Збірник праць Ін-ту математики НАН України 2013, Т.10, №1, 328-340

УДК 517.51

С. Я. Янченко (Ін-т математики НАН України, Київ)

ОЦІНКИ АПРОКСИМАТИВНИХ ХАРАКТЕРИСТИК КЛАСІВ ФУНКЦІЙ $S^{\boldsymbol{r}}_{\boldsymbol{p,\theta}}\boldsymbol{B}(\mathbb{R}^{\boldsymbol{d}})$ У РІВНОМІРНІЙ МЕТРИЦІ

Exact-order estimates for approximation of function from the classes $S^{r}_{p,\theta}B$ by entire functions of the exponential type in the metric of the space L_∞ are established.

Одержано точні за порядком оцінки наближення функцій з класів $S^{r}_{p,\theta}B$ цілими функціями експоненціального типу в метриці простору L_∞.

У роботі продовжено вивчення апроксимативних характеристик класів функцій багатьох змінних Нікольського–Бєсова $S^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}B(\mathbb{R}^d)$ у просторі $L_q(\mathbb{R}^d)$. Встановлено порядок наближення функцій із згаданих класів цілими функціями зі спектром зосередженим на множині, яка називається східчастим гіперболічним хрестом. Також знайдено порядок наближення цілими функціями зі спектром на множинах, відмінних від східчастого гіперболічного хреста і при цьому похибка наближення оцінюється у рівномірній метриці.

1. Основні позначення та допоміжні твердження. Нехай $\mathbb{R}^d$ — d-вимірний евклідів простір з елементами $\boldsymbol{x} = (x_1, ..., x_d)$ і $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = x_1y_1 + ... + x_dy_d$. $L_q(\mathbb{R}^d)$, $1 \leqslant q \leqslant \infty$, — простір вимірних функцій $f(\boldsymbol{x}) = f(x_1, ..., x_d)$ зі скінченною нормою

$$\|f\|_q := \left(\int\limits_{\mathbb{R}^d} |f(\boldsymbol{x})|^q d\boldsymbol{x}\right)^{\frac{1}{q}},\ 1 \leqslant q < \infty,$$

$$\|f\|_\infty := \operatorname*{ess\,sup}_{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^d} |f(\boldsymbol{x})|.$$

Для функції $f(\boldsymbol{x}) \in L_q(\mathbb{R}^d)$ визначимо різницю 1-го порядку з кроком h за змінною x_j таким чином:

$$\Delta_{h,j} f(\boldsymbol{x}) = f(x_1, \ldots, x_{j-1}, x_j + h, x_{j+1}, \ldots, x_d) - f(\boldsymbol{x})$$

і, відповідно, l-го порядку, $l \in \mathbb{N}$,

$$\Delta_{h,j}^{l} f(\boldsymbol{x}) = \overbrace{\Delta_{h,j} \dots \Delta_{h,j}}^{l} f(\boldsymbol{x}).$$

Нехай задано вектори $\boldsymbol{h} = (h_1, \dots, h_d)$, $h_j \in \mathbb{R}$, та $\boldsymbol{k} = (k_1, \dots, k_d)$, $k_j \in \mathbb{Z}_+$, $j = \overline{1,d}$. Тоді мішана різниця $\boldsymbol{k}$-го порядку з векторним кроком $\boldsymbol{h}$ визначається рівністю

$$\Delta_{\boldsymbol{h}}^{\boldsymbol{k}} f(\boldsymbol{x}) = \Delta_{h_1,1}^{k_1} \Delta_{h_2,2}^{k_2} \dots \Delta_{h_d,d}^{k_d} f(\boldsymbol{x}).$$

Крім цього покладемо $e_d = \{1, 2, ..., d\}$, $d \in \mathbb{N}$, і $e = \{j_1, ..., j_m\}$, $m \in \mathbb{N}$, $m \leqslant d$, $1 \leqslant j_1 < j_2 < ... < j_m \leqslant d$, $e \subset e_d$. Задамо невід'ємний вектор $\boldsymbol{r}^e = (r_{j_1}, \dots, r_{j_m})$, $r_j \geqslant 0$, $j = \overline{1,d}$, і $\bar{\boldsymbol{r}}^e = (\bar{r}_1, \dots, \bar{r}_d)$, де

$$\bar{r}_i = \begin{cases} r_i, & i \in e; \\ 0, & i \in e_d \backslash e. \end{cases}$$

Простори $S_{p,\theta}^{\boldsymbol{r}} B(\mathbb{R}^d)$, $1 \leqslant p, \theta \leqslant \infty$, де $\boldsymbol{r}$ — заданий вектор із невід'ємними координатами означаються таким чином (див. [1, 2]):

1) якщо $1 \leqslant \theta < \infty$, то

$$S_{p,\theta}^{\boldsymbol{r}} B(\mathbb{R}^d) = \Big\{ f \in L_p(\mathbb{R}^d) : \|f\|_{S_{p,\theta}^{\boldsymbol{r}} B(\mathbb{R}^d)} < \infty \Big\},$$

де норма задається рівністю

$$\|f\|_{S_{p,\theta}^{\boldsymbol{r}} B(\mathbb{R}^d)} = \|f\|_p + \sum_{e \subset e_d} \left(\int_0^2 \dots \int_0^2 \prod_{j \in e} h_j^{-\theta r_j - 1} \|\Delta_{\boldsymbol{h}^e}^{\boldsymbol{k}^e} f(\cdot)\|_p^\theta \prod_{j \in e} dh_j \right)^{\frac{1}{\theta}};$$

2) якщо $\theta = \infty$, то

$$S_{p,\infty}^{\boldsymbol{r}} B(\mathbb{R}^d) = \Big\{ f \in L_p(\mathbb{R}^d) : \|f\|_{S_{p,\infty}^{\boldsymbol{r}} B(\mathbb{R}^d)} < \infty \Big\}$$

і

$$\|f\|_{S_{p,\infty}^{\boldsymbol{r}} B(\mathbb{R}^d)} = \|f\|_p + \sum_{e \subset e_d} \sup_{\boldsymbol{h} > 0} \prod_{j \in e} h_j^{-r_j} \|\Delta_{\boldsymbol{h}^e}^{\boldsymbol{k}^e} f(\cdot)\|_p,$$

де $k_j > r_j$, $j = \overline{1,d}$. Зазначимо, що простори функцій $S^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}B(\mathbb{R}^d)$ були введені Т. І. Амановим [2] і при значенні параметра $\theta = \infty$ збігаються з просторами $S^{\boldsymbol{r}}_{p}H(\mathbb{R}^d)$, які ввів С. М. Нікольський [3].

Далі з метою спрощення записів будемо використовувати замість $S^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}B(\mathbb{R}^d)$ і $S^{\boldsymbol{r}}_{p}H(\mathbb{R}^d)$ позначення $S^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}B$ та $S^{\boldsymbol{r}}_{p}H$ відповідно. Крім цього, будемо вважати, що координати вектора $\boldsymbol{r} = (r_1, \ldots, r_d)$ впорядковані таким чином: $0 < r_1 = r_2 = \ldots = r_\nu < r_{\nu+1} \leqslant \ldots \leqslant r_d$.

Наведемо еквівалентне означення норми функцій із просторів $S^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}B$ [1], яким будемо користуватися у подальших міркуваннях. Для цього нагадаємо означення перетворення Фур'є (див., наприклад, [4]), з використанням якого дається відповідне означення.

Отже, нехай $S = S(\mathbb{R}^d)$ — простір Л. Шварца основних нескінченно диференційовних на $\mathbb{R}^d$ комплекснозначних функцій φ, що спадають на нескінченності разом зі своїми похідними швидше за будь-який степінь функції $|\boldsymbol{x}|^{-1}$ (див., наприклад, [4; 5, гл. 2; 6, гл. 1, 3]). Через S' позначимо простір лінійних неперервних функціоналів на S. Зазначимо, що елементами простору S' є узагальнені функції. Якщо $f \in S'$ і $\varphi \in S$, то $\langle f, \varphi \rangle$ позначає значення f на φ.

Перетворення Фур'є $\mathfrak{F}\varphi : S \to S$ визначається за формулою:

$$(\mathfrak{F}\varphi)(\boldsymbol{\lambda}) = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \int\limits_{\mathbb{R}^d} \varphi(\boldsymbol{t}) e^{-i(\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{t})} d\boldsymbol{t} \equiv \widetilde{\varphi}(\boldsymbol{\lambda}),$$

де $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \ldots, \lambda_d)$, $\boldsymbol{t} = (t_1, \ldots, t_d)$ і $(\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{t}) = \sum\limits_{i=1}^{d} \lambda_i t_i$ — скалярний добуток в $\mathbb{R}^d$ векторів $\boldsymbol{\lambda}$ і $\boldsymbol{t}$.

Обернене перетворення Фур'є $\mathfrak{F}^{-1}\varphi : S \to S$ задається таким чином:

$$(\mathfrak{F}^{-1}\varphi)(\boldsymbol{t}) = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \int\limits_{\mathbb{R}^d} \varphi(\boldsymbol{\lambda}) e^{i(\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{t})} d\boldsymbol{\lambda} \equiv \widehat{\varphi}(\boldsymbol{t}).$$

Перетворення Фур'є узагальненої функції $f \in S'$ (для нього ми зберігаємо те ж позначення) визначається формулою

$$\langle \mathfrak{F}f, \varphi \rangle = \langle f, \mathfrak{F}\varphi \rangle \quad \big(\langle \widetilde{f}, \varphi \rangle = \langle f, \widetilde{\varphi} \rangle\big),$$

де $\varphi \in S$.

Обернене перетворення Фур'є узагальненої функції $f \in S'$ також позначимо $\mathfrak{F}^{-1}f$, і визначається воно аналогічно до прямого перетворення Фур'є за правилом

$$\langle \mathfrak{F}^{-1}f, \varphi \rangle = \langle f, \mathfrak{F}^{-1}\varphi \rangle \quad \big(\langle \widehat{f}, \varphi \rangle = \langle f, \widehat{\varphi} \rangle\big).$$

Зазначимо, що для $1 < p < \infty$ існує природне неперервне вкладення $L_p(\mathbb{R}^d)$ в S' і в цьому сенсі функції з $L_p(\mathbb{R}^d)$ ототожнюються з елементами з S'.

Для кожного вектора $\boldsymbol{s} = (s_1, ..., s_d)$, $s_j \in \mathbb{Z}_+$, $j = \overline{1, d}$, розглянемо множини

$$Q^*_{2^{\boldsymbol{s}}} = \big\{ \boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, ..., \lambda_d) : \ \eta(s_j)2^{s_j - 1} \leqslant |\lambda_j| < 2^{s_j}, \lambda_j \in \mathbb{R}, \ \ j = \overline{1, d} \big\},$$

$$\rho_+(\boldsymbol{s}) := \big\{ \boldsymbol{k} = (k_1, ..., k_d) : \eta(s_j)2^{s_j - 1} \leqslant k_j < 2^{s_j}, k_j \in \mathbb{Z}_+, j = \overline{1, d} \big\},$$

де $\eta(0) = 0$ і $\eta(t) = 1, \ t > 0$, тобто $\rho_+(\boldsymbol{s}) = Q^*_{2^s} \cap \mathbb{Z}^d_+$.

Надалі по тексту вживається запис $A \asymp B$, який означає, що для невід'ємних величин A та B, залежних від деякої сукупності параметрів, існує додатна стала C така, що $C^{-1}A \leqslant B \leqslant CA$. Якщо тільки $B \leqslant CA$ ($B \geqslant C^{-1}A$), то пишемо $B \ll A$ ($B \gg A$).

Нехай $A \subset \mathbb{R}^d$ — деяка множина. Позначимо через $\chi_{_A}$ характеристичну функцію множини A і для $f \in L_p(\mathbb{R}^d)$ покладемо

$$\delta^*_{\boldsymbol{s}}(f, \boldsymbol{x}) = \mathfrak{F}^{-1}(\chi_{Q^*_{2^{\boldsymbol{s}}}} \cdot \mathfrak{F}f).$$

У прийнятих позначеннях простори $S^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}B$, $1 < p < \infty$, $\boldsymbol{r} > 0$, можна означити таким чином [1]:

$$S^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}B := \Big\{ f \in L_p(\mathbb{R}^d) : \ \|f\|_{S^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}B} < \infty \Big\},$$

де

$$\|f\|_{S^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}B} \asymp \left(\sum_{\boldsymbol{s} \geqslant 0} 2^{(\boldsymbol{s},\boldsymbol{r})\theta} \|\delta^*_{\boldsymbol{s}}(f, \cdot)\|^\theta_p \right)^{\frac{1}{\theta}}$$

при $1 \leqslant \theta < \infty$ і

$$\|f\|_{S^{\boldsymbol{r}}_{p}H} \asymp \sup_{\boldsymbol{s} \geqslant 0} 2^{(\boldsymbol{s},\boldsymbol{r})} \|\delta^*_{\boldsymbol{s}}(f, \cdot)\|_p.$$

У випадку, коли $\|f\|_{S^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}B} \leqslant 1$, будемо говорити, що функція f належить класу $S^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}B$, зберігаючи при цьому для класів $S^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}B$ ті ж самі позначення, що і для просторів $S^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}B$.

2. Наближення цілими функціями з носієм у східчастому гіперболічному хресті. Нехай $\boldsymbol{r} = (r_1, \ldots, r_d)$ — вектор з цілочисловими невід'ємними координатами. Поставимо йому у відповідність вектор $\boldsymbol{\gamma} = (\gamma_1, \ldots, \gamma_d)$, $\gamma_j = \frac{r_j}{r_1}$, $j = \overline{1, d}$.

Для $f \in L_q(\mathbb{R}^d)$ і $\boldsymbol{\gamma} = (\gamma_1, \ldots, \gamma_d), \gamma_j > 0$, $j = \overline{1, d}$, позначимо

$$S_{Q_n^{\boldsymbol{\gamma}}}(f, \boldsymbol{x}) = \sum_{(\boldsymbol{s}, \boldsymbol{\gamma}) \leqslant n} \delta^*_{\boldsymbol{s}}(f, \boldsymbol{x}). \tag{1}$$

Зазначимо, що $S_{Q_n^{\boldsymbol{\gamma}}}(f, \boldsymbol{x})$ — функція зі спектром на множині

$$Q_n^{\boldsymbol{\gamma}} = \bigcup_{(\boldsymbol{s}, \boldsymbol{\gamma}) \leqslant n} Q^*_{2^{\boldsymbol{s}}}.$$

Множина $Q_n^{\boldsymbol{\gamma}}$ називається східчастим гіперболічним хрестом і при цьому $\operatorname{mes} Q_n^{\boldsymbol{\gamma}} \asymp 2^n n^{d-1}$ (див., наприклад, [1]), де $\operatorname{mes} A$ позначає лебегову міру множини A.

Розглянемо таку апроксимативну харатеристику

$$\mathcal{E}_{Q_n^{\boldsymbol{\gamma}}}\big(f\big)_\infty = \|f(\cdot) - S_{Q_n^{\boldsymbol{\gamma}}}(f, \cdot)\|_\infty$$

і, відповідно, для функціонального класу $S^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}B(\mathbb{R}^d)$

$$\mathcal{E}_{Q_n^{\boldsymbol{\gamma}}}\big(S^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}B\big)_\infty = \sup_{f \in S^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}B} \mathcal{E}_{Q_n^{\boldsymbol{\gamma}}}\big(f\big)_\infty.$$

Наведемо результат, у якому встановлено точну за порядком оцінку наближення класів $S^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}B$ в метриці простору L_∞ функціями вигляду (1).

Теорема 1. *Нехай $1 < p < \infty$, $r_1 > \frac{1}{p}$, $1 \leqslant \theta \leqslant \infty$. Тоді має місце порядкове співвідношення*

$$\mathcal{E}_{Q_n^{\boldsymbol{\gamma}}}\big(S^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}B\big)_\infty = \sup_{f \in S^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}B} \|f(\cdot) - S_{Q_n^{\boldsymbol{\gamma}}}(f, \cdot)\|_\infty \asymp 2^{-n\left(r_1 - \frac{1}{p}\right)} n^{(\nu-1)\left(1-\frac{1}{\theta}\right)}. \tag{2}$$

Доведення. Зазначимо, що оцінку зверху при $d \geqslant 1$ і оцінку знизу при $d = 1$ встановлено в [7], тому перейдемо до встановлення оцінки знизу при $d > 1$. Також зауважимо, що її достатньо отримати у випадку $\nu = d$.

Побудуємо екстремальні функції $f \in S^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}B$, які її реалізують. Покладемо

$$D_{\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{x}) = \prod_{j=1}^{d} D_{k_j}(x_j), \quad \boldsymbol{k} \in \mathbb{Z}^d_+,$$

де

$$D_{k_j}(x_j) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, \left(2 \sin \frac{x_j}{2} \cos \frac{2k_j + 1}{2} x_j\right) \cdot x_j^{-1}.$$

У роботі [8] показано, що для перетворення Фур'є функції $D_{\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{x})$ справедлива рівність

$$\mathfrak{F} D_{\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{x}) = \chi_{\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{x}) = \prod_{j=1}^{d} \chi_{k_j}(x_j),$$

де

$$\chi_{k_j}(x_j) = \begin{cases} 1, & k_j < |x_j| < k_j + 1; \\ \frac{1}{2}, & |x_j| = k_j \text{ або } |x_j| = k_j + 1; \\ 0 & - \text{ в інших випадках}; \end{cases}$$

$$\chi_0(x_j) = \begin{cases} 1, & |x_j| < 1; \\ \frac{1}{2}, & |x_j| = 1; \\ 0, & |x_j| > 1. \end{cases}$$

Відповідно для оберненого перетворення будемо мати

$$\mathfrak{F}^{-1} \chi_{\boldsymbol{k}}(t) = D_{\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{x}).$$

Відзначимо, що при $1 < p < \infty$ має місце оцінка [8]

$$\Big\| \sum_{\boldsymbol{k} \in \rho_+(\boldsymbol{s})} D_{\boldsymbol{k}}(\cdot) \Big\|_p \asymp 2^{\|\boldsymbol{s}\|_1 \left(1 - \frac{1}{p}\right)}.$$

Оцінимо тепер норму $\sum\limits_{\boldsymbol{k}\in\rho_+(\boldsymbol{s})} D_{\boldsymbol{k}}(\cdot)$ у випадку, коли $p=\infty$.

$$\Big\|\sum_{\boldsymbol{k}\in\rho_+(\boldsymbol{s})} D_{\boldsymbol{k}}(\cdot)\Big\|_\infty = \Big\|\sum_{\boldsymbol{k}\in\rho_+(\boldsymbol{s})}\prod_{j=1}^{d} D_{k_j}(\cdot)\Big\|_\infty = \Big\|\prod_{j=1}^{d}\sum_{k_j=\eta(s_j)2^{s_j-1}}^{2^{s_j}-1} D_{k_j}(\cdot)\Big\|_\infty =$$

$$= \Big\|\prod_{j=1}^{d}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\sin 2^{s_j}x_j - \sin\eta(s_j)2^{s_j-1}x_j}{x_j}\Big\|_\infty = J_1 \tag{3}$$

Встановимо спочатку для величини J_1 оцінку зверху:

$$J_1 = \Big\|\prod_{j=1}^{d}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\sin\frac{2^{s_j}-\eta(s_j)2^{s_j-1}}{2}x_j\cos\frac{2^{s_j}+\eta(s_j)2^{s_j-1}}{2}x_j}{x_j}\Big\|_\infty \ll$$

$$\ll \prod_{j=1}^{d}\Big\|\frac{\sin(2^{s_j-1}-\eta(s_j)2^{s_j-2})x_j}{x_j}\Big\|_\infty = \prod_{j=1}^{d}\big(2^{s_j-1}-\eta(s_j)2^{s_j-2}\big) \ll 2^{\|s\|_1}.$$

Далі проведемо в (3) оцінку знизу. Використавши нерівність $\big|a-b\big| \geqslant \big||a|-|b|\big|$, одержимо

$$J_1 = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\prod_{j=1}^{d}\operatorname*{ess\,sup}_{x_j\in\mathbb{R}}\left|\frac{\sin 2^{s_j}x_j - \sin\eta(s_j)2^{s_j-1}x_j}{x_j}\right| \geqslant$$

$$\geqslant \sqrt{\frac{2}{\pi}}\prod_{j=1}^{d}\operatorname*{ess\,sup}_{x_j\in\mathbb{R}}\left|\left|\frac{\sin 2^{s_j}x_j}{x_j}\right| - \left|\frac{\sin\eta(s_j)2^{s_j-1}x_j}{x_j}\right|\right| \geqslant$$

$$\geqslant \sqrt{\frac{2}{\pi}}\prod_{j=1}^{d}\left(\operatorname*{ess\,sup}_{x_j\in\mathbb{R}}\left|\frac{\sin 2^{s_j}x_j}{x_j}\right| - \operatorname*{ess\,sup}_{x_j\in\mathbb{R}}\left|\frac{\sin\eta(s_j)2^{s_j-1}x_j}{x_j}\right|\right) =$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}}\prod_{j=1}^{d}\big(2^{s_j}-\eta(s_j)2^{s_j-1}\big) \gg 2^{\|s\|_1}.$$

Отже, маємо

$$\Big\|\sum_{\boldsymbol{k}\in\rho_+(\boldsymbol{s})} D_{\boldsymbol{k}}(\cdot)\Big\|_\infty \asymp 2^{\|\boldsymbol{s}\|_1}. \tag{4}$$

Розглянемо функції

$$f_1(\boldsymbol{x}) = C_1 2^{-n\left(r_1+1-\frac{1}{p}\right)} n^{-\frac{d-1}{\theta}} \sum_{(\boldsymbol{s},\boldsymbol{1})=n+1} \sum_{\boldsymbol{k}\in\rho_+(\boldsymbol{s})} D_{\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{x}), \quad C_1 > 0,$$

якщо $1 \leqslant \theta < \infty$ і

$$f_2(\boldsymbol{x}) = C_2 2^{-n\left(r_1+1-\frac{1}{p}\right)} \sum_{(\boldsymbol{s},\boldsymbol{1})=n+1} \sum_{\boldsymbol{k}\in\rho_+(\boldsymbol{s})} D_{\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{x}), \quad C_2 > 0,$$

якщо $\theta = \infty$.

Переконаємося, що дані функції належать класам $S^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}B$ і $S^{\boldsymbol{r}}_{p,\infty}B$ відповідно.

$$\|f_1\|_{S^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}B} \asymp \left(\sum_{(\boldsymbol{s},\boldsymbol{1})=n+1} 2^{(\boldsymbol{s},\boldsymbol{r})\theta} \|\delta^*_{\boldsymbol{s}}(f,\cdot)\|_p^\theta \right)^{\frac{1}{\theta}} \asymp$$

$$\asymp \left(\sum_{(\boldsymbol{s},\boldsymbol{1})=n+1} 2^{(\boldsymbol{s},\boldsymbol{r})\theta} 2^{-n\left(r_1+1-\frac{1}{p}\right)\theta} n^{-(d-1)} \left\| \sum_{\boldsymbol{k}\in\rho_+(\boldsymbol{s})} D_{\boldsymbol{k}}(\cdot) \right\|_p^\theta \right)^{\frac{1}{\theta}} \asymp$$

$$\asymp 2^{-n\left(r_1+1-\frac{1}{p}\right)} n^{-\frac{d-1}{\theta}} \left(\sum_{(\boldsymbol{s},\boldsymbol{1})=n+1} 2^{(\boldsymbol{s},\boldsymbol{r})\theta} 2^{\|\boldsymbol{s}\|_1\left(1-\frac{1}{p}\right)} \right)^{\frac{1}{\theta}} \asymp$$

$$\asymp 2^{-n\left(r_1+1-\frac{1}{p}\right)} n^{-\frac{d-1}{\theta}} 2^{n\left(r_1+1-\frac{1}{p}\right)} \left(\sum_{(\boldsymbol{s},\boldsymbol{1})=n+1} 1 \right)^{\frac{1}{\theta}} \ll 1.$$

Для f_2 будемо мати

$$\|f_2\|_{S^{\boldsymbol{r}}_{p,\infty}} \asymp \sup_{(\boldsymbol{s},\boldsymbol{1})=n+1} 2^{(\boldsymbol{s},\boldsymbol{r})} \|\delta^*_{\boldsymbol{s}}(f,\cdot)\|_p \asymp$$

$$\asymp \sup_{(\boldsymbol{s},\boldsymbol{1})=n+1} 2^{(\boldsymbol{s},\boldsymbol{r})} 2^{-n\left(r_1+1-\frac{1}{p}\right)} \left\| \sum_{\boldsymbol{k}\in\rho_+(\boldsymbol{s})} D_{\boldsymbol{k}}(\cdot) \right\|_p \asymp$$

$$\asymp 2^{-n\left(r_1+1-\frac{1}{p}\right)} \sup_{(\boldsymbol{s},\boldsymbol{1})=n+1} 2^{(\boldsymbol{s},\boldsymbol{r})} 2^{\|\boldsymbol{s}\|_1\left(1-\frac{1}{p}\right)} \ll 1.$$

Покажемо, що

$$\Big\| \sum_{(\boldsymbol{s},\mathbf{1})=n+1} \sum_{\boldsymbol{k}\in\rho_+(\boldsymbol{s})} D_{\boldsymbol{k}}(\cdot)\Big\|_\infty \asymp 2^n n^{d-1}. \qquad (5)$$

Встановимо спочатку оцінку зверху. Згідно з нерівністю Мінковського і (4) одержимо

$$\Big\| \sum_{(\boldsymbol{s},\mathbf{1})=n+1} \sum_{\boldsymbol{k}\in\rho_+(\boldsymbol{s})} D_{\boldsymbol{k}}(\cdot)\Big\|_\infty \leqslant \sum_{(\boldsymbol{s},\mathbf{1})=n+1} \Big\| \sum_{\boldsymbol{k}\in\rho_+(\boldsymbol{s})} D_{\boldsymbol{k}}(\cdot)\Big\|_\infty \ll$$

$$\ll \sum_{(\boldsymbol{s},\mathbf{1})=n+1} 2^{\|\boldsymbol{s}\|_1} \ll 2^n \sum_{(\boldsymbol{s},\mathbf{1})=n+1} 1 \asymp 2^n n^{d-1}.$$

Відповідно для оцінки знизу можемо записати

$$\Big\| \sum_{(\boldsymbol{s},\mathbf{1})=n+1} \sum_{\boldsymbol{k}\in\rho_+(\boldsymbol{s})} D_{\boldsymbol{k}}(\cdot)\Big\|_\infty = \operatorname*{ess\,sup}_{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^d} \Big| \sum_{(\boldsymbol{s},\mathbf{1})=n+1} \sum_{\boldsymbol{k}\in\rho_+(\boldsymbol{s})} D_{\boldsymbol{k}}(\cdot)\Big| =$$

$$= \operatorname*{ess\,sup}_{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^d} \Big| \sum_{(\boldsymbol{s},\mathbf{1})=n+1} \prod_{j=1}^{d} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin 2^{s_j} x_j - \sin \eta(s_j) 2^{s_j-1} x_j}{x_j} \Big| \geqslant$$

$$\geqslant \sum_{(\boldsymbol{s},\mathbf{1})=n+1} \prod_{j=1}^{d} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin 1 - \sin \eta(s_j)\frac{1}{2}}{2^{-s_j}} \gg \sum_{(\boldsymbol{s},\mathbf{1})=n+1} 2^{\|s\|_1} \asymp 2^n n^{d+1}.$$

За рахунок вибору функцій f_1 і f_2 $S_{Q_n^\gamma}(f_1,\cdot)=0$ і $S_{Q_n^\gamma}(f_2,\cdot)=0$. Скориставшись (5), будемо мати

$$\|f_1(\cdot) - S_{Q_n^\gamma}(f_1,\cdot)\|_\infty = \|f_1(\cdot)\|_\infty \asymp 2^{-n(r_1-\frac{1}{p})} n^{(d-1)(1-\frac{1}{\theta})},$$

$$\|f_2(\cdot) - S_{Q_n^\gamma}(f_2,\cdot)\|_\infty = \|f_2(\cdot)\|_\infty \asymp 2^{-n(r_1-\frac{1}{p})} n^{(d-1)}.$$

Оцінки знизу встановлено.

Теорему доведено.

На завершення відзначимо, що результати даного пункту доповнюють дослідження класів $S^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}B$, що проводилися у роботі [8], а також поширюють одержаний автором в [7] (теорема 2) результат на d-вимірний випадок.

3. Наближення цілими функціями зі спектром спеціального вигляду. Наведемо необхідні позначення й означимо досліджувану апроксимативну характеристику.

Носієм узагальненої функції f будемо називати замикання $\overline{\mathfrak{N}}$ такої множини точок $\mathfrak{N} \subset \mathbb{R}^d$, що для довільної $\varphi \in S$, яка дорівнює нулю в $\overline{\mathfrak{N}}$, виконується рівність $\langle f, \varphi \rangle = 0$. Носій узагальненої функції f будемо позначати через $\operatorname{supp} f$.

Нехай Θ — деяка множина в $\mathbb{Z}_+^d$, $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}(\Theta) = \bigcup\limits_{\boldsymbol{s}\in\Theta} Q_{2^{\boldsymbol{s}}}^*$. Тоді для $f \in L_q(\mathbb{R}^d)$, $1 < q < \infty$, покладемо

$$S_{\mathfrak{M}}(f, \boldsymbol{x}) = \sum_{\boldsymbol{s}\in\Theta} \delta_{\boldsymbol{s}}^*(f, \boldsymbol{x}),$$

де, як вже було сказано вище,

$$\delta_{\boldsymbol{s}}^*(f, \boldsymbol{x}) = \mathfrak{F}^{-1}\big(\chi_{Q_{2^{\boldsymbol{s}}}^*} \cdot \mathfrak{F} f\big),$$

і $\chi_{Q_{2^{\boldsymbol{s}}}^*}$ — характеристична функція множини $Q_{2^{\boldsymbol{s}}}^*$.

Зауважимо, що $S_{\mathfrak{M}}(f, \boldsymbol{x})$ є цілою функцією, яка належить простору $L_q(\mathbb{R}^d)$ (див., наприклад, [4]) і $\operatorname{supp} S_{\mathfrak{M}}(f, x) \subseteq \mathfrak{M}$.

Далі для $f \in L_q(\mathbb{R}^d)$ розглянемо апроксимативну характеристику

$$e_M^{\mathfrak{F}}\big(f\big)_q = \inf_{\Theta:\, \operatorname{mes} \mathfrak{M} \leqslant M} \|f(\cdot) - S_{\mathfrak{M}}(f, \cdot)\|_q\,.$$

Якщо $K \subset L_q(\mathbb{R}^d)$ — деякий клас функцій, то покладемо

$$e_M^{\mathfrak{F}}\big(K\big)_q = \sup_{f\in K} e_M^{\mathfrak{F}}\big(f\big)_q.$$

Теорема 2. *Нехай $1 < p < \infty$, $r_1 > \frac{1}{p}$, $1 \leqslant \theta \leqslant \infty$. Тоді має місце оцінка*

$$e_M^{\mathfrak{F}}\big(S_{p,\theta}^{\boldsymbol{r}} B\big)_\infty \asymp \big(M^{-1} \log^{\nu-1} M\big)^{r_1 - \frac{1}{p}} \big(\log^{\nu-1} M\big)^{1-\frac{1}{\theta}}. \tag{6}$$

Доведення. Оцінка зверху в (6), отримується з теореми 1. Оскільки $\operatorname{mes} Q_n^{\gamma} \ll 2^n n^{\nu-1}$, то підібравши для M число $n \in \mathbb{N}$ із співвідношення mes $Q_n^\gamma \leqslant M <$ mes Q_{n+1}^γ, тобто $M \asymp 2^n n^{\nu-1}$, з оцінки (2) будемо мати

$$e_M^{\mathfrak{F}}\big(S_{p,\theta}^{\boldsymbol{r}}B\big)_\infty \ll 2^{-n\left(r_1-\frac{1}{p}\right)} n^{(\nu-1)\left(1-\frac{1}{\theta}\right)} \asymp$$

$$\asymp \big(M^{-1}\log^{\nu-1} M\big)^{r_1-\frac{1}{p}} \big(\log^{\nu-1} M\big)^{\left(1-\frac{1}{\theta}\right)}.$$

Перейдемо до встановлення оцінки знизу в (6). Попередньо зауважимо, що її, як і для оцінки знизу в теоремі 1, достатньо отримати у випадку $\nu = d$.

Нехай

$$\Theta(n) = \big\{\boldsymbol{s} = (s_1, \ldots, s_d) \in \mathbb{Z}^d : \; s_1 + \ldots + s_d = n\big\} \;\; \text{і} \;\; \widetilde{Q}_n = \bigcup_{s\in\Theta(n)} Q_{2^{\boldsymbol{s}}}^*,$$

тоді mes $\widetilde{Q}_n \asymp 2^n n^{\nu-1}$. Далі будемо вважати, що числа M і n пов'язані співвідношенням

$$\text{mes } \widetilde{Q}_n \leqslant 4M < \text{mes } \widetilde{Q}_{n+1}. \tag{7}$$

Розглянемо функції

$$f_3(\boldsymbol{x}) = C_3 2^{-n\left(r_1+1-\frac{1}{p}\right)} n^{-\frac{d-1}{\theta}} \sum_{\boldsymbol{s}\in\Theta(n)} \sum_{\boldsymbol{k}\in\rho_+(\boldsymbol{s})} D_{\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{x}), \quad C_3 > 0,$$

якщо $1 \leqslant \theta < \infty$ і

$$f_4(\boldsymbol{x}) = C_4 2^{-n\left(r_1+1-\frac{1}{p}\right)} \sum_{\boldsymbol{s}\in\Theta(n)} \sum_{\boldsymbol{k}\in\rho_+(\boldsymbol{s})} D_{\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{x}), \quad C_4 > 0,$$

якщо $\theta = \infty$.

Аналогічно до того, як це було показано для функцій f_1 і f_2, можемо переконатися, що f_3 та f_4 належать класам $S_{p,\theta}^r B$ та $S_{p,\infty}^r B$ відповідно.

Оскільки mes $\widetilde{Q}_n \asymp 2^n n^{\nu-1}$, то виберемо в якості множини $\mathfrak{M}$ множину $\widetilde{Q}_n$, тобто $\mathfrak{M} = \widetilde{Q}_n$.

Тоді, використавши (5) та (7), можемо записати

$$\|f_3(\cdot) - S_{\mathfrak{M}}(f_3, \cdot)\|_\infty \geqslant \big|\|f_3(\cdot)\|_\infty - \|S_{\mathfrak{M}}(f_3, \cdot)\|_\infty\big| \gg$$

$$\gg 2^{-n(r_1+1-\frac{1}{p})} n^{\frac{d-1}{\theta}} (2^n n^{d-1} - M) \gg 2^{-n\left(r_1+1-\frac{1}{p}\right)} n^{\frac{d-1}{\theta}} 2^n n^{d-1} =$$

$$= 2^{-n\left(r_1-\frac{1}{p}\right)} n^{(d-1)\left(1-\frac{1}{\theta}\right)} \asymp \left(M^{-1} \log^{d-1} M\right)^{r_1-\frac{1}{p}} \left(\log^{d-1} M\right)^{\left(1-\frac{1}{\theta}\right)}.$$

Аналогічно у випадку $\theta = \infty$ отримаємо

$$\|f_4(\cdot) - S_{\mathfrak{M}}(f_4, \cdot)\|_\infty \gg \left(M^{-1} \log^{d-1} M\right)^{r_1-\frac{1}{p}} \log^{d-1} M.$$

Оцінки знизу встановлено.

Теорему доведено.

На завершення роботи зробимо деякі коментарі до одержаних результатів.

***Зауваження* 1.** Порівнюючи порядкові оцінки, які одержано в теоремах 1 і 2, робимо висновок, що

$$\mathcal{E}_{Q_n^\gamma}\left(S^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}B\right)_\infty \asymp e_M^{\mathfrak{F}}\left(S^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}B\right)_\infty, \quad M \asymp 2^n n^{\nu-1}.$$

Відзначимо також, що порядкові оцінки величини $e_M^{\mathfrak{F}}\left(S^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}B\right)_q$ у ряді інших співвідношень між параметрами p, q і θ встановлено в [9]. Як показано у зазначеній роботі, існують співвідношення між параметрами p, q, θ і r_1 при яких величини $e_M^{\mathfrak{F}}\left(S^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}B\right)_q$ і $\mathcal{E}_{Q_n^\gamma}\left(S^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}B\right)_q$ мають різні порядки.

***Зауваження* 2.** Дослідження аналогічних апроксимативних характеристик класів Нікольського–Бєсова періодичних функцій багатьох змінних з домінуючою мішаною похідною у рівномірній метриці проводилися, зокрема, А.С. Романюком [10, 11] і В.М. Темляковим [12].

1. *Лизоркин П. И., Никольский С. М.* Пространства функций смешанной гладкости с декомпозиционной точки зрения // Тр. Мат. ин-та АН СССР. — 1989. — **187**. — С. 143 – 161.
2. *Аманов Т. И.* Теоремы представления и вложения для функциональных пространств $S^{(r)}_{p,\theta}B(\mathbb{R}_n)$ и $S^{(r)*}_{p,\theta}B$, $(0 \leqslant x_j \leqslant 2\pi;\ j = 1, \dots, n)$ // Тр. Мат. ин-та АН СССР. — 1965. — **77**. — С. 5 – 34.
3. *Никольский С. М.* Функции с доминирующей смешанной производной, удовлетворяющей кратному условию Гельдера // Сиб. мат. журн. — 1963. — **4**, №6. — С. 1342 – 1364.
4. *Лизоркин П. И.* Обобщенное лиувиллевское дифференцирование и метод мультипликаторов в теории вложений классов дифференцируемых функций // Тр. Мат. ин-та АН СССР. — 1969. — **105**. — С. 89 – 167.

5. *Владимиров В. С.* Уравнения математической физики. — М.: Наука, 1967. — 436 с.
6. *Никольский С. М.* Приближение функций многих переменных и теоремы вложения. — М.: Наука, 1969. — 480 с.
7. *Янченко С. Я.* Наближення функцій з класів $S^r_{p,\theta}B$ у рівномірній метриці // Укр. мат. журн. — 2013. — **65**, №5. — С. 698 – 705.
8. *Wang Heping, Sun Yongsheng.* Approximation of multivariate functions with certain mixed smoothness by entire functions // Northeast. Math. J. — 1995. — **11**, №4. — P. 454 – 466.
9. *Янченко С. Я.* Наближення класів $S^{\Omega}_{p,\theta}B$ функцій багатьох змінних цілими функціями спеціального вигляду // Укр. мат. журн. — 2010. — **62**, №8. — С. 1124 – 1138.
10. *Романюк А. С.* Приближение классов $B^r_{p,\theta}$ периодических функций многих переменных линейными методами и наилучшие приближения // Мат. сб. — 2004. — **195**, №2. — С. 91 – 116.
11. *Романюк А. С.* Наилучшие тригонометрические приближения классов периодических функций многих переменных в равномерной метрике // Мат. заметки. — 2007. — **82**, №2. — С. 247 – 261.
12. *Темляков В. Н.* Оценки асимптотических характеристик классов функций с ограниченной смешанной производной или разностью // Тр. Мат. ин-та АН СССР. — 1988. — **189**. — С. 138 – 168.