Збірник праць Ін-ту математики НАН України 2014, Т. 11, №3, 228-240

УДК 517.5

С. А. Стасюк* (Ін–т математики НАН України, Київ)

НАБЛИЖЕННЯ СХІДЧАСТО-ГІПЕРБОЛІЧНИМИ СУМАМИ ФУР'Є КЛАСІВ $\mathbf{MB}^{\omega}_{1,\theta}(\bar{\gamma})$

We obtained the exact order estimates of approximation by step-hyperbolic Fourier sums of classes $\mathbf{MB}^{\omega}_{1,\theta}(\bar{\gamma})$ *of periodic functions of many variables in the* L_q*-metric* $(1 < q < \infty)$.

Одержано точні за порядком оцінки наближення східчасто-гіперболічними сумами Фур'є класів $\mathbf{MB}^{\omega}_{1,\theta}(\bar{\gamma})$ *періодичних функцій багатьох змінних в просторі* L_q, $(1 < q < \infty)$.

Нехай $L_p(\mathbb{T}^d)$, $\mathbb{T}^d := \prod\limits_{j=1}^{d}[0, 2\pi)$, $1 \le p < \infty$, — простір 2π-періодичних за кожною змінною функцій $f(\bar{x}) = f(x_1, \dots, x_d)$ зі скінченною нормою, яка визначається рівністю

$$\|f\|_p := \left((2\pi)^{-d} \int\limits_{\mathbb{T}^d} |f(\bar{x})|^p d\bar{x} \right)^{\frac{1}{p}}$$

і

$$L_p^0(\mathbb{T}^d) := \left\{ f\colon\ f \in L_p(\mathbb{T}^d),\ \int\limits_0^{2\pi} f(\bar{x}) dx_j = 0,\ j = 1, \dots, d \right\}.$$

Для $f \in L_p^0(\mathbb{T}^d)$ і для $\bar{t} = (t_1, \dots, t_d)$, $t_j \ge 0$, $j = 1, \dots, d$, означимо мішаний модуль неперервності порядку $\bar{l} = (l_1, \dots, l_d)$, $l_j \in \mathbb{N}$, $j = 1, \dots, d$,

$$\Omega_{\bar{l}}(f, \bar{t})_p := \sup_{\substack{|h_j| \le t_j \\ j=1,\dots,d}} ||\Delta_{\bar{h}}^{\bar{l}} f(\cdot)||_p,$$

де $\Delta_{\bar{h}}^{\bar{l}} f(\bar{x}) := \Delta_{h_d,d}^{l_d}(\dots(\Delta_{h_1,1}^{l_1} f(\bar{x}))\dots)$ — мішана різниця порядку $\bar{l}$;

---

*Робота виконана за часткової підтримки FP7-People-2011-IRSES, проект №295164 (EUMLS: EU–Ukrainian Mathematicians for Life Sciences).

© С. А. Стасюк, 2014

$\Delta^{l_j}_{h_j,j} f(\bar{x}) := \Delta_{h_j,j} \Delta^{l_j - 1}_{h_j,j} f(\bar{x})$ — l_j-різниця функції f з кроком h_j за змінною x_j,

$\Delta_{h_j,j} f(\bar{x}) := \Delta^1_{h_j,j} f(\bar{x}) := f(x_1, \dots, x_{j-1}, x_j + h_j, x_{j+1}, \dots, x_d) - f(\bar{x})$,

$$\Delta^0_{h_j,j} f(\bar{x}) := f(\bar{x}).$$

Відомо, що

$$\Delta^k_{h_j,j} f(\bar{x}) = \sum_{n=0}^{k} (-1)^{k-n} C^n_k f(x_1, \dots, x_{j-1}, x_j + nh_j, x_{j+1}, \dots, x_d),$$

де C^n_k — біноміальні коефіцієнти.

Надалі у випадку $l_1 = \dots = l_d = l$ будемо писати $\Omega_l(f, \bar{t})_p$ замість $\Omega_{\bar{l}}(f, \bar{t})_p$.

Нехай $\Omega(\bar{t}) = \Omega(t_1, \dots, t_d)$ — задана функція типу мішаного модуля неперервності порядку l, яка задовольняє такі умови:

1) $\Omega(\bar{t}) > 0$, $t_j > 0$, $j = 1, \dots, d$; $\Omega(\bar{t}) = 0$, $\prod\limits_{j=1}^{d} t_j = 0$;

2) $\Omega(\bar{t})$ не спадає по кожній змінній;

3) $\Omega(m_1 t_1, \dots, m_d t_d) \leq C_1 \left(\prod\limits_{j=1}^{d} m_j \right)^l \Omega(\bar{t})$, $m_j \in \mathbb{N}$, $j = 1, \dots, d$, C_1 — деяка додатна стала;

4) $\Omega(\bar{t})$ неперервна при $t_j \geq 0$, $j = 1, \dots, d$.

На функцію $\Omega(\bar{t})$ будемо накладати додаткові умови (S) та (S_l) [1], які називають умовами Барі–Стєчкіна. Сформулюємо їх.

Будемо говорити, що функція $\varphi(\tau) \geq 0$ від однієї змінної задовольняє умову (S), якщо $\varphi(\tau)/\tau^\alpha$ майже зростає при деякому $\alpha > 0$, тобто існує така не залежна від τ_1 та τ_2 стала $C_2 > 0$, що

$$\frac{\varphi(\tau_1)}{\tau_1^\alpha} \leq C_2 \frac{\varphi(\tau_2)}{\tau_2^\alpha}, \quad 0 < \tau_1 \leq \tau_2.$$

Функція $\varphi(\tau) \geq 0$ задовольняє умову (S_l), якщо $\varphi(\tau)/\tau^\beta$ майже спадає при деякому β: $0 < \beta < l$, тобто існує така не залежна від τ_1 та τ_2 стала $C_3 > 0$, що

$$\frac{\varphi(\tau_1)}{\tau_1^\beta} \geq C_3 \frac{\varphi(\tau_2)}{\tau_2^\beta}, \quad 0 < \tau_1 \leq \tau_2.$$

Будемо говорити, що $\Omega(\bar{t})$ задовольняє умови (S) та (S_l), якщо $\Omega(\bar{t})$ задовольняє ці умови за кожною змінною t_j при фіксованих значеннях інших змінних t_i, $i \neq j$.

Наведемо означення просторів $MB^{\Omega}_{p,\theta}$, розглянутих у роботі [2]. Для $1 \le p < \infty$, $1 \le \theta \le \infty$ і функції $\Omega(\bar{t})$ типу мішаного модуля неперервності порядку l простір $MB^{\Omega}_{p,\theta}$ визначається таким чином:

$$MB^{\Omega}_{p,\theta} := \left\{ f \in L^0_p(\mathbb{T}^d) : \ \|f\|_{MB^{\Omega}_{p,\theta}} < \infty \right\},$$

де

$$\|f\|_{MB^{\Omega}_{p,\theta}} := \left\{ \int\limits_{\mathbb{T}^d} \left(\frac{\Omega_l(f,\bar{t})_p}{\Omega(\bar{t})} \right)^{\theta} \prod_{j=1}^{d} \frac{dt_j}{t_j} \right\}^{\frac{1}{\theta}}, \quad 1 \le \theta < \infty, \tag{1}$$

$$\|f\|_{MB^{\Omega}_{p,\infty}} := \sup_{\bar{t} \in \mathbb{T}^d} \frac{\Omega_l(f,\bar{t})_p}{\Omega(\bar{t})}. \tag{2}$$

Простори $MB^{\Omega}_{p,\infty}$ співпадають з узагальненими просторами Нікольського MH^{Ω}_p (див. [3]). Зауважимо, що у випадку $\Omega(\bar{t}) = t_1^{r_1} \dots t_d^{r_d}$, $0 < r_j < l$, $j = 1, \dots, d$, простори $MB^{\Omega}_{p,\theta}$ вивчались в [4]. Зокрема, в [4] одержано декомпозиційне зображення для норм функцій із цих просторів.

Перейдемо до декомпозиційного зображення норм функцій з просторів $MB^{\Omega}_{p,\theta}$. Кожному вектору $\bar{s} \in \mathbb{N}^d$ поставимо у відповідність множини

$$\rho(\bar{s}) := \left\{ \bar{k} = (k_1, \dots, k_d) : 2^{s_j - 1} \le |k_j| < 2^{s_j}, k_j \in \mathbb{Z}, j = 1, \dots, d \right\},$$

$$\rho^{+}(\bar{s}) := \rho(\bar{s}) \bigcap \mathbb{N}^d,$$

а для $\bar{\varepsilon} = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_d)$, $\varepsilon_j = \pm 1$, $j = 1, \dots, d$, —

$$\rho^{\bar{\varepsilon}}(\bar{s}) := \rho(\bar{s}) \bigcap \prod_{j=1}^{d} \varepsilon_j \mathbb{N},$$

де $\varepsilon_j \mathbb{N} := \mathbb{N}$, якщо $\varepsilon_j = 1$, і $\varepsilon_j \mathbb{N} := \{-1, -2, \dots\}$, якщо $\varepsilon_j = -1$.

Для $f \in L^0_p(\mathbb{T}^d)$ покладемо

$$\delta_{\bar{s}}(f,\bar{x}) := \sum_{\bar{k} \in \rho(\bar{s})} \widehat{f}(\bar{k}) e^{i(\bar{k},\bar{x})}, \quad \delta^{+}_{\bar{s}}(f,\bar{x}) := \sum_{\bar{k} \in \rho^{+}(\bar{s})} \widehat{f}(\bar{k}) e^{i(\bar{k},\bar{x})},$$

$$\delta_{\bar{s}}^{\bar{\varepsilon}}(f,\bar{x}) := \sum_{\bar{k}\in\rho^{\bar{\varepsilon}}(\bar{s})} \widehat{f}(\bar{k})e^{i(\bar{k},\bar{x})},$$

де

$$\widehat{f}(\bar{k}) = (2\pi)^{-d}\int\limits_{\mathbb{T}^d} f(\bar{t})e^{-i(\bar{k},\bar{t})}\,d\bar{t}$$

— коефіцієнти Фур'є функції f, $(\bar{k},\bar{x}) := k_1x_1 + \cdots + k_dx_d$.

Для $\varphi, g \in L_1(\mathbb{T}^d)$ позначимо

$$(\varphi * g)(\bar{x}) := (2\pi)^{-d}\int_{\mathbb{T}^d} \varphi(\bar{y})g(\bar{x}-\bar{y})\,d\bar{y}.$$

Нехай

$$\mathcal{D}_m(t) := \sum_{k=-m}^{m} e^{ikt}, \quad \mathcal{V}_n(t) := \frac{1}{n}\sum_{k=n}^{2n-1}\mathcal{D}_k(t),\ m,n\in\mathbb{N}.$$

Покладемо $A_{\bar{s}}(f,\bar{x}) := (f * A_{\bar{s}})(\bar{x})$, де

$$A_{\bar{s}} := A_{\bar{s}}(\bar{x}) := \prod_{j=1}^{d}\big(\mathcal{V}_{2^{s_j}}(x_j) - \mathcal{V}_{2^{s_j-1}}(x_j)\big).$$

У роботі [5] встановлено, що при $1\le p<\infty$, $1\le\theta<\infty$ у випадку, коли $\Omega(\bar{t}) = \Omega(t_1,\ldots,t_d)$ — функція типу мішаного модуля неперервності порядку l, що задовольняє умови (S) та (S_l), для $\|f\|_{MB^{\Omega}_{p,\theta}}$, $f\in MB^{\Omega}_{p,\theta}$, має місце таке співвідношення:

$$\|f\|_{MB^{\Omega}_{p,\theta}} \asymp \left\{\sum_{\bar{s}}(\Omega(2^{-\bar{s}}))^{-\theta}||A_{\bar{s}}(f,\cdot)||_p^{\theta}\right\}^{\frac{1}{\theta}}, \tag{3}$$

де $\Omega(2^{-\bar{s}}) := \Omega(2^{-s_1},\ldots,2^{-s_d})$, $s_j\in\mathbb{N}$, $j=1,\ldots,d$.

Зазначимо, що запис $a\asymp b$ означає, що для невід'ємних величин a та b, що визначаються деякою сукупністю параметрів, існує додатна стала C, що не залежить від одного, визначеного контекстом параметра така, що $C^{-1}a\le b\le Ca$. Якщо ж виконується нерівність $b\le Ca$ або $b\ge C^{-1}a$, то будемо писати $b\ll a$ або $b\gg a$ відповідно.

Нехай $\omega(\tau)$ — функція (від однієї змінної) типу модуля неперервності порядку l, що задовольняє умови (S) і (S_l). Покладемо

$$\Omega(\bar{t}) := \omega(\bar{t}^{\bar{\gamma}}) := \omega\left(\prod_{j=1}^{d} t_j^{\gamma_j}\right), \tag{4}$$

де $\bar{\gamma} = (\gamma_1, \ldots, \gamma_d) \in \mathbb{R}_+^d$, $1 = \gamma_1 = \cdots = \gamma_\nu < \gamma_{\nu+1} \leq \cdots \leq \gamma_d$.

Функціональний простір $MB_{p,\theta}^{\Omega}$, $1 \leq p < \infty$, $1 \leq \theta \leq \infty$, що визначається за допомогою функції (4), а норми означаються формулами (1) та (2), позначатимемо через $MB_{p,\theta}^{\omega}(\bar{\gamma})$. Таким чином,

$$MB_{p,\theta}^{\omega}(\bar{\gamma}) := \left\{ f \in L_p^0(\mathbb{T}^d) : \ \|f\|_{MB_{p,\theta}^{\omega}(\bar{\gamma})} < \infty \right\},$$

де

$$\|f\|_{MB_{p,\theta}^{\omega}(\bar{\gamma})} = \left\{ \int\limits_{\mathbb{T}^d} \left(\frac{\Omega_{l_*}(f, \bar{t})_p}{\omega\left(\prod_{j=1}^{d} t_j^{\gamma_j}\right)} \right)^{\theta} \prod_{j=1}^{d} \frac{dt_j}{t_j} \right\}^{\frac{1}{\theta}}, \quad 1 \leq \theta < \infty,$$

$$\|f\|_{MB_{p,\infty}^{\omega}(\bar{\gamma})} = \sup_{\bar{t} \in \mathbb{T}^d} \frac{\Omega_{l_*}(f, \bar{t})_p}{\omega\left(\prod_{j=1}^{d} t_j^{\gamma_j}\right)},$$

а $l_* > l\gamma_d$.

Відповідно до (3), можемо записати

$$\|f\|_{MB_{p,\theta}^{\omega}(\bar{\gamma})} \asymp \left\{ \sum_{\bar{s}} (\omega(2^{-(\bar{s}, \bar{\gamma})}))^{-\theta} \|A_{\bar{s}}(f, \cdot)\|_p^{\theta} \right\}^{\frac{1}{\theta}}.$$

Надалі у випадку $\gamma_1 = \cdots = \gamma_d = 1$ будемо використовувати запис $MB_{p,\theta}^{\omega}$ для $MB_{p,\theta}^{\omega}(\bar{\gamma})$. Через $\mathbf{MB}_{p,\theta}^{\omega}(\bar{\gamma})$ будемо позначати одиничну кулю простору $MB_{p,\theta}^{\omega}(\bar{\gamma})$, тобто

$$\mathbf{MB}_{p,\theta}^{\omega}(\bar{\gamma}) := \left\{ f \in MB_{p,\theta}^{\omega}(\bar{\gamma}) : \ \|f\|_{MB_{p,\theta}^{\omega}(\bar{\gamma})} \leq 1 \right\}.$$

Означимо апроксимативні характеристики, які розглядаються в роботі. З цією метою, для заданого $\bar{\gamma} = (\gamma_1, \ldots, \gamma_d)$ і $n \in \mathbb{N}$ через $Q_n^{\bar{\gamma}}$ позначимо множини точок $\mathbb{Z}^d$, які називаються східчасто-гіперболічними хрестами і визначаються таким чином:

$$Q_n^{\bar{\gamma}} := \bigcup_{(\bar{s}, \bar{\gamma}) \leq n} \rho(\bar{s}).$$

Зауважимо, що $Q_n^{\bar{\gamma}}$ є множинами, що породжуються поверхнями рівня функції $\Omega(\bar{t})$, визначеної формулою (4).

Через $E_{Q_n^{\bar{\gamma}}}(f)_q$ будемо позначати найкраще наближення функції $f \in L_q(\mathbb{T}^d)$ за допомогою тригонометричних поліномів зі спектром із множини $Q_n^{\bar{\gamma}}$. Якщо F — деякий функціональний клас ($F \subset L_q(\mathbb{T}^d)$), то покладемо

$$E_{Q_n^{\bar{\gamma}}}(F)_q := \sup_{f \in F} E_{Q_n^{\bar{\gamma}}}(f)_q.$$

Нехай далі

$$S_{Q_n^{\bar{\gamma}}}(f, \bar{x}) := \sum_{(\bar{s}, \bar{\gamma}) \le n} \delta_{\bar{s}}(f, \bar{x})$$

— східчасто-гіперболічна сума Фур'є функції $f \in L_q(\mathbb{T}^d)$. Величину

$$\mathcal{E}_{Q_n^{\bar{\gamma}}}(f)_q := \|f - S_{Q_n^{\bar{\gamma}}}(f)\|_q$$

називають наближенням функції f за допомогою східчасто-гіперболічних сум Фур'є $S_{Q_n^{\bar{\gamma}}}(f)$ у метриці простору $L_q(\mathbb{T}^d)$. Для $F \subset L_q(\mathbb{T}^d)$ покладемо $\mathcal{E}_{Q_n^{\bar{\gamma}}}(F)_q := \sup\limits_{f \in F} \mathcal{E}_{Q_n^{\bar{\gamma}}}(f)_q$.

Як відомо (див., наприклад, [6] (гл. III), [8] (гл. IV)), підпростори тригонометричних поліномів зі спектром із $Q_n^{\bar{\gamma}}$ у ряді випадків є оптимальними в сенсі порядкових оцінок наближення анізотропних (за гладкісним параметром) класів Нікольського–Бєсова мішаної гладкості.

У даній роботі знайдено точні за порядком оцінки величин $E_{Q_n^{\bar{\gamma}}}(\mathbf{MB}^{\omega}_{1,\theta}(\bar{\gamma}))_q$ і $\mathcal{E}_{Q_n^{\bar{\gamma}}}(\mathbf{MB}^{\omega}_{1,\theta}(\bar{\gamma}))_q$ при деяких умовах на параметри, що входять в означення класу $\mathbf{MB}^{\omega}_{1,\theta}(\bar{\gamma})$.

Сформулюємо допоміжні твердження, якими будемо користуватись.

Теорема A (Літтлвуда–Пелі) [6] (вступ). *Нехай задано $1 < p < \infty$. Існують додатні сталі $C_1(p)$ і $C_2(p)$ такі, що для кожної функції $f \in L_p^0(\mathbb{T}^d)$, мають місце оцінки*

$$C_1(p)\|f\|_p \ll \left\| \left(\sum_{\bar{s}} |\delta_{\bar{s}}(f)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_p \ll C_2(p)\|f\|_p.$$

Лема А [6] (гл. I, § 3). *Нехай* $1 \le p < q < \infty$ *і* $f \in L_p^0(\mathbb{T}^d)$, *тоді*

$$\|f\|_q \ll \left(\sum_{\bar{s}} \|\delta_{\bar{s}}(f)\|_p^q \, 2^{\|\bar{s}\|_1 \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right) q} \right)^{\frac{1}{q}}, \tag{5}$$

де $\|\bar{s}\|_1 = (\bar{s}, \bar{1})$.

В [7] (гл. II, § 2) зауважено, що твердження леми А зберігається, якщо в (5) $\delta_{\bar{s}}(f)$ замінити на $A_{\bar{s}}(f)$.

Має місце наступне твердження.

Теорема. *Нехай* $1 < q < \infty$, $1 \le \theta < \infty$, *а функція* $\Omega(t)$ *визначається рівністю* (4), *причому функція* $\omega(\tau)$ *типу модуля неперервності порядку* l *задовольняє умову* (S) *з деяким* $\alpha > 1 - \frac{1}{q}$, *а також умову* (S_l), *тоді*

$$E_{Q_n^{\bar{\gamma}}}(\mathbf{MB}^{\omega}_{1,\theta}(\bar{\gamma}))_q \asymp \mathcal{E}_{Q_n^{\bar{\gamma}}}(\mathbf{MB}^{\omega}_{1,\theta}(\bar{\gamma}))_q \asymp \omega(2^{-n}) 2^{n\left(1-\frac{1}{q}\right)} n^{(\nu-1)\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{\theta}\right)_+}, \tag{6}$$

де $a_+ = \max\{a; 0\}$.

Доведення. Встановимо спочатку оцінку зверху. Нехай $f \in \mathbf{MB}^{\omega}_{1,\theta}(\bar{\gamma})$. Скориставшись співвідношенням (5) та нерівністю різних метрик Нікольського, одержимо при деякому $1 < q_0 < q$

$$\|f - S_n^{\bar{\gamma}}(f)\|_q = \left\| \sum_{(\bar{s},\bar{\gamma}) \ge n} \delta_{\bar{s}}(f) \right\|_q \ll \left(\sum_{(\bar{s},\bar{\gamma}) \ge n} \|\delta_{\bar{s}}(f)\|_{q_0}^q \, 2^{q\|\bar{s}\|_1 \left(\frac{1}{q_0} - \frac{1}{q}\right)} \right)^{\frac{1}{q}} \asymp$$

$$\asymp \left(\sum_{(\bar{s},\bar{\gamma}) \ge n} \|A_{\bar{s}}(f)\|_{q_0}^q \, 2^{q\|\bar{s}\|_1 \left(\frac{1}{q_0} - \frac{1}{q}\right)} \right)^{\frac{1}{q}} \ll$$

$$\ll \left(\sum_{(\bar{s},\bar{\gamma}) \ge n} \|A_{\bar{s}}(f)\|_1^q 2^{q\|\bar{s}\|_1 \left(1 - \frac{1}{q}\right)} \right)^{\frac{1}{q}} =: J_1. \tag{7}$$

Нехай $\theta \ge q$. Оскільки згідно з умовою теореми функція $\omega(\tau)$ задовольняє умову (S) з деяким $\alpha > 1 - \frac{1}{q}$, то при $(\bar{s}, \bar{\gamma}) \ge n$ виконується нерівність

$$\frac{\omega(2^{-(\bar{s},\bar{\gamma})})}{2^{-\alpha(\bar{s},\bar{\gamma})}} \ll \frac{\omega(2^{-n})}{2^{-\alpha n}}. \tag{8}$$

В [6, с. 11] показано, що

$$\sum_{(\bar{s},\bar{\gamma})\geq n} 2^{-\zeta(\bar{\tilde{\gamma}},\bar{s})} \asymp 2^{-\zeta n} n^{\nu-1}, \quad \zeta > 0, \tag{9}$$

де $\bar{\gamma} = (\gamma_1, \ldots, \gamma_d)$, $\bar{\tilde{\gamma}} = (\tilde{\gamma}_1, \ldots, \tilde{\gamma}_d)$, а $\tilde{\gamma}_j = \gamma_j = 1$, $j = 1, \ldots, \nu$, і $1 < \gamma_j < \tilde{\gamma}_j$, $j = \nu + 1, \ldots, d$.

Тоді, застосувавши до J_1 з (7) нерівність Гельдера з показником $\frac{\theta}{q} \geq 1$ і врахувавши (8), (9), будемо мати

$$J_1 = \left(\sum_{(\bar{s},\bar{\gamma})\geq n} (\omega(2^{-(\bar{s},\bar{\gamma})}))^{-q} \|A_{\bar{s}}(f)\|_1^q (\omega(2^{-(\bar{s},\bar{\gamma})}))^q 2^{q\|\bar{s}\|_1\left(1-\frac{1}{q}\right)} \right)^{\frac{1}{q}} \leq$$

$$\leq \left(\sum_{(\bar{s},\bar{\gamma})\geq n} \left(\frac{\omega(2^{-(\bar{s},\bar{\gamma})})}{2^{-\alpha(\bar{s},\bar{\gamma})}} \right)^{\frac{q\theta}{\theta-q}} 2^{-\left(\alpha(\bar{s},\bar{\gamma})-\|\bar{s}\|_1\left(1-\frac{1}{q}\right)\right)\frac{q\theta}{\theta-q}} \right)^{\frac{1}{q}-\frac{1}{\theta}} \times$$

$$\times \left(\sum_{(\bar{s},\bar{\gamma})\geq n} (\omega(2^{-(\bar{s},\bar{\gamma})}))^{-\theta} \|A_{\bar{s}}(f)\|_1^\theta \right)^{\frac{1}{\theta}} \ll$$

$$\ll \frac{\omega(2^{-n})}{2^{-\alpha n}} \left(\sum_{(\bar{s},\bar{\gamma})\geq n} 2^{-\left(\alpha(\bar{s},\bar{\gamma})-\|\bar{s}\|_1\left(1-\frac{1}{q}\right)\right)\frac{q\theta}{\theta-q}} \right)^{\frac{1}{q}-\frac{1}{\theta}} \|f\|_{MB^{\omega}_{1,\theta}(\bar{\gamma})} \leq$$

$$\leq \frac{\omega(2^{-n})}{2^{-\alpha n}} \left(\sum_{(\bar{s},\bar{\gamma})\geq n} 2^{-\left(\alpha(\bar{s},\bar{\gamma})-\|\bar{s}\|_1\left(1-\frac{1}{q}\right)\right)\frac{q\theta}{\theta-q}} \right)^{\frac{1}{q}-\frac{1}{\theta}} =$$

$$= \frac{\omega(2^{-n})}{2^{-\alpha n}} \left(\sum_{(\bar{s},\bar{\gamma})\geq n} 2^{-\left(\alpha-1+\frac{1}{q}\right)(\bar{s},\bar{\tilde{\gamma}})\frac{q\theta}{\theta-q}} \right)^{\frac{1}{q}-\frac{1}{\theta}} \asymp \omega(2^{-n}) 2^{n\left(1-\frac{1}{q}\right)} n^{(\nu-1)\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{\theta}\right)},$$

де $\bar{\tilde{\gamma}} = (\tilde{\gamma}_1, \ldots, \tilde{\gamma}_d)$, $\tilde{\gamma}_j = \Big(\alpha\gamma_j - 1 + \frac{1}{q}\Big) \,/\, \Big(\alpha - 1 + \frac{1}{q}\Big)$, $j = 1, \ldots, d$, при цьому, як бачимо, $\gamma_j < \tilde{\gamma}_j$, $j = \nu+1, \ldots, d$.

Якщо ж $1 \le \theta < q$, то, використовуючи вкладення

$$\mathbf{MB}^{\omega}_{p,1}(\bar{\gamma}) \subset \mathbf{MB}^{\omega}_{p,\theta_1}(\bar{\gamma}) \subset \mathbf{MB}^{\omega}_{p,\theta_2}(\bar{\gamma}) \subset \mathbf{MB}^{\omega}_{p,\infty}(\bar{\gamma}), \quad 1 < \theta_1 < \theta_2 < \infty,$$

і встановлену вище оцінку зверху для $\mathcal{E}_{Q_n^{\bar{\gamma}}}(\mathbf{MB}^{\omega}_{1,q}(\bar{\gamma}))_q$, будемо мати

$$\mathcal{E}_{Q_n^{\bar{\gamma}}}(\mathbf{MB}^{\omega}_{1,\theta}(\bar{\gamma}))_q \le \mathcal{E}_{Q_n^{\bar{\gamma}}}(\mathbf{MB}^{\omega}_{1,q}(\bar{\gamma}))_q \ll \omega(2^{-n})2^{n\left(1-\frac{1}{q}\right)}.$$

Таким чином, оцінку зверху в (6) встановлено.

Для доведення в (6) оцінки знизу (для випадку $q \le \theta < \infty$) покажемо, що ця оцінка реалізується на функції

$$f_1(\bar{x}) = C_4\omega(2^{-n})n^{-\frac{d-1}{\theta}} \sum_{\|\bar{s}\|_1 = n+1} A_{\bar{s}}(\bar{x}), \quad C_4 > 0.$$

Спочатку переконаємося у тому, що $f_1 \in \mathbf{MB}^{\omega}_{1,\theta}$ при деякому значенні сталої $C_4 > 0$. Дійсно, використовуючи відповідну нерівність для згортки та враховуючи той факт, що $\|A_{\bar{s}}\|_1 \ll 1$ та

$$\sum_{\|\bar{s}\|_1 = n} 1 \asymp n^{d-1}, \tag{10}$$

будемо мати

$$\|f_1\|_{MB^{\omega}_{1,\theta}} \asymp \omega(2^{-n})n^{-\frac{d-1}{\theta}} \left(\sum_{\bar{s}' :\, \|\bar{s}'-\bar{s}\|_\infty \le 1} \Big(\omega(2^{-\|\bar{s}'\|_1})\Big)^{-\theta} \times \right.$$

$$\left. \times \left\| \left(A_{\bar{s}'} * \left(\sum_{\|\bar{s}\|_1 = n+1} A_{\bar{s}} \right) \right) \right\|_1^{\theta} \right)^{\frac{1}{\theta}} \asymp$$

$$\asymp n^{-\frac{d-1}{\theta}} \left(\sum_{\bar{s}' :\, \|\bar{s}'-\bar{s}\|_\infty \le 1} \left\| \left(A_{\bar{s}'} * \left(\sum_{\|\bar{s}\|_1 = n+1} A_{\bar{s}} \right) \right) \right\|_1^{\theta} \right)^{\frac{1}{\theta}} =$$

$$= n^{-\frac{d-1}{\theta}} \left(\sum_{\bar{s}' \colon \|\bar{s}'-\bar{s}\|_\infty \le 1} \left\| \left(A_{\bar{s}'} * \left(\sum_{\substack{\bar{s} \colon \|\bar{s}'-\bar{s}\|_\infty \le 1 \\ \|\bar{s}\|_1 = n+1}} A_{\bar{s}} \right) \right) \right\|_1^{\theta} \right)^{\frac{1}{\theta}} \le$$

$$\le n^{-\frac{d-1}{\theta}} \left(\sum_{\bar{s}' \colon \|\bar{s}'-\bar{s}\|_\infty \le 1} \|A_{\bar{s}'}\|_1^{\theta} \left\| \sum_{\substack{\bar{s} \colon \|\bar{s}'-\bar{s}\|_\infty \le 1 \\ \|\bar{s}\|_1 = n+1}} A_{\bar{s}} \right\|_1^{\theta} \right)^{\frac{1}{\theta}} \le$$

$$\le n^{-\frac{d-1}{\theta}} \left(\sum_{\bar{s}' \colon \|\bar{s}'-\bar{s}\|_\infty \le 1} \|A_{\bar{s}'}\|_1^{\theta} \sum_{\substack{\bar{s} \colon \|\bar{s}'-\bar{s}\|_\infty \le 1 \\ \|\bar{s}\|_1 = n+1}} \|A_{\bar{s}}\|_1^{\theta} \right)^{\frac{1}{\theta}} \ll$$

$$\ll n^{-\frac{d-1}{\theta}} \left(\sum_{\bar{s}' \colon \|\bar{s}'-\bar{s}\|_\infty \le 1} \|A_{\bar{s}'}\|_1^{\theta} \sum_{\substack{\bar{s} \colon \|\bar{s}'-\bar{s}\|_\infty \le 1 \\ \|\bar{s}\|_1 = n+1}} 1 \right)^{\frac{1}{\theta}} \le$$

$$\le n^{-\frac{d-1}{\theta}} \left(\sum_{n+1-d \le \|\bar{s}'\|_1 \le n+1+d} \|A_{\bar{s}'}\|_1^{\theta} 3^d \right)^{\frac{1}{\theta}} \ll$$

$$\ll n^{-\frac{d-1}{\theta}} \left(\sum_{n+1-d \le \|\bar{s}'\|_1 \le n+1+d} 1 \right)^{\frac{1}{\theta}} = n^{-\frac{d-1}{\theta}} \left(\sum_{j=n+1-d}^{n+1+d} \sum_{\|\bar{s}'\|_1 = j} 1 \right)^{\frac{1}{\theta}} \asymp 1.$$

Перейдемо до встановлення оцінки знизу величини $\mathcal{E}_{Q_n^{\bar{1}}}(f_1)_q$. Для $\bar{s} \in \mathbb{N}^d$ покладемо

$$\square_{2^{-\bar{s}}} := \left\{ \bar{x} = (x_1, \ldots, x_d) : 2^{-s_j} \le x_j < 2^{-s_j+1}, j = 1, \ldots, d \right\}$$

і зауважимо, що $\square_{2^{-\bar{s}}} \cap \square_{2^{-\bar{s}'}} = \varnothing$ при $\bar{s} \ne \bar{s}'$. Тоді, беручи до уваги, що $S_{Q_n^{\bar{1}}}(f_1) = 0$, і скориставшись теоремою Літтлвуда–Пелі, а також (10), можемо записати (аналогічно, як і в [6] (гл. II, § 2) або [8], (гл. I, § 1.4))

$$\mathcal{E}_{Q_n^{\bar{1}}}(f_1)_q = \|f_1\|_q \asymp \left\| \left(\sum_{n+1 \le \|\bar{s}'\|_1 \le n+d+1} \sum_{\|\bar{\varepsilon}\|_1 = d} |\delta_{\bar{s}'}^{\bar{\varepsilon}}(f_1)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_q \ge$$

$$\geq \left\| \left(\sum_{n+1\leq\|\bar{s}'\|_1\leq n+d+1} |\delta^+_{\bar{s}'}(f_1)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_q \gg$$

$$\gg \omega(2^{-n})n^{-\frac{d-1}{\theta}} \left\| \left(\sum_{\|\bar{s}'\|_1=n+1} \left| \delta^+_{\bar{s}'} \left(\sum_{\|\bar{s}\|_1=n+1} A_{\bar{s}} \right) \right|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_q \gg$$

$$\gg \omega(2^{-n})n^{-\frac{d-1}{\theta}} \left(\sum_{\|\bar{s}'\|_1=n+1} \int\limits_{\square_{2^{-\bar{s}'}}} \left| \delta^+_{\bar{s}'} \left(\sum_{\|\bar{s}\|_1=n+1} A_{\bar{s}} \right) \right|^q d\bar{x} \right)^{\frac{1}{q}} \geq$$

$$\geq \omega(2^{-n})n^{-\frac{d-1}{\theta}} \left(\sum_{\|\bar{s}\|_1=n+1} \int\limits_{\square_{2^{-\bar{s}}}} \left| \prod_{j=1}^{d} \sum_{k_j=2^{s_j-1}+1}^{2^{s_j}-1} \left(\frac{k_j}{2^{s_j-1}} - 1 \right) \sin k_j x_j \right|^q d\bar{x} \right)^{\frac{1}{q}} >$$

$$> \frac{\omega(2^{-n})}{n^{\frac{d-1}{\theta}}} \left(\sum_{\|\bar{s}\|_1=n+1} \prod_{j=1}^{d} 2^{-s_j} \left(\sin\frac{1}{2} \sum_{k_j=2^{s_j-1}}^{2^{s_j}-1} \left(\frac{k_j}{2^{s_j-1}} - 1 \right) \right)^q \right)^{\frac{1}{q}} \asymp$$

$$\asymp \frac{\omega(2^{-n})}{n^{\frac{d-1}{\theta}}} \left(\sum_{\|\bar{s}\|_1=n+1} \prod_{j=1}^{d} 2^{s_j(q-1)} \right)^{\frac{1}{q}} \asymp \frac{\omega(2^{-n})}{n^{\frac{d-1}{\theta}}} 2^{n\left(1-\frac{1}{q}\right)} \left(\sum_{\|\bar{s}\|_1=n+1} 1 \right)^{\frac{1}{q}} \asymp$$

$$\asymp \omega(2^{-n}) 2^{n\left(1-\frac{1}{q}\right)} n^{(d-1)\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{\theta}\right)}. \qquad (11)$$

Таким чином, оцінка знизу в (6) у випадку $q \leq \theta < \infty$ встановлена.

Зазначимо, що оцінка знизу величини $\mathcal{E}_{Q^{\bar{1}}_n}(\mathbf{MB}^{\omega}_{1,\theta})_q$ у випадку $1 \leq \theta < q$ реалізується на функції

$$f_2(x) = C_5\omega(2^{-n})A_{\bar{s}_*}(x), \quad C_5 > 0,$$

де $\bar{s}_* : \|\bar{s}_*\|_1 = n+1$. Переконаємося в тому, що $f_2 \in \mathbf{MB}^{\omega}_{1,\theta}$ при деякому значенні сталої $C_5 > 0$. Дійсно, використовуючи відповідну нерівність для згортки, подібно як і при оцінці $\|f_1\|_{MB^{\omega}_{1,\theta}}$, будемо мати

$$\|f_2\|_{MB^{\omega}_{1,\theta}} \asymp \omega(2^{-n}) \left(\sum_{\bar{s}' :\, \|\bar{s}'-\bar{s}_*\|_\infty\leq 1} \left(\omega(2^{-\|\bar{s}'\|_1}) \right)^{-\theta} \|A_{\bar{s}'} * A_{\bar{s}_*}\|_1^{\theta} \right)^{\frac{1}{\theta}} \ll$$

$$\ll \left(\sum_{\bar{s}' : \|\bar{s}' - \bar{s}_*\|_\infty \le 1} \|A_{\bar{s}'}\|_1^\theta \ \|A_{\bar{s}_*}\|_1^\theta \right)^{\frac{1}{\theta}} \ll 1.$$

Далі, беручи до уваги, що $S_{Q_n^{\bar{1}}}(f_2) = 0$, аналогічно як і в (11), одержимо

$$\mathcal{E}_{Q_n^{\bar{1}}}(f_2)_q \gg \omega(2^{-n}) 2^{n\left(1-\frac{1}{q}\right)},$$

звідки слідує оцінка знизу в теоремі для $\mathcal{E}_{Q_n^{\bar{1}}}(\mathbf{MB}^\omega_{1,\theta})_q$ у випадку $1 \le \theta < q$.

Теорему доведено.

***Зауваження* 1.** У теоремі не розглянуто випадок $\theta = \infty$, оскільки точні за порядком оцінки величин $E_{Q_n^{\bar{\gamma}}}(\mathbf{MH}^\omega_1(\bar{\gamma}))_q$ і $\mathcal{E}_{Q_n^{\bar{\gamma}}}(\mathbf{MH}^\omega_1(\bar{\gamma}))_q$ встановлено М. М. Пустовойтовим [9].

2. У випадку $\omega(\tau) = \tau^r$, $1 - \frac{1}{q} < \alpha = r < l$, результат теореми відомий і доведений А. С. Романюком [10].

3. У випадку $\gamma_j = 1$, $j = 1, \ldots, d$, результат теореми відомий і встановлений О. В. Федуник [11].

4. Встановлені у теоремі оцінки доповнюють дослідження М. М. Пустовойтова [9] та автора [12, 13], які стосуються вивчення апроксимативних характеристик класів $\mathbf{MH}^\omega_p(\bar{\gamma})$ та $\mathbf{MB}^\omega_{p,\theta}(\bar{\gamma})$ відповідно.

1. *Бари Н. К., Стечкин С. Б.* Наилучшие приближения и дифференциальные свойства двух сопряженных функций // Тр. Моск. мат. о-ва. — 1956. — **5**. — С. 483 – 522.

2. *Sun Youngsheng, Wang Heping.* Representation and approximation of multivariate periodic functions with bounded mixed moduli of smoothness // Тр. Мат. ин-та АН СССР. — 1997. — **219**. — С. 356 – 377.

3. *Пустовойтов Н. Н.* Представление и приближение периодических функций многих переменных с заданным смешанным модулем непрерывности // Anal. Math. — 1994. — **20**, № 1. — P. 35 – 48.

4. *Лизоркин П. И., Никольский С. М.* Пространства функций смешанной гладкости с декомпозиционной точки зрения // Тр. Мат. ин-та АН СССР. — 1989. — **187**. — С. 143 – 161.

5. *Стасюк С. А., Федуник О. В.* Апроксимативні характеристики класів $B^\Omega_{p,\theta}$ періодичних функцій багатьох змінних // Укр. мат. журн. — 2006. — **58**, № 5. — С. 692 – 704.

6. *Темляков В. Н.* Приближение функций с ограниченной смешанной производной // Тр. Мат. ин-та АН СССР. — 1986. — **178**. — 112 с.
7. *Temlyakov V. N.* Approximation of periodic functions. — New York: Nova Sci. Publ. Inc, 1993. — 419 p.
8. *Романюк А. С.* Аппроксимативные характеристики классов периодических функций многих переменных // Праці Ін-ту математики НАН України. — 2012. — **93.** — 352 с.
9. *Пустовойтов Н. Н.* О приближении и характеризации периодических функций многих переменных, имеющих мажоранту смешанных модулей непрерывности специального вида // Anal. Math. — 2003. — **29**, №3. — P. 201 – 218.
10. *Романюк А. С.* Поперечники и наилучшее приближение классов периодических функций многих переменных // Anal. Math. — 2011. — **37**, №3. — P. 181 – 213.
11. *Федуник О. В.* Оцінки апроксимативних характеристик класів $B^{\Omega}_{p,\theta}$ періодичних функцій багатьох змінних в просторі L_q // Проблеми теорії наближення функцій та суміжні питання: Зб. праць Ін-ту математики НАН України. — 2005. — **2**, №2. — С. 268 – 294.
12. *Стасюк С. А.* Найкраще наближення класів $B^{\Omega}_{p,\theta}(\gamma)$ в метриці простору L_q // Проблеми теорії наближення функцій та суміжні питання: Зб. праць Ін-ту математики НАН України. — 2005. — **2**, №2. — С. 258 – 267.
13. *Стасюк С. А.* Найкраще наближення класів $B^{\Omega}_{p,\theta}(\gamma)$ періодичних функцій багатьох змінних в метриці простору L_p // Комплексний аналіз і течії з вільними границями: Зб. праць Ін-ту математики НАН України. — 2006. — **3**, №4. — С. 255 – 265.