Збірник праць Ін-ту математики НАН України 2014, Т. 11, № 3, 330-343

УДК 517.51

С. Я. Янченко* (Ін-т математики НАН України, Київ)

ПОРЯДКОВІ ОЦІНКИ АПРОКСИМАТИВНИХ ХАРАКТЕРИСТИК ФУНКЦІЙ З УЗАГАЛЬНЕНИХ КЛАСІВ МІШАНОЇ ГЛАДКОСТІ ТИПУ НІКОЛЬСЬКОГО–БЄСОВА

We obtain the exact order estimates of the approximation classes $S^{\Omega}_{p,\theta}B$ functions of many variables defined on $\mathbb{R}^d$ by using entire functions of exponential type with supported of their Fourier transform on some sets in uniform metric.

Одержано точні за порядком оцінки наближення класів $S^{\Omega}_{p,\theta}B$ функцій багатьох змінних, які визначені на $\mathbb{R}^d$ за допомогою цілих функцій експоненціального типу з носієм їх перетворення Фур'є на певних множинах у рівномірній метриці.

У роботі продовжено дослідження апроксимативних характеристик функцій з так званих узагальнених аналогів класів мішаної гладкості Нікольського–Бєсова $S^{\Omega}_{p,\theta}B(\mathbb{R}^d)$. Знайдено точні за порядком оцінки наближення цих класів функцій цілими функціями з носієм їх перетворення Фур'є у східчастому гіперболічному хресті, а також на множинах більш довільної структури, лебегова міра яких є обмежена. Похибка наближення при цьому оцінюється у рівномірній метриці $L_\infty(\mathbb{R}^d)$.

1. Означення класів функцій $\boldsymbol{S^{\Omega}_{p,\theta}B}(\mathbb{R}^{\boldsymbol{d}})$. Нехай $\mathbb{R}^d$ — d-вимірний евклідовий простір з елементами $\boldsymbol{x} = (x_1, ..., x_d)$ і $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = x_1 y_1 + ... + x_d y_d$. Через $L_q(\mathbb{R}^d)$, $1 \leqslant q \leqslant \infty$, позначимо простір вимірних функцій $f(\boldsymbol{x}) = f(x_1, ..., x_d)$ зі скінченною нормою

$$\|f\|_{L_q} := \|f\|_q := \left(\int\limits_{\mathbb{R}^d} |f(\boldsymbol{x})|^q d\boldsymbol{x} \right)^{\frac{1}{q}}, \ 1 \leqslant q < \infty,$$

*Робота виконана за часткової підтримки FP7-People-2011-IRSES, проект №295164 (EUMLS: EU–Ukrainian Mathematicians for Life Sciences).

$$\|f\|_{L_\infty} := \|f\|_\infty := \operatorname*{ess\,sup}_{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^d} |f(\boldsymbol{x})|.$$

Для функції $f \in L_q(\mathbb{R}^d)$ розглянемо різницю l-го порядку, $l \in \mathbb{N}$, за змінною x_j з кроком h_j, яка визначається таким чином:

$$\Delta^l_{h_j} f(\boldsymbol{x}) := \sum_{n=0}^{l} (-1)^{l-n} C^n_l f(x_1, ..., x_{j-1}, x_j + nh_j, x_{j+1}, ..., x_d).$$

Також означимо мішану різницю l-го порядку з векторним кроком $\boldsymbol{h} = (h_1, \ldots, h_d)$:

$$\Delta^l_{\boldsymbol{h}} f(\boldsymbol{x}) = \Delta^l_{h_d}\big(\Delta^l_{h_{d-1}} ...(\Delta^l_{h_1} f(\boldsymbol{x}))\big)$$

і покладемо

$$\Omega_l(f, \boldsymbol{t})_q := \sup_{\substack{|h_j|\leqslant t_j\\ j=\overline{1,d}}} \|\Delta^l_{\boldsymbol{h}} f(\cdot)\|_q$$

— мішаний модуль неперервності функції $f \in L_q(\mathbb{R}^d)$. Тут $\boldsymbol{t} = (t_1, ..., t_d)$, $t_j \geqslant 0$, $j = \overline{1,d}$ (далі будемо писати $\boldsymbol{t} \geqslant 0$, $|\boldsymbol{h}| = (|h_1|, ..., |h_d|)$ і будемо використовувати запис $|\boldsymbol{h}| \leqslant \boldsymbol{t}$, який означає, що $|h_j| \leqslant t_j$, $j = \overline{1,d}$).

Нехай $\Omega(\boldsymbol{t}) = \Omega(t_1, \ldots, t_d)$ — задана функція типу мішаного модуля неперервності порядку l, тобто функція, що визначена на $\mathbb{R}^d_+$ і задовольняє такі умови:

1) $\Omega(\boldsymbol{t}) > 0$, $\boldsymbol{t} > 0$ і $\Omega(\boldsymbol{t}) = 0$, якщо $\prod\limits_{j=1}^{d} t_j = 0$;

2) $\Omega(\boldsymbol{t})$ неспадна за кожною змінною;

3) $\Omega(\boldsymbol{t})$ неперервна на $\mathbb{R}^d_+$;

4) $\Omega(m_1 t_1, \ldots, m_d t_d) \leqslant C_1 \left(\prod\limits_{j=1}^{d} m_j\right)^l \Omega(\boldsymbol{t})$, $m_j \in \mathbb{N}$, $j = \overline{1,d}$.

Множину таких функцій $\Omega(\boldsymbol{t})$ позначимо через Ψ_l.

Додатково будемо вимагати, щоб функція $\Omega(\boldsymbol{t})$ задовольняла умови (S) та (S_l), які називають умовами Барі–Стєчкіна [1]. Сформулюємо їх:

а) функція однієї змінної $\varphi(\tau) \geqslant 0$ задовольняє умову (S) з $\alpha > 0$, якщо $\varphi(\tau)/\tau^{\alpha}$ майже зростає, тобто існує така не залежна від τ_1 і τ_2 стала $C_2 > 0$, що

$$\frac{\varphi(\tau_1)}{\tau_1^{\alpha}} \leqslant C_2 \frac{\varphi(\tau_2)}{\tau_2^{\alpha}}, \qquad 0 < \tau_1 \leqslant \tau_2 \leqslant 1;$$

б) функція однієї змінної $\varphi(\tau) \geqslant 0$ задовольняє умову (S_l), якщо існує таке γ, $0 < \gamma < l$, що $\varphi(\tau)/\tau^{l-\gamma}$ майже спадає, тобто існує така не залежна від τ_1 і τ_2 стала $C_3 > 0$, що

$$\frac{\varphi(\tau_1)}{\tau_1^{l-\gamma}} \geqslant C_3 \frac{\varphi(\tau_2)}{\tau_2^{l-\gamma}}, \qquad 0 < \tau_1 \leqslant \tau_2 \leqslant 1.$$

Будемо вважати, що $\Omega(\boldsymbol{t})$ задовольняє умови (S) та (S_l), якщо $\Omega(\boldsymbol{t})$ задовольняє ці умови за кожною змінною t_j при всіх фіксованих t_i, $i \neq j$. У тому випадку, коли для $\Omega(\boldsymbol{t})$ виконана умова (S), будемо говорити, що $\Omega(\boldsymbol{t})$ належить множині S^{α}, а коли умова (S_l) — множині S_l. Стверджуючи це (також і для функції $\omega(t)$ однієї змінної), використовуватимемо запис $\Omega(\boldsymbol{t}) \in \Phi_{\alpha,l}$, $(\omega(t) \in \Phi_{\alpha,l})$, $l \in \mathbb{N}$, де множина $\Phi_{\alpha,l}$ визначається співвідношенням $\Phi_{\alpha,l} = \Psi_l \cap S^{\alpha} \cap S_l$.

Варто зазначити, що до множини $\Phi_{\alpha,l}$ належать, наприклад, функції

$$\Omega(\mathbf{t}) = \Omega(t_1, \ldots, t_d) = \begin{cases} \prod\limits_{j=1}^{d} \dfrac{t_j^{r_j}}{\left\{\log \frac{1}{t_j}\right\}_+^{b_j}}, & \text{якщо } \ t_j > 0, \ j = \overline{1,d}; \\ 0, & \text{якщо } \ \prod\limits_{j=1}^{d} t_j = 0, \end{cases}$$

де $\{\log \tau\}_+ = \max\{1;\ \log \tau\}$, $r_j, b_j \in \mathbb{R}$, $0 < r_j < l$, $j = \overline{1,d}$.

Нехай $S = S(\mathbb{R}^d)$ — простір Л. Шварца основних, нескінченно диференційовних на $\mathbb{R}^d$ комплекснозначних функцій φ, що спадають на нескінченності разом зі всіма своїми похідними швидше за будь-який степінь функції $|x|^{-1}$ (див., наприклад, [2], [3] (гл. 2)). Через S' позначимо простір лінійних неперервних функціоналів на S. Зазначимо, що елементами простору S' є узагальнені функції. Якщо $f \in S'$ і $\varphi \in S$, то $\langle f, \varphi \rangle$ позначає значення f на φ.

Перетворення Фур'є $\mathfrak{F}\varphi : S \to S$ визначається за формулою

$$(\mathfrak{F}\varphi)(\boldsymbol{\lambda}) = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \int\limits_{\mathbb{R}^d} \varphi(\boldsymbol{t}) e^{-i(\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{t})} d\boldsymbol{t} \equiv \widetilde{\varphi}(\boldsymbol{\lambda}),$$

де $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \ldots, \lambda_d)$, $\boldsymbol{t} = (t_1, \ldots, t_d)$.

Обернене перетворення Фур'є задається таким чином:

$$(\mathfrak{F}^{-1}\varphi)(\boldsymbol{t}) = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \int\limits_{\mathbb{R}^d} \varphi(\boldsymbol{\lambda}) e^{i(\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{t})} d\boldsymbol{\lambda} \equiv \widehat{\varphi}(\boldsymbol{t}).$$

Перетворення Фур'є узагальнених функцій $f \in S'$ (для нього ми зберігаємо те ж позначення) визначається формулою

$$\langle \mathfrak{F} f, \varphi \rangle = \langle f, \mathfrak{F}\varphi \rangle, \quad \langle \widetilde{f}, \varphi \rangle = \langle f, \widetilde{\varphi} \rangle,$$

де $\varphi \in S$.

Обернене перетворення Фур'є узагальненої функції також позначимо $\mathfrak{F}^{-1} f$, і визначається воно аналогічно до прямого перетворення Фур'є за правилом

$$\langle \mathfrak{F}^{-1} f, \varphi \rangle = \langle f, \mathfrak{F}^{-1}\varphi \rangle, \quad \langle \widehat{f}, \varphi \rangle = \langle f, \widehat{\varphi} \rangle.$$

Зазначимо, що для $1 < p < \infty$ існує природне неперервне вкладення $L_p(\mathbb{R}^d)$ в S', і в цьому сенсі функції з $L_p(\mathbb{R}^d)$ ототожнюються з елементами з S'.

Далі, для кожного вектора $\boldsymbol{s} = (s_1, ..., s_d)$, $s_j \in \mathbb{Z}_+$, $j = \overline{1, d}$, розглянемо множину

$$Q^*_{2^{\boldsymbol{s}}} := \Big\{ \boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \ldots, \lambda_d) : \ \eta(s_j) 2^{s_j - 1} \leqslant |\lambda_j| < 2^{s_j}, \ \ \lambda_j \in \mathbb{R}, \ j = \overline{1, d} \Big\},$$

де $\eta(0) = 0$ і $\eta(t) = 1, \ t > 0$.

Нехай $A \subset \mathbb{R}^d$ — деяка множина. Позначимо через χ_A характеристичну функцію множини A і для $f \in L_p(\mathbb{R}^d)$ покладемо

$$\delta^*_{\boldsymbol{s}}(f, \boldsymbol{x}) = \mathfrak{F}^{-1}\big(\chi_{Q^*_{2^{\boldsymbol{s}}}} \cdot \mathfrak{F} f \big).$$

Надалі по тексту вживається запис $A \asymp B$, який означає, що для невід'ємних величин A та B існує додатна стала C така, що

$C^{-1}A \leqslant B \leqslant CA$. Якщо тільки $B \leqslant CA$ ($B \geqslant C^{-1}A$), то пишемо $B \ll A$ ($B \gg A$). Всі сталі C_i , $i = 1, 2, ...$, які будуть зустрічатися у роботі, можуть залежати лише від тих параметрів, що входять в означення класу, метрики, в якій оцінюється похибка наближення, та розмірності простору $\mathbb{R}^d$.

Простори $S^{\Omega}_{p,\theta}B$, $1 < p < \infty$, $1 \leqslant \theta \leqslant \infty$, згідно з наведеними позначеннями можна означити таким чином [4]:

$$S^{\Omega}_{p,\theta}B = \Big\{ f \in L_p(\mathbb{R}^d) : \quad \Omega(\mathbf{t}) \in \Phi_{\alpha,l}, \ \|f\|_{S^{\Omega}_{p,\theta}B} < \infty \Big\},$$

де

$$\|f\|_{S^{\Omega}_{p,\theta}B} \asymp \left\{ \sum_{\boldsymbol{s} \geqslant 0} \big(\Omega(2^{-\boldsymbol{s}})\big)^{-\theta} \|\delta^*_{\boldsymbol{s}}(f, \cdot)\|_p^{\theta} \right\}^{\frac{1}{\theta}}, \quad 1 \leqslant \theta < \infty, \qquad (1)$$

і

$$\|f\|_{S^{\Omega}_{p,\infty}B} \asymp \sup_{\boldsymbol{s} \geqslant 0} \frac{\|\delta^*_{\boldsymbol{s}}(f, \cdot)\|_p}{\Omega(2^{-\boldsymbol{s}})}, \ \theta = \infty, \qquad (2)$$

$\Omega(2^{-\boldsymbol{s}}) = \Omega(2^{-s_1}, \ldots, 2^{-s_d})$.

Зауважимо, що простори функцій $S^{\Omega}_{p,\theta}B(\mathbb{R}^d)$ є узагальненням відомих просторів $S^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}B(\mathbb{R}^d)$. У випадку $\Omega(\boldsymbol{t}) = \boldsymbol{t}^{\boldsymbol{r}} = t^{r_1} \cdot \ldots \cdot t^{r_d}$, $0 < r_j < l$, $j = \overline{1, d}$, простори $S^{\Omega}_{p,\theta}B(\mathbb{R}^d)$ та $S^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}B(\mathbb{R}^d)$ збігаються. Нагадаємо, що простори $S^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}B(\mathbb{R}^d)$ були введені Т. І. Амановим [5] і у випадку $\theta = \infty$ збігаються з просторами $S^{\boldsymbol{r}}_p H(\mathbb{R}^d)$, які вперше були розглянуті С. М. Нікольським [6]. Надалі, для спрощення записів, будемо використовувати замість $S^{\Omega}_{p,\theta}B(\mathbb{R}^d)$, а також $S^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}B(\mathbb{R}^d)$ та $S^{\boldsymbol{r}}_p H(\mathbb{R}^d)$ позначення $S^{\Omega}_{p,\theta}B$, $S^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}B$ і $S^{\boldsymbol{r}}_p H$ відповідно.

У випадку, коли $\|f\|_{S^{\Omega}_{p,\theta}B} \leqslant 1$, будемо говорити, що функція f належить класу $S^{\Omega}_{p,\theta}B$, зберігаючи при цьому для класів $S^{\Omega}_{p,\theta}B$ ті ж самі позначення, що і для просторів $S^{\Omega}_{p,\theta}B$.

2. Наближення цілими функціями. Дамо означення апроксимативних характеристик, які досліджуються.

Носієм узагальненої функції f будемо називати замикання $\overline{\mathfrak{N}}$ такої множини точок $\mathfrak{N} \subset \mathbb{R}^d$, що для довільної $\varphi \in S$, яка дорівнює нулю в $\overline{\mathfrak{N}}$, виконується рівність $\langle f, \varphi \rangle = 0$. Носій узагальненої функції f будемо позначати через $\operatorname{supp} f$. Також будемо говорити, що функція f зосереджена на множині G, якщо $\operatorname{supp} f \subseteq G$.

Для вектора $\boldsymbol{s} = (s_1, ..., s_d)$, $s_j \in \mathbb{Z}_+$, $j = \overline{1, d}$, і $f \in L_q(\mathbb{R}^d)$, $1 < q \leqslant \infty$, покладемо

$$S_{\bar{Q}_n}(f, \boldsymbol{x}) = \sum_{\|\boldsymbol{s}\|_1 < n} \delta^*_{\boldsymbol{s}}(f, \boldsymbol{x}), \tag{3}$$

де, як було позначено вище,

$$\delta^*_{\boldsymbol{s}}(f, \boldsymbol{x}) = \mathfrak{F}^{-1}\big(\chi_{Q^*_{2^{\boldsymbol{s}}}} \cdot \mathfrak{F} f\big),$$

і $\chi_{Q^*_{2^{\boldsymbol{s}}}}$ — характеристична функція множини $Q^*_{2^{\boldsymbol{s}}}$, а $\mathfrak{F} f$ і $\mathfrak{F}^{-1} f$ відповідно пряме й обернене перетворення Фур'є функції f.

Зазначимо, що $S_{\bar{Q}_n}(f, \boldsymbol{x})$ — функція з носієм на множині

$$\bar{Q}_n = \bigcup_{\|\boldsymbol{s}\|_1 \leqslant n} Q^*_{2^{\boldsymbol{s}}}.$$

Множина $\bar{Q}_n$ називається східчастим гіперболічним хрестом і при цьому $\operatorname{mes} \bar{Q}_n \asymp 2^n n^{d-1}$, де $\operatorname{mes} \bar{Q}_n$ позначає лебегову міру множини $\bar{Q}_n$.

Для $f \in L_q(\mathbb{R}^d)$, $1 < q \leqslant \infty$, розглянемо таку апроксимативну характеристику

$$\mathcal{E}_{\bar{Q}_n}\big(f\big)_q := \|f(\cdot) - S_{\bar{Q}_n}(f, \cdot)\|_q$$

і, відповідно, для функціонального класу $S^{\Omega}_{p,\theta} B$

$$\mathcal{E}_{\bar{Q}_n}\big(S^{\Omega}_{p,\theta} B\big)_q := \sup_{f \in S^{\Omega}_{p,\theta} B} \mathcal{E}_{\bar{Q}_n}\big(f\big)_q. \tag{4}$$

Нехай Θ — деяка множина в $\mathbb{Z}^d_+$, $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}(\Theta) = \bigcup\limits_{\boldsymbol{s} \in \Theta} Q^*_{2^{\boldsymbol{s}}}$. Тоді для $f \in L_q(\mathbb{R}^d)$, $1 < q \leqslant \infty$, покладемо

$$S_{\mathfrak{M}}(f, \boldsymbol{x}) = \sum_{\boldsymbol{s} \in \Theta} \delta^*_{\boldsymbol{s}}(f, \boldsymbol{x}).$$

Зауважимо, що $S_{\mathfrak{M}}(f,\boldsymbol{x})$ є цілою функцією, яка належить простору $L_q(\mathbb{R}^d)$ (див., наприклад, [2]) і $\operatorname{supp} S_{\mathfrak{M}}(f,\boldsymbol{x}) \subseteq \mathfrak{M}$.

Далі розглянемо апроксимативну характеристику

$$e_M^{\mathfrak{F}}\big(f\big)_q := \inf_{\Theta\colon \operatorname{mes}\mathfrak{M}\leqslant M} \|f(\cdot) - S_{\mathfrak{M}}(f,\cdot)\|_q\,,$$

і для функціонального класу $S^{\Omega}_{p,\theta}B$

$$e_M^{\mathfrak{F}}\big(S^{\Omega}_{p,\theta}B\big)_q := \sup_{f\in S^{\Omega}_{p,\theta}B} e_M^{\mathfrak{F}}\big(f\big)_q. \tag{5}$$

Безпосередньо з означення апроксимативних характеристик (4) і (5) випливає, що у випадку $\operatorname{mes}\bar{Q}_n \asymp \operatorname{mes}\mathfrak{M}$ виконується співвідношення

$$e_M^{\mathfrak{F}}\big(S^{\Omega}_{p,\theta}B\big)_q \ll \mathcal{E}_{\bar{Q}_n}\big(S^{\Omega}_{p,\theta}B\big)_q. \tag{6}$$

Наведемо твердження, яке буде використане у процесі доведення.

Теорема A [7, с. 150]. *Якщо $1 \leqslant p \leqslant p' \leqslant \infty$, то для цілої функції експоненціального типу $g_{\boldsymbol{\nu}} \in L_p(\mathbb{R}^d)$ має місце нерівність (різних метрик)*

$$\|g_{\boldsymbol{\nu}}\|_{L_{p'}(\mathbb{R}^d)} \leqslant 2^d \left(\prod_{j=1}^{d} \nu_k\right)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{p'}} \|g_{\boldsymbol{\nu}}\|_{L_p(\mathbb{R}^d)}.$$

Сформулюємо результати, у яких встановлено точні за порядком оцінки величин (4) і (5).

Теорема 1. *Нехай $1 < p < \infty$, $1 \leqslant \theta \leqslant \infty$, $\Omega(\boldsymbol{t}) = \omega(t_1\cdot\ldots\cdot t_d)$, де $\omega \in \Phi_{\alpha,l}$ з $\alpha > \frac{1}{p}$. Тоді має місце порядкове співвідношення*

$$\mathcal{E}_{\bar{Q}_n}\big(S^{\Omega}_{p,\theta}B\big)_\infty \asymp \omega(2^{-n})2^{\frac{n}{p}} n^{(d-1)\left(1-\frac{1}{\theta}\right)}. \tag{7}$$

Теорема 2. *Нехай $1 < p < \infty$, $1 \leqslant \theta \leqslant \infty$ і $\Omega(\boldsymbol{t}) = \omega(t_1\cdot\ldots\cdot t_d)$, де $\omega \in \Phi_{\alpha,l}$ з $\alpha > \frac{1}{p}$. Тоді для будь-яких натуральних n та $M = M(n)$ таких, що $M \asymp 2^n n^{d-1}$ справедливе порядкове співвідношення*

$$e_M^{\mathfrak{F}}\big(S^{\Omega}_{p,\theta}B\big)_\infty \asymp \omega(2^{-n})2^{\frac{n}{p}} n^{(d-1)\left(1-\frac{1}{\theta}\right)}. \tag{8}$$

Перш ніж перейти до доведення сформульованих теорем, відзначимо, що з оцінок (7) і (8) випливає, що $\mathcal{E}_{\bar{Q}_n}\big(S^{\Omega}_{p,\theta}B\big)_\infty \asymp e^{\mathfrak{F}}_M\big(S^{\Omega}_{p,\theta}B\big)_\infty$, де $M \asymp 2^n n^{d-1}$. Оскільки має місце співвідношення (6), то достатньо встановити оцінку зверху в теоремі 1 і оцінку знизу в теоремі 2.

***Доведення оцінки зверху в теоремі* 1.** Нехай $f \in S^{\Omega}_{p,\theta}B$. Тоді, скориставшись нерівністю Мінковського та теоремою A, можемо записати

$$\|f(\cdot) - S_{\bar{Q}_n}(f,\cdot)\|_\infty = \Bigg\|f(\cdot) - \sum_{\|\boldsymbol{s}\|_1 \leqslant n} \delta^*_{\boldsymbol{s}}(f,\cdot)\Bigg\|_\infty \leqslant \sum_{\|\boldsymbol{s}\|_1 > n} \|\delta^*_{\boldsymbol{s}}(f,\cdot)\|_\infty \ll$$

$$\ll \sum_{\|\boldsymbol{s}\|_1 > n} 2^{\frac{\|\boldsymbol{s}\|_1}{p}} \|\delta^*_{\boldsymbol{s}}(f,\cdot)\|_p. \tag{9}$$

Щоб продовжити оцінку (9), розглянемо спочатку випадок, коли $1 \leqslant \theta < \infty$. Тоді, застосувавши до останньої суми нерівність Гельдера (з відповідною модифікацією при $\theta = 1$) і врахувавши, що Ω задовольняє умову (S) з $\alpha > \frac{1}{p}$, будемо мати

$$\sum_{\|\boldsymbol{s}\|_1 > n} 2^{\frac{\|\boldsymbol{s}\|_1}{p}} \|\delta^*_{\boldsymbol{s}}(f,\cdot)\|_p \leqslant \left(\sum_{\|\boldsymbol{s}\|_1 > n} (\Omega(2^{-\boldsymbol{s}}))^{-\theta} \|\delta^*_{\boldsymbol{s}}(f,\cdot)\|_p^\theta\right)^{\frac{1}{\theta}} \times$$

$$\times \left(\sum_{\|\boldsymbol{s}\|_1 > n} \Big(\Omega(2^{-\boldsymbol{s}}) 2^{\frac{\|\boldsymbol{s}\|_1}{p}}\Big)^{\frac{\theta}{\theta-1}}\right)^{1-\frac{1}{\theta}} \ll$$

$$\ll \|f\|_{S^{\Omega}_{p,\theta}B} \left(\sum_{\|\boldsymbol{s}\|_1 > n} \left(\frac{\Omega(2^{-\boldsymbol{s}})}{2^{-\alpha\|\boldsymbol{s}\|_1}} 2^{-\left(\alpha - \frac{1}{p}\right)\|\boldsymbol{s}\|_1}\right)^{\frac{\theta}{\theta-1}}\right)^{1-\frac{1}{\theta}} \ll$$

$$\ll \frac{\omega(2^{-n})}{2^{-\alpha n}} 2^{-\left(\alpha - \frac{1}{p}\right)n} n^{(d-1)\left(1-\frac{1}{\theta}\right)} = \omega(2^{-n}) 2^{\frac{n}{p}} n^{(d-1)\left(1-\frac{1}{\theta}\right)}. \tag{10}$$

Нехай тепер $\theta = \infty$. Тоді, беручи до уваги, що згідно з (2)

$$\|\delta^*_{\boldsymbol{s}}(f,\cdot)\|_p \ll \Omega(2^{-\boldsymbol{s}}),$$

оскільки $\Omega \in \Phi_{\alpha,l}$ з $\alpha > \frac{1}{p}$, для останньої суми з (9) можемо записати

$$\sum_{\|\boldsymbol{s}\|_1 > n} 2^{\frac{\|\boldsymbol{s}\|_1}{p}} \|\delta_{\boldsymbol{s}}^*(f,\cdot)\|_p \ll \sum_{\|\boldsymbol{s}\|_1 > n} 2^{\frac{\|\boldsymbol{s}\|_1}{p}} \Omega(2^{-\boldsymbol{s}}) \ll$$

$$\ll \frac{\omega(2^{-n})}{2^{-\alpha n}} \sum_{\|\boldsymbol{s}\|_1 > n} 2^{-\left(\alpha - \frac{1}{p}\right)\|\boldsymbol{s}\|_1} \ll \omega(2^{-n}) 2^{\frac{n}{p}} n^{d-1}. \tag{11}$$

Таким чином, співставляючи (10) і (11), отримаємо оцінку зверху в (7)

$$\mathcal{E}_{\bar{Q}_n}\big(S^{\Omega}_{p,\theta}B\big)_\infty \ll \omega(2^{-n}) 2^{\frac{n}{p}} n^{(d-1)\left(1-\frac{1}{\theta}\right)}.$$

Доведення оцінки знизу в теоремі 2. Нехай

$$\Theta(n) = \big\{\boldsymbol{s} = (s_1, \ldots, s_d) \in \mathbb{Z}^d_+ : \ s_1 + \ldots + s_d = n\big\} \ \text{ і } \ \widetilde{Q}_n = \bigcup_{\boldsymbol{s} \in \Theta(n)} Q^*_{2^{\boldsymbol{s}}},$$

тоді $\operatorname{mes} \widetilde{Q}_n \asymp 2^n n^{d-1}$.

Вкажемо екстремальні функції $f \in S^{\Omega}_{p,\theta}B$, які реалізують шукану оцінку знизу. Покладемо

$$D_{\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{x}) = \prod_{j=1}^{d} D_{k_j}(x_j), \quad \boldsymbol{k} = (k_1, \ldots, k_d) \in \mathbb{Z}^d_+,$$

де

$$D_{k_j}(x_j) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \ \left(2 \sin \frac{x_j}{2} \cos \frac{2k_j + 1}{2} x_j\right) \cdot x_j^{-1}.$$

У роботі [8] показано, що для перетворення Фур'є функції $D_{\boldsymbol{k}}$ справедлива рівність

$$\mathfrak{F} D_{\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{x}) = \chi_{\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{x}) = \prod_{j=1}^{d} \chi_{k_j}(x_j),$$

де

$$\chi_{k_j}(x_j) = \begin{cases} 1, & k_j < |x_j| < k_j + 1, \\ \frac{1}{2}, & |x_j| = k_j, |x_j| = k_j + 1, \\ 0 & \text{— в інших випадках,} \end{cases} \quad \chi_0(x_j) = \begin{cases} 1, & |x_j| < 1, \\ \frac{1}{2}, & |x_j| = 1, \\ 0, & |x_j| > 1. \end{cases}$$

Відповідно для оберненого перетворення будемо мати

$$\mathfrak{F}^{-1}\chi_{\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{x}) = D_{\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{x}).$$

Відзначимо, що при $1 < p < \infty$ має місце оцінка [8]

$$\Big\| \sum_{\boldsymbol{k}\in\rho_+(\boldsymbol{s})} D_{\boldsymbol{k}}(\cdot) \Big\|_p \asymp 2^{\|\boldsymbol{s}\|_1\left(1-\frac{1}{p}\right)},$$

де

$$\rho_+(\boldsymbol{s}) := \Big\{ \boldsymbol{k} = (k_1, ..., k_d) :\ \eta(s_j)2^{s_j-1} \leqslant k_j < 2^{s_j},\ k_j \in \mathbb{Z}_+,\ j = \overline{1,d} \Big\}.$$

Розглянемо функцію

$$f_1(\boldsymbol{x}) = C_4\omega(2^{-n})2^{-n\left(1-\frac{1}{p}\right)}n^{-\frac{d-1}{\theta}} \sum_{\boldsymbol{s}\in\Theta(n)} \sum_{\boldsymbol{k}\in\rho_+(\boldsymbol{s})} D_{\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{x}), \quad C_4 > 0,$$

якщо $1 \leqslant \theta < \infty$, і

$$f_2(\boldsymbol{x}) = C_5\omega(2^{-n})2^{-n\left(1-\frac{1}{p}\right)} \sum_{\boldsymbol{s}\in\Theta(n)} \sum_{\boldsymbol{k}\in\rho_+(\boldsymbol{s})} D_{\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{x}), \quad C_5 > 0,$$

якщо $\theta = \infty$.

Переконаємося, що дані функції належать класам $S^{\Omega}_{p,\theta}B$ і $S^{\Omega}_{p,\infty}B$ відповідно.

Для f_1 будемо мати

$$\|f_1\|_{S^{\Omega}_{p,\theta}B} \asymp \left(\sum_{\boldsymbol{s}\in\Theta(n)} (\Omega(2^{-\boldsymbol{s}}))^{-\theta} \|\delta^*_{\boldsymbol{s}}(f_1,\cdot)\|_p^{\theta} \right)^{\frac{1}{\theta}} \asymp$$

$$\asymp \left((\omega(2^{-n}))^{\theta} 2^{-n\left(1-\frac{1}{p}\right)\theta} n^{-(d-1)} \sum_{\boldsymbol{s}\in\Theta(n)} (\Omega(2^{-\boldsymbol{s}}))^{-\theta} \Big\| \sum_{\boldsymbol{k}\in\rho_+(\boldsymbol{s})} D_{\boldsymbol{k}}(\cdot) \Big\|_p^{\theta} \right)^{\frac{1}{\theta}} \asymp$$

$$\asymp 2^{-n\left(1-\frac{1}{p}\right)} n^{-\frac{d-1}{\theta}} \left(\sum_{\boldsymbol{s}\in\Theta(n)} 2^{\|\boldsymbol{s}\|_1\left(1-\frac{1}{p}\right)} \right)^{\frac{1}{\theta}} =$$

$$= 2^{-n\left(1-\frac{1}{p}\right)} n^{-\frac{d-1}{\theta}} 2^{n\left(1-\frac{1}{p}\right)} \left(\sum_{\boldsymbol{s}\in\Theta(n)} 1 \right)^{\frac{1}{\theta}} \ll 1.$$

Для f_2 будемо мати

$$\|f_2\|_{S^{\Omega}_{p,\infty}} \asymp \sup_{\boldsymbol{s}\in\Theta(n)} (\Omega(2^{-\boldsymbol{s}}))^{-1} \|\delta^*_{\boldsymbol{s}}(f_2,\cdot)\|_p \asymp$$

$$\asymp \omega(2^{-n}) 2^{-n\left(1-\frac{1}{p}\right)} \sup_{\boldsymbol{s}\in\Theta(n)} (\Omega(2^{-\boldsymbol{s}}))^{-1} \left\| \sum_{\boldsymbol{k}\in\rho_+(\boldsymbol{s})} D_{\boldsymbol{k}}(\cdot) \right\|_p \asymp$$

$$\asymp 2^{-n\left(1-\frac{1}{p}\right)} \sup_{\boldsymbol{s}\in\Theta(n)} 2^{\|\boldsymbol{s}\|_1\left(1-\frac{1}{p}\right)} \ll 1.$$

Далі, нехай $\mathfrak{M}$ — довільна множина векторів $s = (s_1, \ldots, s_d)$ з цілими невід'ємними координатами така, що для $\mathfrak{N} = \bigcup_{s\in\mathfrak{M}} Q_{2^s}$ має місце співвідношення mes $\mathfrak{N} \leqslant M$. У подальших міркуваннях будемо вважати, що числа M і n пов'язані співвідношенням

$$\text{mes } \widetilde{Q}_n \leqslant \ 4 \text{ mes } \mathfrak{N} < \text{mes } \widetilde{Q}_{n+1}. \tag{12}$$

Тоді можемо записати

$$e^{\mathfrak{F}}_M\big(S^{\Omega}_{p,\theta}B\big)_\infty \geqslant e^{\mathfrak{F}}_M\big(f_1\big)_\infty = \inf_{\text{mes}\mathfrak{N}\leqslant M} \|f_1(\cdot) - S_{\mathfrak{M}}(f_1,\cdot)\|_\infty \geqslant$$

$$\geqslant \inf_{\text{mes}\mathfrak{N}\leqslant M} \big| \|f_1(\cdot)\|_\infty - \|S_{\mathfrak{M}}(f_1,\cdot)\|_\infty \big|. \tag{13}$$

Зауважимо, що в $S_{\mathfrak{M}}(f_1,\cdot)$, за рахунок вибору f_1, будуть входити лише ті доданки $\delta^*_s(f_1,\cdot)$, для яких $s \in \mathfrak{M} \cap \Theta(n)$. Відзначимо також, що має місце оцінка [9]

$$\left\| \sum_{\boldsymbol{s}\in\Theta(n)} \sum_{\boldsymbol{k}\in\rho_+(\boldsymbol{s})} D_{\boldsymbol{k}}(\cdot) \right\|_\infty \asymp 2^n n^{d-1}. \tag{14}$$

Скориставшись (14) та (12), (13) можемо продовжити наступним чином

$$e^{\mathfrak{F}}_M\big(S^{\Omega}_{p,\theta}\big)_\infty \geqslant \omega(2^{-n}) 2^{-n\left(1-\frac{1}{p}\right)} n^{-\frac{d-1}{\theta}} (2^n n^{d-1} - M) \gg$$

$$\gg \omega(2^{-n})2^{-n\left(1-\frac{1}{p}\right)}n^{-\frac{d-1}{\theta}}2^n n^{d-1} = \omega(2^{-n})2^{\frac{n}{p}}n^{(d-1)\left(1-\frac{1}{\theta}\right)}.$$

Аналогічно, як і для f_1, у випадку $\theta = \infty$, отримаємо

$$\|f_2(\cdot) - S_{\mathfrak{M}}(f_2,\cdot)\|_\infty \gg \omega(2^{-n})2^{-\frac{n}{p}}n^{d-1}.$$

Оцінки знизу в теоремі 2 встановлено.

***Зауваження* 1.** Відзначимо, що результат теореми 1 доповнює дослідження величини $\mathcal{E}_{\bar{Q}_n}(S^{\Omega}_{p,\theta}B)_q$ у випадку $q = \infty$. Для ряду інших співвідношень між параметрами p, q оцінки даної апрокисмативної характеристики встановлено в [4, 10]. Окрім цього, оцінку (7) у випадку, коли $\Omega(\boldsymbol{t}) = \boldsymbol{t}^{\boldsymbol{r}} = t^{r_1}\cdot\ldots\cdot t^{r_d}$, $0 < r_j < l$, $j = \overline{1,d}$ встановлено в [9, 11].

***Зауваження* 2.** Питанню знаходження точних за порядком оцінок апроксимативної характеристики аналогічної до величини (4) періодичних функцій багатьох змінних з класів типу Нікольського-Бєсова у рівномірній метриці (наближення східчастими гіперболічними сумами Фур'є) присвячені роботи [12 — 15].

***Зауваження* 3.** Порядкові оцінки величини $e^{\mathfrak{F}}_M\big(S^{\Omega}_{p,\theta}B\big)_q$ для ряду інших співвідношень між параметрами p, q і θ встановлено в [16], де також показано, що існують співвідношення між параметрами p, q, θ при яких величини $e^{\mathfrak{F}}_M\big(S^{\Omega}_{p,\theta}B\big)_q$ і $\mathcal{E}_{\bar{Q}_n}\big(S^{\Omega}_{p,\theta}B\big)_q$ мають різні порядки. Окрім цього, оцінку (8) у випадку, коли $\Omega(\boldsymbol{t}) = \boldsymbol{t}^{\boldsymbol{r}} = t^{r_1}\cdot\ldots\cdot t^{r_d}$, $0 < r_j < l$, $j = \overline{1,d}$, встановлено в [9].

***Зауваження* 4.** Дослідження аналогічної до (5) апроксимативної характеристики класів типу Нікольського–Бєсова періодичних функцій багатьох змінних у рівномірній метриці (так зване найкраще ортогональне тригонометричне наближення) проводилося в роботах [17, 18].

1. *Бари Н. К., Стечкин С. Б.* Наилучшие приближения и дифференциальные свойства двух сопряженных функций // Тр. Моск. мат. о-ва. — 1956. — **5**. — С. 483 – 522.

2. *Лизоркин П. И.* Обобщенное лиувиллевское дифференцирование и метод мультипликаторов в теории вложений классов дифференцируемых функций // Тр. Мат. ин-та АН СССР. — 1969. — **105**. — С. 89 – 167.

3. *Владимиров В. С.* Уравнения математической физики. — М.: Наука, 1967. — 436 с.

4. *Стасюк С. А., Янченко С. Я.* Найкраще наближення класів $B^{\Omega}_{p,\theta}$ функцій багатьох змінних у просторі $L_p(\mathbb{R}^d)$ // Теорія наближення функцій та суміжні питання: Зб. праць Ін-ту математики НАН України. — 2008. — **5**, № 1. — С. 367 – 384.
5. *Аманов Т. И.* Теоремы представления и вложения для функциональных пространств $S^{(r)}_{p,\theta}B(\mathbb{R}_n)$ и $S^{(r)*}_{p,\theta}B$, $(0 \leqslant x_j \leqslant 2\pi;\ j = 1, \ldots, n)$ // Тр. Мат. ин-та АН СССР. — 1965. — **77**. — С. 5 – 34.
6. *Никольский С. М.* Функции с доминирующей смешанной производной, удовлетворяющей кратному условию Гельдера // Сиб. мат. журн. — 1963. — **4**, № 6. — С. 1342 – 1364.
7. *Никольский С. М.* Приближение функций многих переменных и теоремы вложения. — М.: Наука, 1969. — 480 с.
8. *Wang Heping, Sun Yongsheng.* Approximation of multivariate functions with certain mixed smoothness by entire functions // Northeast. Math. J. — 1995. — **11**, № 4. — P. 454 – 466.
9. *Янченко С. Я.* Оцінки апроксимативних характеристик класів функцій $S^r_{p,\theta}B(\mathbb{R}^d)$ у рівномірній метриці // Теорія наближення функцій та суміжні питання: Зб. праць Ін-ту математики НАН України. — 2013. — **10**, № 1. — С. 328 – 340.
10. *Янченко С. Я.* Наближення класів $B^{\Omega}_{p,\theta}$ функцій багатьох змінних цілими функціями у просторі $L_q(\mathbb{R}^d)$ // Укр. мат. журн. — 2010. — **62**, № 1. — С. 123 – 135.
11. *Янченко С. Я.* Наближення функцій із класів $S^r_{p,\theta}B$ у рівномірній метриці // Укр. мат. журн. — 2013. — **65**, № 5. — С. 698 – 705.
12. *Романюк А. С.* Приближение классов $B^r_{p,\theta}$ периодических функций многих переменных линейными методами и наилучшие приближения // Мат. сб. — 2004. — **195**, № 2. — С. 91 – 116.
13. *Темляков В. Н.* Оценки асимптотических характеристик классов функций с ограниченной смешанной производной или разностью // Тр. Мат. ин-та АН СССР. — 1988. — **189**. — С. 138 – 168.
14. *Стасюк С. А.* Наближення класів $B^{\Omega}_{p,\theta}$ періодичних функцій багатьох змінних у рівномірній метриці // Укр. мат. журн. — 2002. — **54**, № 11. — С. 1551 – 1559.
15. *Стасюк С. А.* Наилучшее приближение периодических функций нескольких переменных из классов $B^{\omega}_{p,\theta}$ в равномерной метрике // Тр. ИММ УрО РАН. — 2012. — **18**, № 4. — С. 258 – 266.
16. *Миронюк В. В., Янченко С. Я.* Наближення функцій з узагальнених класів Нікольського–Бєсова цілими функціями у просторах Лебега // Мат. Студії. — 2013. — **39**, № 2. — С. 190 – 202.

17. *Романюк А. С.* Наилучшие тригонометрические приближения классов периодических функций многих переменных в равномерной метрике // Мат. заметки. — 2007. — **82**, № 2. — С. 247 – 261.

18. *Конограй А. Ф., Стасюк С. А.* Найкращі ортогональні тригонометричні наближення класів $B^{\Omega}_{p,\theta}$ періодичних функцій багатьох змінних // Теорія наближення функцій та суміжні питання: Зб. праць Ін-ту математики НАН України. — 2007. — **4**, № 1. — С. 151 – 171.