Збірник праць
Ін-ту математики НАН України
2015, т.12, №6, 7-47

УДК 515.162, 517.51, 517.27

В. В. Шарко, _Є. О. Полулях_

Інститут математики НАН України, Київ
polulyah@imath.kiev.ua

Ю. Ю. Сорока

Київський національний університет імені Тараса Шевченка
soroka_yulya@ukr.net

Про топологічну еквівалентність псевдо-гармонічних функцій загального положення на площині

Topological classification of functions in the plane is considered. Using a generalization of the Cronrod-Reeb graph we give necessary and sufficient conditions when two pseudo-harmonic functions which have finite number of singular points and comply with an additional condition are topologically equivalent.

Розглянуто питання топологічної класифікації функцій на площині. Використовуючи узагальнення графу Кронрода-Ріба дано необхідні і достатні умови, коли дві псевдо-гармонічні функції загального положення, які мають скінчену кількість сингулярних точок і відповідають певній додатковій умові, будуть топологічно еквівалентними.

1. Вступ

У роботі досліджується питання розрізнення неперервних функцій на площині з точністю до орієнтованої топологічної еквівалентності.

У такій загальній постановці ця задача дуже складна, тому ми обмежуємось класом функцій, множини рівня яких локально мають просту будову — псевдо-гармонічними функціями.

Нагадаємо, що функція на площині називається *псевдо-гармонічною*, якщо локально в околі кожної точки області визначення вона топологічно еквівалентна до $\operatorname{Re} z^n$ у деякому околі початку координат на комплексній площині ($n \in \mathbb{N}$ залежить від точки).

Ми розглядаємо псевдо-гармонічні функції загального положення (різні сингулярні точки знаходяться на різних множинах рівня), які до того ж мають скінчену кількість сингулярних точок.

У якості основи для побудови інваріанту, який розрізняє такі функції, ми беремо так званий граф Кронрода-Ріба функції $\Gamma_{K-R}(f)$ і наділяємо його додатковою комбінаторною структурою.

Відомо, що на компактних поверхнях графи Кронрода-Ріба функцій з простою локальною будовою (наприклад, функцій Морса, або більш загально — гладких функцій з ізольованими особливостями) є топологічними графами. Ситуація кардинально міняється при переході до некомпактних поверхонь — відомі приклади гладких функцій без особливостей на площині, для яких топологічний простір $\Gamma_{K-R}(f)$ навіть не є Хаусдорфовим (див. [1]).

У зв'язку з цим нам приходиться ще більше обмежувати клас функцій, який ми розглядаємо і вводити додаткову технічну умову, яка гарантує, що $\Gamma_{K-R}(f)$ є "майже топологічним графом" (ми називаємо такі об'єкти графами з черешками).

Не дивлячись на такі значні обмеження, ми отримуємо доволі широкий і цікавий клас функцій. Зупинимося на цьому докладніше.

Нехай M^2 — двовимірна поверхня, f — гладка функція на ній з ізольованими критичними точками.

Якщо $x \in M^2$ — регулярна точка f, то за теоремою про ранг (див. [2]) існує дифеоморфізм деякого околу U_x точки x на окіл початку координат в $\mathbb{R}^2$, який відображає компоненти перетинів множин рівня f с U_x у множини рівня координатної проекції $\operatorname{pr}_1 \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $\operatorname{pr}_1 \colon (x_1, x_2) \mapsto x_1$.

Відома така теорема (див. [3,4]): *для кожної ізольованої критичної точки x_0 (окрім локальних екстремумів) функції $f \in C^3(M^2, \mathbb{R})$ існує окіл, у якому функція топологічно еквівалентна до $\operatorname{Re} z^k$ для деякого $k \in \mathbb{N}$.*

Отже, кожна функція $f \in C^3(M^2, \mathbb{R})$, яка не має локальних екстремумів і всі критичні точки якої ізольовані, є псевдогармонічною.

Скажемо декілька слів про структуру роботи і її основний результат.

У розділах 2 і 3 ми визначаємо клас функцій, який ми вивчаємо, і означаємо поняття графа Кронрода-Ріба.

Додаткова структура на графі Кронрода-Ріба включає орієнтацію його ребер і частковий порядок на множині вершин, які породжені напрямком зростання функції f. Цим поняттям присвячений розділ 4.

Іншою складовою додаткової структури на $\Gamma_{K-R}(f)$ є *спін* у вершинах цього графа. Спіном у вершині називається вибраний певним чином *цикл* ребер, які їй інцидентні. Означенню цих понять і дослідженню властивостей спіна присвячені розділи 5–7.

У розділі 8 означені поняття *навантаженого* і *слабо навантаженого* графів Кронрода-Ріба, а також поняття їх *еквівалентності*. Крім того ми означаємо поняття *орієнтованої пошарової еквівалентності* функцій f і g, більш слабке, ніж їх *орієнтована топологічна еквівалентність*.

Нарешті, розділи 9 та 10 присвячені доведенню наступного основного результату даної роботи.

Теорема 1.1. *Нехай $f, g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ — функції загального положення, що задовольняють умови $\Im$.*

Функції f і g є орієнтовано пошарово еквівалентними тоді і тільки тоді, коли слабо навантажений граф Кронрода-Ріба функції f еквівалентний слабо навантаженому графу однієї з функцій g або $-g$.

Функції f і g є орієнтовано топологічно еквівалентними тоді і тільки тоді, коли їх навантажені графи Кронрода-Ріба є еквівалентними.

Далі ми будемо позначати через $\overline{A}$ і $\operatorname{Fr} A$ замикання і межу множини A, відповідно.

2. Умови $\Im$ і функції загального положення

Нехай V_1, V_2 — області на площині. Нагадаємо, що неперервні функції $g_1\colon V_1 \to \mathbb{R}$ та $g_2\colon V_2 \to \mathbb{R}$ називаються *топологічно еквівалентними*, якщо для деяких гомеоморфізмів $h\colon V_1 \to V_2$ та $h'\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ виконується рівність $h' \circ g_1 = g_2 \circ h$. Функції g_1 та g_2 *орієнтовано топологічно еквівалентні*, якщо додатково гомеоморфізми h та h' зберігають орієнтацію.

Нехай $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ неперервна функція, яка задовольняє наступним умовам, які позначимо $\Im$.

а) Для кожного $x \in \mathbb{R}^2$ в околі точки x функція f топологічно еквівалентна до $\operatorname{Re} z^n$, $n \in \mathbb{N}$, в околі початку координат (якщо $n = 1$, тоді точку x називатимемо *регулярною* точкою; якщо $n > 1$, тоді x називатимемо *сингулярною* точкою).

б) Число сингулярних точок функції f є скінченним.

в) Нехай для $a \in \mathbb{R}$, точки $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^2$ належать різним компонентам множини рівня $f^{-1}(a)$. Тоді знайдуться відкриті околи $U_1 \ni x_1$ і $U_2 \ni x_2$, такі, що для кожного $b \in \mathbb{R}$ і компоненти F_b множини рівня $f^{-1}(b)$ виконується співвідношення $(F_b \cap U_1 = \varnothing) \vee (F_b \cap U_2 = \varnothing)$.

Означення 2.1. *Скажемо, що $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ є* ***функцією загального положення****, якщо на кожній множині рівня міститься не більше однієї сингулярної точки.*

3. Простір Кронрода-Ріба функції f

Розглянемо розбиття площини, елементами якого є компоненти множин рівня f. Елементи розбиття, які містять сингулярні точки, назвемо *сингулярними*. Всі інші компоненти множин рівня будемо називати *регулярними*.

Фактор-простір $\Gamma_{K-R}(f)$ площини по вказаному розбиттю називається *простором Кронрода-Ріба функції* f. Позначимо через $\pi_f \colon \mathbb{R}^2 \to \Gamma_{K-R}(f)$ відображення проекції.

З того, що f відображає елементи розбиття на компоненти своїх множин рівня в точки $\mathbb{R}$, випливає (див. [5]), що неперервне фактор-відображення $f_{K-R} \colon \Gamma_{K-R}(f) \to \mathbb{R}$, таке, що $f = f_{K-R} \circ \pi_f$.

Нагадаємо деякі означення і конструкції (див. [1]).

Скажемо, що граф *скінчений*, якщо множини його вершин і ребер є скінченими. Граф *локально-скінчений*, якщо кожна його вершина інцидентна скінченій кількості ребер. Для локально-скінченого графа кількість ребер, яким інцидентна вершина, називається *порядком вершини*. *Петлею* є ребро графа, кінці котрого збігаються. *Листками* називаються вершини порядку один.

Нехай G є локально-скінчений (не обов'язково скінчений) граф без петель. Розглянемо G як одновимірний предсимпліціальний комплекс, нульвимірними симплексами котрого є вершини, а одновимірними є ребра (див. [6]). Відмітимо, що граф, який не містить кратних ребер, є симпліціальним комплексом. Розглянемо абстрактний поліедр $|G|$, що відповідає цьому комплексу. Топологія на $|G|$ породжується покриттям, яке складається з замкнених симплексів комплексу G (підмножина $A \subset |G|$ є замкненою тоді й тільки тоді, коли її перетин з кожним ребром G є замкненим). Далі говорячи про топологію на графі G ми будемо мати на увазі топологічний простір $|G|$.

Граф G, на якому задана описана вище структура топологічного простору, називається *топологічним графом*. Далі ми будемо розглядати тільки такі графи.

Замкненим ребром G будемо називати відповідний замкнений одновимірний симплекс, а *відкритим ребром* — відкритий симплекс (ребро без вершин, які є його кінцями).

Нехай V_0 є підмножиною множини листків V_l графа G (випадок $V_0 = \varnothing$ ми не виключаємо).

Нехай $e \subset G$ — (замкнене) ребро G, інцидентне деякому листку з V_0. Множину $e \setminus V_0$ назвемо *черешком*. Простір $G_0 = G \setminus V_0$ називається *топологічним графом з черешками*. Позначимо через Σ_f і K_f множину сингулярних точок і об'єднання сингулярних компонент множин рівня f. Число $a \in f(\mathbb{R}^2)$ називається *сингулярним значенням* функції f, якщо $f^{-1}(a) \cap \Sigma_f \neq \varnothing$.

Зауваження 3.1. Нехай $x \in \mathbb{R}^2$, F_x — компонента множини рівня f, яка містить x. Оскільки множина $\overline{F_x} \subset f^{-1}(f(x))$ зв'язна (див. [7]), то $\overline{F_x} = F_x$.

З умов $\Im$ слідує, що множина K_f є незв'язним об'єднанням скінченої кількості замкнених сингулярних компонент множин рівня f. Тому множина $K_f \setminus F_x$ замкнена і x має окіл, який не перетинається з цією множиною.

З пунктів а)-в) умови $\Im$ і з [1, теорема 1], випливає таке твердження.

Теорема 3.2. *Простір Кронрода-Ріба функції* $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^1$*, що задовольняє умову* $\Im$ *є графом з черешками, множина вершин якого збігається з множиною* $\pi_f(K_f)$*.*

Замкнені ребра $\Gamma_{K-R}(f)$ *є образами замикання компонент множини* $\mathbb{R}^2 \setminus K_f$*, черешки є образами замикання компонент* $\mathbb{R}^2 \setminus K_f$*, що мають зв'язну межу.*

Зауваження 3.3. За означенням, граф $\Gamma_{K-R}(f)$ — локально-скінчений, а тому з попереднього зауваження і теореми 3.2 слідує, що цей граф скінчений, коли f відповідає умовам $\Im$.

4. Орієнтація ребер графа Кронрода-Ріба і відношення порядку на його вершинах, що індуковані f

Нехай f є функцією загального положення. Помітимо, що на ребрах графу $\Gamma_{K-R}(f)$ функція f_{K-R} є строго монотонною.

Дійсно, у противному випадку на деякому відкритому ребрі e функція f_{K-R} мала б (нестрогий) локальний екстремум. Внаслідок цього обмеження $f|_{\pi^{-1}(e)}$ мало б у деякій точці x

відкритої множини $\pi^{-1}(e)$ локальний екстремум. Отже, f теж мала б локальний екстремум у точці x. А це неможливо, оскільки за умовою $\Im$ у деякому околі точки x функція f топологічно еквівалентна до $\operatorname{Re} z^n$ в околі початку координат для певного $n \in \mathbb{N}$. А точка 0 очевидно не є локальним екстремумом $\operatorname{Re} z^n$ ні при якому $n \in \mathbb{N}$.

Отже, на кожному ребрі графу $\Gamma_{K-R}(f)$ визначений напрямок зростання f_{K-R} і функція f індукує орієнтацію на $\Gamma_{K-R}(f)$.

На множині вершин $\Gamma_{K-R}(f)$ можна ввести декілька різних відношень строгого часткового порядку, пов'язаних з f.

Означимо порядок $P_1(f)$, поклавши $v_1 < v_2$ тоді і лише тоді, коли $f_{K-R}(v_1) < f_{K-R}(v_2)$, де v_1, v_2 – вершини на графі. З означення 2.1 слідує, що $f_{K-R}(v_1) \neq f_{K-R}(v_2)$ при $v_1 \neq v_2$. Тому для функцій загального положення порядок $P_1(f)$ є лінійним.

Зрозуміло, що порядок $P_1(f)$ узгоджений з орієнтацією на $\Gamma_{K-R}(f)$ у наступному сенсі. Якщо вершини v_1 та v_2 є відповідно початком і кінцем орієнтованого ребра e, то $v_1 < v_2$.

Частковий порядок $P_2(f)$ на множині вершин $\Gamma_{K-R}(f)$ визначимо наступним чином. Скажемо, що вершина v_1 передує v_2, якщо існує орієнтований шлях, для якого вершина v_1 є початком, а v_2 — кінцем.

Відмітимо, що порядок $P_2(f)$ є слабшим за $P_1(f)$, оскільки $\Gamma_{K-R}(f)$ може містити вершини, які не можна з'єднати за допомогою орієнтованого шляху.

Нехай f є функцією загального положення, $\Gamma_{K-R}(f)$ — її простір Кронрода-Ріба. З огляду на теорему 3.2 ми будемо називати $\Gamma_{K-R}(f)$ *орієнтованим графом з черешками Кронрода-Ріба* функції f, або скорочено *графом Кронрода-Ріба* функції f.

5. Означення циклу

Для того, щоб означити додаткову структуру на графах Кронрода-Ріба, нам буде потрібне поняття циклу елементів множини.

Отже, нехай A — деяка множина, A^{∞} — множина всіх скінченних послідовностей елементів A. Нехай $\mathfrak{h}$ — розбиття множини

A^∞, породжене відношенням

$$\langle a_1, a_2, \ldots, a_r\rangle \sim \langle a_2, \ldots, a_r, a_1\rangle\ , \quad \langle a_1, \ldots, a_r\rangle \in A^\infty\ .$$

Елементи фактор-множини $\hat{A} = A/\mathfrak{h}$ будемо називати *циклами* на A.

Нехай $p\colon A \to \hat{A}$ — проекція. Позначимо

$$(a_1, \ldots, a_r) = p\left(\langle a_1, \ldots, a_r\rangle\right),$$

$\langle a_1, \ldots, a_r\rangle \in A^\infty$.

Якщо $p\left(\langle b_1, \ldots, b_r\rangle\right) = (a_1, \ldots, a_r)$, назвемо послідовність $\langle b_1, \ldots, b_r\rangle$ *представником* циклу $(a_1, \ldots, a_r)$.

Елементи $a_i, a_{i+1} \in A$ послідовності $\langle a_1, \ldots, a_r\rangle$ будемо називати *сусідніми*, $i \in \{1, \ldots, r-1\}$.

Назвемо *сусідніми* елементи $a_i, a_{i+1} \in A$ циклу $(a_1, \ldots, a_r)$, $i \in \{1, \ldots, r-1\}$, а також елементи a_r та a_1.

6. Спін

Нехай $x \in \mathbb{R}^2$ є сингулярною точкою функції f загального положення. Нехай $F_x \ni x$ — відповідна компонента сингулярної множини рівня f. Зафіксуємо окіл $U \subset F_x \cap (\mathbb{R}^2 \setminus K_f)$ точки x (див. зауваження 3.1) та гомеоморфізми $h\colon U \to h(U) \subset \mathbb{C}$, $h'\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, які зберігають орієнтацію і такі що виконуються рівності $h(x) = 0$ та $h' \circ f = \operatorname{Re} z^n \circ h$ для деякого $n \geq 2$. Нехай $V = h(U)$.

Позначимо

$$Z_n = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z^n = 0\} = \{z \in \mathbb{C} \mid \arg z = \frac{\pi k}{n},\ k \in \mathbb{Z}\}\,.$$

З означень слідує, що $h(f^{-1}(f(x))) = Z_n \cap h(U)$.

Існує $\varepsilon > 0$, для якого $U_\varepsilon(0) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < \varepsilon\} \subset V$. Множина $U_\varepsilon(0) \setminus Z_n$ розпадається на $2n$ областей $V_1, \ldots, V_{2n}$. Прообраз $\hat{V}_s = h^{-1}(V_s)$ кожної з них є зв'язною підмножиною доповнення $\mathbb{R}^2 \setminus K_f$ в силу вибору U і h. Тому згідно з теоремою 3.2 для кожного $s = 1, \ldots, 2n$ існує ребро e_s графа $\Gamma_{K-R}(f)$, таке, що $\hat{V}_s \subset \pi^{-1}(e_s)$.

Отже, послідовності областей $\langle V_1, \dots, V_{2n} \rangle$ відповідає послідовність $\langle e_1, \dots, e_{2n} \rangle$ ребер графа Кронрода-Ріба, а тому і цикл ребер $(e_1, \dots, e_{2n})$.

Означення 6.1. *Нехай індекси областей $V_1, \dots, V_{2n}$ збільшуються від 1 до $2n$ при обході навколо початку координат у додатному напрямі, який визначається орієнтацією площини $\mathbb{C}$.*

Назвемо відповідний їм цикл ***спіном*** *у вершині $v = \pi_f(x)$ графа Кронрода-Ріба $\Gamma_{K-R}(f)$ і позначимо його $\lhd v$.*

Твердження 6.2. *Означення спіна коректне.*

Доведення зводиться до легкої безпосередньої перевірки.

Означення 6.3 (див. [8])**.** *Нехай у деякому околі сингулярної точки $x \in \mathbb{R}^2$ функція f топологічно еквівалентна до $\operatorname{Re} z^n$, $n > 1$, в околі початку координат. Число $n - 1$ називається* ***кратністю сингулярної точки*** *x.*

7. Властивості спіна

Твердження 7.1. *Нехай f є функцією загального положення, що задовольняє умови $\Im$. Тоді кожна сингулярна компонента множини рівня функції f є об'єднанням сингулярної точки f кратності $n - 1$, ($n > 1$ — деяке число, яке залежить від компоненти), і $2n$ променів, які виходять з сингулярної точки і прямують до нескінченності.*

Доведення. Нехай F — сингулярна компонента зв'язності множини рівня f. З означення функції загального положення слідує, що існує єдина сингулярна точка $x_0 \in F$.

Розглянемо множину $F_0 = F \setminus \{x_0\}$. Нехай H — компонента зв'язності цієї множини.

Перевіримо, що $x_0 \in \overline{H}$. За означенням H є замкненою підмножиною простору F_0 в індукованій з $\mathbb{R}^2$ топології. Оскільки F_0 не містить інших сингулярних точок, окрім x_0, то цей простір є локально зв'язним (з умов $\Im$ слідує, що в околі кожної точки F_0 локально гомеоморфний інтервалу) і H є його відкритою підмножиною. Нехай $x_0 \notin \overline{H}$. З одного боку, $H = \overline{H} \cap F_0 = \overline{H} \cap F$ і H замкнена в F. З іншого боку, множина F_0 відкрита в F і H відкрита в F_0 за припущенням. Тому множина H відкрита в F. Отже, H є відкрито-замкненою в F, що неможливо, оскільки за означенням F є зв'язною множиною і H — її власна підмножина.

Отже, для кожної компоненти зв'язності H множини F_0 точка x_0 міститься в її замиканні.

Згідно з лемою 1 з [1], H є або вкладеним у $\mathbb{R}^2$ відкритим інтервалом, або колом. Якщо H гомеоморфна колу, то H є компактом і $\overline{H} = H \not\ni x_0$. Ми щойно довели, що таке неможливо. Отже, кожна компонента зв'язності H множини F_0 є гомеоморфним образом інтервалу.

Згідно з [1, зауваження 3 і лема 1] має виконуватися включення $\overline{H} \subset H \cup \{x_0\}$. По доведеному $x_0 \in \overline{H}$, отже $\overline{H} = H \cup \{x_0\}$.

Нехай $\alpha\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ — вкладення, таке, що $\alpha(\mathbb{R}) = H$. Розглянемо (див. [1]) множини

$$L' = \bigcap_{\tau \in \mathbb{R}} \overline{\alpha(-\infty, -\tau)}\,, \quad L'' = \bigcap_{\tau \in \mathbb{R}} \overline{\alpha(\tau, +\infty)}\ .$$

Лема 3 з [1] стверджує, що кожна з цих множин або порожня, або збігається з $\{x_0\}$.

Випадок $L' = L'' = \varnothing$ неможливий. Дійсно, з одного боку, $H \cup L' \cup L'' = \overline{H}$ згідно [1]. З іншого боку, ми встановили, що $x_0 \in \overline{H} \setminus H$.

Припустимо, що $L' = L'' = \{x_0\}$. Тоді, як легко бачити, множина $\overline{H}$ гомеоморфна колу. За теоремою Жордана, див. [7], це коло є межею відкритого диску W. Нехай $D = \overline{W}$. Оскільки D є компактом, то функція $f|_D$ набуває у деяких точках мінімальне і максимальне значення m та M, відповідно. З умов $\Im$ слідує, що функція f не є постійною на відкритій множині W, тому $m \neq M$ і одне з цих двох значень відрізняється від $f(x_0)$.

Нехай $m \neq f(x_0)$. Оскільки $\overline{H} \subset F \subset f^{-1}(f(x_0))$, то існує точка $x \in W$, така, що $f(x) = m$. Тоді, очевидно, x є локальним мінімумом функції f. А це суперечить умовам $\Im$.

Отже, одна з множин L', L'' порожня, а інша збігається з $\{x_0\}$. Внаслідок цього множина H є променем, який виходить з т. x_0 і прямує до нескінченності.

Нехай $n-1$ — кратність сингулярної точки x_0. Тоді у деякому околі U точки x_0 функція f топологічно еквівалентна до функції $g(z) = \operatorname{Re} z^n$ в околі нуля. Нехай $h\colon U \to h(U) \subset \mathbb{C}$ та $h'\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ такі гомеоморфізми, що $h(x_0) = 0$ та $h' \circ f = g \circ h$. Зменшуючи за необхідності окіл U, ми можемо вважати, що

$$h(U) = U_a(0) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < a\}$$

для деякого $a > 0$. Не обмежуючи загальність міркувань, можемо вважати, що $h(U) = U_1(0)$.

Розглянемо множину

$$F_0 \cap U = (F \cap U) \setminus \{x_0\} = h^{-1}\left((Z_n \cap U_1(0)) \setminus \{0\}\right) .$$

Очевидно, вона має $2n$ компонент зв'язності.

Нехай знову H є компонентою зв'язності множини F_0. Так як $x_0 \in \overline{H}$, то H перетинається принаймні з однією компонентою зв'язності множини $F_0 \cap U$. Припустимо, що H перетинається з двома різними компонентами цієї множини у точках x' та x'', відповідно.

З вибору околу U слідує, що множина $F \cap U$ лінійно зв'язна, тому існує дуга $R_0 \subset F \cap U$ з кінцями у точках x' і x''. Зрозуміло, що $x_0 \in R_0$.

З іншого боку, існує дуга $R_1 \subset H$, яка з'єднує точки x' і x''. Очевидно, $x_0 \notin R_1$. Легко бачити, що разом дуги R_0 і R_1 утворюють коло $S \subset F \subset f^{-1}(f(x_0))$. Як було показано вище, у внутрішності диску, межею якого є S, має міститись локальний екстремум функції f. Але це суперечить умовам $\Im$.

Зрозуміло, що кожна компонента множини $F_0 \cap U$ має міститися у деякій компоненті більшої множини F_0. Отже $H \cap U$ —

компонента зв'язності множини $F_0 \cap U$ і F_0 має рівно $2n$ компонент. $\square$

Наслідок 7.2. *Нехай x — сингулярна точка f, F_x — сингулярна компонента множини рівня f, яка містить x, Q — компонента зв'язності множини $\mathbb{R}^2 \setminus K_f$.*

Якщо $\overline{Q} \cap F_x \neq \varnothing$, то $x \in \overline{Q}$.

Нехай H — компонента зв'язності множини $F_x \setminus \{x\}$. Якщо $\overline{Q} \cap H \neq \varnothing$, то $H \subset \overline{Q}$.

Доведення. Нехай H — компонента зв'язності множини $F_x \setminus \{x\}$. З твердження 7.1 слідує, що $x \in \overline{H}$. Отже, перше твердження наслідку слідує з другого.

Нехай $x' \in \overline{Q} \cap H$. Візьмемо деяке $x'' \in H$. Оскільки множина H гомеоморфна інтервалу внаслідок твердження 7.1, то в ній існує підмножина R, яка гомеоморфна відрізку і містить x' та x''. Користуючись компактністю множини R із зауваження 3.1 легко вивести, що існує окіл U множини R, для якого виконується співвідношення $U \cap K_f \subset H$.

З твердження 7.1 випливає, що H містить лише регулярні точки f, тому до R можна застосувати твердження 2 з [1].

Отже, існують такий окіл N множини R і такий гомеоморфізм $h\colon \overline{N} \to [-1,1]^2$, що $h(\overline{N} \cap F_x) = \{0\} \times [-1,1]$. Зменшуючи окіл N, можна вважати, що $\overline{N} \subset U$ і $h(\overline{N} \cap K_f) = \{0\} \times [-1,1]$.

Розглянемо множини

$$W_1 = (-1,0) \times (-1,1), \qquad W_2 = (0,1) \times (-1,1),$$

а також їх прообрази $V_i = h^{-1}(W_i)$, $i = 1,2$.

Зрозуміло, що множини V_1 і V_2 зв'язні. Також за побудовою $N \cap (\mathbb{R}^2 \setminus K_f) = V_1 \cup V_2$. Так як $x' \in N \cap \overline{Q}$, тому $N \cap Q \neq \varnothing$. Оскільки $Q \subset \mathbb{R}^2 \setminus K_f$, то $Q \cap (V_1 \cup V_2) \neq \varnothing$.

Нехай $Q \cap V_1 \neq \varnothing$. Множина $V_1 \subset \mathbb{R}^2 \setminus K_f$ зв'язна, а Q є компонентою зв'язності $\mathbb{R}^2 \setminus K_f$ тому $V_1 \subset Q$. Зрозуміло, що $x'' \subset R \subset \overline{V_1} \subset \overline{Q}$.

Аналогічно, якщо $Q \cap V_2 \neq \varnothing$, то $x'' \subset \overline{V_2} \subset \overline{Q}$.

Остаточно, $H \subset \overline{Q}$ внаслідок довільності у виборі $x'' \in H$. Наслідок доведено. $\square$

Твердження 7.3. *Нехай f є функцією загального положення, що задовольняє умови $\Im$. Нехай сингулярна компонента F її множини рівня містить сингулярну точку x_0 кратності $n-1$ для деякого $n > 1$.*

Тоді множині F в $\Gamma_{K-R}(f)$ відповідає вершина, якій інцидентні рівно $2n$ ребер, $n > 1$. Причому для n з цих ребер вершина є початком, для інших n ребер — кінцем.

Доведення. Нехай U — окіл т. x_0, в якому f топологічно еквівалентна до функції $\operatorname{Re} z^n$ в деякому околі 0. Нехай також $h\colon U \to h(U) \subset \mathbb{C}$ і $h'\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — відповідні гомеоморфізми.

Не обмежуючи загальність міркувань (див. зауваження 3.1), будемо вважати, що $U \cap K_f \subset F$ і $h(U) \supset \overline{U_1(0)}$. Покладемо $D = h^{-1}\big(\overline{U_1(0)}\big)$.

Позначимо через $V_1, \dots, V_{2n}$ компоненти зв'язності множини $U_1(0) \setminus h(F) = U_1(0) \setminus Z_n$. Нехай $W_i = h^{-1}(V_i)$, $i = 1, \dots, 2n$. Зрозуміло, що всі W_i зв'язні, лежать у $\mathbb{R}^2 \setminus K_f$ і містять x_0 у межі. Також з властивостей $\operatorname{Re} z^n$ слідує, що для половини індексів виконується співвідношення $f(W_i) \subset (-\infty, f(x_0))$, а для іншої половини $f(W_i) \subset (f(x_0), +\infty)$.

Нехай Q_i — компонента зв'язності множини $\mathbb{R}^2 \setminus K_f$, для якої $W_i \subset Q_i$. З теореми 3.2 та з монотонності f на ребрах $\Gamma_{K-R}(f)$ слідує, що вершина $v = \pi_f(F)$ є початком ребра $e_i = \pi_f(Q_i)$, якщо $f(W_i) \subset (f(x_0), +\infty)$. Аналогічно v є кінцем e_i, якщо $f(W_i) \subset (-\infty, f(x_0))$.

Наслідок 7.2 стверджує, що для кожної компоненти зв'язності Q множини $\mathbb{R}^2 \setminus K_f$, яка межує з множиною F, виконується співвідношення $x_0 \in \overline{Q}$. Оскільки $U \cap (\mathbb{R}^2 \setminus K_f) \subset \bigcup_{i=1}^{2n} Q_i$, то Q збігається з однією з множин $Q_1, \dots, Q_{2n}$. Отже, вершині v графа Кронрода-Ріба функції f інцидентно не більше, ніж $2n$ ребер.

Для завершення доведення нам залишається перевірити, що $Q_i \neq Q_j$ при $i \neq j$.

Нехай це не так і $W_i \cup W_j \subset Q_i$ при деяких $i \neq j$.

Зафіксуємо $x_i \in W_i$, $x_j \in W_j$, і з'єднаємо їх у Q_i простою неперервною кривою $\gamma\colon [0,1] \to Q_i \subset \mathbb{R}^2$. Це можливо, тому що відкрита зв'язна підмножина Q_i площини є лінійно зв'язною. Відкритість Q_i слідує з наступних міркувань. Множина $\mathbb{R}^2 \setminus K_f$ відкрита в силу зауваження 3.1, тому всі її компоненти зв'язності теж відкриті, оскільки простір $\mathbb{R}^2$ є локально-зв'язним (див. [7]).

Нехай $x_i = \gamma(0)$, $x_j = \gamma(1)$. Позначимо

$$t_i = \sup\{t \in [0,1] \mid \gamma(t) \in W_i\},$$
$$t_j = \inf\{t \in [t_i,1] \mid \gamma(t) \in W_j\}\,.$$

За побудовою $\overline{W_i} \cap \overline{W_j} \subset K_f$, тому $\overline{W_i} \cap \overline{W_j} \cap Q_i = \varnothing$ і $t_i < t_j$. Позначимо $y_i = \gamma(t_i)$, $y_j = \gamma(t_j)$.

Не обмежуючи загальність міркувань, можемо вважати, що $\gamma(t) \notin D$ при $t \in (t_i, t_j)$. Дійсно, якщо $\gamma(\tau) \in D$ для деякого $\tau \in (t_i, t_j)$, то знайдеться $k \in \{1, \ldots, 2n\}$, таке, що $\gamma(\tau) \in \overline{W_k}$. Оскільки $\gamma(\tau) \in \overline{W_k} \cap Q_i$, то з відкритості множини Q_i слідує, що $W_k \cap Q_i \neq \varnothing$, внаслідок чого $W_k \subset Q_i$. За побудовою $k \notin \{i, j\}$, і замість пари областей $W_i \cup W_j \subset Q_i$ можемо розглянути $W_i \cup W_k \subset Q_i$.

Нехай $\tilde{\gamma}(t) = \gamma(t_i + (t_j - t_i)t)$, $t \in [0,1]$. За побудовою $\tilde{\gamma}$ — проста неперервна крива, $\tilde{\gamma}(0) = y_i$, $\tilde{\gamma}(1) = y_j$ і $\tilde{\gamma}(t) \notin D$ при всіх $t \in (0,1)$. Нехай також γ_i і γ_j — прямолінійні відрізки, що з'єднують в $U_1(0)$ точку 0 з $h(y_i)$ та $h(y_j)$, відповідно. Покладемо

$$\tilde{\gamma}_i = h^{-1} \circ \gamma_i, \qquad\qquad \tilde{\gamma}_j = h^{-1} \circ \gamma_j.$$

Проходячи послідовно криві $\tilde{\gamma}_i$, $\tilde{\gamma}$ та $\tilde{\gamma}_j$, отримаємо просту замкнену криву μ, яка проходить через x_0 і лежить у Q_i за виключенням цієї точки. Нехай E — відкритий диск, межею якого є μ. Позначимо

$$S = \operatorname{Fr}(U_1(0)) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}, \qquad \tilde{S} = h^{-1}(S) = \operatorname{Fr} D.$$

Коло $\tilde{S}$ розбивається точками y_i та y_j на дві дуги S' та S''. Оскільки $x_0 \in \mu \cap \operatorname{Int} D \neq \varnothing$ і $\tilde{\gamma}(1/2) \in \mu \cap (\mathbb{R}^2 \setminus D) \neq \varnothing$ за побудовою, то одна з цих дуг лежить в E, інша не перетинає E.

Нехай $S' \subset E$. Кінцями цієї дуги є точки $y_i \in \overline{W}_i \cap Q_i$ та $y_j \in \overline{W}_j \cap Q_i$. Точки $h(y_i)$ та $h(y_j)$ містяться в різних секторах множини $\overline{U_1(0)} \setminus Z_n$. З виду функції $\operatorname{Re} z^n$ в околі 0 легко слідує, що дуга $h(S')$ містить точки множини $h(F) = h(U) \cap Z_n$. Відповідно, $S' \cap F \neq \varnothing$. Наприклад, $F \cap \operatorname{Fr} W_i \cap S' \neq \varnothing$ і $F \cap \operatorname{Fr} W_j \cap S' \neq \varnothing$. Тому існує $x' \in F \cap E$. Очевидно, $x' \neq x_0$.

З твердження 7.1 слідує, що існує промінь

$$\beta\colon [0, +\infty) \to F \subset \mathbb{R}^2,$$

який виходить з точки $x_0 = \beta(0)$, проходить через точку x' при деякому $t' > 0$ і прямує на нескінченність. За побудовою μ перетинається з F в єдиній точці x_0, тому $\beta(t) \in E$ для кожного $t > 0$, що неможливо, оскільки множина $\overline{E}$ компактна.

Внаслідок отриманого протиріччя при $i \neq j$ виконується нерівність $Q_i \neq Q_j$. □

Наслідок 7.4. *Нехай v — вершина $\Gamma_{K-R}(f)$ і*

$$\lhd v = (e_1, \ldots, e_{2n})$$

— спін у вершині v. Тоді всі елементи циклу $(e_1, \ldots, e_{2n})$ різні і у цьому циклі приймають участь усі ребра, інцидентні v у $\Gamma_{K-R}(f)$.

В кожній парі сусідніх ребер циклу $\lhd v$ ребра мають різні орієнтації відносно v (для одного ребра v є початком, для іншого – кінцем).

Доведення. Це твердження слідує з локального вигляду функції f у околі сингулярної точки (див. умови $\Im$) і з твердження 7.3. □

Наслідок 7.5. *Нехай x — сингулярна точка f, F_x — сингулярна компонента множини рівня f, $x \in F_x$.*

Нехай Q — компонента зв'язності множини $\mathbb{R}^2 \setminus K_f$, яка межує з F_x. Тоді множина $\overline{Q} \cap F_x$ є об'єднанням сингулярної точки і двох променів, що виходять із цієї точки і прямують на нескінченність.

Нехай H — компонента зв'язності множини $F_x \setminus \{x\}$. Тоді є рівно дві компоненти зв'язності множини $\mathbb{R}^2 \setminus K_f$, спільна межа яких містить H. Замикання будь-якої іншої компоненти $\mathbb{R}^2 \setminus K_f$ не перетинається з H.

Припустимо, що H міститься у спільній межі компонент Q' і Q'' множини $\mathbb{R}^2 \setminus K_f$. Нехай $e' = \pi_f(Q')$, $e'' = \pi_f(Q'')$ — відповідні їм ребра $\Gamma_{K-R}(f)$, $v = \pi_f(F_x)$ — вершина, що відповідає компоненті F_x множини рівня f, $\lhd v$ — спін у вершині v. Тоді ребра e' і e'' є сусідніми елементами циклу $\lhd v$.

Якщо ребра e' і e'' є сусідніми елементами циклу $\lhd v$, то у спільній межі відповідних їм областей Q' і Q'' міститься компонента множини $F_x \setminus \{x\}$, причому така компонента єдина.

Доведення. Нехай $U \subset F_x \cup (\mathbb{R}^2 \setminus K_f)$ — окіл т. x_0, в якому f орієнтовано топологічно еквівалентна до функції $\operatorname{Re} z^n$ в деякому околі 0. Нехай $h\colon U \to h(U) \subset \mathbb{C}$ і $h'\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — відповідні гомеоморфізми.

Не обмежуючи загальність міркувань, будемо вважати, що $h(U) = U_1(0) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$.

Позначимо через $V_1, \ldots, V_{2n}$ компоненти зв'язності множини $U_1(0) \setminus h(F_x) = U_1(0) \setminus Z_n$ в порядку обходу в додатному напрямку навколо початку координат. Нехай $W_i = h^{-1}(V_i)$, $i = 1, \ldots, 2n$.

Позначимо через $T_1, \ldots, T_{2n}$ компоненти зв'язності множини

$$U_1(0) \cap (Z_n \setminus 0) = h(U \cap (F_x \setminus \{x\}))$$

таким чином, щоб компонента T_i лежала у спільній межі V_i та V_{i+1}, а T_{2n} — у спільній межі V_{2n} та V_1. Нехай $R_i = h^{-1}(T_i)$, $i = 1, \ldots, 2n$.

Нехай $H_1, \ldots, H_{2n}$ — компоненти множини $F_x \setminus \{x\}$. З твердження 7.1 слідує, що кожна з них містить рівно одну з множин

$R_1, \dots, R_{2n}$. Змінивши нумерацію множин H_i, можемо вважати, що $R_i = H_i \cap U$, $i = 1, \dots, 2n$.

Аналогічно, застосовуючи твердження 7.3 можемо вважати, що для компонент $Q_1, \dots, Q_{2n}$ множини $\mathbb{R}^2 \setminus K_f$, які межують з F_x, виконуються співвідношення $W_i = Q_i \cap U$, $i = 1, \dots, 2n$.

Розглянемо Q_k для деякого $k \in \{2, \dots, 2n\}$. Оскільки U є відкритою множиною, легко бачити, що

$$\overline{Q_k} \cap U = \overline{W_k} \cap U \supset R_{k-1} \cup R_k, \qquad \overline{Q_k} \cap R_m * = \varnothing$$

при $n \notin \{k-1, k\}$. Тому з наслідку 7.2 випливає, що

$$H_{k-1} \cup H_k \subset \overline{Q_k}, \qquad H_m \cap \overline{Q_k} = \varnothing$$

при $m \notin \{k-1, k\}$. Аналогічно, коли $k = 1$ маємо

$$H_{2n} \cup H_1 \subset \overline{Q_1}, \qquad H_m \cap \overline{Q_1} = \varnothing$$

при $m \notin \{1, 2n\}$.

Тому для довільної компоненти Q множини $\mathbb{R}^2 \setminus K_f$, яка межує з F_x, існують дві компоненти H' і H'' множини $F_x \setminus \{x\}$, такі, що

$$\overline{Q} \cap F_x = H' \cup H'' \cup \{x\}.$$

Позначимо $v = \pi_f(F_x)$, $e_i = \pi_f(Q_i)$, $i = 1, \dots, 2n$. З вибору множин $W_i = Q_i \cap U$ слідує, що $\lhd v = (e_1, \dots, e_{2n})$.

Розглянемо H_k для деякого $k \in \{1, \dots, 2n-1\}$. По вже доведеному

$$H_k \subset \overline{Q_k} \cap \overline{Q_{k+1}}, \qquad H_k \cap \overline{Q_m} = \varnothing$$

при $m \notin \{k, k+1\}$. Очевидно, ребра e_k і e_{k+1} є сусідніми у циклі $\lhd v$.

Аналогічно, коли $k = 2n$, маємо

$$H_{2n} \subset \overline{Q_{2n}} \cap \overline{Q_1}, \qquad H_{2n} \cap \overline{Q_m} = \varnothing$$

при $m \notin \{1, 2n\}$. Ребра e_{2n} і e_1 є сусідніми у циклі $\lhd v$.

Для завершення доведення лишається зауважити, що для кожної компоненти зв'язності H множини $F_x \setminus \{x\}$ виконується співвідношення $H \in \{H_1, \dots, H_{2n}\}$. $\square$

8. Навантажені і слабо навантажені графи Кронрода-Ріба

Легко побудувати приклади, які показують, що граф Кронрода-Ріба не є повним інваріантом функції загального положення. Тобто існують топологічно не еквівалентні функції, які мають ізоморфні графи Кронрода-Ріба.

Нехай f задовольняє умови $\Im$ і є функцією загального положення. Наша мета знайти додаткове навантаження на $\Gamma_{K-R}(f)$, яке б перетворювало його на повний інваріант f.

Означення 8.1. ***Слабо навантаженим графом Кронрода-Ріба*** *називається орієнтований граф $\Gamma_{K-R}(f)$, для якого в кожній вершині визначений спін.*

Виявляється, що орієнтації ребер і спіна у вершинах $\Gamma_{K-R}(f)$ не досить, щоб розрізняти функції загального положення. Справа у тому, що частковий порядок $P_2(f)$, що породжений орієнтацією ребер $\Gamma_{K-R}(f)$, не є лінійним. Тобто, не кожна пара вершин порівняна по відношенню до цього порядку.

Легко будується приклад двох функцій загального положення, які мають ізоморфні слабо навантажені графи Кронрода-Ріба, але породжують різні лінійні порядки на множинах вершин цих графів.

Однак нижче ми доведемо, що слабо навантажені графи Кронрода-Ріба розрізняють функції відносно більш слабкої, ніж топологічна, еквівалентності, яку ми зараз і означимо.

Означення 8.2. *Нехай неперервні функції f і g відповідають умовам $\Im$. Скажемо, що f* ***і*** *g* ***пошарово еквівалентні*** *(відповідно,* ***орієнтовно пошарово еквівалентні****), якщо існує гомеоморфізм (відповідно, орієнтований гомеоморфізм) площини на себе, який відображає компоненти множин рівнів f на компоненти множин рівнів g.*

Лінійний порядок $P_1(f)$ є інваріантом відносно орієнтованої топологічної еквівалентності функцій, але виявляється, що слабо навантажений граф Кронрода-Ріба з лінійним порядком

$P_1(f)$ на множині вершин все ще не є повним інваріантом. Потрібно додатково відстежувати поведінку f "на нескінченності".

Граф з черешками не є справжнім графом у комбінаторному сенсі. Він отриманий зі "справжнього графа" шляхом вилучення деякої підмножини вершин порядку 1.

Зрозуміло, що маючи граф з черешками і його розбиття на вершини і ребра, можна однозначно відновити на ньому комбінаторну структуру графа, "додавши назад" вилучені вершини порядку 1. Будемо називати такі вершини *віртуальними*. Множину віртуальних вершин позначимо V_{virt}.

Згадаємо, що на $\Gamma_{K-R}(f)$ визначена функція f_{K-R}, така що $f_{K-R} \circ \pi_f = f$. Для кожного ребра e визначені дві величини $m(e) = \inf_{x \in e} f_{K-R}(x)$ і $M(e) = \sup_{x \in e} f_{K-R}(x)$. Кожна з цих величин може бути як скінченою, так і $\pm\infty$.

Нехай V — множина вершин $\Gamma_{K-R}(f)$. На множині $V \cup V_{virt}$ означимо функцію f_{lim} наступним чином. Якщо v є початком ребра e, нехай $f_{lim}(v) = m(e)$, а якщо v є кінцем e, то нехай $f_{lim}(v) = M(e)$.

Ми встановили вище, що f_{K-R} строго монотонна на ребрах. Внаслідок цього $f_{lim} = f_{K-R}$ на множині V "справжніх" вершин $\Gamma_{K-R}(f)$. Оскільки всі віртуальні вершини мають порядок 1, то f_{lim} коректно визначена також на V_{virt}.

Нас буде цікавити не вся множина V_{virt}, а лише ті віртуальні вершини, на яких f_{lim} набуває скінчені значення. Позначимо

$$V_{fin} = \{v \in V_{virt} \mid f_{lim}(v) \neq \pm\infty\}\,.$$

Множину $V_{ext} = V \cup V_{fin}$ назвемо *розширеною множиною вершин графа* $\Gamma_{K-R}(f)$.

Функція f_{lim} породжує на V_{ext} відношення часткового порядку $P_{ext}(f)$, яке визначається наступним чином. Нехай $v_1, v_2 \in V_{ext}$. Якщо $f_{lim}(v_1) < f_{lim}(v_2)$, то вважатимемо, що $v_1 < v_2$. Якщо ж $f_{lim}(v_1) = f_{lim}(v_2)$, то v_1 і v_2 непорівнянні. Назвемо це відношення *розширеним відношенням порядку на* V_{ext}.

Зрозуміло, що $P_{ext}(f)$ збігається з $P_1(f)$ на V. Також очевидно, що $P_{ext}(f)$ узгоджене з орієнтацією ребер $\Gamma_{K-R}(f)$ у тому сенсі, що кінець ребра завжди більший за його початок.

Твердження 8.3. *Відношення "бути непорівнянними відносно $P_{ext}(f)$" є транзитивним на множині V_{ext}.*

Доведення. Нехай v_1 і v_2, а також v_2 і v_3 непорівнянні відносно $P_{ext}(f)$. Тоді $f_{lim}(v_1) = f_{lim}(v_2)$ і $f_{lim}(v_2) = f_{lim}(v_3)$. Внаслідок цього v_1 і v_3 непорівнянні. □

Означення 8.4. *Нехай на множині A задане відношення ρ часткового порядку. Якщо відношення* ***"бути непорівнянними відносно ρ"*** *є транзитивним на A, то відношення ρ називається* ***функцієподібним.***

Отже, відношення $P_{ext}(f)$ функцієподібне.

Означення 8.5. ***Навантаженим графом Кронрода-Ріба*** *називається слабо навантажений граф $\Gamma_{K-R}(f)$ разом із підмножиною V_{fin} множини віртуальних вершин і розширеним відношенням порядку $P_{ext}(f)$ на розширеній множині вершин $V_{ext} = V \cup V_{fin}$.*

Нехай $\Gamma_{K-R}(f)$ і $\Gamma_{K-R}(g)$ — орієнтовані графи з черешками. Розглянемо орієнтовані комбінаторні графи G_f і G_g, які їм відповідають. Множиною вершин G_f (G_g) є об'єднання звичайних і віртуальних вершин $\Gamma_{K-R}(f)$ ($\Gamma_{K-R}(g)$), елементами множини ребер G_f (G_g) є ребра $\Gamma_{K-R}(f)$ ($\Gamma_{K-R}(g)$). Інцидентність вершин до ребер і орієнтація ребер переноситься з відповідного графа з черешками.

Означення 8.6. ***Комбінаторним ізоморфізмом орієнтованих графів з черешками*** $\Gamma_{K-R}(f)$ ***і*** $\Gamma_{K-R}(g)$ *називається ізоморфізм орієнтованих графів G_f і G_g, який відображає множину віртуальних вершин графа $\Gamma_{K-R}(f)$ на множину віртуальних вершин графа $\Gamma_{K-R}(g)$.*

Означення 8.7. *Назвемо (слабо) навантажені графи Кронрода-Ріба функцій f і g* ***еквівалентними****, якщо існує комбінаторний ізоморфізм ψ орієнтованих графів з черешками $\Gamma_{K-R}(f)$ і $\Gamma_{K-R}(g)$, який зберігає (слабке) навантаження.*

Тобто ізоморфізм ψ кожному спіну на $\Gamma_{K-R}(f)$ ставить у відповідність спін на $\Gamma_{K-R}(g)$:

$$\lhd v = (e_1, e_2, ..., e_n) \;\longmapsto\; \lhd\psi(v) = (\psi(e_1), \psi(e_2), ..., \psi(e_n))\,.$$

Також у випадку, коли розглядаються навантажені графи Кронрода-Ріба, ψ індукує ізоморфізм розширених порядків на розширених множинах вершин.

9. Основна теорема

Лема 9.1. *Нехай f — функція загального положення, що відповідає умовам $\Im$. Нехай Q — компонента зв'язності множини $\mathbb{R}^2 \setminus K_f$.*

Тоді знайдеться гомеоморфізм $\phi\colon \overline{Q} \to \mathbb{R} \times f(\overline{Q}) \subset \mathbb{R}^2$, такий, що $f = \mathrm{pr}_2 \circ \phi$ (тут $\mathrm{pr}_2\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ — проекція на другу координату).

Доведення. З умов $\Im$, а також з [1, твердження 6 і наслідок 4] слідує, що

$$f(Q) = \operatorname{Int} f(\overline{Q})\,, \quad f(\operatorname{Fr} Q) = f(\overline{Q}) \cap \operatorname{Fr} f(Q)\,. \qquad (9.1)$$

Множина $\overline{Q}$, а разом з нею і множина $f(\overline{Q})$ зв'язні. Тому існують $a, b \in \mathbb{R} \cup \pm\infty$ такі, що $f(Q) = (a, b)$, $f(\operatorname{Fr} Q) \subset \{a, b\} \cap \mathbb{R}$.

Якщо $a \in f(\operatorname{Fr} Q)$, то $|a| < \infty$ і згідно з [1, наслідок 4], існує сингулярна компонента F_a множини рівня $f^{-1}(a)$, така, що $f^{-1}(a) \cap \overline{Q} \subset F_a$.

З наслідку 7.5 слідує, що $H_a = \overline{Q} \cap f^{-1}(a)$ є об'єднанням сингулярної точки і двох променів, що виходять з цієї точки і прямують на нескінченність. З цього і з теореми Жордана про криву легко слідує, що множина H_a гомеоморфна $\mathbb{R}$ і розбиває площину на дві компоненти зв'язності, замикання кожної з яких гомеоморфне замкненій півплощині. H_a є спільною межею цих двох компонент.

Аналогічно, якщо $b \in f(\operatorname{Fr} Q)$, то $|b| < \infty$ і існує сингулярна компонента F_b рівня $f^{-1}(b)$, яка містить множину

$$H_b = f^{-1}(b) \cap \overline{Q}\,.$$

Множина H_b гомеоморфна $\mathbb{R}$ і розбиває $\mathbb{R}^2$ на дві півплощини, для яких H_b є спільною межею. Таким чином, маємо три можливості.

1) $f(\operatorname{Fr} Q) = \varnothing$. Тоді $\operatorname{Fr} Q = \varnothing$ і Q є відкрито-замкненою підмножиною $\mathbb{R}^2$. Тому $Q = \mathbb{R}^2$ і f не має сингулярних точок у $\mathbb{R}^2$. Наслідок 3 з [1] стверджує, що для кожного $x \in Q$ множина $f^{-1}(f(x)) \cap Q$ зв'язна. Внаслідок цього можемо застосувати теорему 1 з [9], що й доводить лему у даному випадку.

2) Множина $f(\operatorname{Fr} Q)$ не порожня і зв'язна. У цьому випадку або $\operatorname{Fr} Q = H_a$, або $\operatorname{Fr} Q = H_b$.

Нехай $\operatorname{Fr} Q = H_a$. У цьому випадку Q є одною з двох компонент зв'язності множини $\mathbb{R}^2 \setminus H_a$. Позначимо іншу компоненту Q_a. Позначимо також через $x_0 \in H_a \subset F_a$ сингулярну точку функції f.

Зафіксуємо гомеоморфізм $\chi\colon \overline{Q_a} \to \mathbb{R} \times (-\infty, a]$. Розглянемо неперервну функцію $f_a = \operatorname{pr}_2 \circ \chi\colon \overline{Q_a} \to \mathbb{R}$. За побудовою $f(x) = f_a(x)$ на множині $\overline{Q} \cap \overline{Q_a}$, а тому функція $g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, означена за допомогою формули

$$g(x) = \begin{cases} f(x), & \text{якщо } x \in \overline{Q}\,, \\ f_a(x), & \text{якщо } x \in \overline{Q_a}\,, \end{cases}$$

буде неперервною на $\mathbb{R}^2$.

Зрозуміло, що для кожного $x \in \mathbb{R}^2 \setminus H_a$ у деякому околі точки x функція g топологічно еквівалентна до координатної проекції pr_2. Також для кожного $x \in H_a$ у деякому околі точки x у просторі $\overline{Q_a}$ функція f_a орієнтовано топологічно еквівалентна до pr_2 у околі точки 0 у просторі $\mathbb{R} \times (-\infty, 0]$.

З першої умови $\Im$ слідує, що для кожного $x \in H_a \setminus \{x_0\}$ функція f у деякому околі точки x орієнтовано топологічно еквівалентна до pr_2 у околі 0 у $\mathbb{R}^2$. Оскільки за побудовою $f(y) > f(x)$ для кожного $y \in Q$, то функція $f|_{\overline{Q}}$ у околі x орієнтовано топологічно еквівалентна до pr_2 у околі 0 у просторі $[0, +\infty)$.

Внаслідок цього для кожного $x \in H_a \setminus \{x_0\}$ функція g топологічно еквівалентна до pr_2.

Існує окіл U_0 точки x_0, в якому f топологічно еквівалентна до $g_n = \operatorname{Re} z^n$ в околі 0. Нехай $h\colon U_0 \to h(U_0) \subset \mathbb{C}$ і $h'\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — відповідна пара гомеоморфізмів, для яких $g_n \circ h = h' \circ f$.

З тверджень 7.1 і 7.3 слідує, що образ $h(U_0 \cap \overline{Q})$ збігається з перетином $h(U_0)$ і замикання одного з секторів V, що є компонентою зв'язності множини $\mathbb{C} \setminus Z_n = \mathbb{C} \setminus g_n^{-1}(0)$. Тому на множині $h(U_0 \cap \overline{Q})$ означене неперервне відображення $\hat{h}(z) = \sqrt[n]{z}$, яке відображає V на півплощину. Нехай іще $\hat{h}'(t) = \operatorname{Sign} t \cdot \sqrt[n]{|t|}$.

Легко бачити, що пара відображень $\hat{h} \circ h$ і $\hat{h}' \circ h'$ реалізує орієнтовану топологічну еквівалентність функції $f|_{\overline{Q}}$ в околі $U_0 \cap \overline{Q}$ точки x_0 до функції pr_2 у деякому околі 0 в просторі $\mathbb{R} \times [0, +\infty)$. Внаслідок цього в околі точки x_0 функція f також топологічно еквівалентна до pr_2.

За побудовою $g^{-1}(t) = f^{-1}(t) \cap Q$ при $t \in (a, b)$. Тому множина $g^{-1}(t)$ зв'язна при $t > a$ (див. [1, наслідок 3]). Аналогічно, $g^{-1}(t) = \chi^{-1}(\mathbb{R} \times \{t\})$ при $t \leq a$, тому множина $g^{-1}(t)$ зв'язна також при $t \leq a$.

Отже, ми можемо застосувати теорему 1 з [9] до функції g.

Отримаємо гомеоморфізм $\phi_0\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \times (-\infty, b)$, такий що $g = \mathrm{pr}_2 \circ \phi_0$. Тоді обмеження $\phi_1 = \phi_0|_{\overline{Q}}\colon \overline{Q} \to \mathbb{R} \times (-\infty, b)$ є вкладенням і $\phi_1(\overline{Q}) = [a, b)$. Тому ϕ_1 індукує гомеоморфізм $\phi\colon \overline{Q} \to \mathbb{R} \times [a, b)$, $\phi(x) = \phi_1(x)$, $x \in \overline{Q}$, який відповідає вимогам леми.

3) $f(\operatorname{Fr} Q) = \{a, b\}$. Тоді $\operatorname{Fr} Q = H_a \cup H_b$, множини $H_a \subset F_a$ і $H_b \subset F_b$ гомеоморфні $\mathbb{R}$ і кожна з них розбиває $\mathbb{R}^2$ на дві півплощини. Позначимо через Q_a і Q_b ті компоненти зв'язності множин $\mathbb{R}^2 \setminus H_a$ і $\mathbb{R}^2 \setminus H_b$ відповідно, які не перетинаються з Q. Оскільки $H_a \subset f^{-1}(a)$, $H_b \subset f^{-1}(b)$, то $H_a \cap H_b = \varnothing$ і $\mathbb{R}^2 = \overline{Q_a} \cup \overline{Q} \cup \overline{Q_b}$, причому $\overline{Q_a} \cap \overline{Q} = H_a$, $\overline{Q_b} \cap \overline{Q} = H_b$.

Зафіксуємо гомеоморфізми

$$\chi_a : \overline{Q_a} \to \mathbb{R} \times (-\infty, a], \qquad \chi_b : \overline{Q_b} \to \mathbb{R} \times [b, +\infty)$$

і розглянемо неперервні функції

$$f_a = \mathrm{pr}_2 \circ \chi_a \colon \overline{Q_a} \to \mathbb{R}, \qquad f_b = \mathrm{pr}_2 \circ \chi_b \colon \overline{Q_b} \to \mathbb{R}.$$

Очевидно, $f_a|_{H_a} = f|_{H_a}$ і $f_b|_{H_b} = f|_{H_b}$, тому коректно означена функція $g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$g(x) = \begin{cases} f_a(x), & \text{якщо } x \in \overline{Q_a}\,, \\ f(x), & \text{якщо } x \in \overline{Q}\,, \\ f_b(x), & \text{якщо } x \in \overline{Q_b}\,. \end{cases}$$

Оскільки замкнені множини $\overline{Q_a}$, $\overline{Q}$ і $\overline{Q_b}$ утворюють скінчене замкнене покриття $\mathbb{R}^2$ і на кожній з них g неперервна, то g неперервна на $\mathbb{R}^2$.

Міркування, аналогічні до наведених у попередньому випадку, доводять наступне. По-перше, у деякому околі кожної точки площини функція g топологічно еквівалентна до координатної проекції. По-друге, всі множини рівня g зв'язні.

Отже, можемо застосувати теорему 1 з [9] до g.

Як і раніше, отримаємо гомеоморфізм $\phi_0\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, такий що $g = \mathrm{pr}_2 \circ \phi_0$. Тоді обмеження $\phi_1 = \phi_0|_{\overline{Q}}\colon \overline{Q} \to \mathbb{R}^2$ індукує гомеоморфізм $\phi\colon \overline{Q} \to \mathbb{R} \times [a, b] = \phi_1(\overline{Q})$, який відповідає вимогам леми. □

Зауваження 9.2. За рахунок додаткової підкрутки за допомогою відображення $\mathscr{I}\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $\mathscr{I}(x, y) = (-x, y)$, завжди можна добитися щоб гомеоморфізм ϕ з леми 9.1 був орієнтований.

Лема 9.3. *Нехай f є функцією загального положення, що задовольняє умову $\Im$. Тоді її граф Кронрода-Ріба є деревом з черешками.*

Доведемо спочатку одне допоміжне твердження.

Твердження 9.4. *Нехай G є локально скінченним топологічним графом, V_0 — підмножина множини V_l листків G. Нехай $H = G \setminus V_0$ — граф з черешками.*

Якщо H не містить циклів, то G є деревом.

Доведення. Нехай існує цикл

$$C = (v_0, e_1, v_1, \ldots, e_n, v_n = v_0)$$

в G. Тут v_i, $i = 0, \ldots, n$, — вершини, e_j — ребра, v_{j-1} та v_j інцидентні ребру e_j, $j = 1, \ldots, n$.

Тоді $v_i \notin V_l$ для кожного i. Отже, $v_i \notin V_0$ і $v_i \in H$, $i = 0, \ldots, n$. Внаслідок цього цикл C міститься в H.

З наведених аргументів слідує, що якщо в H немає циклів, то й G не містить циклів. □

Доведення леми 9.3. Припустимо, що в $\Gamma_{K-R}(f)$ існує простий (без самоперетинів) цикл

$$C = (v_0, e_1, v_1, \ldots, e_n, v_n = v_0)\,.$$

Тут v_i — вершини, e_j — відкриті ребра простору $\Gamma_{K-R}(f)$, такі що $v_{j-1}, v_j \in \overline{e_j}$, $j = 1, \ldots, n$.

Нагадаємо, що через K_f ми позначили об'єднання сингулярних компонентів рівня функції f. Нехай $F_i = \pi_f^{-1}(v_i)$ — відповідні сингулярні компоненти рівнів f, $Q_j = \pi_f^{-1}(e_j)$ — компоненти зв'язності доповнення $\mathbb{R}^2 \setminus K_f$.

З теореми 3.2, твердження 7.1 і наслідку 7.4 слідує, що кожна компонента множини $\mathbb{R}^2 \setminus F_0$ містить прообраз рівно одного відкритого ребра графа $\Gamma_{K-R}(f)$, яке інцидентне вершині v_0.

Тому множини Q_1 і Q_n належать до різних компонент зв'язності множини $\mathbb{R}^2 \setminus F_0$.

Розглянемо множину

$$C_0 = \bigcup_{i=1}^{n-1} v_i \cup \bigcup_{j=1}^{n} e_j$$

і її прообраз

$$\pi_f^{-1}(C_0) = \bigcup_{i=1}^{n-1} F_i \cup \bigcup_{j=1}^{n} Q_j\,.$$

Очевидно, множина C_0 зв'язна. Перевіримо, що множина $\pi_f^{-1}(C_0)$ теж зв'язна.

Нехай $s \in \{1, \ldots, n\}$. З теореми 3.2 слідує, що існують точки $x_s \in \overline{Q_s} \cap F_s$ і $y_s \in \overline{Q_{s+1}} \cap F_s$. Множини Q_s, F_s, Q_{s+1} зв'язні, тому зв'язні також множини $Q_s \cup \{x_s\} \subset \overline{Q_s}$, $Q_{s+1} \cup \{y_s\} \subset \overline{Q_{s+1}}$. Отже, зв'язна і множина

$$W_s = Q_s \cup F_s \cup Q_{s+1} = (Q_s \cup \{x_s\}) \cup F_s \cup (Q_{s+1} \cup \{y_s\})\,.$$

Множина $\pi_f^{-1}(C_0) = \bigcup_{s=1}^{n-1} W_s$ теж зв'язна внаслідок того, що $W_s \cap W_{s+1} \supset Q_{s+1} \neq \varnothing$, $s = 1, \ldots, n-2$.

Помітимо, що $\pi_f^{-1}(C_0) \cap F_0 = \varnothing$, оскільки $W_s \cap F_0 = \varnothing$ для кожного $s = 1, \ldots, n-1$. Але $Q_1 \cup Q_n \subset \pi_f^{-1}(C_0)$ і зв'язна множина $\pi_f^{-1}(C_0)$ має перетинатись принаймні з двома різними компонентами множини $\mathbb{R}^2 \setminus F_0$.

Отримане протиріччя доводить, що $\Gamma_{K-R}(f)$ не містить циклів. Отже, $\Gamma_{K-R}(f)$ є деревом з черешками внаслідок твердження 9.4. $\square$

Розглянемо наступну конструкцію. Нехай $a < b$ і $c < d$ — деякі дійсні числа, $\alpha, \beta \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ і $\chi \colon [a,b] \to [c,d]$ — неперервні відображення. Нехай $\hat{\chi} \colon [a,b] \to [0,1]$,

$$\hat{\chi}(t) = \frac{\chi(t) - c}{d - c}\,, \quad t \in [a,b]\,,$$

є композицією χ і лінійного відображення відрізка $[c,d]$ на $[0,1]$.

Визначимо неперервне відображення $\Phi \colon \mathbb{R} \times [a,b] \to \mathbb{R} \times [c,d]$ за формулою:

$$\Phi(x,y) = \big(\alpha(x)(1 - \hat{\chi}(y)) + \beta(x)\hat{\chi}(y), \chi(y)\big), \qquad (9.2)$$

для $(x,y) \in \mathbb{R} \times [a,b]$. Доведення наступної леми ми лишаємо читачу.

Лема 9.5. *Якщо* α, β *і* χ *є сюр'єктивними і строго зростають, то* Φ *є гомеоморфізмом, зберігає орієнтацію і відображає горизонтальні прямі на горизонтальні прямі.*

10. Доведення теореми 1.1

Необхідність. Нехай існує гомеоморфізм $h\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, який відображає компоненти множин рівня f на компоненти множин рівня g. Відомо, що образ зв'язної множини під дією неперервного відображення зв'язний. Внаслідок того, що h і h^{-1} бієктивні та неперервні, образами різних компонент є різні компоненти. Отже, означене бієктивне неперервне фактор-відображення $\eta\colon \Gamma_{K-R}(f) \to \Gamma_{K-R}(g)$ просторів Кронрода-Ріба. Зрозуміло, що гомеоморфізм h^{-1} породжує фактор-відображення, обернене до η. Тому η є гомеоморфізмом.

Нехай $x \in \mathbb{R}^2$, F_x — компонента множини рівня функції f, яка містить x. З умов $\Im$ слідує, що порядок $\mathrm{ord}_x(F_x)$ топологічного простору F_x у точці x більший 2 тоді й тільки тоді, коли x є сингулярною точкою f (див. [7]). Тому множини Σ_g і K_g сингулярних точок і сингулярних компонент зв'язності множин рівня g є образами відповідних множин Σ_f і K_f, що відносяться до функції f.

Зі сказаного слідує, що η відображає множину вершин графа з черешками $\Gamma_{K-R}(f)$ на множину вершин $\Gamma_{K-R}(g)$.

Зрозуміло, що h відображає компоненти зв'язності множини $\mathbb{R}^2 \setminus K_f$ на компоненти множини $\mathbb{R}^2 \setminus K_g$. Тому з теореми 3.2 слідує, що η є ізоморфізмом графів з черешками.

Нехай h зберігає орієнтацію на площині. За умовами теореми f і g є функціями загального положення, тому кожна їх сингулярна компонента лінії рівня містить рівно одну сингулярну точку. Отже множини Σ_f і Σ_g знаходяться у бієктивній відповідності з множинами вершин графів з черешками $\Gamma_{K-R}(f)$ і $\Gamma_{K-R}(g)$.

Оскільки h зберігає порядок обходу навколо точок площини, то η відображає спін у кожній вершині $\Gamma_{K-R}(f)$ на спін в образі цієї вершини, а отже η є еквівалентність графів зі спінами.

До цих пір ми не згадували про орієнтацію ребер. Нехай $\Gamma_{K-R}(g)$ — граф з черешками функції g, у кожній вершині якого задано спін. Нехай e — деяке ребро цього графа. Тоді орієнтація всіх ребер $\Gamma_{K-R}(g)$, що породжена напрямком зростання функції g_{K-R}, однозначно відновлюється по орієнтації ребра e. Перевіримо це.

Якщо ребро e інцидентне деякій вершині v, ми можемо скористатися наслідком 7.4 і, маючи спін $\lhd v$, відновити орієнтацію всіх ребер, що інцидентні v.

Нехай e' — інше ребро $\Gamma_{K-R}(g)$. Зафіксуємо шлях

$$P(e,e') = (e = e_1, \ldots, e_n = e'),$$

який з'єднує e і e'. Нехай $P(e,e')$ послідовно проходить через вершини $v_1, \ldots, v_{n-1}$ (v_i є спільним кінцем ребер e_i та e_{i+1}). За допомогою спінів $\lhd v_1, \ldots, \lhd v_{n-1}$ ми можемо послідовно відновити орієнтації ребер $e_2, \ldots, e_n = e'$. Згідно з лемою 9.3 $\Gamma_{K-R}(g)$ є деревом з черешками, тому шлях $P(e,e')$, який з'єднує e і e' визначений однозначно. Отже, орієнтація ребра e' залежить тільки від орієнтації ребра e.

Внаслідок сказаного на графі зі спінами $\Gamma_{K-R}(g)$ можливі рівно дві різних орієнтації ребер.

Очевидно, функція $-g$ відповідає умовам $\Im$ і є функцією загального положення. Слабо навантажені графи Кронрода-Ріба $\Gamma_{K-R}(g)$ і $\Gamma_{K-R}(-g)$ ізоморфні як графи з черешками, мають однакові спіни у відповідних вершинах і відрізняються тільки орієнтацією ребер. Оскільки η є еквівалентністю графів зі спінами, то це відображення індукує еквівалентність слабо навантаженого графа Кронрода-Ріба $\Gamma_{K-R}(f)$ до $\Gamma_{K-R}(g)$, або $\Gamma_{K-R}(-g)$.

Це доводить необхідність твердження теореми для орієнтовано пошарово еквівалентних функцій f і g.

Нехай функції f та g орієнтовано топологічно еквівалентні, тобто існують гомеоморфізми $h\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ та $k\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, що зберігають орієнтацію і такі, що $k \circ f = g \circ h$. Тоді гомеоморфізм $h\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ відображає множини рівня функції f на множини рівня g. Зрозуміло, що, будучи бієктивним, h відображає компоненти множин рівня f на компоненти множин рівня g. Отже f і g орієнтовано пошарово еквівалентні, внаслідок чого слабо навантажений граф Кронрода-Ріба $\Gamma_{K-R}(f)$, еквівалентний до $\Gamma_{K-R}(g)$, або $\Gamma_{K-R}(-g)$.

Нехай, як і вище, $\eta\colon \Gamma_{K-R}(f) \to \Gamma_{K-R}(g)$ є фактор-відображенням гомеоморфізму h відносно проекцій π_f і π_g. Тоді виконується рівність

$$k \circ f_{K-R} = g_{K-R} \circ \eta\,. \tag{10.3}$$

Враховуючи, що функція k монотонно зростає, легко бачити, що η зберігає напрямок зростання індукованої функції на ребрах графа Кронрода-Ріба. Отже, слабо навантажений граф Кронрода-Ріба $\Gamma_{K-R}(f)$ еквівалентний до $\Gamma_{K-R}(g)$.

Зрозуміло, що η індукує бієктивне відображення множини $V_{virt}(f)$ віртуальних вершин $\Gamma_{K-R}(f)$ на множину $V_{virt}(g)$ віртуальних вершин $\Gamma_{K-R}(g)$. Щоб не нагромаджувати позначень, ми його теж будемо позначати η.

Нехай e — ребро $\Gamma_{K-R}(f)$, $\tilde{e} = \eta(e)$ — відповідне йому ребро $\Gamma_{K-R}(g)$. Нехай, як і раніше,

$$m(e) = \inf_{x\in e} f_{K-R}(x)\,, \quad M(e) = \sup_{x\in e} f_{K-R}(x)\,,$$
$$m(\tilde{e}) = \inf_{x\in \tilde{e}} g_{K-R}(x)\,, \quad M(\tilde{e}) = \sup_{x\in \tilde{e}} g_{K-R}(x)\,.$$

Функція k монотонно зростає, тому

$$m(\tilde{e}) = k \circ m(e), \qquad\qquad M(\tilde{e}) = k \circ M(e).$$

Отже на множині вершин $\Gamma_{K-R}(f)$ (включаючи віртуальні) виконується рівність $k \circ f_{lim} = g_{lim} \circ \eta$.

Враховуючи те, що $k\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ є гомеоморфізмом, маємо, що $\eta(V_{fin}(f)) = V_{fin}(g)$. Отже $\eta(V_{ext}(f)) = V_{ext}(g)$ і η індукує ізоморфізм розширених відношень порядку на розширених множинах вершин.

Це доводить необхідність твердження теореми для орієнтовано топологічно еквівалентних функцій f і g.

Достатність. Розглянемо дві функції

$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \qquad g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}.$$

Будемо вважати, що для слабо навантажених графів Кронрода-Ріба $\Gamma_{K-R}(f), \Gamma_{K-R}(g)$ цих функцій заданий комбінаторний ізоморфізм ψ, що зберігає спіни.

Нехай K_f і K_g — множини сингулярних компонент зв'язності рівнів функцій f та g відповідно.

Візьмемо вершину $v \in \Gamma_{K-R}(f)$ і розглянемо відповідну вершину $w = \psi(v) \in \Gamma_{K-R}(g)$. Нехай $F_v = \pi_f^{-1}(v)$ і $\widetilde{F_w} = \pi_g^{-1}(w)$ — сингулярні компоненти множин рівня f і g, які відповідають вершинам v і w.

Побудуємо гомеоморфізм $h_v^0\colon F_v \to \widetilde{F_w}$, такий, що для будь-якої компоненти доповнення $U \subset \mathbb{R}^2 \setminus K_f$, якій відповідає ребро e графа $\Gamma_{K-R}(f)$, виконується рівність

$$h_v^0(\operatorname{Fr} U \cap F_v) = \operatorname{Fr} \widetilde{U} \cap \widetilde{F_w}\,, \tag{10.4}$$

де $\widetilde{U}$ — компонента доповнення $\mathbb{R}^2 \setminus K_g$, якій відповідає ребро $\psi(e)$ графа $\Gamma_{K-R}(g)$.

Оскільки f є функцією загального положення, то множина F_v містить єдину сингулярну точку x_v функції f. Аналогічно, $\widetilde{F_w}$ містить єдину сингулярну точку $\widetilde{x_w}$ функції g. З твердження 7.3 слідує, що кратності x_v і $\widetilde{x_w}$ збігаються. Нехай вони дорівнюють $n-1$ для деякого $n > 1$. Тоді з твердження 7.1 випливає, що кожна з множин F_v і $\widetilde{F_w}$ складається з сингулярної точки і $2n$ променів, що з неї виходять і прямують на нескінченність.

Нехай $\lhd v = (e_1, \ldots, e_{2n})$. Позначимо через $Q_i = \pi_f^{-1}(e_i)$, $i = 1, \ldots, 2n$, компоненти $\mathbb{R}^2 \setminus K_f$, які межують з F_v. Скористаємось наслідком 7.5 і оберемо нумерацію компонент зв'язності множини $F_v \setminus \{x_v\}$ так, щоб компонента H_i містилась у $\operatorname{Fr} Q_i \cap \operatorname{Fr} Q_{i+1}$ при $i = 1, \ldots, 2n-1$, а також $H_{2n} \subset \operatorname{Fr} Q_{2n} \cap \operatorname{Fr} Q_1$.

За попереднім припущенням $\lhd w = (\psi(e_1), \ldots, \psi(e_{2n}))$. Позначимо $\widetilde{Q_i} = \pi_f^{-1}(\psi(e_i))$, $i = 1, \ldots, 2n$, — компоненти $\mathbb{R}^2 \setminus K_g$, які межують з $\widetilde{F_w}$. Знову наслідок 7.5 гарантує можливість обрати нумерацію компонент зв'язності множини $\widetilde{F_w} \setminus \{\widetilde{x_w}\}$ таким чином, щоб компонента $\widetilde{H_i}$ містилась у $\operatorname{Fr} \widetilde{Q_i} \cap \operatorname{Fr} \widetilde{Q_{i+1}}$ при $i = 1, \dots, 2n-1$, а також $\widetilde{H_{2n}} \subset \operatorname{Fr} \widetilde{Q_{2n}} \cap \operatorname{Fr} \widetilde{Q_1}$.

Для кожного $i = 1, \dots, 2n$ зафіксуємо гомеоморфізм

$$h^0_{v,H_i} \colon \{x_v\} \cup H_i \to \{\widetilde{x_w}\} \cup \widetilde{H_i}$$

променя $\overline{H_i} = \{x_v\} \cup H_i$ на промінь $\overline{\widetilde{H_i}} = \{\widetilde{x_w}\} \cup \widetilde{H_i}$.

Зрозуміло, що $h^0_{v,H_i}(x_v) = \widetilde{x_w}$, а також $\overline{H_i} \cap \overline{H_j} = \{x_v\}$ при $i \neq j$. Тому коректно означене відображення $h^0_v \colon F_v \to \widetilde{F_w}$,

$$h^0_v(x) = h^0_{v,H_i}(x) , \quad \text{якщо } x \in \overline{H_i} , \quad i \in \{1, \dots, 2n\} .$$

Набір множин $\{\overline{H_i}\}$ утворює скінчене замкнене покриття F_v, отже відображення h^0_v неперервне. З того, що всі h^0_{v,H_i} є гомеоморфізмами, слідує, що означене і неперервне обернене відображення $(h^0_v)^{-1}$. Отже, h^0_v є гомеоморфізмом.

За побудовою $H_{i-1} \cup H_i \cup \{x_v\} = \operatorname{Fr} Q_i$, $i = 2, \dots, 2n$, і також $H_{2n} \cup H_1 \cup \{x_v\} = \operatorname{Fr} Q_{2n}$ (див. наслідки 7.2 і 7.5).

Аналогічно, $\widetilde{H_{i-1}} \cup \widetilde{H_i} \cup \{\widetilde{x_w}\} = \operatorname{Fr} \widetilde{Q_i}$, $i = 2, \dots, 2n$, також $\widetilde{H_{2n}} \cup \widetilde{H_1} \cup \{\widetilde{x_v}\} = \operatorname{Fr} \widetilde{Q_{2n}}$. Тому виконується співвідношення (10.4).

Нагадаємо, що за означенням множини K_f і K_g є прообразами множин вершин графів $\Gamma_{K-R}(f)$ і $\Gamma_{K-R}(g)$ відносно проекцій π_f і π_g, відповідно. Тому коректно визначене відображення $h^0 \colon K_f \to K_g$ за такою формулою: $h^0(x) = h^0_{\pi_f(x)}(x)$.

Множини F_v, $v \in \pi_f(K_f)$, попарно не перетинаються, є замкненими, і їх скінчене число (див. зауваження 3.1). Те ж стосується і їх образів відносно h^0. Обмеження h^0 на кожну з множин F_v є гомеоморфізмом на свій образ $\widetilde{F_{\psi(v)}}$. Тому відображення h^0 є гомеоморфізмом.

Зараз ми продовжимо h^0 до відображення $h \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, яке компонентам зв'язності множин рівня функції f ставить у відповідність компоненти множин рівня g.

Позначимо через $\mathcal{Q}_f$ і $\mathcal{Q}_g$ множини, елементами яких є компоненти зв'язності множин $\mathbb{R}^2 \setminus K_f$ і відповідно $\mathbb{R}^2 \setminus K_g$.

Нехай $Q \in \mathcal{Q}_f$, $e = \pi_f(Q)$ — відповідне ребро $\Gamma_{K-R}(f)$. З леми 9.1 та зауваження 9.2 випливає, що існує гомеоморфізм $\phi\colon \overline{Q} \to \mathbb{R} \times f(\overline{Q})$, який зберігає орієнтацію і задовольняє умову $f = \mathrm{pr}_2 \circ \phi$.

Нехай $\widetilde{Q} \in \mathcal{Q}_g$, для якої $\pi_g(\widetilde{Q}) = \psi(e)$. Тоді існує гомеоморфізм $\widetilde{\phi}\colon \overline{\widetilde{Q}} \to \mathbb{R} \times g\big(\overline{\widetilde{Q}}\big)$, який зберігає орієнтацію і такий, що $g = \mathrm{pr}_2 \circ \widetilde{\phi}$.

Множина $f(Q) = f_{K-R}(e)$ зв'язна. Зі співвідношень (9.1) слідує, що множина $f(\overline{Q})$ гомеоморфна інтервалу, півінтервалу або відрізку, $f(Q) = \operatorname{Int} f(\overline{Q})$ гомеоморфна відкритому інтервалу.

Нагадаємо, що f_{K-R} строго монотонна на ребрі e. Тому, якщо $f(\overline{Q})$ містить кінець інтервала $f(Q)$, він відповідає вершині графа $\Gamma_{K-R}(f)$, яка інцидентна ребру e. Якщо не містить, то кінець інтервала відповідає віртуальній вершині.

Аналогічне справедливо і для множин $g(\widetilde{Q})$ та $g\big(\overline{\widetilde{Q}}\big)$.

Оскільки ізоморфізм ψ зберігає орієнтації ребер і відображає множину віртуальних вершин $\Gamma_{K-R}(f)$ на множину віртуальних вершин $\Gamma_{K-R}(g)$, то зі сказаного вище слідує, що існує строго зростаюче бієктивне відображення $\chi\colon f(\overline{Q}) \to g\big(\overline{\widetilde{Q}}\big)$.

Отже, нехай $a < b, c < d \in \mathbb{R} \cup \pm\infty$ такі, що

$$
\begin{aligned}
f(Q) &= (a,b), & \qquad f(\operatorname{Fr} Q) &\subset \{a,b\} \cap \mathbb{R},\\
g(\widetilde{Q}) &= (c,d), & \qquad g(\operatorname{Fr} \widetilde{Q}) &\subset \{c,d\} \cap \mathbb{R}.
\end{aligned}
$$

Множина $f(\operatorname{Fr} Q)$ може мати не більше двох елементів. Розглянемо всі можливі випадки.

(a) Нехай $\operatorname{Fr} Q = \varnothing$. Тоді обидва кінці ребра $e = \pi_f(Q)$ віртуальні. Внаслідок цього $\operatorname{Fr} \widetilde{Q} = \varnothing$, $\Gamma_{K-R}(f) = e$, $\Gamma_{K-R}(g) = \psi(e)$, $Q = \widetilde{Q} = \mathbb{R}^2$ (див. доведення леми 9.1).

Розглянемо відображення

$$\Phi = \mathrm{id}_{\mathbb{R}} \times \chi\colon \mathbb{R} \times f(\mathbb{R}^2) \to \mathbb{R} \times g(\mathbb{R}^2)\,.$$

Зрозуміло, що Φ є гомеоморфізмом і зберігає орієнтацію, а тому

$$h = \widetilde{\phi}^{-1} \circ \Phi \circ \phi$$

має подібні властивості.

Очевидно, ϕ відображає компоненти зв'язності множин рівня f на горизонтальні прямі, а $\widetilde{\phi}^{-1}$ відображає горизонтальні прямі на компоненти множин рівня g. Тому h задає пошарову еквівалентність f і g.

(b) Нехай $f(\mathrm{Fr}\, Q)$ містить рівно один елемент. Тоді з наслідку 4 з [1], слідує, що множина $\mathrm{Fr}\, Q$ зв'язна, отже існує єдина компонента зв'язності F_v множини K_f, така, що $F_v \cap \overline{Q} \neq \varnothing$. Тут v — вершина $\Gamma_{K-R}(f)$, для якої $F_v = \pi_f^{-1}(v)$.

Тоді $g(\mathrm{Fr}\, \widetilde{Q})$ теж містить один елемент. Отже, для вершини $w = \psi(v)$ і відповідної компоненти зв'язності $\widetilde{F_w} = \pi_g^{-1}(w)$ множини K_g має виконуватись співвідношення $\overline{\widetilde{Q}} \cap K_g \subset \widetilde{F_w}$.

Нехай $\lhd v$ — спін при вершині v графа $\Gamma_{K-R}(f)$. Позначимо через e' ребро, яке передує e у цьому циклі. Нехай e'' — ребро, яке слідує за e. Розглянемо відповідні елементи $Q' = \pi_f^{-1}(e')$ і $Q'' = \pi_f^{-1}(e'')$ множини $\mathcal{Q}_f$.

Нехай $x_v \in F_v$ — сингулярна точка f. Позначимо H' та H'' компоненти множини $F_v \setminus \{x_v\}$, для яких виконуються співвідношення $H' \subset \overline{Q'} \cap \overline{Q}$, $H'' \subset \overline{Q} \cap \overline{Q''}$.

Аналогічно, нехай $\widetilde{x_w} \in \widetilde{F_w}$ — сингулярна точка g, $\lhd w$ — спін при вершині w графа $\Gamma_{K-R}(g)$. Нехай ребро $\widetilde{e}' = \pi_g(\widetilde{Q}')$ передує $\widetilde{e}$ у циклі $\lhd w$, $\widetilde{e}'' = \pi_g(\widetilde{Q}'')$ слідує за $\widetilde{e}$. Позначимо через $\widetilde{H}'$ та $\widetilde{H}''$ компоненти множини $\widetilde{F_w} \setminus \{\widetilde{x_w}\}$, такі що $\widetilde{H}' \subset \overline{\widetilde{Q}'} \cap \overline{\widetilde{Q}}$, $\widetilde{H}'' \subset \overline{\widetilde{Q}} \cap \overline{\widetilde{Q}''}$.

З наслідку 7.5 випливає, що

$$\overline{Q} \cap F_v = H' \cup H'' \cup \{x_v\}, \qquad \overline{\widetilde{Q}} \cap \widetilde{F_w} = \widetilde{H}' \cup \widetilde{H}'' \cup \{\widetilde{x_w}\}.$$

Оскільки ψ зберігає спіни, то $\widetilde{e}' = \psi(e')$, $\widetilde{e}'' = \psi(e'')$.

Відображення h^0 побудовано таким чином, що

$$h^0(F_v) = h^0_v(F_v) = \widetilde{F_w}, \qquad h^0(x_v) = \widetilde{x_w},$$
$$h^0(H') = \widetilde{H}', \qquad h^0(H'') = \widetilde{H}''.$$

Отже, $h^0(\overline{Q} \cap F_v) = \overline{\widetilde{Q}} \cap \widetilde{F_w}$. Очевидно, обмеження h^0 на $\overline{Q} \cap F_v$ індукує гомеоморфізм

$$h^0_{v,Q} \colon \overline{Q} \cap F_v \to \overline{\widetilde{Q}} \cap \widetilde{F_w}\,.$$

Припустимо, що $f(\operatorname{Fr} Q) = \{a\}$. З існування χ слідує, що $g(\operatorname{Fr} \widetilde{Q}) = \{c\}$.

Нехай $q \in \mathbb{R}$. Введемо наступні позначення.

$$R^-_q = (-\infty, 0) \times \{q\} \subset \mathbb{R}^2\,,$$
$$R^+_q = (0, +\infty) \times \{q\} \subset \mathbb{R}^2\,.$$

Із співвідношень (9.1) слідує, що $\phi(\overline{Q} \cap F_v) = \mathbb{R} \times \{a\}$.

Не обмежуючи загальність міркувань, можемо вважати, що $\phi(x_v) = (0, a)$, $\widetilde{\phi}(\widetilde{x_w}) = (0, c)$. Будемо також вважати, що додатний напрямок обходу навколо точки на площині є напрямок проти годинникової стрілки.

При обході навколо точки x_v ми рухаємося у області Q від множини H' у напрямку множини H''. Аналогічно, при обході навколо точки $(0, a) = \phi(x_v)$ ми рухаємося всередині області $\mathbb{R} \times (a, b) = \phi(Q)$ від R^+_a у напрямку R^-_a. Оскільки ϕ зберігає орієнтацію, то $\phi(H') = R^+_a$, $\phi(H'') = R^-_a$.

Аналогічно, $\widetilde{\phi}(\overline{\widetilde{Q}} \cap \widetilde{F_w}) = \mathbb{R} \times \{c\}$, $(0, c) = \widetilde{\phi}(\widetilde{x_w})$, $\widetilde{\phi}(\widetilde{H}') = R^+_c$ і $\widetilde{\phi}(\widetilde{H}'') = R^-_c$.

Розглянемо відображення

$$\Phi_a = \widetilde{\phi} \circ h^0 \circ \phi^{-1}|_{\mathbb{R} \times \{a\}} \colon \mathbb{R} \times \{a\} \to \mathbb{R}^2\,.$$

Очевидно, Φ_a є гомеоморфізмом на свій образ $\mathbb{R} \times \{c\}$. Також справедливі рівності $\Phi_a(R^-_a) = \widetilde{\phi} \circ h^0(H'') = \widetilde{\phi}(\widetilde{H}'') = R^-_c$ і $\Phi_a(R^+_a) = R^+_c$.

Нехай $i_a\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $i_a(t) = (t, a)$, $t \in \mathbb{R}$. Означимо функцію

$$\alpha = \mathrm{pr}_1 \circ \Phi_a \circ i_a\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\,.$$

Тут $\mathrm{pr}_1\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ — проекція на першу координату.

Легко бачити, що α є гомеоморфізмом. Тому ця функція або строго зростає, або строго спадає. Оскільки для множини

$$R^- = \{t \in \mathbb{R} \mid t < 0\}$$

виконуються співвідношення $i_a(R^-) = R_a^-$ і $\mathrm{pr}_1(R_c^-) = R^-$, то за побудовою $\alpha(R^-) = R^-$ і функція α зростає.

Означимо відображення $\Phi\colon \mathbb{R} \times [a, b) \to \mathbb{R} \times [c, d)$,

$$\Phi(x, y) = (\alpha(x), \chi(y))\,, \quad (x, y) \in \mathbb{R} \times [a, b)\,.$$

З властивостей α і χ слідує, що це гомеоморфізм, який зберігає орієнтацію. Також за побудовою $\Phi(x, y) = \Phi_a(x, y)$ для всіх $(x, y) \in \mathbb{R} \times \{a\}$.

Нарешті, нехай

$$h_Q = \widetilde{\phi}^{-1} \circ \Phi \circ \phi\colon\ \overline{Q} \to \overline{\widetilde{Q}}\,.$$

За побудовою h_Q є гомеоморфізмом і зберігає орієнтацію. Оскільки $\phi(\mathrm{Fr}\, Q) = \mathbb{R} \times \{a\}$, то

$$h_Q|_{\mathrm{Fr}\, Q} = \widetilde{\phi}^{-1} \circ \Phi_a \circ \phi = h^0\,.$$

За означенням множина $\mathbb{R}^2 \setminus K_f$ є об'єднанням усіх регулярних компонент рівня функції f. Внаслідок цього кожна компонента рівня f, яка перетинається з Q, міститься в Q. Аналогічно, якщо компонента зв'язності рівня g має непорожній перетин з $\widetilde{Q}$, вона міститься в цій області.

Отже, з властивостей ϕ і $\widetilde{\phi}^{-1}$ слідує, що h_Q для кожної точки $x \in Q$ відображає компоненту зв'язності множини $f^{-1}(f(x))$, яка містить x, на компоненту множини рівня g, що містить точку $h_Q(x)$.

Випадок $f(\mathrm{Fr}\, Q) = \{b\}$ розглядається аналогічно.

(c) Нехай множина $f(\mathrm{Fr}\, Q)$ містить два елементи. Тоді обидва кінця ребра e не віртуальні. Позначимо їх v' і v''. Як і раніше, застосовуючи наслідок 4 з [1], приходимо до висновку, що для компонент зв'язності $F_{v'} = \pi_f^{-1}(v')$ і $F_{v''} = \pi_f^{-1}(v'')$ множини K_f справедливі співвідношення $F_{v'} \cap \overline{Q} \neq \varnothing$, $F_{v''} \cap \overline{Q} \neq \varnothing$, $\overline{Q} \subset F_{v'} \cup F_{v''}$.

Так як вершини $w' = \psi(v')$ і $w'' = \psi(v'')$ графа $\Gamma_{K-R}(g)$ є кінцями ребра $\psi(e)$, а тому компоненти зв'язності $\widetilde{F_{w'}} = \pi_f^{-1}(w')$ і $\widetilde{F_{v''}} = \pi_f^{-1}(w'')$ множини K_g відповідають співвідношенням $\widetilde{F_{w'}} \cap \overline{\widetilde{Q}} \neq \varnothing$, $\widetilde{F_{w''}} \cap \overline{\widetilde{Q}} \neq \varnothing$, $\overline{\widetilde{Q}} \subset \widetilde{F_{w'}} \cup \widetilde{F_{w''}}$.

Нехай, як і вище, гомеоморфізми

$$\phi\colon \overline{Q} \to \mathbb{R} \times [a, b], \qquad \widetilde{\phi}\colon \overline{\widetilde{Q}} \to \mathbb{R} \times [c, d]$$

зберігають орієнтацію, $f = \mathrm{pr}_2 \circ \phi$ і $g = \mathrm{pr}_2 \circ \widetilde{\phi}$.

Не обмежуючи загальність міркувань, ми можемо вважати, що $\phi(F_{v'} \cap \overline{Q}) = \{a\}$, $\phi(F_{v''} \cap \overline{Q}) = \{b\}$.

Ізоморфізм ψ зберігає орієнтацію ребер. Оскільки вона визначається напрямком зростання функцій f і g, то

$$\widetilde{\phi}(\widetilde{F_{w'}} \cap \overline{\widetilde{Q}}) = \{c\}, \qquad \widetilde{\phi}(\widetilde{F_{w''}} \cap \overline{\widetilde{Q}}) = \{d\}.$$

Як і у попередньому випадку, з наслідку 7.5 слідує, що коректно визначені відображення

$$\Phi_a = \widetilde{\phi} \circ h^0 \circ \phi^{-1}|_{\mathbb{R}\times\{a\}}\colon \mathbb{R} \times \{a\} \to \mathbb{R}^2\,,$$
$$\Phi_b = \widetilde{\phi} \circ h^0 \circ \phi^{-1}|_{\mathbb{R}\times\{b\}}\colon \mathbb{R} \times \{b\} \to \mathbb{R}^2\,,$$

які гомеоморфно відображають $\mathbb{R} \times \{a\}$ і $\mathbb{R} \times \{b\}$ на $\mathbb{R} \times \{c\}$ та $\mathbb{R} \times \{d\}$, відповідно.

Нехай $i_a\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $i_a(t) = (t, a)$, $i_b\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $i_b(t) = (t, b)$, $t \in \mathbb{R}$. Як і вище, перевіряється, що функції

$$\alpha = \mathrm{pr}_1 \circ \Phi_a \circ i_a\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\,,$$
$$\beta = \mathrm{pr}_1 \circ \Phi_b \circ i_b\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\,,$$

є бієктивними і такими, що строго зростають.

Зафіксуємо також гомеоморфізм $\chi\colon [a, b] \to [c, d]$, такий, що $\chi(a) = c$.

З леми 9.5 слідує, що відображення $\Phi\colon \mathbb{R}\times[a,b]\to\mathbb{R}\times[c,d]$, означене за допомогою формули (9.2), є гомеоморфізмом, зберігає орієнтацію, а також відображає горизонтальні прямі на горизонтальні прямі.

Оскільки $\hat{\chi}(a)=0$ і $\hat{\chi}(b)=1$, то з формули (9.2) випливає, що $\Phi(x,y)=\Phi_a(x,y)$ для всіх $(x,y)\in\mathbb{R}\times\{a\}$ і $\Phi(x,y)=\Phi_b(x,y)$ для кожного $(x,y)\in\mathbb{R}\times\{b\}$.

Означимо

$$h_Q=\widetilde{\phi}^{-1}\circ\Phi\circ\phi\colon\ \overline{Q}\to\overline{\widetilde{Q}}\ .$$

За побудовою h_Q є гомеоморфізмом і зберігає орієнтацію. Оскільки $\phi(\operatorname{Fr}Q)=\mathbb{R}\times\{a,b\}$, то аналогічно до попереднього випадку

$$h_Q|_{\operatorname{Fr}Q}=h^0\,.$$

Як і вище, перевіряється, що h_Q відображає кожну компоненту зв'язності множини рівня f, яка перетинається з Q, на деяку компоненту множини рівня g.

Поєднуючи **(a)**-**(c)**, для кожного $Q\in\mathcal{Q}_f$ ми отримали гомеоморфізм h_Q її замикання на замикання деякого $\widetilde{Q}\in\mathcal{Q}_g$, що відображає компоненти зв'язності множин рівня f, що належать Q, на компоненти множин рівня g.

Нехай Q' і Q'' — два різні елементи $\mathcal{Q}_f$. Тоді за означенням $\overline{Q'}\cap\overline{Q''}=\operatorname{Fr}Q'\cap\operatorname{Fr}Q''\subset K_f$. Отже, за побудовою для кожного $x\in\overline{Q'}\cap\overline{Q''}$ виконується рівність $h_{Q'}(x)=h_{Q''}(x)=h^0(x)$. Крім того, з наслідку 7.2 випливає, що $\mathbb{R}^2=\bigcup_{Q\in\mathcal{Q}_f}\overline{Q}$.

Тому коректно означене відображення $h\colon\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$,

$$h(x)=h_Q(x),\quad \text{якщо } x\in\overline{Q},\quad Q\in\mathcal{Q}_f\,. \tag{10.5}$$

Оскільки граф $\Gamma_{K-R}(f)$ скінчений (див. зауваження 3.3), то набір множин $\{\overline{Q}\mid Q\in\mathcal{Q}_f\}$ утворює скінчене замкнене покриття площини, і на кожному елементі цього покриття h неперервне за означенням. Тому h неперервне на $\mathbb{R}^2$ (див. [5]).

За побудовою $h|_{K_f}=h^0$ і h бієктивно відображає K_f на K_g. Також h бієктивно відображає кожну множину $Q\in\mathcal{Q}_f$ на деякий елемент сім'ї $\mathcal{Q}_g$.

Нехай $Q', Q'' \in \mathfrak{Q}_f$, $Q' \neq Q''$, $\widetilde{Q'} = h(Q')$, $\widetilde{Q''} = h(Q'')$. Нехай $e' = \pi_f(Q')$, $e'' = \pi_f(Q'')$, $\widetilde{e'} = \pi_g(\widetilde{Q'})$, $\widetilde{e''} = \pi_g(\widetilde{Q''})$ — відповідні ребра графів $\Gamma_{K-R}(f)$ і $\Gamma_{K-R}(g)$. Оскільки $\widetilde{e'} = \psi(e')$, $\widetilde{e''} = \psi(e'')$ і ψ — комбінаторний ізоморфізм, то $\widetilde{Q'}$ і $\widetilde{Q''}$ — різні елементи $\mathfrak{Q}_g$. Отже, $\widetilde{Q'} \cap \widetilde{Q''} = \varnothing$.

Очевидно, для кожного $Q \in \mathfrak{Q}_f$ виконуються співвідношення $\mathbb{R}^2 \setminus Q = K_f \cup \bigcup_{Q' \in \mathfrak{Q}_f, Q' \neq Q} Q'$. Зі сказаного вище слідує, що $h(\mathbb{R}^2 \setminus Q) = K_g \cup \bigcup_{\widetilde{Q'} \in \mathfrak{Q}_g, \widetilde{Q'} \neq h(Q)} \widetilde{Q'}$. Тому $h(Q) \cap h(\mathbb{R}^2 \setminus Q) = \varnothing$ для всіх $Q \in \mathfrak{Q}_f$ і відображення h бієктивне.

Отже, означене відображення h^{-1}. Оскільки $h(Q) \in \mathfrak{Q}_g$ і $h^{-1}|_{h(Q)} = h_Q^{-1}$ для кожного $Q \in \mathfrak{Q}_f$, всі h_Q^{-1} неперервні за побудовою і сім'я $\{\overline{\widetilde{Q}} \mid \widetilde{Q} \in \mathfrak{Q}_g\}$ утворює скінчене замкнене покриття площини, то відображення h^{-1} неперервне і h є гомеоморфізмом.

Ми довели вище, що всі відображення $h|_Q$, $Q \in \mathfrak{Q}_f$ і h_0 ставлять у відповідність компонентам зв'язності множин рівня f компоненти множин рівня g. Отже, h є пошаровою еквівалентністю f і g.

Аналогічно, якщо для слабо навантажених графів Кронрода-Ріба $\Gamma_{K-R}(f)$ і $\Gamma_{K-R}(-g)$ заданий комбінаторний ізоморфізм, що зберігає спіни, то функції f і $-g$ пошарово еквівалентні. Але зрозуміло, що розбиття $\mathbb{R}^2$, елементами якого є компоненти зв'язності множин рівнів функції $-g$, збігається з аналогічним розбиттям на компоненти множин рівнів g. Тому і у цьому випадку функції f і g пошарово еквівалентні.

Припустимо тепер, що навантажені графи Кронрода-Ріба $\Gamma_{K-R}(f)$ і $\Gamma_{K-R}(g)$ є еквівалентними. Це означає, що слабо навантажені графи Кронрода-Ріба функцій f і g еквівалентні і комбінаторний ізоморфізм ψ, який зберігає слабке навантаження, також індукує ізоморфізм $\hat{\psi}$ частково впорядкованих розширених множин вершин V_{ext} і $\widetilde{V}_{ext}$ графів $\Gamma_{K-R}(f)$ і $\Gamma_{K-R}(g)$ відносно порядків P_{ext} і $\widetilde{P}_{ext}$, відповідно.

Нагадаємо, що частковий порядок P_{ext} (відповідно, $\widetilde{P}_{ext}$) індукується на множині V_{ext} (відповідно, $\widetilde{V}_{ext}$) зі стандартного лінійного порядку на прямій за допомогою відображення $f_{lim}\colon V_{ext} \to \mathbb{R}$ (відповідно, $g_{lim}\colon \widetilde{V}_{ext} \to \mathbb{R}$).

Позначимо $A_f = f_{lim}(V_{ext})$, $A_g = g_{lim}(\widetilde{V}_{ext})$. З твердження 8.3 слідує, що існує бієктивне строго зростаюче відображення $\hat{k}\colon A_f \to A_g$, таке, що комутативна діаграма

$$\begin{array}{ccc} V_{ext} & \xrightarrow{\hat{\psi}} & \widetilde{V}_{ext} \\ {\scriptstyle f_{lim}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle g_{lim}} \\ A_f & \xrightarrow[\hat{k}]{} & A_g \end{array}$$

Множини A_f і A_g скінчені (див. зауваження 3.3) і мають однакову кількість елементів m.

Нехай $A_f = \{a_1, \ldots, a_m\}$, $a_1 < \ldots < a_m$; $A_g = \{b_1, \ldots, b_m\}$, $b_1 < \ldots < b_m$. Очевидно, $b_i = \hat{k}(a_i)$, $i = 1, \ldots, m$.

Означимо відображення $k\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ за допомогою співвідношення

$$k(t) = \begin{cases} t + (b_1 - a_1), & \text{якщо } t < a_1\,, \\ \frac{1}{a_{i+1}-a_i}\big[b_i(a_{i+1} - t) + b_{i+1}(t - a_i)\big], & \text{якщо } t \in [a_i, a_{i+1}]\,, \\ t + (b_m - a_m), & \text{якщо } t > a_m\,. \end{cases}$$

Тоді k є гомеоморфізмом і $k(a_i) = b_i = \hat{k}(a_i)$, $i = 1, \ldots, m$.

Оскільки слабо навантажені графи Кронрода-Ріба функцій f і g еквівалентні, то ми можемо побудувати гомеоморфізми $h^0\colon K_f \to K_g$ і $h_Q\colon \overline{Q} \to \overline{\widetilde{Q}}$, $Q \in \mathfrak{Q}_f$, як ми це зробили при доведенні пошарової еквівалентності f і g.

При побудові відображень h_Q є певна неоднозначність. Виявляється, що ці відображення можна вибрати таким чином, що гомеоморфізм h, визначений за допомогою (10.5), дасть разом із k топологічну еквівалентність f і g.

Отже, нехай $Q \in \mathcal{Q}_f$, $e = \pi_f(Q)$ — відповідне ребро графа $\Gamma_{K-R}(f)$, $v', v'' \in V \cup V_{virt}$ — вершини, які з'єднує ребро e. Тоді вершини $w' = \psi(e')$ і $w'' = \psi(e'')$ графа $\Gamma_{K-R}(g)$ з'єднані ребром $\psi(e)$. Нехай $\widetilde{Q} = \pi_g^{-1}(\psi(e))$ — відповідний елемент $\mathcal{Q}_g$.

Вище ми побудували h_Q у вигляді $\widetilde{\phi}^{-1} \circ \Phi \circ \phi$, де ϕ і $\widetilde{\phi}$ — відображення з леми 9.1, а Φ має вигляд $\Phi(x, y) = (\eta(x, y), \chi(y))$, $(x, y) \in \mathbb{R} \times f(\overline{Q})$ (див. формулу (9.2)). Отже, комутативна наступна діаграма:

$$\begin{tikzcd}
\overline{Q} \arrow[r, "h_Q"] \arrow[d, "\phi"'] & \overline{\widetilde{Q}} \arrow[d, "\widetilde{\phi}"] \\
\mathbb{R} \times f(\overline{Q}) \arrow[r, "\Phi"] \arrow[d, "\mathrm{pr}_2"'] & \mathbb{R} \times g(\overline{\widetilde{Q}}) \arrow[d, "\widetilde{\mathrm{pr}_2}"] \\
f(\overline{Q}) \arrow[r, "\chi"] & g(\overline{\widetilde{Q}})
\end{tikzcd}$$

Лема 9.1 стверджує, що $f = \mathrm{pr}_2 \circ \phi$ і $g = \mathrm{pr}_2 \circ \widetilde{\phi}$. Тому комутативна наступна діаграма:

$$\begin{tikzcd}
\overline{Q} \arrow[r, "h_Q"] \arrow[d, "f"'] & \overline{\widetilde{Q}} \arrow[d, "g"] \\
f(\overline{Q}) \arrow[r, "\chi"] & g(\overline{\widetilde{Q}})
\end{tikzcd} \tag{10.6}$$

У цій конструкції в якості $\chi\colon \overline{Q} \to \overline{\widetilde{Q}}$ можна взяти довільне неперервне бієктивне зростаюче відображення.

Функція f_{K-R} строго монотонна на ребрах $\Gamma_{K-R}(f)$. Отже, не обмежуючи загальності міркувань, ми можемо вважати, що $f_{lim}(v') < f_{lim}(v'')$. Оскільки ψ зберігає орієнтацію ребер, то $g_{lim}(w') < g_{lim}(w'')$.

Нехай $v' \notin V_{ext}$. Тоді $f_{lim}(v') \in \pm\infty$. Так як $f_{lim}(v') < f_{lim}(v'')$, то $f_{lim}(v') = -\infty$. За означенням $\psi(V_{ext}) = \widetilde{V}_{ext}$, а значить $w' = \psi(v') \notin \widetilde{V}_{ext}$ і по аналогії з попереднім $g_{lim}(w') = -\infty$.

Якщо $v' \in V_{ext}$, то $f_{lim}(v') = a_r$ для деякого $r \in \{1, \dots, m\}$. Тоді

$$g_{lim}(w') = g_{lim} \circ \psi(v') = \hat{k} \circ f_{lim}(v') = k \circ f_{lim}(v') = b_r \,.$$

Так само, або $f_{lim}(v'') = g_{lim}(w'') = +\infty$, або $f_{lim}(v'') = a_s$ і $g_{lim}(w'') = k \circ f_{lim}(v'') = b_s$ для деякого $s \in \{1, \dots, m\}$.

Внаслідок сказаного виконується рівність $k(f(\overline{Q})) = g(\overline{\widetilde{Q}})$. Отже, можемо взяти $\chi(t) = k(t), \;\; t \in f(\overline{Q})$. Тоді зі співвідношень (10.5) і (10.6) слідує, що $k \circ f = g \circ h$. Теорему 1.1 доведено.

Література

[1] *Полулях Е. А.* Графы Кронрода-Риба функций на некомпактных двумерных поверхностях // *Укр. мат. журн.* — 2015. — **67**, 3. — С. 375–396.

[2] *Зорич В. А.* Математический анализ, I. — М.: МЦНМО, 2002. — С. xvi+664.

[3] *Prishlyak A. O.* Topological equivalence of smooth functions with isolated critical points on a closed surface // *Topology Appl.* — 2002. — **119**, 3. — P. 257–267.

[4] *Church P. T., Timourian J. G.* Differentiable open maps of $(p+1)$-manifold to p-manifold // *Pacific J. Math.* — 1973. — **48**. — P. 35–45.

[5] *Рохлин В. А., Фукс Д. Б.* Начальный курс топологии. Геометрические главы. — М.: Наука, 1977. — С. 488.

[6] *Hilton P. J., Wylie S.* Homology theory: An introduction to algebraic topology. — Cambridge University Press, New York, 1960. — P. xv+484.

[7] *Куратовский К.* Топология, том. 2. — М.: Мир, 1969. — С. 624.

[8] *Морс М.* Топологические методы теории функции комплексного переменного. — М.: Изд. иностр. лит., 1951. — С. 248.

[9] *Sharko V. V., Soroka Yu. Yu.* Topological equivalence to a projection // *Methods Funct. Anal. Topology.* — 2015. — **21**, 1. — P. 3–5.