Збірник праць Ін-ту математики НАН України 2014, Т. 11, № 3, 270-286

УДК 517.5

С. О. Чайченко (Донбаський державний пед. ун-т, Слов'янськ)

ТЕОРЕМИ ВКЛАДЕННЯ ДЛЯ МНОЖИН $L^{\psi}L_M$ І НАБЛИЖЕННЯ СУМАМИ ФУР'Є

In this paper we study questions of imbedding the sets of ψ-integrals of functions in Orlicz spaces L_M, and obtain the orders of approximation by Fourier sums of functions from these sets.

У роботі вивчаються питання вкладення множин ψ-інтегралів функцій з просторів Орлича L_M, а також знаходяться порядки наближення сумами Фур'є функцій з цих множин.

1. Означення і постановка задач. Наведемо спочатку деякі відомості з теорії опуклих функцій і просторів Орлича.

Означення 1. *Неперервна опукла функція $M = M(x)$ називається функцією Юнга (N-функцією), якщо M є парною і задовольняє умовам*

$$\lim_{x\to 0}\frac{M(x)}{x} = 0, \quad \lim_{x\to\infty}\frac{M(x)}{x} = \infty.$$

Означення 2. *Функція $\tilde{M} = \tilde{M}(y)$, яка визначається співвідношенням*

$$\tilde{M}(y) := \max_{x\geq 0}\left\{x|y| - M(x)\right\}$$

називається додатковою до функції M в сенсі Юнга.

Відомо (див., наприклад, [1, с. 22 – 25]), що функція $\tilde{M}$, додаткова до M в сенсі Юнга, також є N-функцією і для них справджується нерівність

$$xy \leq M(x) + \tilde{M}(y),$$

яку називають нерівністю Юнга.

Означення 3. *Кажуть, що функція M задовольняє умову Δ_2 ($M \in \Delta_2$), якщо існує така стала $c > 0$, що*

$$M(2x) \leq c\, M(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Нехай функція Юнга $M \in \Delta_2$. Через L_M позначають лінійний простір 2π-періодичних вимірних функцій $f: [0; 2\pi] \mapsto \mathbb{R}$, які задовольняють співвідношенню

$$\int_0^{2\pi} M(\lambda|f(t)|)\,dt < \infty$$

при довільному $\lambda > 0$. З нормою

$$\|f\|_M := \sup\left\{\int_0^{2\pi} |f(t)g(t)|\,dt : \quad \int_0^{2\pi} \tilde{M}(|g(t)|)\,dt \le 1\right\},$$

де $\tilde{M}$ — функція, додаткова до M в сенсі Юнга, L_M стає банаховим простором, який називають простором Орлича, породженим функцією M.

Для довільної пари функцій $u \in L_M$ і $v \in L_{\tilde{M}}$, де $\tilde{M}$ — функція, додаткова до M в сенсі Юнга, справджується нерівність [1, с. 91]:

$$\int_0^{2\pi} |u(x)v(x)|\,dx \le \|u\|_M \|v\|_{\tilde{M}},$$

яку називають нерівністю Гельдера. Неважко бачити, що кожна функція з L_M є сумовною (тобто $L_M \subset L$, де L — простір сумовних на періоді функцій).

Простори Орлича добре відомі як узагальнення просторів Лебега L_p функцій, сумовних в степені p, $1 < p < \infty$. В окремому випадку простори Орлича, породжені функціями вигляду $M_p(x) = x^p/p$, $1 < p < \infty$, є ізоморфними просторам Лебега L_p. Більш повну інформацію стосовно просторів Орлича можна знайти в роботах [1–3].

Далі нам знадобляться визначення ψ-інтеграла і ψ-похідної, які належать О. І. Степанцю.

Означення 4 [6, с. 149]. *Нехай* $f \in L$ *і*

$$S(f;x) = \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k(f)\cos\ kx + b_k(f)\sin\ kx) \equiv \sum_{k=0}^{\infty} A_k(f;x) \quad (1)$$

— ряд Фур'є функції f. *Нехай, далі,* $\psi(k) = (\psi_1; \psi_2)$ *— пара довільних*

числових послідовностей $\psi_1(k)$ *і* $\psi_2(k)$, $k = 1, 2, \ldots$. *Розглянемо ряд*

$$A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \big(\psi_1(k)A_k(f;x) + \psi_2(k)\tilde{A}_k(f;x)\big), \tag{2}$$

де A_0 — *деяке число і*

$$\tilde{A}_k(f;x) = a_k \sin kx - b_k \cos kx.$$

Якщо ряд (2) *для даної функції* f *і пари* ψ *є рядом Фур'є деякої функції* $F \in L$, *то функцію* F *називають* ψ*-інтегралом функції* f *і позначають* $F(\cdot) = \mathcal{J}^{\psi}(f;\cdot)$. *Множина* ψ*-інтегралів всіх функцій з* L *позначається* L^{ψ}.

Означення 5 [6, с. 149 – 150]. *Нехай* $f \in L$, (1) — *її ряд Фур'є і пара* $\psi = (\psi_1, \psi_2)$ *задовольняє умову*

$$\psi(k) = \psi_1^2(k) + \psi_2^2(k) \neq 0, \quad k \in \mathbb{N}. \tag{3}$$

Якщо ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{\psi_1(k)}{\psi^2(k)} A_k(f;x) - \frac{\psi_2(k)}{\psi^2(k)} \tilde{A}_k(f;x) \right)$$

є рядом Фур'є деякої функції $\varphi \in L$, *то* φ *називають* ψ*-похідною функції* f *і пишуть* $\varphi(\cdot) = D^{\psi}(f;\cdot) = f^{\psi}(\cdot)$.

Підмножину функцій $f \in L$, у яких існують ψ-похідні, позначають через $\bar{L}^{\psi}$.

Зв'язок між ψ-інтегралами і ψ-похідними встановлюється в наступному твердженні.

Лема А [6, с. 150]. *Якщо* $f \in L$, *ряд* (1) — *її ряд Фур'є і виконується умова* (3), *то функція* $\mathcal{J}^{\psi}(f;x)$ *має* ψ*-похідну і справджується рівність*

$$D^{\psi}(\mathcal{J}^{\psi}(f;\cdot)) = f(\cdot) - \frac{a_0}{2}.$$

Якщо ж $f \in \bar{L}^{\psi}$ *і ряд* (1) — *її ряд Фур'є, то функція* $D^{\psi}(f;\cdot)$ *має* ψ*-інтеграл і при цьому*

$$\mathcal{J}^{\psi}(D^{\psi}(f;\cdot)) = f(\cdot) + A_0,$$

де A_0 — деяка стала.

Позначимо через $L^{\psi}L_M$ множини ψ-інтегралів функцій $f \in L_M$ і, як звичайно,

$$S_n(f;x) = \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{k=1}^{n} \big(a_k(f)\cos\ kx + b_k(f)\sin\ kx\big), \quad n = 0, 1, \ldots,$$

— частинні суми порядку n ряду Фур'є функції f. У роботі будуть досліджені питання вкладення множин $L^{\psi}L_M$, а також знайдені порядки наближення сумами Фур'є функцій з цих множин. Отримані твердження поширюють на випадок просторів Орлича L_M відповідні результати О. І. Степанця [7, с. 29 – 46], знайдені ним для просторів Лебега L_p.

2. Допоміжні результати. При доведенні основних тверджень роботи будемо використовувати такі відомі результати.

Теорема А [4, с. 278]. *Якщо $M \in \Delta_2$ то для довільної функції $f \in L_M$, виконуються нерівності*

$$\int_0^{2\pi} M(|S_n(f;t)|)\ dt \le C \int_0^{2\pi} M(|f(t)|)\ dt$$

і

$$\int_0^{2\pi} M(|\tilde{f}(t)|)\ dt \le C \int_0^{2\pi} M(|f(t)|)\ dt, \tag{4}$$

в яких $\tilde{f}$ — функція, тригонометрично спряжена з f і C — деяка додатна стала, що залежить від функції M.

З теореми А, зокрема, випливає, що оператор Фур'є і оператор тригонометричного спряження є обмеженими в просторах L_M, $M \in \Delta_2$, тобто

$$\|S_n(f)\|_M \le C\|f\|_M, \tag{5}$$

$$\|\tilde{f}\|_M \le C\|f\|_M. \tag{6}$$

Позначимо через

$$E_n(\varphi)_M := \inf_{t_{n-1}\in\mathcal{T}_{n-1}} \|\varphi - t_{n-1}\|_M, \quad \varphi \in L_M,$$

— найкраще наближення функції φ за допомогою підпростору $\mathcal{T}_{n-1}$ тригонометричних поліномів порядку не вище $n-1$. З результатів роботи [5] (див. лему 3) випливає, що для даної функції $f \in L_M$ і довільного $\varepsilon > 0$ завжди знайдеться тригонометричний поліном $T(x)$, для якого

$$\int_0^{2\pi} M(|f(x) - T(x)|)\; dx < \varepsilon,$$

звідки випливає, що

$$\|f - T\|_M < \varepsilon$$

і

$$E_n(f)_M \to 0, \quad n \to \infty. \tag{7}$$

На підставі нерівностей (5), (6) і (7) робимо висновок, що в умовах теореми A, виконуються співвідношення

$$\|f - S_{n-1}(f)\|_M \to 0, \quad n \to \infty, \tag{8}$$

і

$$\|f - S_{n-1}(f)\|_M = \mathcal{O}(1) E_n(f)_M = \mathcal{O}(1) E_n(\tilde{f})_M, \tag{9}$$

де $\mathcal{O}(1)$ — величини, рівномірно обмежені по n.

Через $\mathbb{M}$ позначимо множину функцій Юнга M, які задовольняють наступним додатковим умовам: існують два числа p_1 і p_2 $(1 < p_1 < p_2 < \infty)$ такі, що для деяких констант $\varepsilon, \delta > 0$ виконується нерівність $p_1 + \varepsilon < p_2 - \delta$ і функція $M(u)u^{-(p_1+\varepsilon)}$ не спадає, а функція $M(u)u^{-(p_2-\delta)}$ не зростає при $u \to \infty$.

Лема B [8]. *Нехай послідовність* $\lambda(k),\ k = 0, 1, 2, \ldots,$ *задовольняє умовам*

$$\nu_0 = \nu_0(\lambda) = \sup_k |\lambda(k)| \le C,$$

$$\sigma_0 = \sigma_0(\lambda) = \sup_{m \in \mathbb{N}} \sum_{k=2^m}^{2^{m+1}} |\lambda(k+1) - \lambda(k)| \le C,$$

де C *— величина, яка не залежить від* k *і* m.

Тоді, якщо $M \in \mathbb{M}$, то для даної функції $f \in L_M$ існує така функція $F \in L_M$, що ряд

$$\frac{\lambda(0)a_0(f)}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \lambda(k)\big(a_k(f)\cos\ kx + b_k(f)\sin\ kx\big)$$

є рядом Фур'є функції F і справджується оцінка

$$\int_0^{2\pi} M(|F(x)|)\ dx \le K_M \int_0^{2\pi} M(\theta|f(x)|)\ dx, \quad \theta = \max\{\nu_0, \sigma_0\}, \tag{10}$$

в якій величина K_M залежить тільки від функції M.

У випадку просторів L_p, $0 < p < \infty$, це твердження є добре відомою теоремою Марцинкевича для мультиплікаторів [10].

Будемо також використовувати наступну теорему Гарді–Літтлвуда.

Теорема В [9]. *Нехай $1 < p < s < \infty,\ p, s = \mathrm{const},\ \alpha = p^{-1} - s^{-1}$ і*

$$D_\alpha(t) = \sum_{k=1}^{\infty} k^{-\alpha}\cos kt.$$

Тоді для довільної функції $\varphi \in L_p$ згортка

$$\Phi_\alpha(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \varphi(x+t)D_\alpha(t)\ dt$$

належить до L_s, причому

$$\|\Phi_\alpha\|_s \le C_{s,p}\|\varphi\|_p,$$

де $C_{s,p}$ — величина, що залежить тільки від s і p.

Слід відзначити, якщо $\varphi \in L_p$ і $S[\varphi] = \sum\limits_{k=0}^{\infty} A_k(\varphi; x)$, то

$$S[\Phi_\alpha] = \sum_{k=0}^{\infty} k^{-\alpha}A_k(\varphi; x),$$

тобто $\Phi_\alpha = M_\alpha(\varphi)$, де M_α — оператор-мультиплікатор, який визначається послідовністю $\mu_\alpha(k) = k^{-\alpha},\ k = 0, 1, 2, \ldots$, і діє з L_p в L_s, де показники $1 < p < s < \infty,\ p, s = \mathrm{const}$, пов'язані співвідношенням $p^{-1} - s^{-1} = \alpha$.

3. Теореми вкладення для множин $L^\psi L_M$. Будемо казати, що пара $\psi = (\psi_1; \psi_2)$ систем чисел $\psi_1(k)$ и $\psi_2(k),\ k = 0, 1, 2, \ldots$, $\psi_1(0) = 1,\ \psi_2(0) = 0$ належить множині $\Upsilon_\alpha,\ \alpha \geq 0$, якщо величини

$$\nu_\alpha(\psi_i) := \sup_{k\in\mathbb{N}} |\psi_i(k)| k^\alpha, \quad i = 1, 2,$$

$$\sigma_\alpha(\psi_i) := \sup_{m\in\mathbb{N}} \sum_{2^m}^{2^{m+1}} \left|\psi_i(k+1)(k+1)^\alpha - \psi_i(k) k^\alpha\right|, \quad i = 1, 2,$$

є скінченними.

Для формулювання та доведення основних результатів роботи нам знадобляться додаткові відомості з теорії просторів Орлича [1, с. 132].

Функції Юнга $M(x)$ і $N(x)$ називаються еквівалентними ($M(x) \sim N(x)$), якщо існують такі додатні сталі k_1, k_2 і x_0, що для всіх $x \geq x_0$ одночасно справджуються нерівності

$$N(k_1 x) \leq M(x) \tag{11}$$

і

$$M(x) \leq N(k_2 x). \tag{12}$$

Відомо, що необхідною і достатньою умовою поелементного збігу двох просторів Орлича L_M і L_N є умова еквівалентності функцій Юнга, що їх визначають, тобто $L_M = L_N \Leftrightarrow M(x) \sim N(x)$.

У випадку, коли виконана тільки нерівність (11), то для відповідних класів Орлича L_M і L_N має місце включення $L_M \subset L_N$ і (див. [1, с. 132]) існує така додатна стала K, що

$$\|u\|_N \leq K \|u\|_M, \quad u(x) \in L_M. \tag{13}$$

Якщо ж виконана тільки нерівність (12), то $L_N \subset L_M$.

Домовимося, у цьому пункті і далі через $K, K_M, C_M, ...$, позначати додатні сталі, залежні від зазначених параметрів, взагалі кажучи різні в різних місцях тексту і розглянемо спочатку випадок $M(x) \sim N(x)$.

Теорема 1. *Якщо $\psi \in \Upsilon_0$ і $M \sim N \in \mathbb{M}$, то $L^\psi L_M \subset L_N$.*

Доведення. Беручи до уваги зв'язок між ψ-інтегралом і ψ-похідною (див. лему A), для довільної функції $f \in L^\psi L_M$ можна записати рівність

$$S[f] = \sum_{k=0}^{\infty} A_k(f;x) =$$

$$= \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \psi_1(k) A_k(f^\psi;x) + \sum_{k=1}^{\infty} \psi_2(k) \tilde{A}_k(f^\psi;x) =$$

$$= \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \lambda(k) A_k(f^\psi;x) + \sum_{k=1}^{\infty} \tilde{\lambda}(k) \tilde{A}_k(f^\psi;x) =$$

$$= \frac{a_0(f)}{2} + \Lambda\{f^\psi(x)\} + \tilde{\Lambda}\{\tilde{f}^\psi(x)\}, \tag{14}$$

де $\tilde{f}^\psi$ — функція, тригонометрично спряжена з f^ψ, а Λ і $\tilde{\Lambda}$ — оператори-мультиплікатори, задані формулами

$$\Lambda = \big\{\lambda(k) = \psi_1(k), \quad k = 1, 2, \dots\big\},$$

$$\tilde{\Lambda} = \big\{\tilde{\lambda}(k) = \psi_2(k), \quad k = 1, 2, \dots\big\}.$$

Умова $\psi \in \Upsilon_0$ разом з лемою B означає, що оператори-мультиплікатори Λ і $\tilde{\Lambda}$ діють з L_M в L_M. Умова ж $f \in L^\psi L_M$ дає включення $f^\psi \in L_M$. Отже, згідно з теоремою A (нерівність (4)) матимемо $\tilde{f}^\psi \in L_M$. Тому на підставі співвідношення (14) знаходимо

$$\int_0^{2\pi} M(|f(x)|)\, dx = \int_0^{2\pi} M\left(\left|\frac{a_0(f)}{2} + \Lambda\{f^\psi(x)\} + \tilde{\Lambda}\{\tilde{f}^\psi(x)\}\right|\right)\, dx \le$$

$$\le \int_0^{2\pi} M\left(\left|\frac{a_0(f)}{2}\right|\right)\, dx + \int_0^{2\pi} M(|\Lambda\{f^\psi(x)\}|)\, dx +$$

$$+\int_0^{2\pi} M(|\tilde{\Lambda}\{\tilde{f}^{\psi}(x)\}|)\,dx \le \int_0^{2\pi} M(|\frac{a_0(f)}{2}|)\,dx+$$

$$+K_M\int_0^{2\pi} M(|f^{\psi}(x)|)\,dx + K_M\int_0^{2\pi} M(|\tilde{f^{\psi}}(x)|)\,dx \le K_M.$$

Звідси випливає, що $f \in L_M$ і, оскільки простори L_M і L_N складаються з одних і тих же функцій, то $f \in L_N$. Теорему доведено.

З теореми 1 отримуємо такий наслідок.

***Наслідок* 1.** *Якщо* $\psi \in \Upsilon_0$, $M, N \in \mathbb{M}$ *і виконана умова* (11), *то* $L^{\psi}L_M \subset L_N$.

Дійсно, в ході доведення теореми 1 було показано, якщо $f \in L^{\psi}L_M$, то $f \in L_M$. Оскільки при виконанні умови (11) матиме місце вкладення $L_M \subset L_N$, то звідси випливає, що $f \in L_N$.

Далі нам знадобляться наступні відомості з теорії просторів Орлича [11–13] (див. також [14]). Нехай $M^{-1} : [0,\infty) \mapsto [0,\infty)$ — функція, обернена до M і нехай

$$h(t) := \lim_{x\to\infty}\sup \frac{M^{-1}(x)}{M^{-1}(tx)}, \quad t > 0.$$

Числа β_M і γ_M, які визначаються наступним чином:

$$\beta_M := \lim_{t\to\infty} -\frac{\ln h(t)}{\ln t}, \quad \gamma_M := \lim_{t\to 0+} -\frac{\ln h(t)}{\ln t},$$

називаються, відповідно, нижнім і верхнім індексами Бойда (lower and upper Boyd indices) простору Орлича L_M.

Відомо, якщо M є функцією Юнга, то індекси Бойда завжди існують і задовольняють нерівності

$$0 \le \beta_M \le \gamma_M \le 1,$$

і, крім того, для них справджуються рівності

$$\beta_M + \gamma_{\tilde{M}} = 1, \quad \beta_{\tilde{M}} + \gamma_M = 1,$$

де M і $\tilde{M}$ — додаткові в сенсі Юнга функції. Відомо також, що простір Орлича L_M є рефлексивним тоді і тільки тоді, коли $0 < \beta_M \le$

$\le \gamma_M < 1$ і, якщо

$$1 \le q < \frac{1}{\gamma_M} \le \frac{1}{\beta_M} < p \le \infty,$$

то має місце включення $L_p \subset L_M \subset L_q$.

Виберемо тепер числа q_*, q^* таким чином, щоб індекси Бойда функцій M і N задовольняли нерівностям

$$1 < q_* < \frac{1}{\gamma_M} \le \frac{1}{\beta_M} < \infty, \quad 1 < \frac{1}{\gamma_N} \le \frac{1}{\beta_N} < q^* < \infty.$$

Очевидно, що в цьому випадку будуть мати місце вкладення

$$L_{q^*} \subset L_N \subset L_M \subset L_{q_*}. \tag{15}$$

Використовуючи цей факт, отримаємо аналог теореми 1 у випадку, коли функції $M(x)$ і $N(x)$ задовольняють умові (12).

Теорема 2. *Нехай* $M, N \in \mathbb{M}$, *виконана умова* (12) *і* $\psi \in \Upsilon_\alpha$, *де* $\alpha = \frac{1}{q_*} - \frac{1}{q^*}$. *Тоді* $L^{\psi}L_M \subset L_N$.

Доведення. Позначимо через Λ_α и $\tilde{\Lambda}_\alpha$ мультиплікатори, породжені послідовностями $k^\alpha \psi_1(k)$ і $k^\alpha \psi_2(k)$, $k = 0, 1, 2, \ldots$, відповідно. Тоді

$$\sum_{k=1}^{\infty} \psi_1(k) A_k(f^{\psi}; x) = \sum_{k=1}^{\infty} k^\alpha \psi_1(k) \left(k^{-\alpha} A_k(f^{\psi}; x)\right) =$$

$$= \Lambda_\alpha \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} k^{-\alpha} A_k(f^{\psi}; x) \right\} = \Lambda_\alpha \left\{ S\Big[\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^{\psi}(x+t) D_\alpha(t)\, dt\Big] \right\}, \tag{16}$$

де $D_\alpha(t)$ — функція, визначена в теоремі B.

Оскільки $f \in L^{\psi}L_M$, то $f^{\psi} \in L_M$, і тим більше $f^{\psi} \in L_{q_*}$. На підставі теореми B робимо висновок, що згортка

$$g_\alpha(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^{\psi}(x+t) D_\alpha(t)\, dt$$

знаходиться в L_{q^*}, і тим більше $g_\alpha \in L_N$. З умови $\psi \in \Upsilon_\alpha$ на підставі леми B випливає, що оператор-мультиплікатор M_α діє з L_N в L_N

для довільного $N \in \mathbb{M}$. Тому зі співвідношення (8), рівності (16) і леми B одержуємо

$$\int_0^{2\pi} N\left(\Big|\sum_{k=1}^{\infty}\psi_1(k)A_k(f^\psi;x)\Big|\right)\,dx = \int_0^{2\pi} N\left(\Big|\Lambda_\alpha\{S(g_\alpha;x)\}\Big|\right)\,dx \leq$$

$$\leq K\int_0^{2\pi} N(|g_\alpha(x)|)\,dx \leq K, \tag{17}$$

де величина $K = K_{M,N}$ залежить тільки від функцій $M = M(x)$ і $N = N(x)$.

Аналогічно знаходимо

$$\sum_{k=1}^{\infty}\psi_2(k)\tilde{A}_k(f^\psi;x) = \sum_{k=1}^{\infty}k^\alpha\psi_2(k)\left(k^{-\alpha}\tilde{A}_k(f^\psi;x)\right) =$$

$$= \tilde{\Lambda}_\alpha\left\{\sum_{k=1}^{\infty}k^{-\alpha}\tilde{A}_k(f^\psi;x)\right\} = \tilde{\Lambda}_\alpha\{S(\tilde{g}_\alpha;x)\}. \tag{18}$$

Оскільки оператор-мультиплікатор $\tilde{\Lambda}_\alpha$ діє з L_N в L_N для довільного $N \in \mathbb{M}$, а функція $\tilde{g}_\alpha \in L_N$, то на підставі співвідношення (8), рівності (18) і леми B матимемо

$$\int_0^{2\pi} N\left(\Big|\sum_{k=1}^{\infty}\psi_2(k)\tilde{A}_k(f^\psi;x)\Big|\right)\,dx = \int_0^{2\pi} N\left(\Big|\tilde{\Lambda}_\alpha\{S(\tilde{g}_\alpha;x)\}\Big|\right)\,dx \leq$$

$$\leq K\int_0^{2\pi} N(|\tilde{g}_\alpha(x)|)\,dx \leq K. \tag{19}$$

Зіставляючи тепер співвідношення (14), (17) і (19), переконуємося в справедливості твердження теореми. Теорему доведено.

4. Наближення сумами Фур'є функцій з множин $L^\psi L_M$. У цьому пункті для функцій $f \in L^\psi L_M$, $M \in \mathbb{M}$ за умови, що пари ψ належать до Υ_α, $\alpha = \frac{1}{q_*} - \frac{1}{q^*}$ і підпорядковані деяким додатковим умовам, будуть знайдені порядкові оцінки для величин $E_n(f)_M$ і $\|\rho_n(f)\|_M$, де

$$\rho_n(f) = \rho_n(f;x) := f(x) - S_{n-1}(f;x).$$

Переконаємося в справедливості наступного допоміжного твердження.

Лема 1. *Нехай функції* $M, N \in \mathbb{M}$, *пов'язані співвідношеннями* (11) *та/або* (12). *Нехай, далі, при* $x \geq x_0$

$$\alpha = \left(\frac{1}{q_*} - \frac{1}{q^*}\right)_+ := \begin{cases} 0, & N(k_1x) \leq M(x) \leq N(k_2x), \\ 0, & N(k_1x) \leq M(x), \\ \frac{1}{q_*} - \frac{1}{q^*}, & M(x) \leq N(k_2x), \end{cases}$$

де k_1, k_2 *і* x_0 — *додатні сталі,* $\Lambda_\alpha^{(n)}$ *і* $\tilde{\Lambda}_\alpha^{(n)}$ — *оператори-мультиплікатори, задані послідовностями*

$$\lambda_\alpha^{(n)} = \lambda_\alpha^{(n)}(k) = \begin{cases} 0, & k < n, \\ k^\alpha \psi_1(k), & k \geq n, \end{cases} \tag{20}$$

і

$$\tilde{\lambda}_\alpha^{(n)} = \tilde{\lambda}_\alpha^{(n)}(k) = \begin{cases} 0, & k < n, \\ k^\alpha \psi_2(k), & k \geq n, \end{cases} \tag{21}$$

і такі, що при кожному $n = 1, 2, \ldots,$ *для довільної функції* $f \in L_N$ *справджуються включення*

$$\Lambda_\alpha^{(n)}\big\{S(f;\cdot)\big\} \in L_N, \quad \tilde{\Lambda}_\alpha^{(n)}\big\{S(f)\big\} \in L_N.$$

Тоді, якщо $f \in L^\psi L_M$, *то для довільного натурального* n *має місце співвідношення*

$$E_n(f)_N \leq \|\rho_n(f)\|_N \leq K_{M,N}^{(n)} \|\rho_n(f^\psi)\|_M \leq C_{M,N}^{(n)} E_n(f^\psi)_M, \tag{22}$$

де $K_{M,N}^{(n)}$, $C_{M,N}^{(n)}$ — *додатні сталі, що залежать від* n *і функцій* $M = M(x)$, $N = N(x)$.

Доведення. Використовуючи співвідношення (14), знаходимо

$$E_n(f)_N \leq \|\rho_n(f)\|_N = \left\| \sum_{k=n}^{\infty} A_k(f;\cdot) \right\|_N \leq$$

$$\leq \left\| \sum_{k=n}^{\infty} \lambda(k) A_k(f^\psi;\cdot) \right\|_N + \left\| \sum_{k=n}^{\infty} \tilde{\lambda}(k) \tilde{A}_k(f^\psi;\cdot) \right\|_N, \tag{23}$$

де $\lambda(k)$ і $\tilde{\lambda}(k)$ — послідовності, визначені рівностями

$$\lambda(k) = \psi_1(k), \quad \tilde{\lambda}(k) = \psi_2(k), \quad k \in \mathbb{N}.$$

Нехай спочатку функції M і N задовольняють нерівності (12). У цьому випадку матимемо (див. (16))

$$\sum_{k=n}^{\infty} \lambda(k) A_k(f^{\psi}; x) = \sum_{k=n}^{\infty} \psi_1(k) A_k(f^{\psi}; x) =$$

$$= \Lambda_{\alpha}^{(n)} \Big\{ S\Big[\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \rho_n(f^{\psi}; x+t) D_{\alpha}(t)\, dt \Big] \Big\},$$

де $\Lambda_{\alpha}^{(n)}$ — оператор-мультиплікатор, заданий послідовністю (20). Використовуючи лему В, знаходимо

$$\int_{-\pi}^{\pi} N\left(\Big| \sum_{k=n}^{\infty} \lambda(k) A_k(f^{\psi}; x) \Big| \right) dx =$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} N\left(\Big| \Lambda_{\alpha}^{(n)} \Big\{ S\Big[\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \rho_n(f^{\psi}; x+t) D_{\alpha}(t)\, dt \Big] \Big\} \Big| \right) dx \leq$$

$$\leq K_{n,N} \int_{-\pi}^{\pi} N\left(\Big| \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \rho_n(f^{\psi}; x+t) D_{\alpha}(t)\, dt \Big| \right) dx.$$

Звідси випливає справедливість нерівності для норм

$$\Big\| \sum_{k=n}^{\infty} \lambda(k) A_k(f^{\psi}; \cdot) \Big\|_N \leq K_{n,N} \Big\| \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \rho_n(f^{\psi}; \cdot + t) D_{\alpha}(t)\, dt \Big\|_N. \qquad (24)$$

Враховуючи співвідношення (13), (15) і застосовуючи теорему В, на підставі оцінки (24) отримуємо

$$\Big\| \sum_{k=n}^{\infty} \lambda(k) A_k(f^{\psi}; \cdot) \Big\|_N \leq K_{n,N} \Big\| \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \rho_n(f^{\psi}; \cdot + t) D_{\alpha}(t)\, dt \Big\|_{q^*} \leq$$

$$\leq K_{n,N} \|\rho_n(f^{\psi})\|_{q_*} \leq K_{N,M}^{(n)} \|\rho_n(f^{\psi})\|_M. \qquad (25)$$

Проводячи аналогічні міркування, з урахуванням нерівності (6) знаходимо

$$\Big\|\sum_{k=n}^{\infty}\tilde{\lambda}(k)\tilde{A}_k(f^{\psi};\cdot)\Big\|_N=\Big\|\tilde{\Lambda}_{\alpha}^{(n)}U\Big\{S\Big[\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\rho_n(f^{\psi};\cdot+t)D_{\alpha}(t)\,dt\Big]\Big\}\Big\|_N\le$$

$$\le K_{n,N}\Big\|\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\rho_n(f^{\psi};\cdot+t)D_{\alpha}(t)\,dt\Big\|_N\le K_{N,M}^{(n)}\|\rho_n(f^{\psi};\cdot)\|_M, \quad (26)$$

де U — оператор тригонометричного спряження.

Об'єднуючи нерівності (23) і (25) – (26), отримуємо проміжну оцінку в співвідношенні (22) і для завершення доведення леми, в розглянутому випадку, залишається скористатися нерівністю (9).

Якщо виконана умова (11), то $\alpha=0$ і тоді при $k\ge n$ матимемо $\lambda_{\alpha}^{(n)}(k)=\lambda_0^{(n)}(k)=\psi_1(k)$. Тому

$$\Big\|\sum_{k=n}^{\infty}\psi_1(k)A_k(f^{\psi};\cdot)\Big\|_N=\Big\|\Lambda_0^{(n)}\{\rho_n(f^{\psi})\}\Big\|_N\le K_{n,N}\|\rho_n(f^{\psi})\|_N. \quad (27)$$

Аналогічно, враховуючи співвідношення (6), знаходимо

$$\Big\|\sum_{k=n}^{\infty}\psi_2(k)\tilde{A}_k(f^{\psi};\cdot)\Big\|_N\le K_{n,N}\|\rho_n(f^{\psi};\cdot)\|_N. \quad (28)$$

Зіставляючи співвідношення (23) і (27) – (28), одержуємо

$$E_n(f)_N\le\|\rho_n(f;\cdot)\|_N\le K_{N,M}^{(n)}\|\rho_n(f^{\psi};\cdot)\|_N.$$

Якщо тепер $N(x)\sim M(x)$, то для отримання (22) досить застосувати оцінку (9). Якщо ж виконується тільки умова (11), то попередньо слід скористатися нерівністю (13). Лему доведено.

При кожному фіксованому $\alpha\ge 0$ через Υ_{α}^{*} позначимо підмножину пар $\psi=(\psi_1;\psi_2)$ з Υ_{α}, для яких числа $|\psi_i(k)|k^{\alpha}$, $i=1,2$, $k\in\mathbb{N}$, не зростають і при всіх $k\ge k_0$ виконується нерівність $|\psi_i(k)|k^{\alpha}\le 1$, $i=1,2$.

Лема 2. *Якщо $\psi \in \Upsilon_\alpha^*$, то мультиплікатори $\Lambda_\alpha^{(n)}$ і $\tilde{\Lambda}_\alpha^{(n)}$, що породжуються послідовностями* (21) *і* (22) *діють з L_M в L_M при довільному $M \in \mathbb{M}$, причому для всіх $n \geq n_0$*

$$\|\Lambda_\alpha^{(n)}\{f\}\|_M \leq C\psi_1(n)n^\alpha\|f\|_M \tag{29}$$

і

$$\|\tilde{\Lambda}_\alpha^{(n)}\{f\}\|_M \leq C\psi_2(n)n^\alpha\|f\|_M, \tag{30}$$

де C — величина, рівномірно обмежена по f.

Доведення леми випливає з леми B. Дійсно, згідно зі співвідношенням (21) і (22)

$$\nu_0(\lambda_{n,\alpha}) = \sup_k |\lambda_{n,\alpha}(k)| = \sup_{k\geq n} |\psi_1(k)|k^\alpha \leq \psi_1(n)n^\alpha;$$

$$\sigma_0(\lambda_{n,\alpha}) = \sup_{m\in\mathbb{N}} \sum_{k=2^m}^{2^{m+1}-1} \left|\psi_{1,n}(k+1)(k+1)^\alpha - \psi_{1,n}(k)(k)^\alpha\right| \leq \psi_1(n)n^\alpha.$$

На підставі леми B робимо висновок, що за умови $M \in \mathbb{M}$ має місце включення $\Lambda_\alpha^{(n)}\{f\} \in L_M$, причому в цьому випадку

$$\theta = \theta(\lambda_{n,\alpha}) \leq \psi_1(n)n^\alpha \leq 1, \quad \forall n \geq n_0.$$

Беручи тепер до уваги нерівність

$$M(ax) \leq aM(x), \quad 0 \leq a \leq 1,$$

справедливу для довільної функції Юнга [1, с. 17], з оцінки (10) отримуємо нерівність (29). Зрозуміло, що такі ж міркування можуть бути використані і для доведення справедливості співвідношення (30). Лему доведено.

Використовуючи у ході доведення леми 1 нерівності (29), (30) та враховуючи при цьому співвідношення

$$\frac{1}{2}(\psi_1(n) + \psi_2(n)) \leq \psi(n) \leq (\psi_1(n) + \psi_2(n)), \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

де $\psi(k) = \sqrt{\psi_1^2(k) + \psi_2^2(k)}$, отримаємо таке твердження.

Теорема 3. *Нехай функції $M, N \in \mathbb{M}$ пов'язані співвідношеннями (11) та/або (12). Нехай, далі, $\alpha = \left(\frac{1}{q_*} - \frac{1}{q^*}\right)_+$ і $\psi \in \Upsilon^*_\alpha$. Тоді, якщо $f \in L^\psi L_M$, то починаючи з деякого натурального n_0 виконується нерівність*

$$E_n(f)_N \le \|\rho_n(f)\|_N \le C\psi(n)n^\alpha \|\rho_n(f^\psi)\|_M \le$$
$$\le C\psi(n)n^\alpha E_n(f^\psi)_M,$$

де $\psi(n) = \sqrt{\psi_1^2(n) + \psi_2^2(n)}$, C — величина, рівномірно обмежена по f.

Нехай $L^\psi_M := L^\psi U_M$, де $U_M = \{f \in L_M : \quad \|f\|_M \le 1\}$. Тоді

$$E_n(f)_M \le \|f^\psi - 0\|_M \le \|f^\psi\|_M \le 1, \quad \forall f \in L^\psi_M.$$

Враховуючи цей факт, з теореми 3 отримуємо такий наслідок.

***Наслідок* 2.** *В умовах теореми 3 справджуються оцінки*

$$E_n(L^\psi_M)_N \le \mathcal{E}_n(L^\psi_M)_N \le C\psi(n)n^\alpha,$$

де

$$E_n(L^\psi_M)_N := \sup_{f \in L^\psi_M} \inf_{T_n \in \mathcal{T}_n} \|f - T_n\|_N$$

— найкраще наближення класу L^ψ_M за допомогою підпростору $\mathcal{T}_n$ тригонометричних поліномів порядку не вище n;

$$\mathcal{E}_n(L^\psi_M)_N = \sup_{f \in L^\psi_M} \|f - S_n(f)\|_N$$

— верхня межа відхилення сум Фур'є на класі L^ψ_M в метриці просторів L_N.

1. *Красносельский М. А., Рутицкий Я. Б.* Выпуклые функции и пространства Орлича. — М.: Гос. изд. физ.-мат. лит., 1958. — 271 с.
2. *Rao M. M., Ren Z. D.* Theory of Orlicz Spaces. — Marcel Dekker Inc., New York, 1991. — 449 p.
3. *Rao M. M., Ren Z. D.* Applications of Orlicz Spaces. — Marcel Dekker Inc., New York, 2002. — 488 p. p.

4. *Genebashvili I., Gogatishvili A., Kokilashvili V.Krbec M.* Weight Theory for Integral Transforms on Spaces of Homogeneous Type. — Longman, Harlow, UK: vol. 92 of Pitman Monographs and Surveys in Pure and Applied Mathematics. — 1998. — 410 p.

5. *Khabazi M.* The mean convergence of trigonometric Fourier series in weighted Orlicz classes // Proceedings of A. Razmadze Mathematical Institute. — 2002. — **129.** — P. 65 – 75.

6. *Степанец А. И.* Методы теории приближений: В 2 ч. // Праці Ін-ту математики НАН України. — 2002. — **40**. — Ч. I. — 427 с.

7. *Степанец А. И.* Методы теории приближений: В 2 ч. // Праці Ін-ту математики НАН України. — 2002. — **40**. — Ч. II. — 468 с.

8. *Ponomarenko V. G.* Approximation of periodic functions in Orlicz spaces // Translated from Sib. Matem. Zh. — November–December, 1966. — **7**, №6. — P. 1337 – 1346. Original article submitted June 28, 1965.

9. *Hardy G., Littlewood J.* Some properties of fractional integrals // IMZ. — 1928. — **27.** — P. 565 — 606.

10. *Marcinkievicz J.* Sur les multiplicateures des séries de Fourier // Studia Math. — 1938. — **VIII**. — P. 78 – 91.

11. *Boyd D. W.* Spaces between a pair of reflexive Lebesgue spaces // Proc. Amer. Math. Soc. — 1967. — **18**. — P. 215 — 219.

12. *Boyd D. W.* Indices of function spaces and their relationship to interpolation // Canad. J. Math. — 1969. — **21.** — P. 1245 — 1254.

13. *Boyd D. W.* Indices for the Orlicz spaces // Pacific J. Math. — 1971. — **3.** — P. 315 — 323.

14. *Bennet C., Sharplay R.* Interpolation of Operators. — Boston: Academic Press, 1988. — 469 p.