Збірник праць Ін-ту математики НАН України 2017, том 14, № 1, 34–38

УДК 517.54

А. К. Бахтин*[1]*, Г. П. Бахтина*[2]*,
***И. В. Денега*[3]**

[1,3] (*Институт математики НАН Украины, Киев*)

[2] (*Национальный технический университет Украины "Киевский политехнический институт имени Игоря Сикорского", Киев*)

[1] **alexander.bahtin@yandex.ru**, [2] **bakhtina_galina@mail.ru**,
[3] **iradenega@yandex.ru**

Экстремальное разбиение комплексной плоскости с фиксированными полюсами

Посвящается 70-летию профессора Юрия Борисовича Зелинского

Работа посвящена исследованию экстремальних проблем геометрической теории функций комплексного переменного, связанных с оценками функционалов, заданных на системах неналегающих областей.

Paper is devoted to extremal problems in geometric function theory of complex variables associated with estimates of functionals defined on systems of non-overlapping domains.

Задачи о максимизации произведения внутренних радиусов непересекающихся областей хорошо известны в геометрической теории функций комплексного переменного [1-14]. Одна из задач такого рода рассматривается в данной статье.

Пусть $\mathbb{N}$, $\mathbb{R}$ – множество натуральных и вещественных чисел, соответственно, $\mathbb{C}$ — комплексная плоскость, $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ — расширенная комплексная плоскость или сфера Римана. Пусть $r(B,a)$ — внутренний радиус области $B \subset \overline{\mathbb{C}}$, относительно точки $a \in B$ (см., например, [1–4]). Пусть $U_1 := \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}$ — единичный круг.

Рассмотрим следующую задачу.

Формулировка проблемы. Пусть $a_0 = 0$, $|a_1| = \ldots = |a_n| = 1$, $a_k \in B_k \in \overline{\mathbb{C}}$, $k = \overline{0,n}$, где $B_0, \ldots, B_n$ — взаимно непересекающиеся области и $B_1, \ldots, B_n$ — симметричны относительно единичной окружности. Требуется найти точную верхнюю грань произведения

$$r^{\gamma}(B_0, 0) \prod_{k=1}^{n} r(B_k, a_k).$$

При $\gamma = 1$ эта задача была поставлена, как открытая проблема в работе [3]. Для $n \geq 2$ и $\gamma = 1$ ее решил Л. В. Ковалев [5,6]. Следующая теорема существенно дополняет результаты работ [5–7]. Имеет место результат.

Теорема 1. *Пусть $\gamma \in (0,2]$. Для произвольно фиксированного набора взаимно неналегающих областей B_0, B_1, B_2, таких, что $0 \in B_0$, $1 \in B_1$, $-1 \in B_2$, причем области B_k, $k \in \{1,2\}$, обладают симметрией относительно единичной окружности $\{w \in \mathbb{C} : |w| = 1\}$, справедливо неравенство*

$$r^{\gamma}(B_0, 0)\, r(B_1, 1)\, r(B_2, -1) \leq$$

$$\leq 2^{1-\gamma} \left[\frac{2^{2\gamma+6} \cdot (2\gamma)^{\gamma}}{(2-\sqrt{2\gamma})^{\frac{1}{2}(2-\sqrt{2\gamma})^2} \cdot (2+\sqrt{2\gamma})^{\frac{1}{2}(2+\sqrt{2\gamma})^2}} \right]^{\frac{1}{2}}.$$

Знак равенства в этом неравенстве достигается, когда B_0, B_1, B_2, являются круговыми областями квадратичного дифференциала

$$Q(w)dw^2 = -\frac{\gamma w^4 + 2(4-\gamma)w^2 + \gamma}{w^2(w^2-1)^2}\, dw^2. \qquad (1)$$

Доказательство. Пусть

$$P_k := \{w : (-1)^{k+1} \mathrm{Im}\, w > 0\}, \quad k \in \{1,2\}, \quad D_1 = P_1 \cap U_1,$$

$$D_2 = P_2 \cap U_1, \quad D_3 = (\overline{\mathbb{C}} \backslash U_1) \cap P_1, \quad D_4 = (\overline{\mathbb{C}} \backslash U_1) \cap P_2,\ \pi(w) = \frac{2w}{1+w^2}.$$

Тогда из определения функции $\pi(w)$ вытекает, что

$$|\pi(w)| \sim 2|w|, \quad w \to 0, \quad w \in \overline{P_k},$$

$$|\pi(w) - 1| \sim \frac{1}{2}\,|w-1|^2\,, \quad w \to 1, \quad w \in \overline{P_k}.$$

Результат разделяющего преобразования области B_0 относительно функции $\pi(w)$ и системы областей $\{\overline{D}_k\}_{k=1}^{4}$ обозначим через $B_0^{(k)}$, $k = \overline{1,4}$; результат разделяющего преобразования области B_j, $j \in \{1,2\}$, относительно функции $2w/(1+w^2)$ и системы областей $\{\overline{D}_k\}_{k=1}^{4}$, обозначим — $B_1^{(k)}, B_2^{(k)}$, $k = \overline{1,4}$. Далее, используя соответствующие результаты работ [3, 4], имеем неравенства

$$r\left(B_0,0\right) \leq \left[\frac{1}{2} r\left(B_0^{(1)},0\right) \cdot \frac{1}{2} r\left(B_0^{(2)},0\right)\right]^{\frac{1}{2}},$$

$$r\left(B_1,1\right) \leq \left[2r\left(B_1^{(1)},1\right) 2r\left(B_1^{(2)},1\right) 2r\left(B_1^{(3)},1\right) 2r\left(B_1^{(4)},1\right)\right]^{\frac{1}{8}},$$

$$r\left(B_2,-1\right) \leq \left[2r\left(B_2^{(1)},-1\right) 2r\left(B_2^{(2)},-1\right) 2r\left(B_2^{(3)},-1\right) 2r\left(B_2^{(4)},-1\right)\right]^{\frac{1}{8}}.$$

Отсюда

$$r^{\gamma}\left(B_0,0\right) r\left(B_1,1\right) r\left(B_2,-1\right) \leq \left[\frac{1}{2} r\left(B_0^{(1)},0\right) \cdot \frac{1}{2} r\left(B_0^{(2)},0\right)\right]^{\frac{\gamma}{2}} \times$$

$$\times \left[2r\left(B_1^{(1)},1\right) 2r\left(B_1^{(2)},1\right) 2r\left(B_1^{(3)},1\right) 2r\left(B_1^{(4)},1\right)\right]^{\frac{1}{8}} \times$$

$$\times \left[2r\left(B_2^{(1)},-1\right) 2r\left(B_2^{(2)},-1\right) 2r\left(B_2^{(3)},-1\right) 2r\left(B_2^{(4)},-1\right)\right]^{\frac{1}{8}}.$$

Поскольку области B_1, B_2, обладают симметрией относительно единичной окружности, тогда

$$r^{\gamma}\left(B_0,0\right) r\left(B_1,1\right) r\left(B_2,-1\right) \leq \left[\frac{1}{2} r\left(B_0^{(1)},0\right) \cdot \frac{1}{2} r\left(B_0^{(2)},0\right)\right]^{\frac{\gamma}{2}} \times$$

$$\times \left[\left(2r\left(B_1^{(1)},1\right)\right)^2 \left(2r\left(B_1^{(2)},1\right)\right)^2\right]^{\frac{1}{8}} \times$$

$$\times \left[\left(2r \left(B_2^{(1)}, -1 \right) \right)^2 \left(2r \left(B_2^{(2)}, -1 \right) \right)^2 \right]^{\frac{1}{8}}.$$

Далее, используя несложные преобразования, получаем

$$r^{\gamma}(B_0, 0)\, r(B_1, 1)\, r(B_2, -1) \leq$$

$$\leq 2 \left[2^{-2\gamma} r^{2\gamma} \left(B_0^{(1)}, 0 \right) \right]^{\frac{1}{4}} \left[r \left(B_1^{(1)}, 1 \right) r \left(B_1^{(2)}, 1 \right) \right]^{\frac{1}{4}} \times$$

$$\times \left[2^{-2\gamma} r^{2\gamma} \left(B_0^{(2)}, 0 \right) \right]^{\frac{1}{4}} \left[r \left(B_2^{(1)}, -1 \right) r \left(B_2^{(2)}, -1 \right) \right]^{\frac{1}{4}} \leq$$

$$\leq 2^{1-\gamma} \left[r^{2\gamma} \left(B_0^{(1)}, 0 \right) r \left(B_1^{(1)}, 1 \right) r \left(B_2^{(1)}, -1 \right) \right]^{\frac{1}{4}} \times$$

$$\times \left[r^{2\gamma} \left(B_0^{(2)}, 0 \right) r \left(B_1^{(2)}, 1 \right) r \left(B_2^{(2)}, -1 \right) \right]^{\frac{1}{4}},$$

где $B_0^{(k)}$, $B_1^{(k)}$, $B_2^{(k)}$, $k \in \{1, 2\}$, — круговые области квадратичного дифференциала

$$Q(z)dz^2 = -\frac{(2-\gamma)z^2 + \gamma}{z^2(z^2-1)^2}\, dz^2 \qquad (2)$$

($0 \in B_0^{(k)}$, $1 \in B_1^{(k)}$, $-1 \in B_2^{(k)}$). Поскольку $\gamma \in (0, 2]$, тогда согласно работам [1–3] справедливо неравенство

$$r^{2\gamma} \left(B_0^{(1)}, 0 \right) r \left(B_1^{(1)}, 1 \right) r \left(B_2^{(1)}, -1 \right) \leq$$

$$\leq 2^{2\gamma+6} \cdot (2\gamma)^{\gamma} \cdot (2 - \sqrt{2\gamma})^{-\frac{1}{2}(2-\sqrt{2\gamma})^2} \cdot (2 + \sqrt{2\gamma})^{-\frac{1}{2}(2+\sqrt{2\gamma})^2}.$$

Отсюда

$$r^{\gamma}(B_0, 0)\, r(B_1, 1)\, r(B_2, -1) \leq$$

$$\leq 2^{1-\gamma} \left[2^{2\gamma+6} \cdot (2\gamma)^{\gamma} \cdot (2 - \sqrt{2\gamma})^{-\frac{1}{2}(2-\sqrt{2\gamma})^2} \cdot (2 + \sqrt{2\gamma})^{-\frac{1}{2}(2+\sqrt{2\gamma})^2} \right]^{\frac{1}{4}} \times$$

$$\times \left[2^{2\gamma+6} \cdot (2\gamma)^{\gamma} \cdot (2 - \sqrt{2\gamma})^{-\frac{1}{2}(2-\sqrt{2\gamma})^2} \cdot (2 + \sqrt{2\gamma})^{-\frac{1}{2}(2+\sqrt{2\gamma})^2} \right]^{\frac{1}{4}} =$$

$$= 2^{1-\gamma} \left[2^{2\gamma+6} \cdot (2\gamma)^{\gamma} \cdot (2 - \sqrt{2\gamma})^{-\frac{1}{2}(2-\sqrt{2\gamma})^2} \cdot (2 + \sqrt{2\gamma})^{-\frac{1}{2}(2+\sqrt{2\gamma})^2} \right]^{\frac{1}{2}}.$$

Таким образом, основное неравенство теоремы 1 доказано. Осуществляя в (2) замену переменной по формуле $z = 2w/(1 + w^2)$, получаем квадратичный дифференциал (1). Знак равенства проверяется непосредственно. Теорема 1 доказана.

Список литературы

[1] *Бахтин А. К., Бахтина Г. П., Зелинский Ю. Б.* Тополого-алгебраические структуры и геометрические методы в комплексном анализе. // Праці Ін-ту математики НАН України. — К.: Ін-т математики НАН України, 2008. — **73**. — 308 с.

[2] *Дубинин В. Н.* Разделяющее преобразование областей и задачи об экстремальном разбиении // Зап. науч. сем. Ленингр. отд-ния Мат. ин-та АН СССР. — 1988. — **168**. — С. 48 – 66.

[3] *Дубинин В. Н.* Метод симметризации в геометрической теории функций комплексного переменного // Успехи мат. наук. — 1994. — **49**, № 1(295). — С. 3 – 76.

[4] *Дубинин В. Н.* Емкости конденсаторов и симметризация в геометрической теории функций комплексного переменного. — Владивосток: "Дальнаука" ДВО РАН, 2009. — 390 с.

[5] *Ковалев Л. В.* К задаче об экстремальном разбиении со свободными полюсами на окружности // Дальневост. мат. сб. — 1996. — **2**. — С. 96 — 98.

[6] *Ковалев Л. В.* О внутренних радиусах симметричных неналегающих областей // Изв. вузов. Матем. — 2000. — № 6. — С. 80 – 81.

[7] *Бахтина Г. П.* О конформных радиусах симметричных неналегающих областей // Современ. вопр. веществен. и комплексн. анализа. — К.: Ин-т математики АН УССР, 1984. — С. 21 – 27.

[8] *Бахтин А. К.* Некоторые задачи в теории неналегающих областей // Укр. мат. журн. — 1999. — **51**, № 6. — С. 723 – 731.

[9] *Бахтин А. К.* Неравенства для внутренних радиусов неналегающих областей и открытых множеств // Укр. мат. журн. — 2009. — **61**. — № 5. — С. 596 — 610.

[10] *Бахтин А. К., Денега И. В.* Некоторые оценки функционалов для N-лучевых систем точек // Зб. праць Ін-ту математики НАН України. — К.: Ін-т математики НАН України, 2011. — **8**, № 1. — С. 12 — 21.

[11] *Заболотний Я. В.* Застосування розділяючого перетворення в одній задачі про неперетинні області // Доповіді НАН України. — 2011. — № 9. — С. 11 — 14.

[12] *Лаврентьев М. А.* К теории конформных отображений // Тр. Физ.-мат. ин-та АН СССР. — 1934. — **5**. — С. 159 – 245.

[13] *Дженкинс Дж. А.* Однолистные функции и конформные отображения. — М.: Изд-во иностр. лит., 1962. — 256 с.

[14] *Голузин Г. М.* Геометрическая теория функций комплексного переменного. — М.: Наука, 1966. — 628 с.