УДК 517.5

А. Л. Шидліч* (Ін–т математики НАН України, Київ)

ПОРЯДКОВІ ОЦІНКИ ФУНКЦІОНАЛІВ, У ТЕРМІНАХ ЯКИХ ВИРАЖАЮТЬСЯ НАЙКРАЩІ n-ЧЛЕННІ НАБЛИЖЕННЯ КЛАСІВ $\mathcal{F}^{\psi}_{q,r}$

We obtain the exact order estimates of the functionals, which are the expressions of best n-term approximations of the classes of functions of several variables $\mathcal{F}^{\psi}_{q,r}$. The obtained results are applied to finding the approximative characteristics in the spaces S^p and L_p.

В роботі отримано точні порядкові оцінки функціоналів, у термінах яких виражаються найкращі n-членні наближення класів функцій багатьох змінних $\mathcal{F}^{\psi}_{q,r}$. Отримані результати застосовано до знаходження апроксимативних характеристик просторів S^p та L_p.

1. Вступ. Нехай $\Psi = \Psi(k)$, $k = 1, 2, \ldots,$ — довільна незростаюча додатна числова послідовність, для якої

$$\lim_{k\to+\infty} \Psi(k) = 0. \tag{1.1}$$

Розглянемо функціонали $H_n(\Psi, s)$, $n = 1, 2, \ldots$, котрі при $s \in (0, 1]$ задаються рівністю

$$H_n(\Psi, s) = \sup_{l>n} (l-n) \left(\sum_{k=1}^{l} \Psi^{-s}(k) \right)^{-\frac{1}{s}}, \tag{1.2}$$

а при $s \in (1, \infty)$ — рівністю

$$H_n(\Psi, s) = \left((l_n - n)^{s'} \left(\sum_{j=1}^{l} \Psi^{-s}(j) \right)^{-\frac{s'}{s}} + \sum_{j=l_n+1}^{\infty} \Psi^{s'}(j) \right)^{\frac{1}{s'}}, \tag{1.3}$$

в якій $\frac{1}{s} + \frac{1}{s'} = 1$,

*Робота виконана за часткової підтримки програми FP7-People-2011-IRSES номер проекту 295164 (EUMLS: EU–Ukrainian Mathematicians for Life Sciences).

$$\sum_{j=1}^{\infty} \Psi^{s'}(j) < \infty, \tag{1.4}$$

а число l_n для кожного $n \in \mathbb{N}$ визначається співвідношенням

$$\Psi^{-s}(l_n) \le \frac{1}{l_n - n} \sum_{j=1}^{l_n} \Psi^{-s}(j) < \Psi^{-s}(l_n + 1). \tag{1.5}$$

У термінах функціоналів $H_n(\Psi, s)$ формулюються розв'язки багатьох екстремальних задач теорії наближень (див., наприклад, [1], [2] (гл. XI), [3−7]). Зокрема, О. І. Степанець у роботах [1], [2] (гл. XI) показав, що найкращі n-членні наближення у просторах S^p класів функцій багатьох змінних $\mathcal{F}^{\psi}_{q,r}$ збігаються за певних умов зі значеннями величин $H_n(\Psi, s)$ (більш детально ці результати будуть розглянуті у підрозділі 4). Тому природнім є дослідження асимптотичної поведінки функціоналів $H_n(\Psi, s)$ у залежності від вибору послідовності Ψ та параметра s, що їх визначають.

Дані дослідження є продовженням досліджень робіт [8−12]. У випадку, коли послідовності $\Psi = \Psi(k)$ є слідами на множині натуральних чисел деяких опуклих функцій, порядкові оцінки для величин $H_n(\Psi, s)$ було отримано в [8, 9], а для їх інтегральних аналогів — у роботі [7].

У даній роботі розглядається випадок, коли послідовності Ψ є східчастими, а впорядковані множини їх значень є слідами на множині натуральних чисел деяких додатних функцій ψ, які спадають до нуля швидше довільної степеневої функції, але не швидше за геометричну прогресію. Основні результати роботи сформульовані у підрозділі 2, їх доведення — у підрозділі 3, а у підрозділах 4 та 5 наведено застосування цих результатів до оцінок важливих апроксимативних характеристик у просторах S^p та L_p відповідно.

Зауважимо, що величини $H_n(\Psi, s)$ для східчастих функцій Ψ розглядались також у роботах [10, 11] (випадок, коли функції ψ спадають до нуля не швидше деякої степеневої функції) і [12] (випадок, коли функції ψ спадають до нуля швидше довільної геометричної прогресії).

2. Основний результат. Нехай $d \in \mathbb{N}$; M, c_1 і c_2 — деякі додатні числа; $\nu = \{\nu_i\}_{i=0}^{\infty}$ — довільна зростаюча послідовність цілих невід'ємних чисел таких, що $\nu_0 := 0$, а при всіх m, більших ніж деяке число k_0, виконується умова

$$M(m-c_1)^d < V_m := \sum_{i=0}^{m} \nu_i \leq M(m+c_2)^d. \tag{2.1}$$

Тоді через $S_d(\nu, M) = S_d(\nu, M, c_1, c_2)$ позначимо множину всіх додатних незростаючих послідовностей $\Psi = \Psi(k)$, $k = 1, 2, \ldots$, які задовольняють умову (1.1) і зображуються у вигляді

$$\Psi(k) = \psi(m), \quad k \in (V_{m-1}, V_m], \quad m = 1, 2, \ldots, \tag{2.2}$$

де ψ — спадна послідовність значень послідовності Ψ.

Будемо вважати послідовності ψ слідом на множині натуральних чисел $\mathbb{N}$ деяких спадних додатних функцій $\psi(t)$ від неперервного аргументу $t \in [1, \infty)$. Крім цього, позначимо через $\mathfrak{M}'_\infty$ множину всіх додатних опуклих вниз функцій $\psi(t)$, $t \geq 1$, що задовольняють умови

$$\lim_{t\to\infty} \psi(t) = 0, \tag{2.3}$$

$$\alpha(\psi, t) := \frac{\psi(t)}{t|\psi'(t)|} \downarrow 0 \tag{2.4}$$

і $\psi(t)/|\psi'(t)| \uparrow \infty$. Через $\mathfrak{M}^c_\infty$ позначимо множину всіх додатних опуклих вниз функцій $\psi(t)$, $t \geq 1$, які задовольняють умови (2.3), (2.4) і

$$K_1 \leq t\alpha(\psi, t) = \psi(t)/|\psi'(t)| \leq K_2, \quad t \geq 1.^{1} \tag{2.5}$$

Зазначимо, що природними представниками множин $\mathfrak{M}'_\infty$ та $\mathfrak{M}^c_\infty$ є, зокрема, функції $\exp(-\alpha t^s)$, $\alpha > 0$, у випадках, коли $s \in (0, 1)$ та $s = 1$ відповідно.

Теорема 2.1. *Нехай $s \in (0, \infty)$, функція Ψ належить множині $S_d(\nu, M)$, а послідовність її значень є слідом на множині натураль-*

[1] Через K, K_1, $K_2, \ldots$ скрізь у роботі позначаються деякі додатні сталі, що не залежать від величин, які є параметрами (в даному випадку — від змінної t).

них чисел деякої функції ψ з множини $\mathfrak{M}'_\infty$ або $\mathfrak{M}^c_\infty$. Тоді

$$H_n(\Psi; s) \asymp \frac{\psi(m_n)}{(n\alpha(\psi, m_n))^{\frac{1}{s}-1}},^{2} \tag{2.6}$$

де

$$m_n := (n/M)^{\frac{1}{d}}. \tag{2.7}$$

Зазначимо, що у випадку, коли для послідовності $\Psi \in S_d(M)$ послідовність її різних значень є слідом на множині натуральних чисел деякої функції ψ, що задовольняє умову (2.4), ряд в (1.4) збігається. Дійсно, у такому випадку внаслідок теореми 2 роботи [13] для довільного $\beta > 0$ маємо $\psi(t) \ll t^{-\beta}$ і тому

$$\sum_{j=1}^{\infty} \Psi^{s'}(j) = \sum_{k=1}^{\infty} \nu_k \psi^{s'}(k) \ll \sum_{k=1}^{\infty} k^{d-1} \psi^{s'}(k) \ll \sum_{k=1}^{\infty} k^{d-1} k^{-s'\beta} < \infty.$$

У випадку, коли послідовність Ψ належить множині $S_d(\nu, M)$, а впорядкована множина її значень є слідом на множині натуральних чисел деякої функції ψ, яка спадає до нуля не швидше деякої степеневої функції, аналогічні оцінки величин $H_n(\Psi, s)$ були отримані в роботі [10] (див. також [11]). Якщо ж ψ спадає до нуля швидше довільної геометричної прогресії, то аналогічні оцінки величин $H_n(\Psi, s)$ отримано в роботі [12].

3.1. Деякі допоміжні твердження. Перед доведенням теореми 2.1 встановимо декілька допоміжних тверджень для опуклих вниз функцій, які будуть далі суттєво використовуватися.

Наслідуючи О. І. Степанця [2] (§3.12) (див. також [14]), для довільної додатної опуклої вниз функції $\psi(t)$, $t \geq 1$, яка задовольняє умову (2.3) (у такому разі пишемо $\psi \in \mathfrak{M}$), розглянемо такі величини $\eta(\psi, t)$ та $\mu(\psi, t)$, що

$$\psi(\eta(\psi, t)) = \frac{1}{2}\psi(t), \quad t \geq 1, \tag{3.1}$$

[2]Тут і далі для додатних послідовностей $a(n)$ та $b(n)$ вираз "$a(n) \asymp b(n)$" означає, що існують такі сталі $K_3, K_4 > 0$, що при всіх $n \in \mathbb{N}$ виконуються нерівності $a(n) \leq K_4 b(n)$ (в такому випадку пишемо "$a(n) \ll b(n)$") і $a(n) \geq K_3 b(n)$ (в такому випадку пишемо "$a(n) \gg b(n)$").

і

$$\mu(\psi,t)=\frac{t}{\eta(\psi,t)-t}.$$

Внаслідок строгої монотонності функції ψ, величина $\eta(\psi,t)$ з (3.1) визначається єдиним чином: $\eta(\psi,t)=\psi^{-1}(\psi(t)/2)$, $t\geq 1$, де $\psi^{-1}(\cdot)$ — функція, обернена до ψ.

Далі, розглянемо множини

$$\mathfrak{M}_\infty^+=\big\{\psi\in\mathfrak{M}\ :\ \ \mu(\psi;t)\uparrow\infty\big\}$$

і

$$F=\big\{\psi\in\mathfrak{M}:\eta'(\psi,t)\leq K\big\}.$$

Внаслідок теорем 12.1 і 13.1 з [2] (§3.12) (див. також теореми 1 та 2 [14]), робимо висновок, що довільна функція з множини $\mathfrak{M}'_\infty$ чи $\mathfrak{M}^c_\infty$ належить множинам $\mathfrak{M}^+_\infty\subset F$.

***Зауваження* 3.1.** На підставі зауважень 13.1 та 13.2 з [2] (§3.12) (див. також зауваження 1 та 2 [14]) для довільної функції $\psi\in F$ (і, зокрема, для довільної функції $\psi\in\mathfrak{M}^+_\infty$) виконуються співвідношення:

$$K_5\big(\eta(\psi,t)-t\big)\leq\psi(t)/|\psi'(t)|\leq K_6\big(\eta(\psi,t)-t\big),\quad t\geq 1,$$

і

$$2\big(\eta(\psi,t)-t\big)\leq\eta(\psi,\eta(\psi,t))-\eta(\psi,t)\leq K\big(\eta(\psi,t)-t\big),\quad t\geq 1.$$

Твердження 3.1. *Для довільних фіксованих чисел $d\geq 1$ та $c>0$ і для будь-якої функції ψ з множин $\mathfrak{M}'_\infty$ чи $\mathfrak{M}^c_\infty$ існує така стала $K_c>0$, що при всіх $t\geq 1$:*

$$1\leq\frac{\psi(t^{1/d})}{\psi((t+c)^{1/d})}\leq K_c. \tag{3.2}$$

Доведення. Якщо функція ψ належить до множин $\mathfrak{M}'_\infty$ чи $\mathfrak{M}^c_\infty$, то при всіх $t\geq 1$ виконується нерівність $|\psi'(t)|/\psi(t)\leq K$. Звідси випливає, що для довільних $d \geq 1$, $c > 0$ і $t \geq 1$,

$$\int\limits_{t^{1/d}}^{(t+c)^{1/d}} \frac{|\psi'(\tau)|}{\psi(\tau)} d\tau \leq K\big((t+c)^{1/d} - t^{1/d}\big) \leq K\,c.$$

З іншого боку маємо

$$\int\limits_{t^{1/d}}^{(t+c)^{1/d}} \frac{|\psi'(\tau)|}{\psi(\tau)} d\tau = -\int\limits_{t^{1/d}}^{(t+c)^{1/d}} \frac{\psi'(\tau)}{\psi(\tau)} d\tau = \ln \frac{\psi(t^{1/d})}{\psi((t+c)^{1/d})}.$$

Таким чином, існує така стала $K_c > 0$, що при всіх $t \geq 1$ виконується співвідношення (3.2).

Твердження 3.2. *Для довільних фіксованих чисел $d \geq 1$, $c > 0$ і для будь-якої функції ψ з множин $\mathfrak{M}'_\infty$ чи $\mathfrak{M}^c_\infty$ існують такі сталі $K_{c,1}, K_{c,2} > 0$, що при всіх $t \geq 1$:*

$$K_{c,1} \leq \frac{\psi(t^{1/d})/|\psi'(t^{1/d})|}{\psi((t+c)^{1/d})/|\psi'((t+c)^{1/d})|} \leq K_{c,2}. \tag{3.3}$$

Доведення. Для довільної функції $\psi \in \mathfrak{M}^c_\infty$ справедливість співвідношення (3.3) очевидна.

Якщо ж $\psi \in \mathfrak{M}'_\infty$, то функція $\psi(t)/|\psi'(t)|$ монотонно зростає. Тому

$$\frac{\psi(t^{1/d})/|\psi'(t^{1/d})|}{\psi((t+c)^{1/d})/|\psi'((t+c)^{1/d})|} \leq 1. \tag{3.4}$$

З іншого боку внаслідок (2.4) величина $\alpha(\psi;t) = \dfrac{\psi(t)}{t|\psi'(t)|}$ монотонно спадає до нуля. Звідси

$$\frac{\psi(t^{1/d})/|\psi'(t^{1/d})|}{\psi((t+c)^{1/d})/|\psi'((t+c)^{1/d})|} = \frac{t^{1/d}}{(t+c)^{1/d}} \cdot \frac{\alpha(\psi;t^{1/d})}{\alpha(\psi;(t+c)^{1/d})} \geq K. \tag{3.5}$$

Об'єднуючи співвідношення (3.4) та (3.5), робимо висновок, що і в цьому випадку існують такі сталі $K_{c,1}$, $K_{c,2} > 0$, що при всіх $t \geq 1$ виконується співвідношення (3.3).

Твердження 3.3. *Якщо $\psi \in \mathfrak{M}_\infty^+$ і для деяких послідовностей натуральних чисел a_n та b_n виконується співвідношення*

$$\psi(a_n) \asymp \psi(b_n), \tag{3.6}$$

то

$$a_n \asymp b_n.$$

Доведення. Із співвідношення (2.4) випливає, що при всіх $t \geq 1$

$$\frac{1}{t} \leq K \frac{|\psi'(t)|}{\psi(t)}, \quad K = \mathrm{const}.$$

Інтегруючи ліву і праву частину цієї нерівності в межах від a до b $(1 \leq a < b)$, отримуємо

$$\ln \frac{b}{a} \leq K \ln \frac{\psi(a)}{\psi(b)}. \tag{3.7}$$

Поклавши у (3.7) $\bar{a}_n = \min\{a_n, b_n\}$ і $\bar{b}_n = \max\{a_n, b_n\}$, внаслідок (3.6) робимо висновок, що існує така стала $K_0 > 1$, що при всіх $n \in \mathbb{N}$ має місце співвідношення $\bar{b}_n \leq K_0 \bar{a}_n$, звідки

$$1/K_0 a_n \leq b_n \leq K_0 a_n.$$

3.2. *Доведення теореми* 2.1. Розглянемо випадок, коли $s \in (0, 1]$. Внаслідок (2.2) величини $H_n(\Psi; s)$ можна подати у вигляді

$$H_n(\Psi, s) = \sup_{l > n} (l - n) \left(\sum_{j=1}^{l} \frac{1}{\Psi^s(j)} \right)^{-\frac{1}{s}} =$$

$$= \sup_{l > n} (l - n) \left(\sum_{k=1}^{k_l - 1} \frac{\nu_k}{\psi^s(k)} + \frac{l - V_{k_l - 1}}{\psi^s(k_l)} \right)^{-\frac{1}{s}} =: \widetilde{H}_n(\psi, s), \tag{3.8}$$

де через k_l, $l \in \mathbb{N}$, позначається такий номер, що

$$V_{k_l - 1} < l \leq V_{k_l}. \tag{3.9}$$

Внаслідок (2.1) при всіх $l > n \geq k_0$ маємо

$$(l/M)^{\frac{1}{d}} - c_2 \leq k_l < (l/M)^{\frac{1}{d}} + c_1 + 1. \tag{3.10}$$

Із співвідношення (2.1) також випливає, що

$$\nu_k \asymp k^{d-1}, \tag{3.11}$$

і тому для довільного $s > 0$

$$\sum_{k=1}^{l} \frac{\nu_k}{\psi^s(k)} \asymp \sum_{k=1}^{l} \frac{k^{d-1}}{\psi^s(k)}. \tag{3.12}$$

Оскільки функція

$$f(t) = f(\psi, t) := \frac{\psi^s(t)}{t^{d-1}}, \quad t \geq 1, \tag{3.13}$$

монотонно спадає, то для довільного $l \in \mathbb{N}$,

$$\int_1^l \frac{t^{d-1}dt}{\psi^s(t)} \leq \sum_{k=1}^{l} \frac{k^{d-1}}{\psi^s(k)} \leq \int_1^{l+1} \frac{t^{d-1}dt}{\psi^s(t)}. \tag{3.14}$$

Спочатку покажемо, що для довільної функції ψ з множин $\mathfrak{M}'_\infty$ чи $\mathfrak{M}^c_\infty$ має місце співвідношення

$$\sum_{k=1}^{l} \frac{k^{d-1}}{\psi^s(k)} \asymp \int_1^l \frac{t^{d-1}dt}{\psi^s(t)} \asymp \frac{l^d \alpha(\psi, l)}{\psi^s(l)}, \tag{3.15}$$

де величина $\alpha(\psi, l)$ визначається за співвідношенням (2.4).

Для будь-якого $t \geq 1$ маємо

$$f'(t) = \left(\frac{\psi^s(t)}{t^{d-1}}\right)' = -\frac{\psi^s(t)}{t^{d-1}} \left(s\frac{|\psi'(t)|}{\psi(t)} + \frac{d-1}{t}\right)$$

і

$$\frac{|f'(t)|}{f(t)} = s\frac{|\psi'(t)|}{\psi(t)} + \frac{d-1}{t}. \tag{3.16}$$

Звідси випливає, що для довільної функції $\psi \in \mathfrak{M}'_\infty$ функція $f(t){=}f(\psi,t)$ також належить множині $\mathfrak{M}'_\infty$.

Оскільки для довільного $l > 1$,

$$\int\limits_1^l \frac{t^{d-1}dt}{\psi^s(t)} = \int\limits_1^l \frac{dt}{f(t)} = \frac{l}{f(l)} - \frac{1}{f(1)} - \int\limits_1^l \frac{dt}{\alpha(f;t)f(t)},$$

то, враховуючи монотонне спадання до нуля величини $\alpha(f;t){=}f(t)/(t|f'(t)|)$, отримуємо

$$\int\limits_1^l \frac{dt}{f(t)} \geq \frac{\alpha(f;l)}{1+\alpha(f;l)}\left(\frac{l}{f(l)} - \frac{1}{f(1)}\right) \gg \frac{l\alpha(f,l)}{f(l)}. \tag{3.17}$$

З іншого боку, оскільки $f \in \mathfrak{M}'_\infty$, то функція $f(t)/|f'(t)|$ зростає. Тому

$$\int\limits_1^l \frac{dt}{f(t)} = \int\limits_1^l \left(\frac{|f'(t)|}{f^2(t)} \cdot \frac{f(t)}{|f'(t)|}\right) dt \leq$$

$$\leq \frac{f(l)}{|f'(l)|} \int\limits_1^l \frac{|f'(t)|}{f^2(t)} dt \asymp \frac{1}{|f'(l)|} = \frac{l\alpha(f,l)}{f(l)}. \tag{3.18}$$

Крім того, внаслідок означення множини $\mathfrak{M}'_\infty$ та (3.16),

$$\frac{1}{\alpha(f,l)} = \frac{l|f'(l)|}{f(l)} = s\frac{l|\psi'(l)|}{\psi(l)} + d - 1 \asymp \frac{l|\psi'(l)|}{\psi(l)} \asymp \frac{1}{\alpha(\psi,l)}. \tag{3.19}$$

На підставі (3.17) – (3.19) бачимо, що

$$\int\limits_1^l \frac{t^{d-1}dt}{\psi_1^s(t)} = \int\limits_1^l \frac{dt}{f(t)} \asymp \frac{l\alpha(f,l)}{f(l)} \asymp \frac{l^d\alpha(\psi,l)}{\psi^s(l)}. \tag{3.20}$$

Об'єднуючи співвідношення (3.20) та (3.14) і враховуючи твердження 3.1 та 3.2, робимо висновок, що у випадку, коли $\psi \in \mathfrak{M}'_\infty$ має місце співвідношення (3.15).

Нехай тепер $\psi \in \mathfrak{M}_\infty^c$. Внаслідок означення множини $\mathfrak{M}_\infty^c$ для функції $f(t) = f(\psi,t)$ вигляду (3.13), величина $\alpha(f;t) = f(t)/(t|f'(t)|)$ монотонно спадає до нуля при $t\to\infty$ і

$$K_7 \le \frac{|f'(t)|}{f(t)} \le K_8.$$

Звідси випливає

$$\int\limits_1^l \frac{t^{d-1}dt}{\psi^s(t)} = \int\limits_1^l \frac{dt}{f(t)} \le \frac{1}{K_7}\int\limits_1^l \frac{|f'(t)|}{f^2(t)}dt \asymp \frac{1}{f(l)} = \frac{l^{d-1}}{\psi^s(l)}. \tag{3.21}$$

З іншого боку, внаслідок (3.14) маємо

$$\int\limits_1^{l+1} \frac{t^{d-1}dt}{\psi^s(t)} \ge \sum_{k=1}^{l}\frac{k^{d-1}}{\psi^s(k)} \ge \frac{l^{d-1}}{\psi^s(l)}. \tag{3.22}$$

Об'єднуючи співвідношення (3.14), (3.21) та (3.22) і враховуючи твердження 3.1, отримуємо

$$\sum_{k=1}^{l}\frac{k^{d-1}}{\psi^s(k)} \asymp \int\limits_1^l \frac{t^{d-1}dt}{\psi^s(t)} \asymp \frac{l^{d-1}}{\psi^s(l)}. \tag{3.23}$$

Звідки внаслідок (2.5) робимо висновок, що і в цьому випадку має місце співвідношення (3.15).

Далі, для довільного фіксованого $c>0$, достатньо великих $n\in\mathbb{N}$ і $l\ge n$, розглянемо функцію

$$W_n(l,c) := (l-n)\Bigg(\int\limits_1^{k(l)} \frac{t^{d-1}dt}{\psi^s(t)}\Bigg)^{-\frac{1}{s}},$$

де

$$k(l) = k(l,c) := (l/M)^{\frac{1}{d}} + c. \tag{3.24}$$

На підставі (3.14), (3.8) – (3.12), маємо

$$\sup_{l>n,\, l\in\mathbb{N}} W_n(l,c_1+2) \ll \widetilde{H}_n(\psi,s) \ll \sup_{l\ge n} W_n(l,-c_2-1). \tag{3.25}$$

Функція $W_n(l,c)$ є неперервно диференційовною, $W_n(n,c) = 0$ і $W_n(l,c) > 0$ при $l > n$. Крім того, внаслідок монотонного спадання до нуля функції $f(\psi,t)$ бачимо, що

$$W_n(l,c) \le l\left(\int\limits_{k(l)/2}^{k(l)} \frac{t^{d-1}dt}{\psi^s(t)}\right)^{-\frac{1}{s}} \le \frac{l}{\left(\frac{k(l)}{2}\right)^{\frac{d}{s}}}\psi\left(\frac{k(l)}{2}\right) \underset{l\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Тому існує принаймні одна точка l_n, $l_n > n$, яка є точкою максимуму функції $W_n(l,c)$.

При всіх $l > n$ похідна функції $W_n(l,c)$ існує і має вигляд

$$W_n'(l,c) = \left(\int\limits_1^{k(l)} \frac{t^{d-1}dt}{\psi^s(t)} - \frac{k^{d-1}(l)}{s\psi^s(k(l))}\cdot\frac{l-n}{dM^{\frac{1}{d}}l^{1-\frac{1}{d}}}\right)\left(\int\limits_1^{k(l)} \frac{t^{d-1}dt}{\psi^s(t)}\right)^{\frac{-s-1}{s}}, \quad (3.26)$$

де

$$\lim_{l\to\infty}\frac{k^{d-1}(l)}{l^{1-\frac{1}{d}}} = \lim_{l\to\infty}\left(\frac{(l/M)^{\frac{1}{d}}+c}{l^{\frac{1}{d}}}\right)^{d-1} = M^{\frac{1-d}{d}}.$$

При цьому, оскільки в точці максимуму l_n $W_n'(l_n,c) = 0$, то із співвідношення (3.26) випливає

$$(l_n - n)\left(\int\limits_1^{k(l_n)} \frac{t^{d-1}dt}{\psi^s(t)}\right)^{-1} = dsM^{\frac{1}{d}}\frac{\psi^s\big(k(l_n)\big)l_n^{1-\frac{1}{d}}}{k^{d-1}(l_n)} \asymp \psi^s\big(k(l_n)\big). \quad (3.27)$$

Таким чином, на підставі (3.20) та (3.27) отримуємо

$$\sup_{l\ge n} W_n(l,c) = W_n(l_n,c) = \frac{l_n - n}{\int_1^{k(l_n)} \frac{t^{d-1}dt}{\psi^s(t)}}\cdot\left(\int\limits_1^{k(l_n)} \frac{t^{d-1}dt}{\psi^s(t)}\right)^{1-\frac{1}{s}} \asymp$$

$$\asymp \psi^s(k(l_n))\left(\frac{k^d(l_n)\alpha\big(\psi;k(l_n)\big)}{\psi^s\big(k(l_n)\big)}\right)^{1-\frac{1}{s}} = \frac{\psi\big(k(l_n)\big)}{\big(k^d(l_n)\alpha\big(\psi;k(l_n)\big)\big)^{\frac{1}{s}-1}}. \quad (3.28)$$

У цьому співвідношенні внаслідок того, що $l_n \geq n$, маємо

$$\frac{\psi\big(k(l_n)\big)}{\big(k^d(l_n)\alpha(\psi;k(l_n))\big)^{\frac{1}{s}-1}} \leq \sup_{l\geq n} \frac{\psi\big(k(l)\big)}{\big(k^d(l)\alpha(\psi;k(l))\big)^{\frac{1}{s}-1}}. \tag{3.29}$$

Далі, якщо функція ψ належить множині $\mathfrak{M}'_\infty$, то величина

$$\frac{\psi\big(k(l)\big)}{\big(k^d(l)\alpha(\psi;k(l))\big)^{\frac{1}{s}-1}} = \psi\big(k(l)\big)\left(k^{d-1}(l)\frac{\psi\big(k(l)\big)}{|\psi'\big(k(l)\big)|}\right)^{-\left(\frac{1}{s}-1\right)}$$

монотонно спадає до нуля при $l \to \infty$. Звідси, враховуючи твердження 4.1 та 4.2 і позначення (3.24) та (2.7), отримуємо

$$\sup_{l\geq n} \frac{\psi\big(k(l)\big)}{\big(k^d(l)\alpha(\psi;k(l))\big)^{\frac{1}{s}-1}} = \frac{\psi\big(k(n)\big)}{\left(k^{d-1}(n)\frac{\psi\left(k(n)\right)}{|\psi'(k(n))|}\right)^{\frac{1}{s}-1}} \asymp$$

$$\asymp \frac{\psi(m_n)}{\big(n\alpha(\psi;m_n)\big)^{\frac{1}{s}-1}}. \tag{3.30}$$

Якщо ж $\psi \in \mathfrak{M}^c_\infty$, то внаслідок (2.5) із врахуванням тверджень 3.1 та 3.2 і позначень (3.24) та (2.7), отримуємо

$$\sup_{l\geq n} \frac{\psi\big(k(l)\big)}{\big(k^d(l)\alpha(\psi;k(l))\big)^{\frac{1}{s}-1}} \asymp \sup_{l\geq n} \frac{\psi\big(k(l)\big)}{\big(k^{d-1}(l)\big)^{\frac{1}{s}-1}} =$$

$$= \frac{\psi\big(k(n)\big)}{\big(k^{d-1}(n)\big)^{\frac{1}{s}-1}} \asymp \frac{\psi(m_n)}{(n\alpha(\psi;m_n))^{\frac{1}{s}-1}}. \tag{3.31}$$

Таким чином, якщо функція ψ належить одній із множин $\mathfrak{M}'_\infty$ або $\mathfrak{M}^c_\infty$, то внаслідок (3.28) – (3.31) для довільного фіксованого $c \in \mathbb{R}$

$$\sup_{l\geq n} W_n(l,c) \ll \frac{\psi(m_n)}{\big(n\alpha(\psi;m_n)\big)^{\frac{1}{s}-1}},$$

і з огляду на (3.25) отримуємо необхідну оцінку зверху в співвідношенні (2.6)

$$H_n(\Psi;r) = \widetilde{H}_n(\psi;r) \leq \sup_{l\geq n} W_n(l,-c_2-1) \ll \frac{\psi(m_n)}{(n\alpha(\psi;m_n))^{\frac{1}{s}-1}}.$$

Знайдемо також оцінку знизу для величин $\widetilde{H}_n(\psi, s)$. Внаслідок (3.15) та (3.20) маємо

$$W_n(l,c) \gg (l-n)\left(\frac{k^d(l)\alpha\big(\psi; k(l)\big)}{\psi^s\big(k(l)\big)}\right)^{-\frac{1}{s}} \asymp \frac{\psi\big(k(l)\big)(l-n)}{(k^d(l)\alpha(\psi;k(l)))^{\frac{1}{s}}},$$

де число $k(l)$ визначається співвідношенням (3.24).

З огляду на твердження 3.1 та 3.2 випливає, що для довільного $c \in \mathbb{R}$,

$$W_n(l,c) \gg \frac{\psi\big((l/M)^{\frac{1}{d}}\big)(l-n)}{\Big(l\alpha\big(\psi;(l/M)^{\frac{1}{d}}\big)\Big)^{\frac{1}{s}}} =: R_n(l). \tag{3.32}$$

Внаслідок (3.25) та (3.32)

$$\widetilde{H}_n(\psi,s) \geq \sup_{l>n,\, l\in\mathbb{N}} W_n(l, c_1+2) \gg \sup_{l\in\mathbb{N},\, l>n} R_n(l) \geq R_n(l_*), \tag{3.33}$$

де l_* — довільне натуральне число, $l_* > n$.

Розглянемо функцію

$$g(t) = g(\psi;t) := \psi\big((t/M)^{\frac{1}{d}}\big), \quad (t/M)^{\frac{1}{d}} \geq 1. \tag{3.34}$$

Легко бачити, що для довільної функції ψ з множини $\mathfrak{M}'_\infty$ або $\mathfrak{M}^c_\infty$ функція $g(\psi;t)$ належить множині $\mathfrak{M}^+_\infty$. На підставі зауваження 3.1

$$\eta(g;t) - t \asymp \frac{g(t)}{|g'(t)|} = dM^{\frac{1}{d}} \frac{\psi\big((t/M)^{\frac{1}{d}}\big)}{\big|\psi'\big((t/M)^{\frac{1}{d}}\big)\big|} \cdot t^{1-\frac{1}{d}} \asymp t\alpha\big(\psi;(t/M)^{\frac{1}{d}}\big). \tag{3.35}$$

Покладемо $l_* = ([\eta(g;n)]+1) \in \mathbb{N}$. Внаслідок тверджень 3.1 та 3.2

$$R_n(l_*) \gg \frac{\psi\big((\eta(g;n)/M)^{\frac{1}{d}}\big)\big(\eta(g;n)-n\big)}{\big(\eta(g;n)\alpha(\psi;(\eta(g;n)/M)^{\frac{1}{d}})\big)^{\frac{1}{s}}}.$$

Враховуючи співвідношення (3.34), (3.35), зауваження 3.1 і означення величин $g(\psi;t)$, $\eta(g;t)$ та m_n, отримуємо

$$R_n(l_*) \gg \frac{g(n)\big(\eta(g;n)-n\big)}{\big(\,\eta(g;\eta(g;n)) - \eta(g;n)\big)^{\frac{1}{s}}} \gg$$

$$\gg \frac{g(n)}{\big(\eta(g;n)-n\big)^{\frac{1}{s}-1}} \gg \frac{\psi(m_n)}{\big(n\alpha(\psi;m_n)\big)^{\frac{1}{s}-1}}. \tag{3.36}$$

Об'єднуючи співвідношення (3.33) та (3.36), отримуємо необхідну оцінку знизу:

$$H_n(\Psi;s) = \widetilde{H}_n(\psi;s) \gg \frac{\psi(m_n)}{\big(n\alpha(\psi;m_n)\big)^{\frac{1}{s}-1}}.$$

Розглянемо тепер випадок, коли $s \in (1,\infty)$. Покладемо

$$Q_n(\Psi,l) := (l-n)\left(\sum_{j=1}^{l}\Psi^{-s}(j)\right)^{-1}, \quad l \geq n,\ l \in \mathbb{N}.$$

Оскільки для довільного $l > n$ виконуються співвідношення

$$Q_n(\Psi,l+1) - Q_n(\Psi,l) = \big(\Psi^s(l+1) - Q_n(\Psi,l)\big)\Psi^{-s}(l+1)\left(\sum_{i=1}^{l+1}\Psi^{-s}(i)\right)^{-1}$$

і

$$\Psi^s(l+1) - Q_n(\Psi,l+1) = \big(\Psi^s(l+1) - Q_n(\Psi,l)\big)\sum_{j=1}^{l}\Psi^{-s}(j)\left(\sum_{i=1}^{l+1}\Psi^{-s}(i)\right)^{-1},$$

то, враховуючи монотонність функції Ψ та означення числа l_n (співвідношення (1.5)), приходимо до висновку, що при всіх $l \geq l_n$

$$Q_n(\Psi,l) > Q_n(\Psi,l+1) > \psi^s(l+1),$$

а при всіх $l \in [n, l_n)$

$$Q_n(\Psi,l) \leq Q_n(\Psi,l+1) \leq \psi^s(l+1).$$

Звідси випливає, що

$$Q_n(\Psi,l_n) = \sup_{l>n} Q_n(\Psi,l). \tag{3.37}$$

Крім того, внаслідок (1.5) маємо $\Psi(l_n + 1) > \Psi(l_n)$, і тому, якщо функція $\Psi(t)$ задається у вигляді (2.2), то при деякому $k_{l_n} \in \mathbb{N}$ справджується рівність

$$l_n = V_{k_{l_n}} = \sum_{i=0}^{k_{l_n}} \nu_i.$$

У такому випадку величини $H_n(\Psi, s)$, $s \in (1, \infty)$, можна подати у вигляді

$$H_n(\Psi, s) = \left((l_n - n)^{s'} \left(\sum_{k=1}^{k_{l_n}} \frac{\nu_k}{\psi^s(k)} \right)^{-\frac{s'}{s}} + \right.$$

$$\left. + \sum_{k=k_{l_n}+1}^{\infty} \nu_k \psi^{s'}(k) \right)^{\frac{1}{s'}} := \widetilde{H}_n(\psi, s),$$

де число l_n визначається співвідношенням

$$\psi^{-s}(k_{l_n}) \leq \frac{1}{l_n - n} \sum_{j=1}^{k_{l_n}} \frac{\nu_k}{\psi^s(k)} < \psi^{-s}(k_{l_n} + 1). \tag{3.38}$$

При цьому функція

$$\widetilde{Q}_n(\psi, l) := (l - n) \left(\sum_{k=1}^{k_l - 1} \frac{\nu_k}{\psi^s(k)} + \frac{l - V_{k_l - 1}}{\psi^s(k_l)} \right)^{-1},$$

де число k_l визначається співвідношенням (3.9), внаслідок (3.37) задовольняє співвідношення

$$\sup_{l>n} \widetilde{Q}_n(\psi, l) = \widetilde{Q}_n(\psi, l_n) = (l_n - n) \left(\sum_{k=1}^{k_{l_n}} \frac{\nu_k}{\psi^s(k)} \right)^{-1}.$$

Аналогічно до доведеного вище випадку $s \in (0, 1]$ переконуємося, що для будь-яких функцій ψ з множин $\mathfrak{M}'_\infty$ або $\mathfrak{M}^c_\infty$

$$\sum_{k=1}^{l} \frac{\nu_k}{\psi^s(k)} \asymp \frac{l^d \alpha(\psi, l)}{\psi^s(l)}, \tag{3.39}$$

$$\widetilde{Q}_n(\psi, l_n) = \sup_{l>n} \widetilde{Q}_n(\psi, l) \asymp \psi^s(m_n). \tag{3.40}$$

Звідси, на підставі (3.38) і тверджень 4.1 – 4.3, отримуємо

$$\psi(k_{l_n}) \asymp \psi(m_n) \tag{3.41}$$

і

$$k_{l_n} \asymp m_n. \tag{3.42}$$

Далі, внаслідок (3.11) та монотонності функції ψ маємо

$$\sum_{k=l+1}^{\infty} \nu_k \psi^{s'}(k) \gg \sum_{k=l+1}^{\infty} k^{d-1}\psi^{s'}(k) \gg \sum_{k=l+1}^{\eta(\psi,l+1)} k^{d-1}\psi^{s'}(k) \gg$$

$$\gg (l+1)^{d-1}\psi^{s'}\big(\eta(\psi, l+1)\big)\big(\eta(\psi, l+1) - (l+1)\big),$$

звідки, внаслідок означення величини $\eta(\psi, t)$, зауваження 4.1 і тверджень 4.1 та 4.2, будемо мати

$$\sum_{k=l+1}^{\infty} \nu_k \psi^{s'}(k) \gg \sum_{k=l+1}^{\infty} k^{d-1}\psi^{s'}(k) \gg l^d \psi^{s'}(l)\alpha(\psi, l). \tag{3.43}$$

З іншого боку, похідна функції $h(t) := t^{d-1}\psi^{s'}(t)$ при $t > 1$ має вигляд

$$h'(t) = s'\psi^{s'}(t)t^{d-2}\left(\frac{d-1}{s'} - \frac{t|\psi'(t)|}{\psi(t)}\right).$$

Звідси, враховуючи (2.4), бачимо, що функція $h(t)$ при достатньо великих t спадає і тому, з огляду на (3.11), отримуємо

$$\sum_{k=l+1}^{\infty} \nu_k \psi^{s'}(k) \ll \sum_{k=l+1}^{\infty} k^{d-1}\psi^{s'}(k) \ll \int_{l}^{\infty} t^{d-1}\psi^{s'}(t)dt. \tag{3.44}$$

Крім цього, як зазначено вище, для довільного $d > 0$ величина $k^d\psi^{s'}(k) \to 0$ при $k \to \infty$.

Далі, використовуючи (2.4) і метод інтегрування частинами, отримаємо

$$\int\limits_l^\infty t^{d-1}\psi^{s'}(t)dt = -\frac{l^d\psi^{s'}(l)}{d} + \frac{s'}{d}\int\limits_l^\infty \frac{t^{d-1}\psi^{s'}(t)}{\alpha(\psi,t)}dt \gg$$

$$\gg -l^d\psi^{s'}(l) + \frac{1}{\alpha(\psi,l)}\int\limits_l^\infty t^{d-1}\psi^{s'}(t)dt.$$

Звідси для достатньо великих l отримуємо оцінку зверху

$$\int\limits_l^\infty t^{d-1}\psi^{s'}(t)dt \ll \frac{\alpha(\psi,t)}{1-\alpha(\psi,t)}l^d\psi^{s'}(l) \ll l^d\psi^{s'}(l)\alpha(\psi,l). \tag{3.45}$$

Із співвідношень (3.43) – (3.45) випливає, що

$$\sum_{k=l+1}^{\infty} \nu_k\psi^{s'}(k) \asymp \sum_{k=l+1}^{\infty} k^{d-1}\psi^{s'}(k) \asymp l^d\psi^{s'}(l)\alpha(\psi,l). \tag{3.46}$$

Об'єднуючи співвідношення (3.39) – (3.42), (3.46) із врахуванням тверджень 4.1 та 4.2, отримуємо необхідну оцінку величини $H_n(\Psi,r)$:

$$H_n(\Psi,r) = \widetilde{H}_n(\psi,s) \asymp \bigg(\psi^{s's}(m_n)\cdot\big(m_n^d\alpha(\psi,m_n)\psi^s(m_n)\big)^{(1-\frac{1}{s})s'} +$$

$$+ m_n^d\psi^{s'}(m_n)\alpha(\psi,m_n)\bigg)^{\frac{1}{s'}} \asymp \psi(m_n)\big(n\alpha(\psi,m_n)\big)^{\frac{1}{s'}}.$$

Теорему доведено.

4. Застосування отриманих результатів до оцінок апроксимативних характеристик просторів $S^p(\mathbb{T}^d)$.

4.1. Нехай d — фіксоване натуральне число, $\mathbb{R}^d$ та $\mathbb{Z}^d$ — множини усіх впорядкованих наборів $\mathbf{k}$:=$(k_1,\ldots,k_d)$ відповідно із d дійсних та цілих чисел і $\mathbb{T}^d := [0,2\pi]^d$.

Нехай далі $L_p(\mathbb{T}^d)$, $1 \le p < \infty$, — простір всіх вимірних за Лебегом на $\mathbb{R}^d$ функцій 2π-періодичних по кожній змінній зі скінченною нормою

$$\|f\|_{L_p(\mathbb{T}^d)} := \left((2\pi)^{-d}\int_{\mathbb{T}^d}|f(\mathbf{x})|^p d\mathbf{x}\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Покладемо $(\mathbf{k},\mathbf{x}) := k_1x_1 + k_2x_2 + \ldots + k_dx_d$ і для довільної функції $f \in L_1(\mathbb{T}^d)$ означимо її коефіцієнти Фур'є формулою

$$\widehat{f}(\mathbf{k}) := (2\pi)^{-d}\int_{\mathbb{T}^d} f(\mathbf{x})e^{-i(\mathbf{k},\mathbf{x})}d\mathbf{x}, \quad \mathbf{k} \in \mathbb{Z}^d.$$

Через l_p^N, $N = 1, 2, \ldots$, $0 < p \le \infty$, позначимо простір всіх послідовностей $\mathbf{x} = \{x_k\}_{k=1}^N \in \mathbb{R}^N$ зі звичайною l_p-нормою (квазі-нормою)

$$|\mathbf{x}|_p := \|\mathbf{x}\|_{l_p} = \begin{cases} \left(\sum_{k=1}^N |x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}, & 0 < p < \infty, \\ \sup_{1\le i\le N}|x_i|, & p = \infty. \end{cases}$$

Простір $S^p(\mathbb{T}^d)$, $0 < p < \infty$, (див., наприклад, [2] (гл. XI)) — це простір всіх функцій $f \in L_1(\mathbb{T}^d)$, для яких

$$\|f\|_{S^p(\mathbb{T}^d)} := \|\{\widehat{f}(\mathbf{k})\}_{k\in\mathbb{Z}^d}\|_{l_p(\mathbb{Z}^d)} = \left(\sum_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}^d}|\widehat{f}(\mathbf{k})|^p\right)^{\frac{1}{p}} < \infty. \tag{4.1}$$

Функції $f \in L_1(\mathbb{T}^d)$ та $g \in L_1(\mathbb{T}^d)$ є еквівалентними в просторі $S^p(\mathbb{T}^d)$, якщо $\|f-g\|_{S^p(\mathbb{T}^d)} = 0$.

Нехай $\psi = \psi(t)$, $t \ge 1$, — довільна додатна спадна функція, $\psi(0) := \psi(1)$ і $0 < q, r \le \infty$. У даному підрозділі наведено застосування отриманих вище результатів до знаходження точних порядкових оцінок деяких важливих апроксимативних характеристик у просторах $S^p(\mathbb{T}^d)$ класів

$$\mathcal{F}_{q,r}^{\psi} := \Big\{f \in L_1(\mathbb{T}^d) \ : \quad \|\{\widehat{f}(\mathbf{k})/\psi(|\mathbf{k}|_r)\}_{k\in\mathbb{Z}^d}\|_{l_p(\mathbb{Z}^d)} \le 1\Big\}.$$

Зазначимо, що коли $\psi(t) = t^{-s}$, $s \in \mathbb{N}$, і $q = 1$, класи $\mathcal{F}_{q,\infty}^{\psi} =: \mathcal{F}_{q,\infty}^{s}$ є множинами функцій, у яких частинні похідні порядку s мають абсолютно збіжні ряди Фур'є. Якщо ж $q = 2$, то класи $\mathcal{F}_{2,\infty}^{s}$ еквівалентні одиничним кулям відомих класів Соболєва W_2^s. Апроксимативні характеристики класів $\mathcal{F}^{\psi}_{q,r}$ для різних $r \in (0, \infty]$ і різних функцій ψ досліджувались, зокрема, у роботах [10 – 12, 15 – 18].

4.2. Нехай f — довільна функція з простору $L_1(\mathbb{T}^d)$. Позначимо через $\{\mathbf{k}(l)\}_{k=1}^{\infty} = \{\mathbf{k}(l, f)\}_{k=1}^{\infty}$ перестановку чисел $\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^d$ таку, що

$$|\widehat{f}(\mathbf{k}(1))| \geq |\widehat{f}(\mathbf{k}(2))| \geq \dots . \tag{4.2}$$

Якщо така перестановка не єдина, то через $\{\mathbf{k}(l)\}_{k=1}^{\infty}$ позначимо будь-яку з перестановок, яка задовольняє умову (4.2).

Основними апроксимативними величинами для функцій $f \in \mathcal{F}^{\psi}_{q,r}$, які розглядаються в даній роботі, є наступні величини:

$$\|f - G_n(f)\|_X := \left\| f(\cdot) - \sum_{l=1}^{n} \widehat{f}(\mathbf{k}(l)) e^{i(\mathbf{k}(l), \cdot)} \right\|_X , \tag{4.3}$$

$$e_n^{\perp}(f)_X := \inf_{\gamma_n} \left\| f(\cdot) - \sum_{\mathbf{k} \in \gamma_n} \widehat{f}(\mathbf{k}) e^{i(\mathbf{k}, \cdot)} \right\|_X \tag{4.4}$$

та

$$e_n(f)_X := \inf_{\gamma_n, c_{\mathbf{k}}} \left\| f(\cdot) - \sum_{\mathbf{k} \in \gamma_n} c_{\mathbf{k}} e^{i(\mathbf{k}, \cdot)} \right\|_X , \tag{4.5}$$

де X — один із просторів $L_p(\mathbb{T}^d)$ або $S^p(\mathbb{T}^d)$, γ_n — довільний набір із n різних векторів з множини $\mathbb{Z}^d$, c_k — довільні комплексні числа; за умови, що $\mathcal{F}^{\psi}_{q,r} \subset X$.

Величини (4.5) та (4.4) називають відповідно найкращим n-членним тригонометричним та найкращим n-членним ортогональним тригонометричним наближенням функції f у просторі X, а величину (4.3) — наближенням у просторі X функції f за допомогою "greedy" апроксимант.

Вивчення величин вигляду (4.3) – (4.5) бере свій початок від роботи С. Б. Стєчкіна [19]. Порядкові оцінки при $n \to \infty$ таких величин на різних класах функцій однієї та багатьох змінних встановлювались багатьма авторами. З бібліографією робіт, в яких отримуються подібні результати, можна ознайомитись, зокрема, в [20] та [21].

Якщо $\mathfrak{N}$ — деяка підмножина з простору X, то покладають

$$e_n^{\perp}(\mathfrak{N})_X := \sup_{f \in \mathfrak{N}} e_n^{\perp}(f)_X \quad \text{та} \quad e_n(\mathfrak{N})_X := \sup_{f \in \mathfrak{N}} e_n(f)_X .$$

Слід також зазначити, що для довільної функції $f \in L_p(\mathbb{T}^d)$ має місце співвідношення

$$e_n(f)_{L_p(\mathbb{T}^d)} \le e_n^{\perp}(f)_{L_p(\mathbb{T}^d)} \le \|f - G_n(f)\|_{L_p(\mathbb{T}^d)}, \qquad (4.6)$$

а для довільної функції $f \in S^p(\mathbb{T}^d)$, $0 < p < \infty$, внаслідок (4.1) — співвідношення

$$e_n(f)_{S^p(\mathbb{T}^d)} = e_n^{\perp}(f)_{S^p(\mathbb{T}^d)} = \|f - G_n(f)\|_{S^p(\mathbb{T}^d)}. \qquad (4.7)$$

Поряд з величинами (4.3) – (4.5) для функцій $f \in \mathcal{F}_{q,r}^{\psi}$ природно також розглянути величини

$$\mathscr{E}_{\gamma_n}(f)_X := \Big\| f(\cdot) - \sum_{\mathbf{k} \in \gamma_n} \widehat{f}(\mathbf{k}) e^{i(\mathbf{k},\cdot)} \Big\|_X,$$

де, як і раніше, X — один із просторів $S^p(\mathbb{T}^d)$ або $L_p(\mathbb{T}^d)$, γ_n — довільний набір із n різних векторів з множини $\mathbb{Z}^d$, а також величини

$$\mathscr{D}_n^{\perp}(\mathcal{F}_{q,r}^{\psi})_X := \inf_{\gamma_n} \mathscr{E}_{\gamma_n}(\mathcal{F}_{q,r}^{\psi})_X = \inf_{\gamma_n} \sup_{f \in \mathcal{F}_{q,r}^{\psi}} \mathscr{E}_{\gamma_n}(f)_X,$$

за умови, що $\mathcal{F}_{q,r}^{\psi} \subset X$. Величини $\mathscr{E}_{\gamma_n}(f)_X$ та $\mathscr{E}_{\gamma_n}(\mathcal{F}_{q,r}^{\psi})_X$ називають наближенням у просторі X відповідно функції f та класу $\mathcal{F}_{q,r}^{\psi}$ сумами Фур'є порядку n, гармоніки яких взяті із множини γ_n. Величини $\mathscr{D}_n^{\perp}(\mathcal{F}_{q,r}^{\psi})_X$ можна називати ортопроекційним тригонометричним поперечником порядку n класу $\mathcal{F}_{q,r}^{\psi}$ в просторі X.

З означення величин $e_n^{\perp}(\mathcal{F}_{q,r}^{\psi})_X$, $\mathscr{D}_n^{\perp}(\mathcal{F}_{q,r}^{\psi})_X$ та $\mathscr{E}_{\gamma_n}(\mathcal{F}_{q,r}^{\psi})_X$ випливає, що для довільного набору $\gamma_n \subset \mathbb{Z}^d$

$$e_n^{\perp}(\mathcal{F}_{q,r}^{\psi})_X \le \mathscr{D}_n^{\perp}(\mathcal{F}_{q,r}^{\psi})_X \le \mathscr{E}_{\gamma_n}(\mathcal{F}_{q,r}^{\psi})_X.$$

4.3. Точні значення величин $e_n(\mathcal{F}_{q,r}^{\psi})_{S^p(\mathbb{T}^d)}$, а отже, і величин $\sup\limits_{f \in \mathcal{F}_{q,r}^{\psi}} \|f - G_n(f)\|_{S^p(\mathbb{T}^d)}$ та $e_n^{\perp}(\mathcal{F}_{q,r}^{\psi})_{S^p(\mathbb{T}^d)}$, при будь-яких $0 < p$, $q < \infty$ випливають із результатів О. І. Степанця [1], [2] (гл. XI). Зокрема, із теореми 9.1 роботи [2] (гл. XI) випливає, що для будь-яких $0<q\le p<\infty$ та довільної додатної функції $\psi=\psi(t)$, $t\ge 0$, яка задовольняє умову (2.3) при кожному $n\in\mathbb{N}$

$$e_n^p(\mathcal{F}_{q,r}^{\psi})_{S^p(\mathbb{T}^d)} = \sup_{l>n}(l-n)\left(\sum_{j=1}^{l}\bar{\psi}^{-q}(j)\right)^{-\frac{p}{q}}, \tag{4.8}$$

де $\bar{\psi}=\bar{\psi}(j)$, $j=1,2,\ldots$, — незростаюча перестановка системи чисел $\psi(|\mathbf{k}|_r)$, $\mathbf{k}\in\mathbb{Z}^d$; якщо ж $0<p<q<\infty$, а додатна функція $\psi=\psi(t)$, $t\ge 0$, задовольняє умову

$$\sum_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}^d}\psi^{\frac{pq}{q-p}}(|\mathbf{k}|_r)<\infty, \tag{4.9}$$

то із теореми 9.4 роботи [2] (гл. XI) випливає, що

$$e_n^p(\mathcal{F}_{q,r}^{\psi})_{S^p(\mathbb{T}^d)}=\left((l_n-n)^{\frac{q}{q-p}}\left(\sum_{k=1}^{l_n}\bar{\psi}^{-q}(k)\right)^{\frac{p}{q-p}}+\sum_{k=l_n+1}^{\infty}\bar{\psi}^{\frac{pq}{q-p}}(k)\right)^{\frac{q-p}{q}}, \tag{4.10}$$

де $\bar{\psi}=\bar{\psi}(j)$, $j=1,2,\ldots$, — незростаюча перестановка системи чисел $\psi(|\mathbf{k}|_r)$, $\mathbf{k}\in\mathbb{Z}^d$, а число l_n вибране з умови

$$\bar{\psi}^{-q}(l_n)\le\frac{1}{l_n-n}\sum_{k=1}^{l_n}\bar{\psi}^{-q}(k)<\bar{\psi}^{-q}(l_n+1).$$

Враховуючи позначення (1.2) та (1.3), співвідношення (4.8) та (4.10) можна записати у вигляді

$$e_n^p(\mathcal{F}_{q,r}^{\psi})_{S^p(\mathbb{T}^d)}=H_n(\bar{\psi}^p,q/p),\quad 0<p,\,q<\infty.$$

Зазначимо, що коли функція ψ спадає до нуля, незростаючу перестановку $\bar{\psi}=\bar{\psi}(j)$, $j=1,2,\ldots$, системи чисел $\psi(|\mathbf{k}|_r)$ можна визначити рівністю

$$\bar{\psi}(l)=\psi(m),\quad l\in(V_{m-1},V_m],\quad m=1,2,\ldots, \tag{4.11}$$

де $V_m := |\widetilde{\Delta}^d_{m,r}|$ — кількість елементів множини

$$\widetilde{\Delta}^d_{m,r} := \big\{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^d : |\mathbf{k}|_r \le m, \quad m = 0, 1, \dots\big\}.$$

Далі, при формулюванні результатів важливо, щоб при всіх достатньо великих m (більших, ніж деяке додатне число k_0) виконувалось співвідношення

$$M_r(m - c_1)^d < V_m = |\widetilde{\Delta}^d_{m,r}| \le M_r(m + c_2)^d, \tag{4.12}$$

де M_r, c_1 та c_2 — деякі додатні сталі.

Зрозуміло, що у випадку, коли $r = \infty$, співвідношення (4.12) виконується і $M_\infty = vol\big\{\mathbf{k}{\in}\mathbb{R}^d : |\mathbf{k}|_\infty{\le}1\big\} = 2^d$, якщо ж $r = 1$, то $M_1 = vol\big\{\mathbf{k}{\in}\mathbb{R}^d : |\mathbf{k}|_1 \le 1\big\} = 2^d/d!$. Чи має місце подібне співвідношення при інших r нам невідомо, однак навіть для цих випадків наведені далі результати є новими.

Слід зазначити, що коли виконується умова (4.12), внаслідок (4.11) перестановка $\bar{\psi}$ належить множині $S_d(\nu, M){=}S_d(\nu, M, c_1, c_2)$ при $M{=}M_r$. Тому на підставі теореми 2.1 можна сформулювати такий наслідок.

Твердження 4.1. *Нехай* $0 < r \le \infty$, $0 < p$, $q < \infty$, *виконується умова* (4.12), *а функція* ψ^p *належить множині* $\mathfrak{M}'_\infty$ *або* $\in \mathfrak{M}^c_\infty$. *Тоді*

$$e_n(\mathcal{F}^\psi_{q,r})_{S^p(\mathbb{T}^d)} \asymp \frac{\psi(m_n)}{\big(n\alpha(\psi^p, m_n)\big)^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}}} \asymp \frac{\psi(m_n)}{\big(n\alpha(\psi, m_n)\big)^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}}},$$

де величина m_n *задається співвідношенням* (2.7) *при* $M = M_r$.

4.3. Запишемо також відповідні оцінки величин $\mathscr{D}^\perp_n(\mathcal{F}^\psi_{q,r})_{S^p(\mathbb{T}^d)}$. Точні значення величин $\mathscr{D}^\perp_n(\mathcal{F}^\psi_{q,r})_{S^p(\mathbb{T}^d)}$, а також величин

$$\mathscr{D}_n(\mathcal{F}^\psi_{q,r})_{S^p(\mathbb{T}^d)} {:=} \inf_{\gamma_n} E_{\gamma_n}(\mathcal{F}^\psi_{q,r})_{S^p(\mathbb{T}^d)} {=} \inf_{\gamma_n} \sup_{f\in\mathcal{F}^\psi_{q,r}} \inf_{a_k} \Big\| f(\cdot) - \sum_{k\in\gamma_n} a_k e^{i(k,\cdot)} \Big\|_{S^p(\mathbb{T}^d)}$$

випливають із результатів роботи О. І. Степанця [22]. Зокрема, із теорем 6.1 та 6.4 [22] випливає, що для будь-яких $0 < q \le p < \infty$ і довільної додатної функції $\psi = \psi(t)$, $t \geq 0$, яка задовольняє умову (2.3), при кожному $n \in \mathbb{N}$

$$\mathscr{D}_n(\mathcal{F}^{\psi}_{q,r})_{S^p(\mathbb{T}^d)} = \mathscr{D}^{\perp}_n(\mathcal{F}^{\psi}_{q,r})_{S^p(\mathbb{T}^d)} = \bar{\psi}(n+1); \tag{4.13}$$

якщо ж $0 < p < q < \infty$, а додатна функція $\psi = \psi(t)$, $t \geq 0$, задовольняє умову (4.9), то

$$\mathscr{D}_n(\mathcal{F}^{\psi}_{q,r})_{S^p(\mathbb{T}^d)} = \mathscr{D}^{\perp}_n(\mathcal{F}^{\psi}_{q,r})_{S^p(\mathbb{T}^d)} = \left(\sum_{k=n+1}^{\infty} \bar{\psi}^{\frac{pq}{q-p}}(k)\right)^{\frac{q-p}{pq}}, \tag{4.14}$$

де, як і раніше, через $\bar{\psi} = \bar{\psi}(j)$, $j = 1, 2, \ldots$, позначається незростаюча перестановка системи чисел $\psi(|\mathbf{k}|_r)$, $\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^d$.

Із співвідношень (4.13) та (4.11) випливає, що для довільної спадної до нуля функції $\psi = \psi(t)$, $t \geq 0$, при будь-яких $0 < q \leq p < \infty$ і кожному $n \in [V_{m-1}, V_m)$, $m = 1, 2, \ldots$, має місце рівність

$$\mathscr{D}_n(\mathcal{F}^{\psi}_{q,r})_{S^p(\mathbb{T}^d)} = \mathscr{D}^{\perp}_n(\mathcal{F}^{\psi}_{q,r})_{S^p(\mathbb{T}^d)} = \psi(m).$$

При цьому, якщо виконується умова (4.12), то, як зазначено вище, $\bar{\psi} \in S_d(\nu, M, c_1, c_2)$ при $M{=}M_r$ і

$$(n/M_r)^{\frac{1}{d}} - c_2 < m < (n/M_r)^{\frac{1}{d}} + c_1 + 1. \tag{4.15}$$

Звідси, враховуючи твердження 3.1, робимо висновок, що коли функція ψ належить множині $\mathfrak{M}'_{\infty}$ або $\mathfrak{M}^c_{\infty}$, виконується співвідношення

$$\mathscr{D}_n(\mathcal{F}^{\psi}_{q,r})_{S^p(\mathbb{T}^d)} = \mathscr{D}^{\perp}_n(\mathcal{F}^{\psi}_{q,r})_{S^p(\mathbb{T}^d)} \asymp \psi((n/M_r)^{\frac{1}{d}}) = \psi(m_n). \tag{4.16}$$

У випадку, коли функція $\psi^p(\cdot)$ належить множинам $\mathfrak{M}'_{\infty}$ та $\mathfrak{M}^c_{\infty}$, і виконується умова (4.12), можна отримати також оцінку правої частини співвідношення (4.14). Дійсно, для довільного $n \in [V_{m-1}, V_m)$ внаслідок (4.11) та (4.12) маємо

$$\sum_{l=m+1}^{\infty} l^{d-1}\big(\psi^p(l)\big)^{\frac{q}{q-p}} \ll \sum_{k=n+1}^{\infty} \bar{\psi}^{\frac{pq}{q-p}}(k) \ll \sum_{s=m}^{\infty} l^{d-1}\big(\psi^p(l)\big)^{\frac{q}{q-p}}.$$

Тому, на підставі співвідношення (3.46) (при $s'=\frac{q}{q-p}$) з урахуванням (4.15) і тверджень 3.1 та 3.2, робимо висновок, що

$$\sum_{k=n+1}^{\infty}\bar{\psi}^{\frac{pq}{q-p}}(k)\asymp m^d\psi^{\frac{pq}{q-p}}(m)\alpha(\psi^p,m)\asymp n\psi^{\frac{pq}{q-p}}(m_n)\alpha(\psi,m_n).$$

Таким чином, справджується наступне твердження.

Твердження 4.2. *Нехай* $0<r\le\infty$, $0<p,q<\infty$ *та виконується умова* (4.12). *Тоді*

1) *якщо* $0<q\le p<\infty$ *і функція* ψ *належить множині* $\mathfrak{M}'_\infty$ *або* $\mathfrak{M}^c_\infty$, *то має місце співвідношення* (4.16)*;*

2) *якщо ж* $0<p<q<\infty$ *і функція* ψ^p *належить множині* $\mathfrak{M}'_\infty$ *або* $\mathfrak{M}^c_\infty$, *то*

$$\mathscr{D}_n(\mathcal{F}^{\psi}_{q,r})_{S^p(\mathbb{T}^d)}=\mathscr{D}^{\perp}_n(\mathcal{F}^{\psi}_{q,r})_{S^p(\mathbb{T}^d)}\asymp\psi(m_n)\big(n\alpha(\psi,m_n)\big)^{\frac1p-\frac1q}.$$

***Зауваження* 4.1.** Внаслідок (2.5) для довільної функції $\psi^p\in\mathfrak{M}^c_\infty$ маємо $n\alpha(\psi,m_n)\asymp n^{\frac{d-1}{d}}$. Крім цього, при $d=1$ класи $\mathcal{F}^{\psi}_{q,r}=:\mathcal{F}^{\psi}_{q}$ не залежать від r, умова (4.12) виконується з сталою $M_r=2$. Тому для довільної функції $\psi^p\in\mathfrak{M}^c_\infty$ та будь-яких $0<p,\,q<\infty$ справджується оцінка

$$\mathscr{D}_n(\mathcal{F}^{\psi}_{q})_{S^p(\mathbb{T}^1)}=\mathscr{D}^{\perp}_n(\mathcal{F}^{\psi}_{q})_{S^p(\mathbb{T}^1)}\asymp e_n(\mathcal{F}^{\psi}_{q})_{S^p(\mathbb{T}^1)}\asymp\psi(n/2).\qquad(4.17)$$

***Зауваження* 4.2.** Аналізуючи результати даного підрозділу бачимо, що коли $0<r\le\infty$, виконується умова (4.12) і функція ψ^{p^*} ($p^*=\max\{1,p\}$) належить множині $\mathfrak{M}'_\infty$ або множині $\mathfrak{M}^c_\infty$ (при $d>1$), для будь-яких $0<q<p$ має місце співвідношення

$$\lim_{n\to\infty}\frac{e_n(\mathcal{F}^{\psi}_{q,r})_{S^p(\mathbb{T}^d)}}{\mathscr{D}_n(\mathcal{F}^{\psi}_{q,r})_{S^p(\mathbb{T}^d)}}=\lim_{n\to\infty}\frac{e_n(\mathcal{F}^{\psi}_{q,r})_{S^p(\mathbb{T}^d)}}{\mathscr{D}^{\perp}_n(\mathcal{F}^{\psi}_{q,r})_{S^p(\mathbb{T}^d)}}=0,$$

а для будь-яких $0<p\le q$ — співвідношення

$$e_n(\mathcal{F}^{\psi}_{q,r})_{S^p(\mathbb{T}^d)}\asymp\mathscr{D}_n(\mathcal{F}^{\psi}_{q,r})_{S^p(\mathbb{T}^d)}=\mathscr{D}^{\perp}_n(\mathcal{F}^{\psi}_{q,r})_{S^p(\mathbb{T}^d)}.$$

5. Застосування отриманих результатів до оцінок апроксимативних характеристик просторів $L_p(\mathbb{T}^1)$. У випадку, коли $2 \le p < \infty$ на підставі теореми Гаусдорфа–Юнга (див., наприклад, [23, с. 16]) для довільної функції $f \in L_p(\mathbb{T}^d)$

$$\|f\|_{L_p(\mathbb{T}^d)} \le \|f\|_{S^{p'}(\mathbb{T}^d)}. \tag{5.1}$$

[3] Якщо ж $1 \le p < 2$, то

$$\|f\|_{L_p(\mathbb{T}^d)} \le \|f\|_{L_2(\mathbb{T}^d)} = \|f\|_{S^2(\mathbb{T}^d)}. \tag{5.2}$$

Таким чином, із отриманих у підрозділі 4 оцінок апроксимативних величин просторів $S^p(\mathbb{T}^d)$ випливають також і оцінки зверху аналогічних величин просторів $L_p(\mathbb{T}^d)$.

У випадку, коли $d = 1$ і функція $\psi^{p'}$ належить множині $\mathfrak{M}_\infty^c$ нам вдалося також отримати відповідні оцінки знизу. А саме, має місце наступне твердження.

Твердження 5.1. *Нехай $1 \le p < \infty$, $0 < q < \infty$ і функція $\psi^{p'}$ належить множині $\mathfrak{M}_\infty^c$. Тоді*

$$e_n^\perp(\mathcal{F}_q^\psi)_{L_p(\mathbb{T}^1)} \asymp \sup_{f \in \mathcal{F}_q^\psi} \|f - G_n(f)\|_{L_p(\mathbb{T}^1)} \asymp \mathscr{D}_n^\perp(\mathcal{F}_q^\psi)_{L_p(\mathbb{T}^1)} \asymp \psi(n/2).$$

Доведення. Із врахуванням (4.6) та (4.7) для отримання оцінок зверху в цьому твердженні достатньо скористатись співвідношеннями (5.1) та (5.2) і оцінкою (4.17).

Для отримання оцінок знизу розглянемо множину $k_1^*, k_2^*, \dots$ всіх цілих чисел таких, що

$$\psi(|k_j^*|) = \bar{\psi}(j), \quad j = 1, 2, \dots, \tag{5.3}$$

де $\bar{\psi} = \bar{\psi}(j)$, $j = 1, 2, \dots$, — незростаюча перестановка системи чисел $\psi(|\mathbf{k}|)$, $\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^d$. Покладемо

$$f_1(x) = C_1(n) \sum_{j=1}^{n+1} e^{ik_j^* x}, \quad \text{де} \quad C_1(n) = \left(\sum_{j=1}^{n+1} \psi^{-q}(|k_j^*|) \right)^{-\frac{1}{q}}.$$

[3] Тут і далі, для довільного $1 < p < \infty$ покладаємо $p' := \frac{p}{p-1}$ і $p' := \infty$ при $p = 1$. При цьому, очевидно, $p' > 1$.

Очевидно, що $f_1 \in \mathcal{F}_q^{\psi}$, а на підставі (5.3), (3.23) та твердження 3.1 робимо висновок, що

$$C_1^{-q}(n) = \sum_{j=1}^{n+1} \bar{\psi}^{-q}(j) \asymp \sum_{k=1}^{[(n+1)/2]} \frac{1}{\psi^q(k)} \asymp \psi^{-q}(n/2).$$

Тому для довільного набору чисел γ_n і полінома $\sum\limits_{k\in\gamma_n} \widehat{f}_1(k)e^{ikx}$ із врахуванням теореми Гаусдорфа–Юнга отримуємо

$$\Big\| f_1(x) - \sum_{k\in\gamma_n} \widehat{f}_2(k)e^{ikx} \Big\|_{L_p(\mathbb{T}^d)} = \Big\| \sum_{\substack{j=1 \\ k_j^*\notin\gamma_n}}^{n+1} \widehat{f}_1(k_j^*)e^{ik_j^*x} \Big\|_{L_p(\mathbb{T}^d)} \geq$$

$$\geq \Big\| \sum_{\substack{j=1 \\ k_j^*\notin\gamma_n}}^{n+1} \widehat{f}_1(k_j^*)e^{ik_j^*x} \Big\|_{L_1(\mathbb{T}^d)} \gg \max_{\substack{j=\overline{1,n+1} \\ k_j^*\notin\gamma_n}} |\widehat{f}_1(k_j^*)| = C_1(n) \asymp \psi(n/2).$$

Звідси випливає, що при всіх $1 \leq p < \infty$ має місце необхідна оцінка:

$$e_n^{\perp}(\mathcal{F}_q^{\psi})_{L_p(\mathbb{T}^1)} \gg e_n^{\perp}(f_1)_{L_p(\mathbb{T}^1)} \gg \psi(n/2).$$

Твердження доведено.

1. *Степанец А. И.* Аппроксимационные характеристики пространств S_{φ}^p в разных метриках // Укр. мат. журн. — 2001. — **53**, №8. — С. 1121–1146.
2. *Степанец А. И.* Методы теории приближений: В 2 ч. // Праці Ін-ту математики НАН України. — 2002. — **40**, ч. II. — 468 с.
3. *Софман Л.Б.* Поперечники октаэдров // Мат. заметки. — 1969. — **5**, №4. — С. 429–436.
4. *Софман Л. Б.* Поперечники бесконечного октаэдра // Вестн. москов. ун-та. — 1973. — №5. — С. 54–56.
5. *Pinkus A.* n-widths in approximation theory. — Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York Tokyo, 1985. — 291 p.
6. *Fang Gensun, Qian Lixin.* Approximation Characteristics for Diagonal Operators in Different Computational Settings // J. Approx. Theory. — 2006. — **140**, №2. — P. 178–190.

7. *Степанец А. И., Шидлич А. Л.* Экстремальные задачи для интегралов от неотрицательных функций // Изв. РАН. Сер. мат. — 2010. — **74**, вып. 3. — С. 169 — 224.
8. *Степанец А. И., Шидлич А. Л.* Экстремальные задачи для интегралов от неотрицательных функций. — Киев, 2007. — 103 с. — (Препр. / НАН Украины. Ин-т математики; 2007.2).
9. *Шидліч А. Л.* Порядкові рівності для деяких функціоналів та їх застосування до оцінок найкращих n-членних наближень і поперечників // Укр. мат. журн. — 2009. — **61**, № 10. — С. 1403 – 1423.
10. *Шидліч А. Л.* Порядкові оцінки найкращих n-членних ортогональних тригонометричних наближень класів функцій $\mathcal{F}^{\psi}_{q,\infty}$ в просторах $L_p(\mathbb{T}^d)$ // Теорія наближення функцій та суміжні питання: Зб. праць Ін-ту математики НАН України. — 2011. — **8**, № 1. — С. 216 – 235.
11. *Shidlich A. L.* Approximations of certain classes of functions of several variables by greedy approximants in the integral metrics // arXiv.org: arXiv1302.2790v1. — 2013. — 16 p.
12. *Шидліч А. Л.* Порядкові оцінки для деяких апроксимативних величин // Теорія наближення функцій та суміжні питання : Зб. праць Ін-ту математики НАН України. — 2013. — **10**, № 1. — С. 304 – 327.
13. *Степанець О. І., Шидліч А. Л.* Про один критерій для опуклих функцій // Доп. НАН України. — 2007. — № 8. — С. 31 – 36.
14. *Степанец А. И.* Несколько утверждений для выпуклых функций // Укр. мат. журн. — 1999. — **51**, № 5. — С. 688 – 702.
15. *DeVore R. A., Temlyakov V. N.* Nonlinear approximation by trigonometric sums // J. Fourier Anal. Appl. — 1995. — **2**, № 1. — P. 29 – 48.
16. *Temlyakov V. N.* Greedy Algorithm and m-Term Trigonometric Approximation // Constr. Approx. — 1998. — **14**, № 4. — P. 569 – 587.
17. *Li R. S., Liu Y. P.* Asymptotic Estimations of m-term Approximation and Greedy Algorithm for Multiplier Function Classes Defined by Fourier Series // Chinese Journal of Engineering Mathematics. — 2008. — **25**, № 1. — P. 90-–96.
18. *Li R. S., Liu Y. P.* Best m-term One-sided Trigonometric Approximation of Some Function Classes Defined by a Kind of Multipliers // Acta Mathematica Sinica, English Series. — 2010. — **26**, № 5. — P. 975 – 984.
19. *Стечкин С. Б.* Об абсолютной сходимости ортогональных рядов // Докл. АН СССР. — 1955. — **102**, № 1. — С. 37 – 40.
20. *De Vore R.* Nonlinear approximation // Acta Numer. — 1998. — **7**. — P. 51 – 150.
21. *Романюк А. С.* Наилучшие M-членные тригонометрические приближения классов Бесова периодических функций многих переменных // Изв. РАН. Сер. мат. — 2003. — **67**, № 2. — С. 61 – 100.

22. *Степанец А. И.* Задачи теории приближений в линейных пространствах // Укр. мат. журн. — 2006. — **58**, № 1. — С. 47 – 92.

23. *Temlyakov V. N.* Approximation of periodic functions. — New York: Nova Sci. Publ. Inc, 1993. — 419 p.