \rho_{\Lambda_m''}^{(-)}(\eta; z, \beta, a) + \\ &+ \rho_{\Lambda_m''}^{(-)}(\eta; z, \beta, a) - \rho^{(-)}(\eta; z, \beta, a)| \leq \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon \quad \square \end{aligned}$$

Наслідок 3.12. *Нерівність (3.28) забезпечує існування границі:*

$$\lim_{a \rightarrow 0} \rho^{(-)}(\eta; z, \beta, a) = \rho(\eta; z, \beta).$$

для довільних додатних $z, \beta > 0$ і $\eta \in \Gamma_0$.

У випадку двочастинкових потенціалів в області достатньо малих значень активності z існування єдиної поточкової границі було доведено в роботі [39].

3.12.1. Доведення леми 3.11. Підставимо розбиття (2.30) (але з кубиками, що мають довжину ребер a замість a_* і з аргументом $\eta \cup \gamma$ у кожній функції χ_{\pm}^{Δ}) в (2.28). Отримуємо розклад:

$$\begin{aligned} \rho_{\Lambda}(\eta; z, \beta) &= \frac{z^{|\eta|}}{\Xi_{\Lambda}(z, \beta)} \sum_{X \subseteq \Lambda} \int_{\Gamma_{\Lambda}} e^{-\beta U(\eta \cup \gamma)} \times \\ &\times \tilde{\chi}_{+}^X(\eta \cup \gamma) \tilde{\chi}_{-}^{\Lambda \setminus X}(\eta \cup \gamma) \lambda_{z\sigma}(d\gamma). \end{aligned} \quad (3.32)$$

Виділимо перший член розкладу при $X = \emptyset$ і, враховуючи означення (3.23)-(3.24), перепишемо (3.32) у наступному вигляді:

$$\rho_{\Lambda}(\eta; z, \beta) = \frac{\Xi_{\Lambda}^{(-)}(z, \beta, a)}{\Xi_{\Lambda}(z, \beta)} \rho_{\Lambda}^{(-)}(\eta; z, \beta, a) + R^{\Lambda}(\eta; z, \beta, a),$$

де

$$\begin{aligned} R^{\Lambda}(\eta; z, \beta, a) &= \frac{z^{|\eta|}}{\Xi_{\Lambda}(z, \beta)} \sum_{\emptyset \neq X \subseteq \Lambda} \int_{\Gamma_{\Lambda}} e^{-\beta U(\eta \cup \gamma)} \tilde{\chi}_{+}^X(\eta \cup \gamma) \times \\ &\times \tilde{\chi}_{-}^{\Lambda \setminus X}(\eta \cup \gamma) \lambda_{z\sigma}(d\gamma). \end{aligned} \quad (3.33)$$

Доведення леми 3.11 ґрунтується на двох технічних лемах.

Лема 3.13. *Нехай потенціали ϕ задовольняють умови (A). Тоді для довільного фіксованого $\Lambda \in \mathbb{B}_c(\mathbb{R}^d)$ і довільної конфігурації $\eta \in \Gamma_0$ має місце границя:*

$$\lim_{a \rightarrow 0} R^{\Lambda}(\eta; z, \beta, a) = 0.$$

Доведення. Дивись детальне доведення в [32, лема 5.1]. □

Лема 3.14. *Нехай потенціали ϕ задовольняють умови (A). Тоді для довільного фіксованого $\Lambda \in \mathbb{B}_c(\mathbb{R}^d)$ виконується границя:*

$$\lim_{a \rightarrow 0} \frac{\Xi_\Lambda(z, \beta)}{\Xi_\Lambda^{(-)}(z, \beta, a)} = 1. \quad (3.34)$$

Доведення. З рівняння (3.4) і нерівності (3.8) слідує, що

$$1 \leq \frac{\Xi_\Lambda(z, \beta)}{\Xi_\Lambda^{(-)}(z, \beta, a)} \leq (1 + \epsilon(a))^{N_\Lambda} = (1 + \epsilon(a))^{\frac{V}{a^d}}.$$

Враховуючи (3.7) отримуємо (3.34). □

4. МОДЕЛЬ КОМІРКОВОГО ГАЗУ

Теорема 3.2, 3.5, 3.10 приводять до висновку, що для системи з **SSS** взаємодією (див. визначення (1.10)) вплив щільних конфігурацій є незначною, незважаючи на той факт, що це є множина повної міри принаймні для міри Пуассона $\pi_{z\sigma}$ (див. Твердження 4.3). Внаслідок чого з'явилася ідея опису фізичних властивостей системи, яку ми розглядаємо, використовуючи модель, конфігураційний простір якої є $\Gamma^{(dil)}$. Таку модель ми називаємо *моделью коміркового газу*.

4.1. Визначення моделі.

Означення 4.2. *Для даного розподілу $\bar{\Delta}_a$ простору \mathbb{R}^d визначимо систему коміркового газу (КГ) як систему точкових частинок, простір конфігурацій яких є*

$$\tilde{\Gamma}^{(a)} = \tilde{\Gamma}_{\bar{\Delta}_a} := \{ \gamma \in \Gamma \mid |\gamma_\Delta| = 0 \vee 1 \text{ для всіх } \Delta \in \bar{\Delta}_a \}.$$

Твердження 4.3. *Простір $\tilde{\Gamma}^{(a)}$ – це підмножина в Γ міри нуль відносно міри Пуассона*

$$\pi_{z\sigma}(\tilde{\Gamma}^{(a)}) = 0.$$

Доведення. Запишемо індикатор множини $\tilde{\Gamma}^{(a)}$:

$$\mathbb{1}_{\tilde{\Gamma}^{(a)}}(\gamma) = \prod_{\Delta \in \bar{\Delta}_a} \chi_{\Delta}^{\Delta}(\gamma) \quad (4.1)$$

Тоді, враховуючи властивість нескінченно подільності міри Пуассона $\pi_{z\sigma}$ (див. (2.12)) отримуємо

$$\pi_{z\sigma}(\tilde{\Gamma}^{(a)}) = \int_{\Gamma} \prod_{\Delta \in \bar{\Delta}_a} \chi_{\Delta}^{\Delta}(\gamma) \pi_{z\sigma}(d\gamma) = \prod_{\Delta \in \bar{\Delta}_a} \int_{\Delta} \chi_{\Delta}^{\Delta}(\gamma) \pi_{z\sigma}^{\Delta}(d\gamma).$$

Тепер, беручи до уваги (2.11), визначення міри $\lambda_{z\sigma}$, (2.10) і визначення (4.1) функції χ^Δ ми можемо продовжити це обчислення:

$$\pi_{z\sigma}(\tilde{\Gamma}^{(a)}) = \prod_{\Delta \in \bar{\Delta}_a} e^{-z\sigma(\Delta)} (1 + z\sigma(\Delta)) = 0$$

Нескінченний добуток дорівнює нулю, оскільки

$$e^{-z\sigma(\Delta)} (1 + z\sigma(\Delta)) < 1$$

і приймає однакове значення для всіх $\Delta \in \bar{\Delta}_a$. □

4.4. Вимірна структура простору $\tilde{\Gamma}^{(a)}$. Для опису вимірних множин конфігураційного простору $\tilde{\Gamma}^{(a)}$ перевизначимо простір $\tilde{\Gamma}^{(a)}$ як простір *маркованих конфігурацій*:

$$\tilde{\Gamma}^{(a)} := \{ \tilde{\gamma} = \{(\Delta_1, x_1), \dots, (\Delta_n, x_n), \dots\} \mid x_i \in \Delta_i, \Delta_i \in \bar{\Delta}_a \}.$$

Отже, $\tilde{\Gamma}^{(a)}$ можна представити як дискретний набір обмежених неперервних «співів» (див., наприклад, [21], [20]).

Як і в неперервному випадку, позначаємо через $\tilde{\Gamma}_0^{(a)}$ множину скінчених конфігурацій простору $\tilde{\Gamma}^{(a)}$, який є:

$$\tilde{\Gamma}_0^{(a)} = \bigsqcup_{n \in \mathbb{N}_0} \tilde{\Gamma}^{(a;n)},$$

де $\tilde{\Gamma}^{(a;n)}$ це простір скінчених послідовностей $\tilde{\gamma} \in \tilde{\Gamma}_0^{(a)}$ з n кубами $\{\Delta_1, \dots, \Delta_n\} \subset \bar{\Delta}_a$.

Так само як і в (2.30) і (2.34) позначимо через \bar{X}_n множину кубів $\Delta_j \in \bar{\Delta}_a$ і через $X_n \subset \mathbb{R}^d$ об'єднання таких кубів. Нехай, також, \mathfrak{X}_{Δ_j} борелівська множина

$$\mathcal{B}(\Delta_j) := \mathcal{B}(\mathbb{R}^d) \upharpoonright \Delta_j, \quad \Delta_j \in \bar{\Delta}_a.$$

Тоді циліндричну множину в $\tilde{\Gamma}^{(a;n)}$ і в $\tilde{\Gamma}_0^{(a)}$ можна визначити за допомогою деякої фіксованої множини Λ_N і послідовності множин

$$\mathfrak{X}_{\Delta_j} \in \mathcal{B}(\Delta_j), \quad j = \bar{1}, \bar{N}$$

наступним чином ($n \leq N$):

$$\tilde{X}_N^{(n)}(\bar{\Lambda}_N, \bar{\mathfrak{X}}_N) = \left\{ \{(\Delta_1, x_1), \dots, (\Delta_n, x_n)\} \in \tilde{\Gamma}^{(a;n)} \mid x_j \in \mathfrak{X}_{\Delta_j} \right\} \quad (4.2)$$

і

$$\tilde{X} := \bigcup_{N \in \mathbb{N}} \bigcup_{\bar{\Lambda}_N \subset \bar{\Delta}_a} \bigcup_{\bar{\mathfrak{X}}_N} \bigsqcup_{n=0}^N \tilde{X}_N^{(n)}(\bar{\Lambda}_N, \bar{\mathfrak{X}}_N) \in \mathfrak{B}(\tilde{\Gamma}_0^{(a)}),$$

де $\bar{\mathfrak{X}}_N = \{\mathfrak{X}_{\Delta_1}, \dots, \mathfrak{X}_{\Delta_N}\}$.

4.5. **Міри на просторі конфігурацій коміркового газу.** Щоб побудувати аналог міри Лебега-Пуассона на $\tilde{\Gamma}_0^{(a)}$, визначимо міру $\tilde{\sigma}^{(n)}$ на множинах (4.2):

$$\sigma^{(n)}(\tilde{X}_N^{(n)}(\bar{\Lambda}_N, \bar{\mathfrak{X}}_N)) = \begin{cases} 1, & \text{для } n = 0, \\ \sum_{\bar{\Lambda}_n \subseteq \bar{\Lambda}_N} \sigma(\mathfrak{X}_{\Delta_1}) \cdots \sigma(\mathfrak{X}_{\Delta_n}), & \text{для } 1 \leq n \leq N, \\ 0, & \text{для } n > N. \end{cases}$$

Тоді легко порахувати, що для $1 \leq n \leq N$

$$\sigma^{(n)}(\tilde{X}_N^{(n)}(\bar{\Lambda}_N, \bar{\mathfrak{X}}_N)) = \frac{1}{n!} \int_{\mathfrak{X}_N} dx_1 \cdots \int_{\mathfrak{X}_N} dx_n \prod_{i=1}^n \chi_-^{\Delta_i}(\{x_1, \dots, x_n\}), \quad (4.3)$$

де $\mathfrak{X}_N := \bigcup_{i=1}^N \mathfrak{X}_{\Delta_i}$ і $dx_i = \sigma(dx_i)$. Тоді,

$$\lambda_\sigma^{(a)} := \sum_{n=0}^{\infty} \sigma^{(n)}$$

є мірою Лебега-Пуассона на $\tilde{\Gamma}_0^{(a)}$ і $\tilde{\Gamma}_{\bar{\Lambda}_N}^{(a)}$.

Означення 4.6. Міра $\lambda_\sigma^{(a)}$ називається Δ -нескінченно подільною, якщо рівність (2.12) в лемі 2.4 виконується при умові, що множини X_1 і X_2 є об'єднаннями кубів $\Delta \in \bar{\Delta}_a$.

Лема 4.7. Міра $\lambda_\sigma^{(a)}$ є Δ -нескінченно подільною на $\tilde{\Gamma}_0^{(a)}$ і на $\tilde{\Gamma}_{\bar{\Lambda}_N}^{(a)}$ і

$$\lambda_\sigma^{(a)}(\tilde{\Gamma}_{\bar{\Lambda}_N}^{(a)}) = (1 + a^d)^N.$$

Доведення. З (4.3) слідує, що для довільного $F \in L^1(\Gamma_0, \lambda_\sigma)$

$$\int_{\tilde{\Gamma}_0^{(a)}} F(\tilde{\gamma}) \lambda_\sigma^{(a)}(d\tilde{\gamma}) = \int_{\Gamma_0} F(\gamma) \prod_{\Delta \in \bar{\Delta}_a} \chi_-^{\Delta}(\gamma) \lambda_\sigma(d\gamma). \quad (4.4)$$

Як наслідок, нескінченна подільність міри $\lambda_\sigma^{(a)}$ слідує з нескінченно подільності міри λ_σ . У випадку, коли усі $\mathfrak{X}_{\Delta_i} \equiv \Delta_i$, тобто

$$\mathfrak{X}_N \equiv \Lambda_N, \quad N = \sigma(\Lambda_N)/a^d,$$

маємо:

$$\lambda_\sigma^{(a)}(\tilde{\Gamma}_{\bar{\Lambda}_N}^{(a)}) = \int_{\Gamma_{\Lambda_N}} \prod_{\Delta \in \bar{\Delta}_a} \chi_-^{\Delta}(\gamma) \lambda_\sigma(d\gamma) =$$

$$= \prod_{\Delta \in \bar{\Lambda}_N} \int_{\Gamma_\Delta} \chi_\Delta^{\Delta}(\gamma) \lambda_\sigma(d\gamma) = (1 + a^d)^N. \quad \square$$

Тепер можемо розглянути сім'ю ймовірнісних мір на $\tilde{\Gamma}_{\bar{\Lambda}_N}^{(a)}$:

$$\pi_\sigma^{(a;N)} := (1 + a^d)^{-N} \lambda_\sigma^{(a)}, \quad N \in \mathbb{N}. \quad (4.5)$$

Зауважимо, що ця сім'я є узгодженою, тобто для будь-яких N і $N + k$, $k \in \mathbb{N}$ ($\bar{\Lambda}_N \subset \bar{\Lambda}_{N+k}$)

$$\pi_\sigma^{(a;N+k)} \upharpoonright \tilde{\Gamma}_{\bar{\Lambda}_N}^{(a)} = \pi_\sigma^{(a;N)},$$

бо для довільної циліндричної функції $F(\tilde{\gamma} \cap \bar{\Lambda}_N)$

$$\int_{\tilde{\Gamma}_{\bar{\Lambda}_{N+k}}^{(a)}} F(\tilde{\gamma} \cap \bar{\Lambda}_N) \pi_\sigma^{(a;N+k)}(d\tilde{\gamma}) = \int_{\tilde{\Gamma}_{\bar{\Lambda}_N}^{(a)}} F(\tilde{\gamma}) \pi_\sigma^{(a;N)}(d\tilde{\gamma}).$$

Тоді знову за теоремою Колмогорова існує єдина ймовірнісна міра, яка, в якомусь сенсі, є апроксимацією міри Пуассона на Γ . Дійсно, давайте обчислимо перетворення Лапласа

$$l_{\pi_\sigma^{(a;N)}}(f) := \int_{\tilde{\Gamma}_{\bar{\Lambda}_N}^{(a)}} e^{\langle \tilde{\gamma}, f \rangle} \pi_\sigma^{(a;N)}(d\tilde{\gamma}).$$

Враховуючи (4.5) і лему (2.12) отримаємо рівність:

$$\begin{aligned} l_{\pi_\sigma^{(a;N)}}(f) &= \frac{\prod_{j=1}^N \left(1 + \int_{\Delta_j} e^{f(x)} dx\right)}{(1 + a^d)^N} = \\ &= \prod_{j=1}^N \left(1 + \frac{1}{1 + a^d} \int_{\Delta_j} (e^{f(x)} - 1) dx\right) = \\ &= \exp \left[a^d \sum_{j=1}^N \log \left(1 + \frac{1}{1 + a^d} \int_{\Delta_j} (e^{f(x)} - 1) dx\right)^{\frac{1}{a^d}} \right]. \end{aligned}$$

Якщо тепер попрямувати a до нуля, а N – до безмежності таким чином, щоб $Na^d = \sigma(\Lambda) = \text{const}$, то отримаємо, що

$$\lim_{\substack{N \rightarrow \infty \\ a \rightarrow 0}} l_{\pi_\sigma^{(a;N)}}(f) = \exp \left[\int_{\Lambda} (e^{f(x)} - 1) dx \right],$$

тобто є перетворенням Лапласа міри Пуассона.

Визначення міри Гіббса $\mu^{(a)}$ на $\tilde{\Gamma}^{(a)}$ є таким самим, як визначення μ на Γ , тобто щільність умовної міри Гібса $\mu_{\bar{\Lambda}}^{(a)}(\cdot | \cdot)$ визначається так само, але відносно міри $\lambda_{z\sigma}^{(a)}$. Іншими словами, похідні Радона-Нікодіма від міри $\mu_\Lambda^{(a)}$ та $\mu_\Lambda^{(a)}$ відносно $\lambda_{z\sigma}$ і $\lambda_{z\sigma}^{(a)}$ відповідно будуть однаковими. І

нарешті, внаслідок формули (4.4) велика статистична сума і кореляційні функції будуть визначатись тими самими формулами (3.24) і (3.23).

4.8. Граткова апроксимація системи коміркового газу. Теорема 3.2 та 3.10 стверджують, що модель коміркового газу це квазінеперервна система, яка з будь-якою заздалегідь заданою точністю є наближенням звичайної неперервної системи з посилено надстійкою взаємодією. У цьому розділі ми покажемо, що можна визначити відповідну систему ґраткового газу на $a\mathbb{Z}^d$ таким чином, що їх кореляційні функції при $a \rightarrow 0$ збігаються в границі.

Введемо кусково-постійну функцію потенціалу взаємодії:

$$\phi_{\bar{\Delta}_a}(|x - y|) = \begin{cases} \phi(|x_{\Delta}^c - y_{\Delta'}^c|) := \phi_{\Delta\Delta'}, & \text{для } x \in \Delta, y \in \Delta', \\ +\infty, & \text{для } x, y \in \Delta \in \bar{\Delta}_a, \Delta \cap \Delta' = \emptyset, \end{cases} \quad (4.6)$$

де x_{Δ}^c – позначає координату центра гіперкубика Δ .

Лема 4.9. Для будь-якого стійкого потенціалу взаємодії ϕ з постійною B (див (1.4)) потенціал взаємодії $\phi_{\bar{\Delta}_a}$ також стабільний з тією ж константою B .

Доведення. Див. [37]. □

Твердження 4.10. Для довільного $x, y \in \mathbb{R}^d$ і $\bar{\Delta}_a$ таких, що $x \in \Delta$, $y \in \Delta'$ і $\Delta \cap \Delta' = \emptyset$

$$\lim_{a \rightarrow 0} \phi_{\bar{\Delta}_a}(|x - y|) = \phi(|x - y|).$$

Доведення є тривіальним. Очевидним є також наступне

Твердження 4.11. Система частинок КГ, які взаємодіють за потенціалом (4.6) перетворюється на модель ґраткового газу.

Доведення. Перепишемо велику статистичну суму моделі КГ для енергії взаємодії

$$U_{\bar{\Delta}_a}(\tilde{\gamma}) = \sum_{1 \leq i < j \leq k} \phi_{\bar{\Delta}_a}(|x_i - x_j|)$$

конфігурації $\tilde{\gamma} = \{x_1, \dots, x_k\}$ в такому вигляді:

$$\Xi_{\bar{\Lambda}}^{LG}(\beta, z, a) = \int_{\bar{\Gamma}_{\bar{\Lambda}}^{(a)}} e^{-\beta U_{\bar{\Delta}_a}(\tilde{\gamma})} \lambda_{z\sigma}^{(a)}(d\tilde{\gamma}). \quad (4.7)$$

Якщо $N_{\bar{\Lambda}}$ це кількість гіперкубиків в $\bar{\Lambda}$, тоді з визначення $\lambda_{z\sigma}^{(a)}$, маємо:

$$\begin{aligned} \Xi_{\bar{\Lambda}}^{LG}(\beta, z, a) &= \sum_{k=0}^{N_{\Lambda}} z^k \sum_{\{\Delta_1, \dots, \Delta_k\} \subseteq \bar{\Lambda}_N} \int_{\Delta_1} dx_1 \cdots \int_{\Delta_k} dx_k e^{-\beta U_{\bar{\Delta}_a}(\tilde{\gamma})} = \\ &= \sum_{\substack{n_1, \dots, n_{N_{\Lambda}}: \\ n_j \in \{0,1\}}} z^{n_1 + \dots + n_{N_{\Lambda}}} \int_{\Delta_1(n_1)} dx_1 \cdots \int_{\Delta_{N_{\Lambda}}(n_{N_{\Lambda}})} dx_{N_{\Lambda}} e^{-\beta \sum_{i,j=1}^k n_i \phi_{\Delta_i \Delta_j} n_j}, \end{aligned}$$

де $\phi_{\Delta_i \Delta_j}$ визначено в (4.6),

$$\Delta_j(n_j) = \begin{cases} \emptyset, & \text{для } n_j = 0, \\ \Delta_j, & \text{для } n_j = 1, \end{cases}$$

і

$$\int_{\Delta_j(n_j)} dx_j = a^{n_j d}, \quad j = \overline{1, N_{\Lambda}}. \quad (4.8)$$

Оскільки потенціал взаємодії є кусково постійною функцією, то всі інтеграли можуть бути розраховані за формулою (4.8). А саме, ми отримуємо:

$$\Xi_{\bar{\Lambda}}^{LG}(\beta, z, a) = \sum_{n_1, \dots, n_{N_{\Lambda}}: n_j \in \{0,1\}} z_a^{n_1 + \dots + n_{N_{\Lambda}}} e^{-\beta \sum_{1 \leq i < j \leq k} n_i \phi_{\Delta_i \Delta_j} n_j},$$

де $z_a := z a^d$ або в термінах вузлів $j \in a\mathbb{Z}^d$ для $\tilde{\Lambda} \in a\mathbb{Z}^d$

$$\begin{aligned} \Xi_{\bar{\Lambda}}^{LG}(\beta, z, a) &= \sum_{n_j \in \{0,1\}, j \in \tilde{\Lambda}} \prod_{j \in \tilde{\Lambda}} z_a^{n_j} e^{-\beta \sum_{\{i,j\} \subset \bar{\Lambda}} n_i \phi_{\Delta_i \Delta_j} n_j} = \\ &= \sum_{n_j \in \{0,1\}, j \in \tilde{\Lambda}} e^{-\beta \sum_{\{i,j\} \subset \bar{\Lambda}} n_i \phi_{\Delta_i \Delta_j} n_j + \mu_a \sum_{j \in \bar{\Lambda}} n_j}, \end{aligned}$$

де $\mu_a = \log z_a$ – хімічний потенціал.

Сімейство кореляційних функцій можна записати, підставляючи у рівняння (3.23) і (3.24) потенціал взаємодії $\phi_{\bar{\Delta}_a}$ замість потенційного ϕ

$$\rho_{\bar{\Lambda}}^{LG}(\tilde{\eta}; \beta, z, a) = \frac{z^{|\tilde{\eta}|}}{\Xi_{\bar{\Lambda}}^{LG}(\beta, z, a)} \int_{\tilde{\Gamma}_{\bar{\Lambda}}^{(a)}} e^{-\beta U_{\bar{\Delta}_a}(\tilde{\eta} \cup \tilde{\gamma})} \lambda_{z\sigma}^{(a)}(d\tilde{\gamma}),$$

яке також може бути виражене через змінні ґраткового газу:

$$\begin{aligned} \rho_{\bar{\Lambda}}^{LG}(\tilde{\eta}; \beta, z, a) &= \\ &= \frac{z^{|\tilde{\eta}|}}{\Xi_{\bar{\Lambda}}^{LG}(\beta, z, a)} \sum_{n_j \in \{0,1\}, j \in \tilde{\Lambda} \setminus \tilde{\eta}} e^{-\beta \sum_{\{i,j\} \subset \bar{\Lambda}} n_i \phi_{\Delta_i \Delta_j} n_j + \mu_a \sum_{j \in \bar{\Lambda} \setminus \tilde{\eta}} n_j}, \quad (4.9) \end{aligned}$$

де $\tilde{\eta} = \{i_1, \dots, i_{|\tilde{\eta}|}\} \subset \tilde{\Lambda}$ і $n_{i_1} = \dots = n_{i_{|\tilde{\eta}|}} = 1$ в сумі експоненти правої частини рівняння (4.9). \square

Тепер ми покажемо, що для $\Lambda \in \mathfrak{B}_c(\overline{\Delta}_a)$ система граткового газу і коміркового газу збігаються в границі $a \rightarrow 0$.

Лема 4.12. Для довільного $\overline{\Lambda} \in \mathfrak{B}_c(\overline{\Delta}_a)$, довільних додатних значень β, z і довільної конфігурації $\tilde{\eta} \in \tilde{\Gamma}_{\overline{\Lambda}}^{(a)}$

$$\lim_{a \rightarrow 0} |\Xi_{\overline{\Lambda}}^{LG}(\beta, z, a) - \Xi_{\overline{\Lambda}}^{(a)}(\beta, z)| = 0, \quad (4.10)$$

$$\lim_{a \rightarrow 0} |\rho_{\overline{\Lambda}}^{LG}(\tilde{\eta}; \beta, z, a) - \rho_{\overline{\Lambda}}^a(\tilde{\eta}; \beta, z)| = 0, \quad (4.11)$$

Доведення. Доведемо, наприклад, рівняння (4.10). Використовуючи представлення (3.24), (4.7) та (4.4), запишемо:

$$\begin{aligned} \Xi_{\overline{\Lambda}}^{LG}(\beta, z, a) - \Xi_{\overline{\Lambda}}^{(a)}(\beta, z) &= \int_{\tilde{\Gamma}_{\overline{\Lambda}}^{(a)}} \left(e^{-\beta U_{\overline{\Delta}_a}(\tilde{\gamma})} - e^{-\beta U(\tilde{\gamma})} \right) \lambda_{z\sigma}^{(a)}(d\tilde{\gamma}) = \\ &= \int_{\Gamma_{\Lambda}} \left(e^{-\beta U_{\overline{\Delta}_a}(\gamma)} - e^{-\beta U(\gamma)} \right) \prod_{\Delta \in \overline{\Delta}_a} \chi_{\Delta}^{\Lambda}(\gamma) \lambda_{\sigma}(d\gamma). \end{aligned}$$

Тепер доведення впливає із властивості стійкості взаємодій $U_{\overline{\Delta}_a}$ та U , нерівності $\chi_{\Delta}^{\Lambda} \leq 1$, твердження 4.10 та теореми про мажорантної збіжності. Доведення (4.11) таке саме. \square

Очевидно, що сімейство кореляційних функцій $\rho_{\overline{\Lambda}}^{LG}(\tilde{\eta}; \beta, z, a)$ задовольняє нерівності (3.25) і існують граничні функції в сенсі (3.27). Далі, використовуючи ті ж самі аргументи, що і в попередньому розділі можна сформулювати аналог теореми 3.10 для функції $\rho_{\overline{\Lambda}}^{LG}(\tilde{\eta}; \beta, z, a)$.

4.13. Висновок. Таким чином, використовуючи теореми 3.2 та 3.10 для систем, в яких взаємодія, що задовольняє припущенням **(A)**, середні значення фізичних спостережуваних величин та термодинамічні функції неперервних класичних систем з будь-якою попередньо заданою точністю можна наблизити відповідними значеннями моделі коміркового газу. Наступним кроком була апроксимація взаємодії потенціалом (4.6), яка перетворює неперервну систему в граткову на $a\mathbb{Z}^d$. Основна мета подальших досліджень полягає у встановленні результатів, які були отримані в роботах [13, 47] для систем на гратці $a\mathbb{Z}^d$.

ЛІТЕРАТУРА

- [1] S. Albeverio, Yu. G. Kondratiev, M. Röckner. Analysis and geometry on configuration spaces. *Journal of Functional Analysis*, 154(2):444–500, 1998, doi: 10.1006/jfan.1997.3183.
- [2] V. A. Boluh, A. L. Rebenko. Cell gas free energy as an approximation of the continuous model. *Journal of Modern Physics*, 06(02):168–175, 2015, doi: 10.4236/jmp.2015.62022.
- [3] C. Castellano, S. Fortunato, V. Loreto. Statistical physics of social dynamics. *Reviews of Modern Physics*, 81(2):591–646, 2009, doi: 10.1103/revmodphys.81.591.
- [4] X. Descombes, R. Minlos, E. Zhizhina. Object extraction using a stochastic birth-and-death dynamics in continuum. *Journal of Mathematical Imaging and Vision*, 33(3):347–359, 2008, doi: 10.1007/s10851-008-0117-y.
- [5] R. L. Dobruschin. The description of a random field by means of conditional probabilities and conditions of its regularity. *Theory of Probability & Its Applications*, 13(2):197–224, 1968, doi: 10.1137/1113026.
- [6] R. L. Dobrushin. Investigation of conditions for the asymptotic existence of the configuration integral of gibbs' distribution. *Theory of Probability & Its Applications*, 9(4):566–581, 1964, doi: 10.1137/1109079.
- [7] R. L. Dobrushin. Gibbsian random fields for lattice systems with pairwise interactions. *Functional Analysis and Its Applications*, 2(4):292–301, 1968, doi: 10.1007/bf01075681.
- [8] R. L. Dobrushin. Gibbsian random fields. the general case. *Functional Analysis and Its Applications*, 3(1):22–28, 1969, doi: 10.1007/bf01078271.
- [9] R. L. Dobrushin. The problem of uniqueness of a gibbsian random field and the problem of phase transitions. *Functional Analysis and Its Applications*, 2(4):302–312, 1969, doi: 10.1007/bf01075682.
- [10] R. L. Dobrushin. Gibbsian random fields for particles without hard core. *Theor. Math. Phys.*, 4(1):705–719, 1970, doi: 10.1007/bf01246670.
- [11] R. L. Dobrushin. Prescribing a system of random variables by conditional distributions. *Theory of Probability & Its Applications*, 15(3):458–486, 1970, doi: 10.1137/1115049.
- [12] R. L. Dobrushin, R. A. Minlos. Existence and continuity of pressure in classical statistical physics. *Theory of Probability & Its Applications*, 12(4):535–559, 1967, doi: 10.1137/1112072.
- [13] R.L. Dobrushin. Existence of phase transitions in models of lattice gas. In *Proc. Fifth Berkeley Sympos. Math. Statist. and Prob.*, page 73–87. Univ. of Calif. Press., 1966.
- [14] D. Finkelshtein, Yu. Kondratiev, O. Kutoviy. Statistical dynamics of continuous systems: perturbative and approximative approaches. *Arabian Journal of Mathematics*, 4(4):255–300, 2014, doi: 10.1007/s40065-014-0111-8.
- [15] D. Finkelshtein, Yu. Kondratiev, O. Kutoviy, E. Lytvynov. Binary jumps in continuum. ii. non-equilibrium process and a vlasov-type scaling limit. *Journal Math. Phys.*, 52(11):113301, 2011, doi: 10.1063/1.3657345.
- [16] D. L. Finkelshtein, Yu. G. Kondratiev, O. V. Kutoviy, E. Lytvynov. Binary jumps in continuum. i. equilibrium processes and their scaling limits. *Journal Math. Phys.*, 52(6):063304, 2011, doi: 10.1063/1.3601118.
- [17] M. E. Fisher. The free energy of a macroscopic system. *Archive Rat. Mech. Analysis*, 17(5):377–410, 1964, doi: 10.1007/bf00250473.
- [18] I. M. Gelfand, N. Ja. Vilenkin. *Obobshchennyye funktsii, . Nekotorye primeneniya garmonicheskogo analiza. Osnashchennyye gilbertovy prostranstva.* Gosudarstv. Izdat. Fiz.-Mat. Lit., Moscow, 1961.

- [19] H.-O. Georgii. *Gibbs Measures and Phase Transitions*. De Gruyter, 2011, doi: 10.1515/9783110250329.
- [20] H.-O. Georgii, V. Zagrebnov. On the interplay of magnetic and molecular forces in curie–weiss ferrofluid models. *Journal Stat. Phys.*, 93(1/2):79–107, 1998, doi: 10.1023/b:joss.0000026728.01594.18.
- [21] H.-O. Georgii, H. Zessin. Large deviations and the maximum entropy principle for marked point random fields. *Probability Theory and Related Fields*, 96(2):177–204, 1993, doi: 10.1007/bf01192132.
- [22] J. Ginibre. On the asymptotic exactness of the Bogoliubov approximation for many boson systems. *Commun. in Math. Phys.*, 8(1):26–51, 1968, doi: 10.1007/bf01646422.
- [23] Yu. G. Kondratiev, T. Kuna. Harmonic analysis on configuration space: general theory. *Infinite Dimensional Analysis, Quantum Probability and Related Topics*, 05(02):201–233, 2002, doi: 10.1142/s0KoKu02219025702000833.
- [24] Yu. G. Kondratiev, O. V. Kutoviy. On the metrical properties of the configuration space. *Mathematische Nachrichten*, 279(7):774–783, 2006, doi: 10.1002/mana.200310392.
- [25] O. E. Lanford, D. Ruelle. Observables at infinity and states with short range correlations in statistical mechanics. *Commun. in Math. Phys.*, 13(3):194–215, 1969, doi: 10.1007/bf01645487.
- [26] R. A. Minlos. Lectures on statistical physics. *Russian Math. Surv.*, 23(1):137–196, 1968, doi: 10.1070/rm1968v023n01abeh001235.
- [27] R. A. Minlos. Limiting Gibbs’ distribution. *Functional Analysis and Its Applications*, 1(2):140–150, 1968, doi: 10.1007/bf01076086.
- [28] R. A. Minlos. Regularity of the Gibbs limit distribution. *Functional Analysis and Its Applications*, 1(3):206–217, 1968, doi: 10.1007/bf01076905.
- [29] R. A. Minlos, S. K. Pogosyan. Estimates of ursell functions, group functions, and their derivatives. *Theor. Math. Phys.*, 31(2):408–418, 1977, doi: 10.1007/bf01036671.
- [30] O. Ovaskainen, D. Finkelshtein, O. Kutoviy, S. Cornell, B. Bolker, Yu. Kondratiev. A general mathematical framework for the analysis of spatiotemporal point processes. *Theoretical Ecology*, 7(1):101–113, 2013, doi: 10.1007/s12080-013-0202-8.
- [31] Y. M. Park. Bounds on exponentials of local number operators in quantum statistical mechanics. *Commun. in Math. Phys.*, 94(1):1–33, 1984, doi: 10.1007/bf01212347.
- [32] S. M. Petrenko, A. L. Rebenko, M. V. Tertychnyi. Quasicontinuous approximation in classical statistical mechanics. *Ukrains’kyi Matemat. Zhurnal*, 63(3):369–384, 2011, <http://umj.imath.kiev.ua/index.php/umj/article/view/2723>.
- [33] S. N. Petrenko, A. L. Rebenko. Superstable criterion and superstable bounds for infinite range interaction i: two-body potentials. *Methods Funct. Anal. Topology*, 13(1):50–61, 2007, <http://mfat.imath.kiev.ua/article/?id=378>.
- [34] B. L. S. Prakasa Rao, K. R. Parthasarathy. Probability measures on metric spaces. *Journal of the American Statistical Association*, 63(323):1061, 1968, doi: 10.2307/2283907.
- [35] A. L. Rebenko. Poisson measure representation and cluster expansion in classical statistical mechanics. *Commun. in Math. Phys.*, 151(2):427–435, 1993, doi: 10.1007/bf02096775.
- [36] A. L. Rebenko. New proof of ruelle’s superstability bounds. *Journal Stat. Phys.*, 91(3/4):815–826, 1998, doi: 10.1023/a:1023098131878.
- [37] A. L. Rebenko. Cell gas model of classical statistical systems. *Reviews in Math. Phys.*, 25(04):1330006, 2013, doi: 10.1142/s0129055x13300069.

- [38] A. L. Rebenko, M. V. Tertychnyi. On stability, superstability and strong superstability of classical systems of statistical mechanics. *Methods Funct. Anal. Topology*, 14(3):287–296, 2008, <http://mfat.imath.kiev.ua/article/?id=452>.
- [39] A. L. Rebenko, M. V. Tertychnyi. Quasilattice approximation of statistical systems with strong superstable interactions: correlation functions. *Journal Math. Phys.*, 50(3):033301, 2009, doi: 10.1063/1.3081054.
- [40] A.L. Rebenko, M.V. Tertychnyi. Quasi-continuous approximation of statistical systems with strong superstable interactions. *Збірник праць Ін-ту математики НАНУ*, 4(3):172–182, 2007.
- [41] D. Ruelle. *Classical statistical mechanics of a system of particles*. Birkhäuser, 1963, doi: 10.5169/SEALS-113366.
- [42] D. Ruelle. States of classical statistical mechanics. *Journal Math. Phys.*, 8(8):1657–1668, 1967, doi: 10.1063/1.1705406.
- [43] D. Ruelle. Superstable interactions in classical statistical mechanics. *Commun. in Math. Phys.*, 18(2):127–159, 1970, doi: 10.1007/bf01646091.
- [44] L. van Hove. Quelques propriétés générales de l'intégrale de configuration d'un système de particules avec interaction. *Physica*, 15(11-12):951–961, 1949, doi: 10.1016/0031-8914(49)90059-2.
- [45] C. N. Yang, T. D. Lee. Statistical theory of equations of state and phase transitions. i. theory of condensation. *Phys. Rev.*, 87(3):404–409, 1952, doi: 10.1103/physrev.87.404.
- [46] J. M. Yeomans. *Statistical mechanics of phase transitions*. Oxford University Press, London, 1992.
- [47] Ф. А. Березин, Я. Г. Синай. Существование фазового перехода у решеточного газа с притяжением между частицами. In *Тр. ММО*, volume 17, pages 197 – 212. Изд. Московского универ., 1967, <http://mi.mathnet.ru/mmo194>.
- [48] А. Н. Колмогоров. *Основные понятия теории вероятностей*. М: Рад. ОНТИ, 1936.
- [49] С. М. Петренко. Квазінеперервна апроксимація статистичних систем з багато-частинковою взаємодією. In *Наук. вісн. Львів НЛТУ України. Збірник науково-технічних праць.*, pages 287—296. Наук. вісн. Львів НЛТУ України., 2008.
- [50] Д.Я. Петрина, В.И. Герасименко, П.В. Мальшев. *Математические основы классической статистической механики*. Наукова думка, Київ, 1985.
- [51] Л. В. Радущкевич. *Курс термодинамики*. Москва: "Просвещение 1971.
- [52] Д. Рюэль. *Статистическая Механика. Строгие Результаты*. М.: Мир, 1971.

О. Л. Ребенко

ІНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ НАН УКРАЇНИ, М. КИЇВ

Email: rebenko@imath.kiev.ua, oleksiy.rebenko@gmail.com

ORCID: orcid.org/0000-0001-5406-3080

Характеристики лінійної та нелінійної апроксимації класів періодичних функцій багатьох змінних

А. С. Романюк

Анотація. У роботі наведено огляд важливих результатів, одержаних за багаторічний період дослідження характеристик лінійної та нелінійної апроксимації класів Соболева та Нікольського-Бесова періодичних функцій багатьох змінних.

1. Вступ

В статті висвітлені важливі результати, отримані автором упродовж багаторічного періоду досліджень апроксимативних характеристик класів періодичних функцій багатьох змінних, що визначаються за певних обмежень на домінуючу мішану гладкість (класи Нікольського-Бесова $\mathbb{W}_{p,\theta}^r$). Окрім того, тут також зроблено огляд деяких результатів, які стосуються досліджень класів періодичних функцій багатьох змінних, що мають обмежену мішану похідну (класи Соболева $\mathbb{W}_{p,\alpha}^r$), або мішану різницю (класи Нікольського \mathbb{H}_p^r).

Класи функцій, про які йдеться, є аналогами функціональних класів з відомих просторів С. Л. Соболева (простори W), С. М. Нікольського (простори H) і О. В. Бесова (простори B).

Простори диференційовних функцій багатьох змінних W стали об'єктом ґрунтовних математичних досліджень на початку 30-х років минулого століття, коли С. Л. Соболевим – при розв'язанні певних задач математичної фізики – були закладені основи теорії цих просторів, зокрема, теорії їх вкладень, як окремого напрямку функціонального аналізу і теорії функцій.

Наступний основоположний внесок у теорію функціональних просторів був зроблений у 50-ті роки С. М. Нікольським, який запропонував нову класифікацію функцій багатьох змінних, ключовим у якій є умова належності функції (чи її похідних) до відомих просторів Гельдера-

Зигмунда. Результатом такої класифікації стали простори, що згодом отримали назву H -просторів.

В кінці 50-х років О. В. Бесов увів до розгляду простори B , в означення яких залучений додатковий (до параметрів в означенні просторів H) числовий параметр θ , $1 \leq \theta \leq \infty$, за допомогою якого вдається більш тонко враховувати диференціально-різницеві властивості функцій.

З точки зору теорії апроксимації інтерес до згаданих функціональних просторів (а, точніше, класів в них) почав зростати ще з 60-х років минулого століття. Фундамент системних досліджень закладений роботою К. І. Бабенка (1960), в якій був запропонований підхід до оптимального наближення класів функцій з просторів W . К. І. Бабенком було показано, що скінченно-вимірними агрегатами найкращого (у певному сенсі) наближення класів $\mathbb{W}_{2,r}^r$ у просторі L_2 є тригонометричні поліноми з «номерами» гармонік з так званого «гіперболічного хреста». Такий факт надав потужного імпульсу дослідженням апроксимативних властивостей класів періодичних функцій багатьох змінних $\mathbb{W}_{p,\alpha}^r$ і \mathbb{H}_p^r у роботах багатьох відомих спеціалістів в області теорії функцій: Б. С. Мітягіна, С. О. Теляковського, Я. С. Бугрова, Н. С. Нікольської, В. Є. Майорова, Е. М. Галєєва, Дінь Зунга, Е. С. Белінського. Визначальний внесок в дослідження апроксимативних характеристик згаданих функціональних класів був зроблений В. М. Темляковим.

Отже, підсумовуючи сказане, звернемо увагу на дві обставини, які на початковому етапі мотивували дослідження апроксимативних характеристик класів $\mathbb{B}_{p,\theta}^r$. По-перше, у результаті досліджень, пов'язаних з задачами апроксимації класів $\mathbb{W}_{p,\alpha}^r$ і \mathbb{H}_p^r було з'ясовано, що у випадку функцій багатьох змінних тригонометричні поліноми з «номерами» гармонік з гіперболічних хрестів наділені такими ж апроксимативними можливостями, як і звичайні тригонометричні поліноми у випадку наближення функцій однієї змінної.

По-друге, і це, мабуть, є головним, було виявлено, що в багатовимірному випадку класи $\mathbb{W}_{p,\alpha}^r$ і \mathbb{H}_p^r відрізняються з точки зору порядкових оцінок їх апроксимації за допомогою певних агрегатів наближення. Більше того, з'ясовано, що у деяких випадках, коли найкращими в сенсі порядкових значень наближення класів $\mathbb{W}_{p,\alpha}^r$ є тригонометричні поліноми з «номерами» гармонік з гіперболічних хрестів, найкращими в цьому ж сенсі для класів \mathbb{H}_p^r є вже тригонометричні поліноми з «номерами» гармонік з модифікованих, певним чином, гіперболічних хрестів.

Наведені нижче результати, більшість з яких викладена у авторській монографії [23], дають відповіді на ряд запитань обумовлених зазначеними обставинами, які природним чином виникали у дослідженнях

апроксимативних характеристик згаданих класів функцій. Важливим є також те, що при розв'язанні окремих задач апроксимації на класах Нікольського-Бесова $\mathbb{B}_{p,\theta}^r$ вдалося виявити низку ефектів, які на класах $\mathbb{W}_{p,\alpha}^r$ і \mathbb{H}_p^r не проявляються.

2. ОЗНАЧЕННЯ ТА ПОЗНАЧЕННЯ

Означимо основні об'єкти дослідження – функціональні простори і класи.

Нехай \mathbb{R}^d , $d \geq 1$, – евклідов простір з елементами $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_d)$. Через $L_p(\pi_d)$, $1 \leq p \leq \infty$, позначимо простір вимірних 2π -періодичних за кожною змінною функцій $f(\mathbf{x}) = f(x_1, \dots, x_d)$ зі скінченною нормою

$$\|f\|_p = \left((2\pi)^{-d} \int_{\pi_d} |f(\mathbf{x})|^p d\mathbf{x} \right)^{\frac{1}{p}}, \quad 1 \leq p < \infty,$$

$$\|f\|_\infty = \operatorname{ess\,sup}_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d} |f(\mathbf{x})|, \quad p = \infty.$$

Тут $\pi_d := \prod_{j=1}^d [0, 2\pi) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d \mid x_j \in [0, 2\pi), j = \overline{1, d}\}$.

Означимо мішану l -ту різницю функції f з кроком h_j за змінною x_j , $j = \overline{1, d}$. Для $\mathbf{h} = (h_1, \dots, h_d) \in \mathbb{R}^d$ та $l \in \mathbb{N}$ покладемо

$$\Delta_{\mathbf{h}}^l f(\mathbf{x}) := \Delta_{h_d}^l \dots \Delta_{h_1}^l f(x_1, \dots, x_d),$$

де

$$\Delta_{h_j}^l f(\mathbf{x}) = \Delta_{h_j} \Delta_{h_j}^{l-1} f(\mathbf{x}), \quad \Delta_{h_j}^0 f(\mathbf{x}) := f(\mathbf{x}),$$

$$\Delta_{h_j} f(\mathbf{x}) \equiv \Delta_{h_j}^1 f(\mathbf{x}) = f(x_1, \dots, x_j + h_j, \dots, x_d) - f(\mathbf{x}).$$

Визначимо повний мішаний p -модуль гладкості порядку l функції f :

$$\omega_l(f, \mathbf{t})_p := \sup_{|h_i| \leq t_i} \|\Delta_{\mathbf{h}}^l f\|_p, \quad \mathbf{t} = (t_1, \dots, t_d) \in \mathbb{R}_+^d.$$

Кажуть, що функція $f \in L_p(\pi_d)$, $1 \leq p \leq \infty$, належить простору $B_{p,\theta}^r$, $1 \leq \theta \leq \infty$, $\mathbf{r} = (r_1, \dots, r_d)$, $r_j > 0$, $j = \overline{1, d}$, якщо скінченна її півнорма

$$|f|_{B_{p,\theta}^r} := \begin{cases} \left(\int_{\pi_d} \left(\prod_{j=1}^d t_j^{-r_j} \omega_l(f, \mathbf{t})_p \right)^\theta \prod_{j=1}^d \frac{dt_j}{t_j} \right)^{\frac{1}{\theta}}, & 1 \leq \theta < \infty, \\ \sup_{t_j > 0} \prod_{j=1}^d t_j^{-r_j} \omega_l(f, \mathbf{t})_p, & \theta = \infty, \end{cases}$$

де $l > \max\{r_i, i = \overline{1, d}\}$.

Норму на лінійних просторах $B_{p,\theta}^r$ задамо формулою

$$\|f\|_{B_{p,\theta}^r} = \|f\|_p + |f|_{B_{p,\theta}^r}.$$

Простори $B_{p,\theta}^r$, а точніше, множини $B_{p,\theta}^r \cap L_p^0(\pi_d)$, де

$$L_p^0(\pi_d) := \left\{ f \in L_p(\pi_d) : \int_0^{2\pi} f(\mathbf{x}) dx_j = 0, \quad j = \overline{1, d} \right\},$$

можна охарактеризувати і у термінах так званого декомпозиційного нормування належних їм функцій, на базі їх розкладу в ряд Фур'є за тригонометричною системою $\{e^{i(\mathbf{k}, \mathbf{x})}\}_{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^d}$.

Також зазначимо, через $\mathbb{B}_{p,\theta}^r$ позначається одинична куля у просторі $B_{p,\theta}^r$, а точніше,

$$\mathbb{B}_{p,\theta}^r := \{f \in L_p^0(\pi_d) : \|f\|_{B_{p,\theta}^r} \leq 1\}.$$

У такій, найбільш загальній формі, простори $B_{p,\theta}^r$ введені у 1989 році в роботі [9]. Проте, з одного боку, вони є узагальненнями відомих ізотропних просторів Бесова [8] (у випадку $\theta = \infty$ – просторів Нікольського [10]), а з другого, – належать шкалі просторів SB мішаної гладкості, введених у 1965 році Т. І. Амановим [7].

Для просторів $B_{p,\theta}^r$ справедливі такі вкладення по параметру θ :

$$B_{p,1}^r \subset B_{p,\theta_1}^r \subset B_{p,\theta_2}^r \subset B_{p,\infty}^r \equiv H_p^r,$$

де $1 \leq \theta_1 < \theta_2 \leq \infty$.

В математичній літературі як простори $B_{p,\theta}^r$ (при всіх допустимих значеннях параметра θ , $1 \leq \theta \leq \infty$), так і певні модифікації таких просторів, називають просторами Нікольського-Бесова, а відповідні класи $\mathbb{B}_{p,\theta}^r$ – класами Нікольського-Бесова.

Оскільки у результатах фігурують також відомі функціональні простори $W_{p,\alpha}^r$ та класи $\mathbb{W}_{p,\alpha}^r$, то нагадаємо також і їхні визначення. Нехай $F_{\mathbf{r}}(\mathbf{x}, \alpha)$, $\mathbf{r} = (r_1, \dots, r_d)$ – багатовимірні аналоги ядер Бернуллі, тобто

$$F_{\mathbf{r}}(\mathbf{x}, \alpha) = 2^d \sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{N}^d} \prod_{j=1}^d k_j^{-r_j} \cos\left(k_j x_j - \frac{\alpha_j \pi}{2}\right), \quad r_j > 0, \quad \alpha_j \in \mathbb{R}.$$

Позначимо через $W_{p,\alpha}^r$ лінійний простір функцій f , які можна подати у вигляді

$$f(\mathbf{x}) = \varphi(\cdot) * F_{\mathbf{r}}(\cdot, \alpha) = (2\pi)^{-d} \int_{\pi_d} \varphi(\mathbf{y}) F_{\mathbf{r}}(\mathbf{x} - \mathbf{y}, \alpha) d\mathbf{y},$$

де $\varphi \in L_p(\pi_d)$. Для $f \in W_{p,\alpha}^r$ покладемо $\|f\|_{W_{p,\alpha}^r} := \|\varphi\|_p$. Якщо функція $\varphi \in L_p(\pi_d)$ така, що $\|\varphi\|_p \leq 1$, то відповідний клас у просторі $W_{p,\alpha}^r$ позначимо $\mathbb{W}_{p,\alpha}^r$.

Детальну інформацію щодо самих просторів $B_{p,\theta}^r$, $1 \leq \theta < \infty$, H_p^r і $W_{p,\alpha}^r$, а також щодо історії їх досліджень з точки зору апроксимації можна почерпнути з монографій [1, 5, 6, 23, 27]. Нагадаємо лише, що для введених вище просторів справедливі такі вкладення:

$$\begin{aligned} B_{p,p}^r &\subset W_{p,\alpha}^r \subset B_{p,2}^r, & 1 < p \leq 2; \\ B_{p,2}^r &\subset W_{p,\alpha}^r \subset B_{p,p}^r, & 2 \leq p < \infty; \\ W_{p,\alpha}^r &\subset B_{p,\infty}^r \equiv H_p^r, & 1 \leq p \leq \infty. \end{aligned}$$

Зокрема, простір $B_{2,2}^r$ тотожний простору $W_{2,\alpha}^r$.

Надалі вважаємо, що координати вектора $\mathbf{r} = (r_1, \dots, r_d)$, впорядковані так, що

$$0 < r_1 = r_2 = \dots = r_\nu < r_{\nu+1} \leq \dots \leq r_d,$$

а також $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_d)$ – вектор з координатами $\gamma_j = \frac{r_j}{r_1}$, $j = \overline{1, d}$ і $\gamma' = (\gamma'_1, \dots, \gamma'_d)$, де $\gamma'_j = \gamma_j$, при $j = \overline{1, \nu}$ і $1 < \gamma'_j < \gamma_j$ при $j = \nu + 1, d$.

У подальшому, \asymp позначає відношення слабкої еквівалентності, тобто для виразів a та b , що визначені деякою сукупністю параметрів, запис $a \asymp b$ означає, що існують такі додатні величини c_1 та c_2 , які не залежать від одного істотного за контекстом параметра, що $c_1 b \leq a \leq c_2 b$. Також використовуємо символи \ll чи \gg для порядкових нерівностей, тобто $a \ll b$, ($a \gg b$), якщо існує така додатна стала C , що $a \leq Cb$, ($b \leq Ca$). Через $|A|$ позначається кількість елементів скінченної множини A , а замість $L_p(\pi_d)$ і $L_p^0(\pi_d)$ далі часто використовуються простіші позначення L_p і L_p^0 відповідно.

3. НАЙКРАЩІ НАБЛИЖЕННЯ І ПОПЕРЕЧНИКИ

Спочатку визначимо відображені у назві цього пункту апроксимаційні величини.

Якщо вектор $\mathbf{s} = (s_1, \dots, s_d)$, $s_j \in \mathbb{Z}_+$, $j = \overline{1, d}$, то покладемо,

$$\rho(\mathbf{s}) = \left\{ \mathbf{k} = (k_1, \dots, k_d) \in \mathbb{Z}^d : [2^{s_j-1}] \leq |k_j| < 2^{s_j}, j = \overline{1, d} \right\}$$

і для $n \in \mathbb{N}$ та $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_d)$, $\gamma_j \in \mathbb{R}_+$, $j = \overline{1, d}$, визначимо множину

$$Q_n^\gamma := \bigcup_{(\mathbf{s}, \gamma) := s_1 \gamma_1 + \dots + s_d \gamma_d, (\mathbf{s}, \gamma) \leq n} \rho(\mathbf{s}),$$

яка називається *східчастим гіперболічним хрестом в \mathbb{Z}^d* .

Нехай далі $T(Q_n^\gamma)$ – множина тригонометричних поліномів вигляду

$$T(Q_n^\gamma) = \left\{ t: t(\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{k} \in Q_n^\gamma} c_{\mathbf{k}} e^{i(\mathbf{k}, \mathbf{x})}, c_{\mathbf{k}} \in \mathbb{C}, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d \right\}.$$

Для функціонального класу $F \subset L_q(\pi_d)$, $1 \leq q \leq \infty$, позначимо

$$E_n^\gamma(F)_q = E_{Q_n^\gamma}(F)_q := \sup_{f \in F} \inf_{t \in T(Q_n^\gamma)} \|f - t\|_q$$

– величина найкращого наближення класу F підпростором поліномів $T(Q_n^\gamma)$.

Наведемо одне з тверджень, одержаних автором [11].

Теорема 3.1. Нехай $1 \leq \theta < \infty$, $1 \leq p < q < \infty$ і $r_1 > \frac{1}{p} - \frac{1}{q}$. Тоді

$$E_n^\gamma(\mathbb{B}_{p,\theta}^r)_q \asymp 2^{-n(r_1 - \frac{1}{p} + \frac{1}{q})} n^{(\nu-1)(\frac{1}{q} - \frac{1}{\theta})_+},$$

де $a_+ = \max\{a; 0\}$.

Важливо зазначити, що порядок величини $E_n^\gamma(\mathbb{B}_{p,\theta}^r)_q$ реалізується за наближення класу $\mathbb{B}_{p,\theta}^r$ так званими східчасто-гіперболічними сумами Фур'є

$$S_{Q_n^\gamma}(f, x) := \sum_{(s, \gamma) \leq n} \sum_{\mathbf{k} \in \rho(s)} \widehat{f}(\mathbf{k}) e^{i(\mathbf{k}, x)}, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d,$$

де $\widehat{f}(\mathbf{k}) = (2\pi)^{-d} \int_{\pi_d} f(\mathbf{t}) e^{-i(\mathbf{k}, \mathbf{t})} d\mathbf{t}$ – коефіцієнти Фур'є функції f .

Проте, виникає природне питання про доцільність постановки задачі наближення класів $\mathbb{B}_{p,\theta}^r$ за допомогою поліномів саме такого вигляду. Відповідь на це запитання дає розв'язок задачі про оцінки колмогоровських поперечників класів $\mathbb{B}_{p,\theta}^r$ у просторі L_q (див. нижче теорему 3.2).

Нехай Y – нормований простір з нормою $\|\cdot\|_Y$, $\mathcal{L}_M(Y)$ – сукупність підпросторів в Y , розмірність яких не перевищує M , і W – центрально-симетрична множина в Y .

Колмогоровським M -поперечником множини W у просторі Y називається величина

$$d_M(W, Y) := \inf_{L_M \in \mathcal{L}_M(Y)} \sup_{w \in W} \inf_{u \in L_M} \|w - u\|_Y$$

Поперечник $d_M(W, Y)$ введений у 1936 році А. М. Колмогоровим.

З поміж результатів, одержаних зокрема у роботах [3, 12, 13], виділимо такі.

Теорема 3.2. Нехай $1 < q < 2$, $r_1 > 1 - \frac{1}{q}$ і $\theta \in [1, q]$. Тоді

$$d_M(\mathbb{B}_{1,\theta}^r, L_q) \asymp (M^{-1} \log^{\nu-1} M)^{r_1 - 1 + \frac{1}{q}}.$$

Зауважимо, що тут, і всюди у роботі $\log M$ означає логарифм з основою 2.

Теорема 3.3. *Нехай $2 \leq q < \infty$, $r_1 > 1$, $1 \leq \theta < \infty$. Тоді*

$$d_M(\mathbb{B}_{1,\theta}^r, L_q) \asymp (M^{-1} \log^{\nu-1} M)^{r_1 - \frac{1}{2}} (\log^{\nu-1} M)^{\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\theta}\right)_+},$$

де $a_+ = \max\{a, 0\}$.

Потрібно зазначити, що на відміну від теореми 3.2, де порядкові значення колмогоровських поперечників досягаються за наближення підпростором тригонометричних поліномів $T(Q_n^\gamma)$, у випадку теореми 3.3 підпростори $T(Q_n^\gamma)$ не є у такому сенсі екстремальними.

Зауважимо також, що точні за порядком оцінки колмогоровських поперечників класів $\mathbb{W}_{1,\alpha}^r$ і \mathbb{H}_1^r у просторі L_q при $2 \leq q < \infty$ встановлені у 1985 році В. М. Темляковим. Ним доведено, що

$$d_M(\mathbb{W}_{1,\alpha}^r, L_q) \asymp d_M(\mathbb{H}_1^r, L_q) \asymp M^{-r_1 + \frac{1}{2}} (\log^{\nu-1} M)^{r_1}.$$

Співставивши це співвідношення з результатом теореми 3.3, можна констатувати внесок параметра θ в оцінки колмогоровських поперечників класів $\mathbb{B}_{1,\theta}^r$ у випадку функцій багатьох змінних (тобто при $\nu > 1$), порівняно з такими ж оцінками на класах $\mathbb{W}_{1,\alpha}^r$ і \mathbb{H}_1^r . У випадку функцій однієї змінної параметр θ в оцінках колмогоровських поперечників класів $\mathbb{B}_{1,\theta}^r$ не є значущим.

Оскільки при певних співвідношеннях між параметрами p , q і θ підпростори тригонометричних поліномів $T(Q_n^\gamma)$ не є екстремальними для колмогоровських поперечників класів $\mathbb{B}_{p,\theta}^r$, то цілком логічним є залучення до досліджень іншої апроксимативної характеристики, в означенні якої опосередковано може проявитися роль підпросторів поліномів $T(Q_n^\gamma)$ у задачі наближення класів $\mathbb{B}_{p,\theta}^r$. Такою характеристикою є лінійний поперечник.

Нехай Y , Z – нормовані простори та $L(Y, Z)$ – сукупність лінійних неперервних відображень Y в Z . Величина

$$\lambda_M(W, Y) := \inf_{\substack{L_M \in \mathcal{L}_M(Y) \\ \Lambda \in L(Y, L_M)}} \sup_{w \in W} \|w - \Lambda w\|_Y,$$

де нижню грань взято по всіх підпросторах L_M в $\mathcal{L}_M(Y)$, розмірність яких не перевищує M , і всіх лінійних неперервних операторах, що діють з Y в L_M , називається *лінійним M -поперечником* множини W у просторі Y . Зазначимо, що поперечник $\lambda_M(W, Y)$ введений у 1960 році В. М. Тихомировим.

Зрозуміло, що безпосередньо із означень поперечників $d_M(W, Y)$ і $\lambda_M(W, Y)$ випливає співвідношення

$$d_M(W, Y) \leq \lambda_M(W, Y).$$

Зазвичай, складнощі при встановленні оцінок лінійних поперечників тих чи інших функціональних класів у просторах Лебега L_q виникають у випадках, коли $q = 1$ або $q = \infty$. Сформулюємо два важливі твердження (див. [14, 15, 18]) у одному з цих випадків.

Теорема 3.4. *Нехай $2 \leq p \leq \infty$, $2 \leq \theta < \infty$ і $r_1 > 0$. Тоді справедлива оцінка*

$$\lambda_M(\mathbb{B}_{p,\theta}^r, L_1) \asymp M^{-r_1} (\log^{\nu-1} M)^{r_1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{\theta}}.$$

Принагідно зауважимо, що у випадку $\theta = \infty$, тобто для класів \mathbb{H}_p^r , порядкове значення лінійного поперечника $\lambda_M(\mathbb{H}_p^r, L_1)$ знайдено в 1989 В. М. Темляковим.

Теорема 3.5. *Нехай $1 < p < \infty$, $r_1 > 0$. Тоді*

$$\lambda_M(\mathbb{W}_{p,\alpha}^r, L_1) \asymp (M^{-1} \log^{\nu-1} M)^{r_1}.$$

З приводу теорем 3.4 і 3.5 наголосимо на тому, що порядкові значення лінійних поперечників як класів $\mathbb{B}_{p,\theta}^r$, так і $\mathbb{W}_{p,\alpha}^r$, реалізуються за наближення підпросторами $T(Q_n^\gamma)$ тригонометричних поліномів з числом n , що визначається із співвідношення $|Q_n^\gamma| \asymp M$.

Наведемо ще два результати із [24], які стосуються лінійних поперечників класів $\mathbb{B}_{p,\theta}^r$ у просторі L_q для деяких інших співвідношень між параметрами p і q .

Теорема 3.6. *Нехай $1 < p \leq 2$, $\frac{p}{p-1} < q < \infty$ і $r_1 > 1 - \frac{1}{q}$. Тоді при $q < \theta < \infty$ справедлива оцінка*

$$\lambda_M(\mathbb{B}_{p,\theta}^r, L_q) \asymp (M^{-1} \log^{\nu-1} M)^{r_1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{q}} (\log^{\nu-1} M)^{\frac{1}{q} - \frac{1}{\theta}}.$$

Відзначимо такі факти стосовно теореми 3.6. По-перше, для поперечників $\lambda_M(\mathbb{B}_{p,\theta}^r, L_q)$ при вказаних значеннях параметрів p , q , r_1 і θ , M -вимірні підпростори тригонометричних поліномів з «номерами» гармонік зі східчастих гіперболічних хрестів не є екстремальними. По-друге, оцінка лінійного поперечника у теоремі 3.6 і, раніше встановлена автором, відповідна оцінка колмогоровського поперечника (див. [23]) відрізняються за порядком.

Теорема 3.7. *Нехай $2 \leq p < q < \infty$ і $r_1 > \frac{1}{p} - \frac{1}{q}$. Тоді при $q < \theta < \infty$ справедлива оцінка*

$$\lambda_M(\mathbb{B}_{p,\theta}^r, L_q) \asymp (M^{-1} \log^{\nu-1} M)^{r_1 - \frac{1}{p} + \frac{1}{q}} (\log^{\nu-1} M)^{\frac{1}{q} - \frac{1}{\theta}}.$$

З приводу теореми 3.7 зауважимо, що тут порядкові значення лінійних поперечників класів $\mathbb{B}_{p,\theta}^r$ реалізуються вже за їхнього наближення

за допомогою M -вимірних підпросторів тригонометричних поліномів з «номерами» гармонік зі східчастих гіперболічних хрестів.

Далі викладемо декілька важливих результатів, отриманих при дослідженні ще двох типів поперечників – тригонометричного і ортопоперечника.

Отже, нехай $F \subset L_q(\pi_d)$ – деякий функціональний клас. Тригонометричний M -поперечник $d_M^T(F, L_q)$ класу F у просторі $L_q(\pi_d)$ визначається формулою

$$d_M^T(F, L_q) := \inf_{\Omega_M} \sup_{f \in F} \inf_{t(\Omega_M; \cdot)} \|f(\cdot) - t(\Omega_M; \cdot)\|_q,$$

де

$$t(\Omega_M; \mathbf{x}) := \sum_{j=1}^M c_j e^{i(\mathbf{k}^j, \mathbf{x})}, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d,$$

$\Omega_M = \{\mathbf{k}^1, \dots, \mathbf{k}^M\}$ – набір векторів $\mathbf{k}^j = (k_1^j, \dots, k_d^j)$, $j = \overline{1, M}$, цілочислової ґратки \mathbb{Z}^d , c_j – довільні комплексні числа.

Поперечник $d_M^T(F, L_q)$ введений у 1974 році Р. С. Ісмаїловим.

Згідно з означеннями колмогоровський і тригонометричний поперечники пов'язані співвідношенням

$$d_M(F, L_q) \leq d_M^T(F, L_q).$$

У роботі [20] доведено таке твердження.

Теорема 3.8. *Нехай $1 \leq p < 2 < q < \frac{p}{p-1}$, $r_1 > 1$ і $1 \leq \theta < \infty$. Тоді справедливе порядкове співвідношення*

$$d_M^T(\mathbb{B}_{p, \theta}^r, L_q) \asymp (M^{-1} \log^{\nu-1} M)^{r_1 - \frac{1}{p} + \frac{1}{2}} (\log^{\nu-1} M)^{\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\theta}\right)_+},$$

де $a_+ = \max\{a, 0\}$.

Зауважимо, що порядкові значення тригонометричного поперечника в теоремі 3.8 не реалізуються за наближення підпростором $T(Q_n^\gamma)$ тригонометричних поліномів при $|Q_n^\gamma| \asymp M$. Зазначимо також, що для класів $\mathbb{B}_{p, \infty}^r \equiv \mathbb{H}_p^r$ оцінки величини $d_M^T(\mathbb{H}_p^r, L_q)$ встановлені у 1985 році Е. С. Белінським.

Сформулюємо ще декілька результатів у цьому напрямі (див. [24]).

Теорема 3.9. *Нехай $2 \leq q < \infty$, $1 \leq \theta \leq \infty$, $r_1 > 0$. Тоді*

$$d_M^T(\mathbb{B}_{\infty, \theta}^r, L_q) \asymp M^{-r_1} (\log^{\nu-1} M)^{r_1 + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\theta}\right)_+},$$

де $a_+ = \max\{a, 0\}$.

Теорема 3.10. *Нехай $1 < q < 2$, $r_1 > 0$. Тоді при $2 \leq \theta \leq \infty$,*

$$d_M^T(\mathbb{B}_{\infty, \theta}^r, L_q) \asymp M^{-r_1} (\log^{\nu-1} M)^{r_1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{\theta}}.$$

Для класів $\mathbb{W}_{\infty, \alpha}^r$ має місце таке твердження.

Теорема 3.11. *Нехай $1 \leq q < \infty$, $r_1 > 0$. Тоді*

$$d_M^T(\mathbb{W}_{\infty, \alpha}^r, L_q) \asymp M^{-r_1} (\log^{\nu-1} M)^{r_1}.$$

Об'єктом наших досліджень була ще одна апроксимаційна характеристика. Спочатку дамо її визначення.

Нехай $\{u_i\}_{i=1}^M$ – ортонормована в просторі $L_2(\pi_d)$ система функцій $u_i \in L_\infty(\pi_d)$. Кожній функції $f \in L_q(\pi_d)$, $1 \leq q \leq \infty$, поставимо у відповідність апроксимаційний агрегат вигляду $\sum_{i=1}^M (f, u_i) u_i(\cdot)$, тобто ортогональну проекцію функції f на підпростір, породжений системою функцій $\{u_i\}_{i=1}^M$. Тут $(f, u_i) = (2\pi)^{-d} \int_{\pi_d} f(\mathbf{x}) u_i(\mathbf{x}) d\mathbf{x}$.

Для $F \subset L_q(\pi_d)$ величина

$$d_M^\perp(F, L_q) = \inf_{\{u_i\}_{i=1}^M \subset L_\infty(\pi_d)} \sup_{f \in F} \left\| f - \sum_{i=1}^M (f, u_i) u_i \right\|_q$$

називається *ортопоперечником* (чи *Фур'є-поперечником*) класу F у просторі L_q .

Поперечник $d_M^\perp(F, L_q)$ введений у 1992 році В. М. Темляковим, і він пов'язаний з колмогоровським і лінійним поперечниками співвідношеннями

$$d_M(F, L_q) \leq \lambda_M(F, L_q) \leq d_M^\perp(F, L_q).$$

З результатів, одержаних в [2, 22], наведемо такі два твердження.

Теорема 3.12. *Нехай $1 \leq p < q < \infty$. Тоді при $r_1 > \frac{1}{p} - \frac{1}{q}$ і $1 \leq \theta < \infty$ справедливе співвідношення*

$$d_M^\perp(\mathbb{B}_{p, \theta}^r, L_q) \asymp (M^{-1} \log^{\nu-1} M)^{r_1 - \frac{1}{p} + \frac{1}{q}} (\log^{\nu-1} M)^{\left(\frac{1}{q} - \frac{1}{\theta}\right)_+},$$

де $a_+ = \max\{a, 0\}$.

Теорема 3.13. *Нехай $1 \leq p < \infty$. Тоді при $r_1 > \frac{1}{p}$ і $1 \leq \theta < \infty$ справедлива оцінка*

$$d_M^\perp(\mathbb{B}_{p, \theta}^r, L_\infty) \asymp M^{-r_1 + \frac{1}{p}} (\log^{\nu-1} M)^{r_1 + 1 - \frac{1}{p} - \frac{1}{\theta}}.$$

Зазначимо, що у наведених твердженнях порядки ортопоперечників реалізуються за допомогою наближення функцій f з класів $\mathbb{B}_{p, \theta}^r$ їхніми

східчасто-гіперболічними сумами Фур'є $S_{Q_n}(f, \cdot)$, де число n визначається із співвідношення $|Q_n^\gamma| \asymp M$.

4. НАЙКРАЩІ M -ЧЛЕННІ ТРИГОНОМЕТРИЧНІ І БІЛІНІЙНІ НАБЛИЖЕННЯ

Упродовж останніх двох десятиліть інтенсивного розвитку в теорії наближень набули дослідження одного з видів **нелінійної** апроксимації – M -членних тригонометричних наближень. Такого типу наближення в математичній літературі часто називають «розрідженими тригонометричними наближеннями» (sparse trigonometric approximation). Результати, які одержані при дослідженні відповідних апроксимативних характеристик класів Нікольського-Бесова, окрім самостійного інтересу з точки зору теорії наближень, можуть бути використані у практичних цілях, зокрема у вирішенні питань оптимізації процесу передачі сигналів та у виборі способу розпізнавання і відновлення образів.

Слід зазначити, що встановлені точні за порядком оцінки найкращих M -членних тригонометричних наближень класів $\mathbb{B}_{p,\theta}^r$ демонструють переваги такого виду наближень над найкращими наближеннями за допомогою тригонометричних поліномів з множини $T(Q_n^\gamma)$. З іншого боку, одержані результати використовуються при дослідженні ще однієї важливої апроксимативної характеристики – величини найкращого білінійного наближення, яка, у свою чергу, знаходить застосування у питаннях, пов'язаних з оцінками сингулярних чисел інтегральних операторів, а також колмогоровських поперечників відповідних функціональних класів. Перед тим як навести деякі із головних результатів, одержаних автором в окреслених напрямках досліджень, означимо відповідні цим дослідженням апроксимативні характеристики.

Для $f \in L_q(\pi_d)$, $1 \leq q \leq \infty$ покладемо

$$e_M(f)_q := \inf_{\mathbf{k}^j, c_j} \left\| f(\mathbf{x}) - \sum_{j=1}^M c_j e^{i(\mathbf{k}^j, \mathbf{x})} \right\|_q,$$

де $\{\mathbf{k}^j\}_{j=1}^M$ – система векторів $\mathbf{k}^j = (k_1^j, \dots, k_d^j)$ з цілочисловими координатами, c_j – довільні комплексні числа. Величину $e_M(f)_q$ називають *найкращим M -членним тригонометричним наближенням* функції f в просторі L_q .

Якщо $F \subset L_q(\pi_d)$ – деякий функціональний клас, то покладемо

$$e_M(F)_q := \sup_{f \in F} e_M(f)_q.$$

Величина $e_M(f)_2$ для функцій f з однією змінною вперше з'явилася в роботі С. Б. Стечкіна (1955) у формулюванні критерію абсолютної збіжності ортогональних рядів. Дещо пізніше величини $e_M(f)_q$ та $e_M(F)_q$ почали досліджувати уже з точки зору апроксимації індивідуальних функцій і класів функцій відповідно.

Перші оцінки величини $e_M(f)_\infty$ для деяких індивідуальних функцій були одержані у 1974 році Р. С. Ісмагіловим. Згодом величини $e_M(f)_q$ для різноманітних функціональних класів досліджувалися у роботах багатьох математиків. Початок дослідженню найкращих M -членних тригонометричних наближень на класах періодичних функцій багатьох змінних $\mathbb{W}_{p,\alpha}^r$ і \mathbb{H}_p^r було закладено у 80-х роках минулого століття В. М. Темляковим і згодом продовжено у роботах Е. С. Белінського. Фундаментальні дослідження у цьому напрямі проведені і автором статті, але вже на класах Нікольського-Бесова $\mathbb{B}_{p,\theta}^r$.

Наближення функцій декількох змінних лінійними комбінаціями добутків двох функцій з меншим числом змінних називають *білінійними*. Одними з найбільш важливих характеристик таких наближень є величини $\tau_M(f)_{q_1,q_2}$ для індивідуальної функції f та $\tau_M(F)_{q_1,q_2}$ для функціонального класу F . Наведемо означення цих величин.

Нехай $L_{q_1,q_2}(\pi_{2d})$, $d \in \mathbb{N}$, – множина функцій $f(\mathbf{x}, \mathbf{y})$, $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^d$, 2π -періодичних за кожною із $2d$ змінних зі скінченною нормою

$$\|f(\mathbf{x}, \mathbf{y})\|_{q_1,q_2} := \|\|f(\cdot, \mathbf{y})\|_{q_1}\|_{q_2},$$

де в правій частині норма функції $f(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ обчислюється спочатку у просторі $L_{q_1}(\pi_d)$, $1 \leq q_1 \leq \infty$, як функції зі змінною $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$ (при фіксованому $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^d$), а потім від результату, як функції зі змінною $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^d$ у просторі $L_{q_2}(\pi_d)$, $1 \leq q_2 \leq \infty$.

Для $f \in L_{q_1,q_2}(\pi_{2d})$ означимо величину *найкращого білінійного наближення порядку M* ($M \in \mathbb{N}$) формулою

$$\tau_M(f)_{q_1,q_2} := \inf_{u_j, v_j} \left\| f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - \sum_{j=1}^M u_j(\mathbf{x})v_j(\mathbf{y}) \right\|_{q_1,q_2},$$

де $u_j \in L_{q_1}(\pi_d)$, $v_j \in L_{q_2}(\pi_d)$, $j = \overline{1, M}$. При $M = 0$ вважаємо, що $\tau_0(f(\mathbf{x}, \mathbf{y}))_{q_1,q_2} := \|f(\mathbf{x}, \mathbf{y})\|_{q_1,q_2}$.

Для $F \subset L_{q_1,q_2}(\pi_{2d})$ покладемо

$$\tau_M(F)_{q_1,q_2} := \sup_{f \in F} \tau_M(f)_{q_1,q_2}.$$

У випадку, коли $q_1 = q_2 = q$ замість $\tau_M(f)_{q_1,q_2}$ і $\tau_M(F)_{q_1,q_2}$ пишемо відповідно $\tau_M(f)_q$ і $\tau_M(F)_q$.

Дослідженню величин $\tau_M(F)_{q_1, q_2}$ для деяких класів періодичних функцій багатьох змінних присвячена низка робіт В. М. Темлякова (1986-1992), а також роботи А. С. Романюка [19] та А. С. Романюка і В. С. Романюка [4, 25, 26].

Ймовірно перший результат, дотичний до найкращих білінійних наближень, був отриманий Е. Шмідтом ще у 1907 році в дослідженнях, пов'язаних з інтегральними рівняннями. Було з'ясовано, що наближення функцій $f(x, y)$ з двома змінними, визначених на квадраті $[0, 1] \times [0, 1] \subset \mathbb{R}^2$, білінійними формами в просторі $L_{2,2}([0, 1]^2)$ тісно пов'язане з властивостями інтегральних операторів

$$J_f(g) = \int_0^1 f(x, y)g(y)dy$$

з ядром $f(x, y)$. Точніше, був отриманий розклад (тепер відомий в математичній літературі як розклад Е. Шмідта)

$$f(x, y) = \sum_{j=1}^{\infty} s_j(J_f)\varphi_j(x)\psi_j(y),$$

де $\{s_j(J_f)\}_{j=1}^{\infty}$ – незростаюча послідовність (незростаюча перестановка) сингулярних чисел оператора J_f , тобто

$$s_j(J_f) = \lambda_j(J_f^*J_f), \quad \{\lambda_j(T)\}_{j=1}^{\infty}$$

– послідовність власних чисел оператора T , J_f^* – оператор, що є спряженим до оператора J_f , і, нарешті, $\{\varphi_j(x)\}_{j=1}^{\infty}$ та $\{\psi_j(y)\}_{j=1}^{\infty}$ – ортонормовані системи власних функцій операторів $J_fJ_f^*$ та $J_f^*J_f$ відповідно.

Окрім того, Е. Шмідт встановив рівність

$$\left\| f(x, y) - \sum_{j=1}^M s_j(J_f)\varphi_j(x)\psi_j(y) \right\|_{2,2} = \inf_{u_j, v_j \in L_2[0,1]} \left\| f(x, y) - \sum_{j=1}^M u_j(x)v_j(y) \right\|_{2,2},$$

яка пов'язує величини $\tau_M(f)_{2,2}$ із сингулярними числами $s_j(J_f)$ оператора J_f . Пізніше, такий зв'язок був використаний у розв'язанні задачі щодо оцінок сингулярних чисел інтегральних операторів в роботі М. Ш. Бірмана та М. З. Соломяка (1977).

У випадку, коли в означенні величин $\tau_M(f)_{q_1, q_2}$ функція $f(\mathbf{x}; \mathbf{y})$ з $2d$ змінними $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$, $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^d$ пов'язана із деякою функцією з d змінними $g(\mathbf{t})$, $\mathbf{t} \in \mathbb{R}^d$ так, що $f(\mathbf{x}; \mathbf{y}) = g(\mathbf{x} - \mathbf{y})$, кажемо, що функція f породжується функцією g і замість $\tau_M(f)_{q_1, q_2}$ пишемо $\tau_M(fg)_{q_1, q_2}$, або $\tau_M(g(\mathbf{x} - \mathbf{y}))_{q_1, q_2}$.

Якщо $F \subset L_1(\pi_d)$ – деякий клас функцій з d змінними, то покладемо

$$\tau_M^*(F)_{q_1, q_2} := \sup_{g \in F} \tau_M(f_g)_{q_1, q_2}.$$

Значимо, що Р. С. Ісмагілов (1974) встановив зв'язок між величинами $\tau_M(f_g)_{2, \infty}$ і колмогоровськими поперечниками класу F , якому належить функція g .

Отже, з огляду на викладене можна стверджувати, що дослідження білінійних наближень і результати цих досліджень викликають як самостійний інтерес, так і є важливими з точки зору їх застосувань.

Дослідженню величин $\tau_M^*(F)_{q_1, q_2}$ у випадках, коли $F = \mathbb{W}_{p, \alpha}^r$ чи $F = \mathbb{H}_p^r$, присвячені роботи В. М. Темлякова (1989), а у роботах [19, 25] встановлена слабка асимптотика величин $\tau_M^*(F)_{q_1, q_2}$ для деяких співвідношень між параметрами p, θ, q_1, q_2 у випадку, коли $F = \mathbb{B}_{p, \theta}^r$.

Отже, наведемо два твердження стосовно величини найкращого M -членного тригонометричного наближення класів $\mathbb{B}_{p, \theta}^r$, які встановлені автором у роботі [17].

Теорема 4.1. *Нехай $1 \leq p \leq 2 < q < \infty, 1 \leq \theta \leq \infty$. Тоді справджуються співвідношення*

$$e_M(\mathbb{B}_{p, \theta}^r)_q \asymp \begin{cases} M^{-\frac{1}{2}} (\log^\nu M)^{\frac{1}{\theta'}}, & r_1 = \frac{1}{p}, \\ M^{-r_1 + \frac{1}{p} - \frac{1}{2}} (\log^{\nu-1} M)^{r_1 - \frac{1}{p} + \frac{1}{\theta'}}, & r_1 > \frac{1}{p}, \\ M^{-\frac{q}{2}(r_1 - \frac{1}{p} + \frac{1}{q})} \cdot (\log^{\nu-1} M)^{(q-1)(r_1 - \frac{1}{p} + \frac{q'}{q\theta'})}, & \frac{1}{p} - \frac{1}{q} < r_1 < \frac{1}{p}, \end{cases}$$

де $a_+ = \max\{a; 0\}, \frac{1}{\theta} + \frac{1}{\theta'} = 1$.

Теорема 4.2. *Нехай $2 < p < q < \infty, 1 \leq \theta \leq \infty$. Тоді при $r_1 > \frac{1}{2}$ справджується співвідношення*

$$e_M(\mathbb{B}_{p, \theta}^r)_q \asymp M^{-r_1} (\log^{\nu-1} M)^{r_1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{\theta}}.$$

Співставивши результати теорем 3.1, 4.1 і 4.2, бачимо, що найкращі M -членні тригонометричні наближення класів $\mathbb{B}_{p, \theta}^r$ переважають у сенсі порядків найкращі наближення $E_n^\gamma(\mathbb{B}_{p, \theta}^r)_q$ при $M \asymp 2^n n^{\nu-1}$. Крім того, в процесі дослідження величини $e_M(\mathbb{B}_{p, \theta}^r)_q$ виявлено ефект так званої «малої гладкості», який полягає в тому, що при $r_1 = \frac{1}{p}$ відбувається «стрибок» в оцінці цієї величини. Іншими словами, оцінка при $r_1 = \frac{1}{p}$ не впливає із оцінок при $r_1 < \frac{1}{p}$ чи $r_1 > \frac{1}{p}$ за допомогою граничного переходу при $r_1 \rightarrow \frac{1}{p} - 0$ чи, відповідно, $r_1 \rightarrow \frac{1}{p} + 0$.

Зауважимо також, що результати теорем 4.1, 4.2 стали ключовими при встановленні точних за порядком оцінок величин

$$\tau_M^*(F_p^r)_{q_1, q_2} := \sup_{g \in F_p^r} \tau_M(f_g)_{q_1, q_2},$$

де $F_p^r = \mathbb{B}_{p, \theta}^r$, або $F_p^r = \mathbb{W}_{p, \alpha}^r$ (див. [19]).

Теорема 4.3. *Нехай $1 \leq p \leq 2$, $1 \leq \theta < \infty$, $r_1 > \frac{1}{p}$. Тоді при*

$$1 < q_1 < \infty, \quad 1 \leq q_2 \leq \infty,$$

справедливе співвідношення

$$\tau_M^*(\mathbb{B}_{p, \theta}^r)_{q_1, q_2} \asymp M^{-r_1 + \frac{1}{p} - \frac{1}{2}} (\log^{\nu-1} M)^{r_1 - \frac{1}{p} + \frac{1}{\theta'}},$$

де $\frac{1}{\theta} + \frac{1}{\theta'} = 1$.

Теорема 4.4. *Нехай $2 \leq q_1 \leq p < \infty$, $1 \leq q_2 \leq \infty$, $r_1 > 0$. Тоді справедлива оцінка*

$$\tau_M^*(\mathbb{W}_{p, \alpha}^r)_{q_1, q_2} \asymp (M^{-1} \log^{\nu-1} M)^{r_1}.$$

Стосовно наведених тверджень звернемо увагу на такий важливий факт. У результаті досліджень колмогоровських поперечників, [12], і білінійних наближень класів $\mathbb{B}_{p, \theta}^r$, [19], з'ясовано, що якщо $\nu > 1$, то при $\theta \geq 2$ має місце співвідношення

$$\tau_M^*(\mathbb{B}_{p, \theta}^r)_{q_1, \infty} \asymp d_M(\mathbb{B}_{p, \theta}^r)_{q_1}, \quad 1 \leq p \leq 2 < q_1 < \infty,$$

тоді як для класів $\mathbb{B}_{p, \theta}^r$ при $1 \leq \theta < 2$, так і для класів $\mathbb{W}_{p, \alpha}^r$ значення білінійних наближень і колмогоровських поперечників відрізняються за порядком. Такий ефект має прояв лише у випадку функцій багатьох змінних, бо у одновимірному випадку величини названих апроксимативних характеристик збігаються за порядком.

Щодо апроксимативних характеристик, які фігурують у теоремах 3.1, 3.12, 4.1, зазначимо таке. Результати з їх оцінки надали поштовху дослідженню для класів Соболева і Никольського-Бесова ще однієї апроксимативної характеристики, яка у певному сенсі є близькою до найкращих M -членних тригонометричних наближень.

Отже, нехай Ω_M – довільний набір із M d -вимірних векторів

$$\mathbf{k}^j = (k_1^j, \dots, k_d^j), \quad j = \overline{1, M},$$

з цілочисловими координатами. Для $f \in L_q(\pi_d)$, $1 \leq q \leq \infty$, покладемо

$$S_{\Omega_M}(f, \mathbf{x}) := \sum_{j=1}^M \widehat{f}(\mathbf{k}^j) e^{i(\mathbf{k}^j, \mathbf{x})}, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d.$$

Розглянемо величину $e_M^\perp(f)_q = \inf_{\Omega_M} \|f(\cdot) - S_{\Omega_M}(f, \cdot)\|_q$ і для функціонального класу $F \subset L_q(\pi_d)$ означимо

$$e_M^\perp(F)_q := \sup_{f \in F} e_M^\perp(f)_q.$$

Величину $e_M^\perp(F)_q$ називають *найкращим ортогональним тригонометричним наближенням* класу F у просторі L_q .

Легко бачити, що для величин $e_M^\perp(F)_q$ та $e_M(F)_q$ справджується нерівність

$$e_M(F)_q \leq e_M^\perp(F)_q.$$

Зрозуміло, що за певного вибору множини Ω_M сума $S_{\Omega_M}(f, \cdot)$ збігається зі східчасто-гіперболічною сумою Фур'є функції f . Величини $e_M^\perp(F)_q$ у випадках, коли $F = \mathbb{W}_{p,\alpha}^r$ вивчалися Е. С. Белінським (1988), а згодом на класах Нікольського-Бесова, а також їхніх узагальненнях, – автором і його учнями. З поміж результатів, одержаних у роботах [16, 21], виокремимо такий.

Теорема 4.5. *Нехай $1 \leq p < q < \infty$, $r_1 > \frac{1}{p} - \frac{1}{q}$. Тоді при $1 \leq \theta \leq \infty$ справедлива оцінка*

$$e_M^\perp(\mathbb{B}_{p,\theta}^r)_q \asymp M^{-r_1 + \frac{1}{p} - \frac{1}{q}} (\log^{\nu-1} M)^{(r_1 - \frac{1}{p} + \frac{2}{q} - \frac{1}{\theta})_+}.$$

Співставивши результати теорем 3.1, 4.1, 4.2 і 4.5 за умови

$$M \asymp 2^n n^{d-1},$$

з'ясуємо, що при певних співвідношеннях між параметрами r_1 , p , q , θ оцінки відповідних апроксимативних характеристик відрізняються за порядком. Інший факт полягає у тому, що в окремих випадках в оцінках найкращих ортогональних тригонометричних наближень класів $\mathbb{B}_{p,\theta}^r$ відсутня залежність від розмірності d простору \mathbb{R}^d .

У роботі [16] доведено аналогічне теоремі 4.5 твердження і для класів $\mathbb{W}_{p,\alpha}^r$.

Теорема 4.6. *Нехай $2 \leq p < q < \infty$, $r_1 > \frac{1}{p} - \frac{1}{q}$. Тоді справедливе співвідношення*

$$e_M^\perp(W_{p,\alpha}^r)_q \asymp M^{-r_1 + \frac{1}{p} - \frac{1}{q}} (\log^{\nu-1} M)^{(r_1 - \frac{2}{p} + \frac{2}{q})_+},$$

Потрібно зазначити, що при дослідженні найкращих ортогональних тригонометричних наближень класів $W_{p,\alpha}^r$ також з'ясовано, що завдяки закладеному в означенні цих величин способу формування наближаючих агрегатів, у деяких випадках (співвідношень між параметрами)

можна досягти кращих порядків наближення порівняно з наближеннями за допомогою східчасто-гіперболічних сум Фур'є за відповідного співвідношення між числом гармонік у наближаючих агрегатах.

На завершення цього пункту зазначимо, що у роботі [26] знайдено точні за порядком оцінки величин найкращих білінійних наближень на узагальнених класах Нікольського-Бесова $\mathbb{B}_{\mathbf{p},\theta}^r$, $\mathbf{p} = (p_1, \dots, p_{2d})$, у функціональних просторах $L_{\mathbf{q}}(\pi_{2d})$, $\mathbf{q} = (q_1, \dots, q_{2d})$. На цій базі розв'язано задачу про оцінки сингулярних чисел інтегральних операторів з ядрами, що належать до класів $\mathbb{B}_{\mathbf{p},\theta}^r$.

Тут через $L_{\mathbf{q}}(\pi_m)$, $\mathbf{q} = (q_1, \dots, q_m)$, позначено множину функцій $f(\mathbf{z})$, $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^m$, 2π -періодичних за кожною із змінних, зі скінченними стандартними мішаними нормами $\|\cdot\|_{\mathbf{q}}$ при $1 \leq q_j < \infty$, $j = \overline{1, m}$ і $\|\cdot\|_{\infty}$ при $q_j = \infty$, $j = \overline{1, m}$.

У випадку

$$q_1 = q_2 = \dots = q_m = q$$

простір $L_{\mathbf{q}}(\pi_m)$ збігається з простором Лебега $L_q(\pi_m)$ зі стандартною нормою $\|\cdot\|_q$ і $\|f\|_{\mathbf{q}} \equiv \|f\|_q$.

Далі розглядаються лише функції $f \in L_{\mathbf{q}}(\pi_{2d})$, що підпорядковані умові

$$\int_0^{2\pi} f(\mathbf{z}) dz_j = 0, \quad j = \overline{1, 2d}.$$

Множину таких функцій позначимо через $L_{\mathbf{q}}^0(\pi_{2d})$. У просторі $L_{\mathbf{p}}(\pi_m)$, $\mathbf{p} = (p_1, \dots, p_m)$ у відповідний спосіб визначаються також класи $\mathbb{B}_{\mathbf{p},\theta}^r$.

Отже, дослідження у роботі [26] стосуються величин, визначених наступним чином.

Нехай $d \in \mathbb{N}$,

$$\mathbf{q} = (q_1, \dots, q_{2d}), \quad 1 \leq q_j \leq \infty, \quad j = \overline{1, 2d}$$

і

$$\mathbf{q}(1) = (q_1, \dots, q_d), \quad \mathbf{q}(2) = (q_{d+1}, \dots, q_{2d}).$$

Тоді, для функції $f \in L_{\mathbf{q}}^0(\pi_{2d})$ з $2d$ змінними (\mathbf{x}, \mathbf{y}) , $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$, $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^d$ і числа $M \in \mathbb{N}$ величина

$$\tau_M(f)_{\mathbf{q}} := \inf_{u_i, v_i} \|f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - \sum_{i=1}^M u_i(\mathbf{x})v_i(\mathbf{y})\|_{\mathbf{q}},$$

де $u_i \in L_{\mathbf{q}(1)}(\pi_d)$, $v_i \in L_{\mathbf{q}(2)}(\pi_d)$, $i = \overline{1, M}$, називається *найкращим білінійним наближенням порядку M функції f у просторі $L_{\mathbf{q}}(\pi_{2d})$* . При $M = 0$ покладаємо $\tau_M(f)_{\mathbf{q}} = \|f\|_{\mathbf{q}}$.

Для множини функцій $F \subset L_{\mathbf{q}}^0(\pi_{2d})$ визначимо величину

$$\tau_M(F)_{\mathbf{q}} := \sup_{f \in F} \tau_M(f)_{\mathbf{q}}.$$

У випадку $q_j = q, j = \overline{1, 2d}$, пишемо $\tau_M(\cdot)_q$ замість $\tau_M(\cdot)_{\mathbf{q}}$.

В наступній теоремі 4.7 встановлено порядкові значення величин $\tau_M(F)_{\mathbf{q}}$ для класу $F = \mathbb{B}_{\mathbf{p}, \theta}^{\mathbf{r}}$ при певних значеннях параметра θ і деяких співвідношеннях між векторами

$$\mathbf{p} = (p_1, \dots, p_{2d}), \quad \mathbf{q} = (q_1, \dots, q_{2d}), \quad \mathbf{r} = (r_1, \dots, r_{2d}).$$

При цьому вихідною щодо вектора \mathbf{r} є умова, що його компоненти приймають значення $r_j = \rho_1, r_{d+j} = \rho_2, j = \overline{1, d}$, і в такому випадку клас $\mathbb{B}_{\mathbf{p}, \theta}^{\mathbf{r}}$ позначаємо $\mathbb{B}_{\mathbf{p}, \theta}^{\rho_1, \rho_2}$.

Нижче нерівності типу $\mathbf{a} \leq \mathbf{b}$ для векторів

$$\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_m), \quad \mathbf{b} = (b_1, \dots, b_m)$$

слід розуміти як відповідні нерівності між їхніми компонентами, тобто $a_i \leq b_i, i = \overline{1, m}$.

Теорема 4.7. *Нехай $\mathbf{2} \leq \mathbf{p} \leq \infty, \mathbf{2} \leq \mathbf{q} < \infty$ і $2 \leq \theta < \infty$. Тоді при $\rho_i > \frac{1}{2}, i = 1, 2, (\rho_i > 0$ при $\mathbf{p} \geq \mathbf{q})$, для класу $\mathbb{B}_{\mathbf{p}, \theta}^{\rho_1, \rho_2}$ функцій з $2d$ змінними має місце співвідношення*

$$\tau_M(\mathbb{B}_{\mathbf{p}, \theta}^{\rho_1, \rho_2})_{\mathbf{q}} \asymp M^{-\rho_1 - \rho_2} (\log^{d-1} M)^{(\rho_1 + \rho_2 + 1 - \frac{2}{\theta})}.$$

Використавши теорему 4.7, знайдено точні за порядком оцінки сингулярних чисел інтегральних операторів з ядрами, що належать до класів $\mathbb{B}_{\mathbf{p}, \theta}^{\rho_1, \rho_2}$.

Теорема 4.8. *Нехай $\mathbf{2} \leq \mathbf{p} \leq \infty, 2 \leq \theta < \infty$ і $\rho_i > 0, i = 1, 2$. Тоді для класу $\mathbb{B}_{\mathbf{p}, \theta}^{\rho_1, \rho_2}$ функцій з $2d$ змінними має місце порядкове співвідношення*

$$\sup_{f \in \mathbb{B}_{\mathbf{p}, \theta}^{\rho_1, \rho_2}} s_M(Jf) \asymp M^{-\rho_1 - \rho_2 - \frac{1}{2}} (\log^{d-1} M)^{(\rho_1 + \rho_2 + 1 - \frac{2}{\theta})}.$$

5. ПРО НОРМИ ЛІНІЙНИХ ОПЕРАТОРІВ, ЩО РЕАЛІЗУЮТЬ ПОРЯДКОВІ ЗНАЧЕННЯ НАЙКРАЩОГО НАБЛИЖЕННЯ КЛАСІВ $\mathbb{B}_{\infty, \theta}^{\mathbf{r}}$ У ПРОСТОРІ L_{∞} МНОЖИНАМИ ТРИГОНОМЕТРИЧНИХ ПОЛІНОМІВ

У роботі [18] об'єктами дослідження були лінійні оператори, які є оптимальними в задачі знаходження точних за порядком значень найкращих наближень класів $\mathbb{B}_{\infty, \theta}^{\mathbf{r}}$ у просторі L_{∞} за допомогою тригонометричних поліномів, породжених системою $\{e^{i(\mathbf{k}, \mathbf{x})}\}_{\mathbf{k} \in Q_n}$, де множини $Q_n, n \in \mathbb{N}$, – так звані східчасто-гіперболічні хрести в \mathbb{Z}^d . Одним із

ключових тут було питання стосовно послідовності норм таких операторів, як операторів, що діють із L_∞ в L_∞ , а саме, – питання щодо обмеженості чи необмеженості цієї послідовності.

Отже при $d \geq 2$ та $n \in \mathbb{N}$ розглянемо множину $Q_n \subset \mathbb{Z}^d$

$$Q_n := \bigcup_{(\mathbf{s}, \mathbf{1}) \leq n} \rho(\mathbf{s}), \quad (\mathbf{s}, \mathbf{1}) := s_1 + \dots + s_d,$$

де $\mathbf{s} = (s_1, \dots, s_d) \in \mathbb{Z}_+^d$, і через $T(Q_n)$ позначимо множину тригонометричних поліномів з «номерами» гармонік з Q_n , тобто

$$T(Q_n) = \left\{ t \mid t(\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{k} \in Q_n} c_{\mathbf{k}} e^{i(\mathbf{k}, \mathbf{x})}, \quad c_{\mathbf{k}} \in \mathbb{C}, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d \right\}.$$

Визначимо величину $E_{Q_n}(\mathbb{B}_{\infty, \theta}^{\mathbf{r}})_\infty$ найкращого наближення функцій з класу $\mathbb{B}_{\infty, \theta}^{\mathbf{r}}$ у просторі L_∞ за допомогою елементів множини $T(Q_n)$:

$$E_{Q_n}(\mathbb{B}_{\infty, \theta}^{\mathbf{r}})_\infty := \sup_{f \in \mathbb{B}_{\infty, \theta}^{\mathbf{r}}} \inf_{t \in T(Q_n)} \|f - t\|_\infty.$$

У роботі [2] доведено, зокрема, таке твердження.

Теорема 5.1. *Нехай $d = 2$, $1 \leq \theta \leq \infty$, $\mathbf{r} = (r_1, r_1)$, $r_1 > 0$. Тоді справедлива оцінка*

$$E_{Q_n}(\mathbb{B}_{\infty, \theta}^{\mathbf{r}})_\infty \asymp 2^{-nr_1} n^{1-\frac{1}{\theta}}.$$

Зазначимо, що наведена оцінка досягається за наближення агрегатами, сформованими на базі лінійного методу наближення, який у даному випадку визначається послідовністю лінійних операторів $\{V_{Q_n}\}_{n=1}^\infty$, кожний з яких функції $f \in L_1(\pi_2)$ ставить у відповідність тригонометричний поліном $V_{Q_n}(f, \cdot)$ вигляду

$$V_{Q_n} f(\mathbf{x}) = V_{Q_n}(f, \mathbf{x}) = \sum_{(\mathbf{s}, \mathbf{1}) \leq n} A_{\mathbf{s}}(f, \mathbf{x}) = (f * V_{Q_n})(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2,$$

$$\text{де } V_{Q_n}(\mathbf{x}) = \sum_{(\mathbf{s}, \mathbf{1}) \leq n} A_{\mathbf{s}}(\mathbf{x}),$$

$$A_{\mathbf{s}}(\mathbf{x}) := 4 \prod_{j=1}^2 (V_{2^{s_j}}(x_j) - V_{2^{s_j-1}}(x_j)),$$

а для $l \in \mathbb{N}$

$$V_l(u) = 1 + 2 \sum_{k=1}^l \cos ku + 2 \sum_{k=l+1}^{2l} \frac{2l-k}{l} \cos ku, \quad u \in \mathbb{R},$$

– ядро Валле-Пуссена (при $s_j = 0$ вважаємо, що $V_{2^{s_j-1}}(x_j) = 0$).

Послідовність операторів $\{\mathbb{V}_{Q_n}\}_{n=1}^\infty$ має одну особливість: при кожному $n \in \mathbb{N}$ норма оператора \mathbb{V}_{Q_n} , як оператора, що діє з L_∞ в L_∞ дорівнює $\|\mathbb{V}_{Q_n}\|_1$ і, як відомо (див. [27, наслідок з теореми 1.2.1]), $\|\mathbb{V}_{Q_n}\|_1 \gg n$. Іншими словами, при $d = 2$ послідовність норм $\|\mathbb{V}_{Q_n}\|_{\infty \rightarrow \infty}$, $n \in \mathbb{N}$, лінійних операторів $\{\mathbb{V}_{Q_n}\}_{n=1}^\infty$, за допомогою яких реалізуються порядкові значення величин $E_{Q_n}(\mathbb{B}_{\infty, \theta}^r)_\infty$ – необмежена. Зважаючи на таку обставину, логічно є задача про відшукування послідовності лінійних операторів $\mathbb{L}_{Q_n} : L_\infty \rightarrow T(Q_n)$, які, з одного боку, були б у певному розумінні оптимальними стосовно задачі про наближення класів $\mathbb{B}_{\infty, \theta}^r$ у просторі L_∞ , а з іншого, задовольняли б умову $\|\mathbb{L}_{Q_n}\|_{\infty \rightarrow \infty} < \infty$ для будь-якого $n \in \mathbb{N}$. Відповідь на питання щодо існування такої послідовності знайдемо у двох наступних твердженнях. Перше з них стосується багатомірного випадку ($d \geq 2$), а друге – випадку $d = 1$.

У подальшому, якщо оператор $\mathbb{A} : L_\infty \rightarrow L_\infty$, то для норми $\|\mathbb{A}\|_{\infty \rightarrow \infty}$ вживаємо скорочене позначення $\|\mathbb{A}\|$.

Теорема 5.2. *Нехай $d \geq 2$ і $\{\mathbb{L}_{Q_n}\}_{n=1}^\infty$ – послідовність обмежених лінійних операторів*

$$\mathbb{L}_{Q_n} : L_\infty \rightarrow L_\infty,$$

кожний з яких функції $f \in L_\infty^0(\pi_d)$ ставить у відповідність такий тригонометричний поліном $\mathbb{L}_{Q_n} f \in T(Q_n)$, що для функції $f \in \mathbb{B}_{\infty, \theta}^r$, де $\mathbf{r} = (r_1, \dots, r_1) \in \mathbb{R}_+^d$, $r_1 > 0$, $1 \leq \theta \leq \infty$, має місце нерівність

$$\|f - \mathbb{L}_{Q_n} f\|_{L_\infty} \ll E_{Q_n}(\mathbb{B}_{\infty, \theta}^r)_\infty.$$

Тоді для будь-якого $\varepsilon > 0$ справджується оцінка

$$\|\mathbb{L}_{Q_n}\| \gg n^{(d-1)(1-\varepsilon)}.$$

В описовій формі теорема 5.2 допускає таке трактування: при $d \geq 2$ послідовність норм $\|\mathbb{L}_{Q_n}\|$, $n \in \mathbb{N}$, лінійних операторів $\{\mathbb{L}_{Q_n}\}_{n=1}^\infty$, за допомогою яких реалізуються порядкові значення величин $E_{Q_n}(\mathbb{B}_{\infty, \theta}^r)_\infty$ – найкращих наближень класів $\mathbb{B}_{\infty, \theta}^r$ за допомогою множини тригонометричних поліномів $T(Q_n)$ у просторі L_∞ – необмежена.

Чи має місце подібний висновок у випадку функцій однієї змінної, тобто при $d = 1$? Відповідь на це питання ґрунтується на наведеній нижче теоремі 5.3.

Отже, нехай $n \in \mathbb{N}$ і $T(2^n)$ – множина тригонометричних поліномів вигляду

$$T(2^n) := \left\{ t : t(x) = \sum_{k=-2^n+1}^{2^n-1} c_k e^{ikx}, \quad c_k \in \mathbb{C}, \quad x \in \mathbb{R} \right\}.$$

Покладемо

$$E_n(\mathbb{B}_{\infty, \theta}^{r_1})_{\infty} := \sup_{f \in \mathbb{B}_{\infty, \theta}^{r_1}} \inf_{t \in T(2^n)} \|f - t\|_{\infty}$$

– величина найкращого наближення класу $\mathbb{B}_{\infty, \theta}^{r_1}$ множиною $T(2^n)$ у просторі L_{∞} .

Теорема 5.3. *Нехай $d = 1$, $1 \leq \theta \leq \infty$ і $r_1 > 0$. Тоді справедлива оцінка*

$$E_n(\mathbb{B}_{\infty, \theta}^{r_1})_{\infty} \asymp 2^{-nr_1}.$$

Стосовно теореми 5.3 зазначимо таке: порядкові значення величин $E_n(\mathbb{B}_{\infty, \theta}^{r_1})_{\infty}$ досягаються за наближення функцій $f \in \mathbb{B}_{\infty, \theta}^{r_1}$ поліномами $\tau_n(f, x) = \sum_{s=1}^n A_s(f, x)$, $x \in \mathbb{R}$. Такі поліноми породжуються операторами \mathbb{A}_n , які діють за формулою $\mathbb{A}_n f(x) = \tau_n(f, x)$, $x \in \mathbb{R}$, причому послідовність норм $\{\|\mathbb{A}_n\|\}_{n=1}^{\infty}$ операторів \mathbb{A}_n – обмежена. Справді, для будь-якого $n \in \mathbb{N}$

$$\|\mathbb{A}_n\| = \left\| \sum_{s=1}^n A_s \right\|_1 \leq 2 \|V_{2^n}(\cdot) - V_{2^0}(\cdot)\|_1 \leq 2(\|V_{2^n}\|_1 + \|V_{2^0}\|_1) \leq C,$$

де C – деяка додатна стала, що не залежить від n .

6. ЗАКЛЮЧНЕ ЗАУВАЖЕННЯ

Напрями досліджень, які окреслені даною статтею потужно розвиваються не тільки в Україні, а й у математичних центрах багатьох інших країн світу, зокрема, у В'єтнамі, Казахстані, Китаї, Німеччині, Росії, США, Японії. Свідченням цього є широкий і досить повний бібліографічний список у фундаментальній монографії [1], у якій відображена багаторічна історія дослідження апроксимативних характеристик згаданих вище функціональних класів. У цьому списку також низка робіт автора і його монографія [23].

Висловлюю щиро вдячність доктору фізико-математичних наук Романюку В. С. за цінні поради та допомогу у відборі матеріалу і оформленні статті.

ЛІТЕРАТУРА

- [1] Dinh Dũng, Vladimir Temlyakov, Tino Ullrich. *Hyperbolic cross approximation*. Advanced Courses in Mathematics. CRM Barcelona. Birkhäuser/Springer, Cham, 2018, doi: 10.1007/978-3-319-92240-9. Edited and with a foreword by Sergey Tikhonov.
- [2] A. S. Romanyuk. Widths and best approximation of the classes $B_{p, \theta}^r$ of periodic functions of several variables. *Anal. Math.*, 37(3):181–213, 2011, doi: 10.1007/s10476-011-0303-9.

- [3] A. S. Romanyuk. Entropy numbers and widths for the Nikol'skii-Besov classes of functions of many variables in the space L_∞ . *Anal. Math.*, 45(1):133–151, 2019, doi: 10.1007/s10476-018-0611-4.
- [4] A. S. Romanyuk, V. S. Romanyuk. Bilinear approximations of the classes $B_{p,\theta}^r$ of periodic multivariate functions. In *Math. Analysis, Differential equations and applications.*, pages 139–148. Sofia: Academic Publishing House “Prof. Harin Drinov”, 2011.
- [5] V. N. Temlyakov. *Approximation of periodic functions*. Computational Mathematics and Analysis Series. Nova Science Publishers, Inc., Commack, NY, 1993.
- [6] V. N. Temlyakov. *Multivariate approximation of periodic functions*. Cambridge University Press, 2018.
- [7] Т. И. Аманов. Теоремы представления и вложения для функциональных пространств $S_{p,\theta}^{(r)}B(\mathbb{R}^n)$ и $S_{p,\theta}^{(r)}B(0 \leq x_j \leq 2\pi; j = 1, \dots, n)$. *Тр. Мат. ин-та АН СССР*, 77:5–34, 1965.
- [8] О. В. Бесов. О некотором семействе функциональных пространств. Теоремы вложения и продолжения. *ДАН СССР*, 126(6):1163–1165, 1959.
- [9] П. И. Лизоркин, С. М. Никольский. Пространства функций смешанной гладкости с декомпозиционной точки зрения. *Тр. Мат. ин-та АН СССР*, 187:143–161, 1989.
- [10] С. М. Никольский. Неравенства для целых функций конечной степени и их применение в теории дифференцируемых функций многих переменных. *Тр. Мат. ин-та АН СССР*, 38:244–278, 1951.
- [11] А. С. Романюк. Приближение классов Бесова периодических функций многих переменных в пространстве L_q . *Укр. мат. журн.*, 43(10):1398–1408, 1991, doi: 10.1007/BF01061817.
- [12] А. С. Романюк. О наилучших тригонометрических приближениях и колмогоровских поперечниках классов Бесова функций многих переменных. *Укр. мат. журн.*, 45(5):663–675, 1993, doi: 10.1007/BF01058208.
- [13] А. С. Романюк. О наилучших приближениях и колмогоровских поперечниках классов Бесова периодических функций многих переменных. *Укр. мат. журн.*, 47(1):79–92, 1995, doi: 10.1007/BF01058799.
- [14] А. С. Романюк. Линейные поперечники классов Бесова периодических функций многих переменных. I. *Укр. мат. журн.*, 53(5):744–761, 2001, doi: 10.1023/A:1012530317130.
- [15] А. С. Романюк. Линейные поперечники классов Бесова периодических функций многих переменных. II. *Укр. мат. журн.*, 53(6):820–829, 2001, doi: 10.1023/A:1013356019431.
- [16] А. С. Романюк. Приближение классов периодических функций многих переменных. *Матем. заметки*, 71(1):109–121, 2002, doi: 10.1023 / A: 1013982425195.
- [17] А. С. Романюк. Наилучшие M -членные тригонометрические приближения классов Бесова периодических функций многих переменных. *Известия РАН. Серия матем.*, 67(2):61–100, 2003, doi: 10.1070 / IM2003v067n02ABEN000427.
- [18] А. С. Романюк. Приближение классов $B_{p,\theta}^r$ периодических функций многих переменных линейными методами и наилучшие приближения. *Мат. сборник*, 195(2):91–116, 2004, doi: 10.1070/SM2004v195n02ABEN000801.
- [19] А. С. Романюк. Билинейные и тригонометрические приближения классов Бесова $B_{p,\theta}^r$ периодических функций многих переменных. *Известия РАН. Серия матем.*, 70(2):69–98, 2006, doi: 10.1070/IM2006v070n02ABEN002313.

- [20] А. С. Романюк. Колмогоровские и тригонометрические поперечники классов Бесова $B_{p,\theta}^r$ периодических функций многих переменных. *Мат. сборник*, 197(1):71–96, 2006, doi: 10.1070/SM2006v197n01ABEH003747.
- [21] А. С. Романюк. Наилучшие тригонометрические приближения классов периодических функций многих переменных в равномерной метрике. *Матем. заметки*, 82(2):247–261, 2007, doi: 10.1134/S0001434607070279.
- [22] А. С. Романюк. Наилучшие приближения и поперечники классов периодических функций многих переменных. *Мат. сборник*, 199(2):93–114, 2008, doi: 10.1070 / SM2008v199n02ABEH003918.
- [23] А. С. Романюк. *Аппроксимативные характеристики классов периодических функций многих переменных*. Праці Ін-ту математики НАН України, т.93, 2012.
- [24] А. С. Романюк. Тригонометрические и линейные поперечники классов периодических функций многих переменных. *Укр. мат. журн.*, 69(5):670–681, 2017, doi: 10.1007/s11253-017-1395-6.
- [25] А. С. Романюк, В. С. Романюк. Асимптотические оценки наилучших тригонометрических и билинейных приближений классов функций нескольких переменных. *Укр. мат. журн.*, 62(4):536–551, 2010, doi: 10.1007/s11253-010-0375-x.
- [26] А. С. Романюк, В. С. Романюк. Оценки наилучших билинейных приближений классов $B_{p,\theta}^r$ и сингулярных чисел интегральных операторов. *Укр. мат. журн.*, 68(9):1240–1250, 2016, doi: 10.1007/s11253-017-1304-z.
- [27] В. Н. Темляков. Приближение функций с ограниченной смешанной производной. *Тр. Мат. ин-та АН СССР*, 178:1–112, 1986.

А. С. Романюк

ІНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ НАН УКРАЇНИ, М. КИЇВ

Email: romanyuk@imath.kiev.ua

ORCID: orcid.org/0000-0002-6268-0799

ЗМІСТ

100 років Математичного інституту УАН В. І. Герасименко, Ю. А. Дрозд, С. І. Максименко	1
Задачі про екстремальне розбиття комплексної площини О. К. Бахтін, І. В. Деніга, Л. В. Вигівська, І. Я. Дворак	10
Matrix problems and representations of algebras Yu. A. Drozd	57
Нелінійні кінетичні рівняння квантових систем В. І. Герасименко	82
Формула конфліктної динаміки В. Д. Кошманенко	113
Deformations of functions on surfaces S. I. Maksymenko	150
Symmetries and supersymmetries of generalized Schrödinger equations A. G. Nikitin	200
Псевдодиференціальні рівняння та α-стійкі випадкові процеси М. М. Осипчук, М. І. Портенко	283
Статистична механіка систем з посилено надстійкою взаємодією О. Л. Ребенко	338
Характеристики лінійної та нелінійної апроксимації класів періодичних функцій багатьох змінних А. С. Романюк	384

Наукове видання

Сучасні проблеми математики та її застосувань. I

Збірник праць Інституту математики НАН України

2020, т. 17, № 2

Modern problems of mathematics and its applications. I

Proceedings of the Institute of Mathematics of the NAS of Ukraine

2020, v. 17, No 2

Комп'ютерна верстка та підготовка оригінал-макету

В. І. Герасименко, С. І. Максименко.

Дизайн обгортки: Б. Г. Фещенко

Друк: підприємець Голіней О. М.

м. Івано-Франківськ, вул. Галицька, 128

тел. +38(066) 481-66-01, +38(050) 540-30-64

email: gsm1502@ukr.net

папір офсетний, друк цифровий

формат 70x100/16, ум. друк. 23.71 арк.

Зам. № 21 від 11.04.2021, наклад 300 прим.

Збірник містить статті присвячені основним здобуткам наукових співробітників Інституту математики НАН України з актуальних напрямів сучасної математики та її застосувань.

Для наукових співробітників, викладачів закладів вищої освіти, докторантів і аспірантів.