Збірник праць Ін-ту математики НАН України 2014, Т. 11, № 3, 214-227

УДК 517.5

В. В. Савчук (Ін–т математики НАН України, Київ)

МНОГОЧЛЕНИ ФАБЕРА ЗІ СПІЛЬНИМ КОРЕНЕМ

We describe two sets of meromorphic univalent functions in the class Σ*, for which the sequences of Faber polynomials* $\{F_j\}_{j=1}^{\infty}$ *have the roots with following properties respectively:* $\sum_{j=1}^{n}|F_j(z_0)| = 0 < |F_{n+1}(z_0)|$, $n \in \mathbb{N}$, *and* $|F_1(z_0)| > 0 = \sum_{j=2}^{\infty}|F_j(z_0)|$. *We found an explicit form of Faber polynomials for such functions.*

Описано дві множини мероморфних однолистих функцій класу Σ*, для яких послідовності многочленів Фабера* $\{F_j\}_{j=1}^{\infty}$ *мають корені відповідно з такими властивостями:* $\sum_{j=1}^{n}|F_j(z_0)| = 0 < |F_{n+1}(z_0)|$, $n \in \mathbb{N}$, *і* $|F_1(z_0)| > 0 = \sum_{j=2}^{\infty}|F_j(z_0)|$. *Знайдено явний вигляд многочленів Фабера для таких функцій.*

Вступ. Нехай Σ — клас функцій

$$\Psi(w) = w + \sum_{j=0}^{\infty}\alpha_j w^{-j}, \tag{1}$$

які є мероморфними і однолистими в області $\mathbb{D}^- := \{w \in \widehat{\mathbb{C}} : |w| > 1\}$.

Многочленами Фабера функції $\Psi \in \Sigma$ називається послідовність алгебраїчних многочленів $\{F_j\}_{j=1}^{\infty}$, які визначаються як коефіцієнти розвинення

$$\ln\frac{\Psi(w) - z}{w} = -\sum_{j=1}^{\infty}\frac{F_j(z)}{j}w^{-j}, \quad z \in \mathbb{C}, \tag{2}$$

у степеневий ряд відносно w в околі нескінченно віддаленої точки (див., наприклад, [1, с. 57]).

Многочлени Фабера можна означити і для довільної мероморфної функції Ψ, не обов'язково однолистої. Таке означення дається за допомогою рекурентної формули (див., наприклад, [2, с. 60]): *системою многочленів Фабера мероморфної в* $\mathbb{D}^-$ *функції* Ψ*, яка має розвинення* (1)*, називається система* $\mathcal{F}(\Psi) := \{F_j\}_{j=0}^{\infty}$ *алгебраїчних многочленів* F_j *степеня* j $(F_0(z) = 1, F_1(z) = z - \alpha_0)$ *таких, що для* *будь-якого $z \in \mathbb{C}$ і кожного натурального j справджуються рівності*

$$F_{j+1}(z) + (\alpha_0 - z)F_j(z) + \sum_{k=1}^{j} \alpha_k F_{j-k}(z) + j\alpha_j = 0. \qquad (3)$$

Зауважимо, що з рекурентних рівностей (3) для даної системи многочленів $\{F_j\}_{j=0}^{\infty}$ і послідовності комплексних чисел $\{\alpha_j\}_{j=0}^{\infty}$, взагалі кажучи, не випливає той факт, що послідовність $\{\alpha_j\}_{j=0}^{\infty}$ є послідовністю коефіцієнтів Лорана–Тейлора мероморфної однолистої функції Ψ. Якщо ж розглядати означення многочленів Фабера, дані на основі співвідношень (2) і (3) на класі Σ, то вони рівносильні. Зазначимо також, якщо існує система алгебраїчних многочленів така, що для заданої послідовності комплексних чисел $\{\alpha_j\}_{j=0}^{\infty}$ виконується (3), то така система єдина.

У численних застосуваннях многочленів Фабера, зокрема, в теорії наближення аналітичних функцій комплексної змінної, важливою є інформація про корені цих многочленів. Дослідженням питань про розміщення, асимптотичний розподіл коренів многочленів Фабера тощо, присвячено багато робіт. Бібліографію з цього кола задач можна знайти в [3].

Мета даної роботи — описання множини функцій $\Psi \in \Sigma$, для яких тільки перші n многочленів Фабера мають один спільний корінь, а також описання множини функцій, для яких усі многочлени Фабера, починаючи з деякого, і тільки вони мають один спільний корінь.

Робота написана за такою схемою.

В п. 1 дано опис множини функцій $\Psi \in \Sigma$, для яких $\sum_{j=1}^{n} |F_j(z_0)| = 0 < |F_{n+1}(z_0)|$. Також описано функції Ψ, для яких відрізок послідовності многочленів Фабера $\{F_j\}_{j=0}^{m}$ збігається з відрізком послідовності многочленів Тейлора $\{(z-\alpha_0)^k\}_{k=0}^{m}$, а відрізок $\{F_j\}_{j=m+1}^{n}$, $m < n-1$, з відрізком послідовності алгебраїчних многочленів, які задовольняють тричленне рекурентне співвідношення зі сталим коефіцієнтом.

В п. 2 показано, що єдиною функцією $\Psi \in \Sigma$, для якої послідовність $\mathcal{F}(\Psi)$ має спільний корінь z_0, починаючи з многочлена F_2, є функція $\Psi(w) = z_0 + w\exp((\alpha_0 - z_0)/w)$.

В п. 3 знайдено явний вигляд многочленів Фабера функції $\Psi(w) =$

$= z_0 + w\exp((\alpha_0 - z_0)/w)$, а також встановлено деякі їх властивості.

1. Добре відомо, що для функції $\Psi(w) = w+\alpha_0$ многочлени Фабера мають вигляд $F_j(z) = (z-\alpha_0)^j$, $j = 0, 1, 2, \ldots$. Тому точка $z_0 = \alpha_0$ є спільним коренем для всіх F_j , $j = 1, 2, \ldots$. В наступному твердженні розвинуто це спостереження.

Теорема 1. *Нехай $\Psi \in \Sigma$, $\mathcal{F}(\Psi) = \{F_j\}_{j=0}^{\infty}$ — система многочленів Фабера функції Ψ, $n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ і $z_0 \in \mathbb{C}$. Тоді наступні твердження рівносильні:*

1) $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} |F_j(z_0)| = 0 < |F_{n+1}(z_0)|$;

2) $\displaystyle\Psi(w) = w + z_0 + \sum_{j=n}^{\infty} \alpha_j w^{-j} \quad \forall\ w \in \mathbb{D}^-, |\alpha_n| > 0 \quad \left(\sum_{j=\infty}^{\infty} = 0\right)$;

3) $F_j(z) = (z - z_0)^j$, $j = \overline{0, n}$ *і* $F_{n+1}(z) \not\equiv (z - z_0)^{n+1}$ $\forall\ z \in \mathbb{C}$.

Зауваження **1.** Коефіцієнти Лорана–Тейлора функції $\Psi \in \Sigma$, про яку йдеться в твердженні 2) теореми 1 задовольняють таку нерівність [4, p. 139]:

$$|\alpha_j| \le \frac{2}{j+1}, \quad j = \overline{n, 2n}.$$

Цікаво також зауважити (це випливає з (3)), що для такої функції Ψ

$$\alpha_j = -\frac{F_{j+1}(z_0)}{j+1}, \quad j = \overline{n, 2n}.$$

Доведення. Твердження теореми 1 є тривіальним при $n = 1$, тому далі вважаємо, що $n \ge 2$.

Доведення "1) $\Rightarrow$ 2)". Згідно з (3)

$$-(j+1)\alpha_j = F_{j+1}(z_0) + (\alpha_0 - z_0)F_j(z_0) + \sum_{k=1}^{j-1} \alpha_k F_{j-k}(z_0), \quad j \in \mathbb{N},$$

де (і скрізь далі) суми вигляду $\sum_{j=n}^{m}$ при $m < n$ покладаються рівними нулю.

Права частина останньої рівності дорівнює нулю для всіх натуральних $j \leq n-1$, до того ж $F_1(z_0) = z_0 - \alpha_0 = 0$, тому $\alpha_0 = z_0$ і $\alpha_j = 0$, $j = \overline{1, n-1}$.

Оскільки $|F_{n+1}(z_0)| > 0$, то $|\alpha_n| = (n+1)^{-1}|F_{n+1}(z_0)| > 0$.

Доведення "2) $\Rightarrow$ 3)". Згідно з (3)

$$F_j(z_0) = (z - z_0)F_{j-1}(z), \quad j = \overline{1, n},$$

і

$$F_{n+1}(z) = (z - z_0)F_n(z) - (n+1)\alpha_n.$$

Отже,

$$F_j(z) = (z - z_0)^j, \quad j = \overline{0, n},$$

і

$$F_{n+1}(z) = (z - z_0)^{n+1} - (n+1)\alpha_n \not\equiv (z - z_0)^{n+1}.$$

Імплікація "3) $\Rightarrow$ 1)" є очевидною.

Повертаючись до теореми 1, зауважимо, що для функцій $\Psi(w) = = w + \alpha_0 + \sum_{k=n}^{\infty} \alpha_k w^{-k}$ і тільки для них перші n многочленів Фабера збігаються з першими n многочленами Тейлора $(z - \alpha_0)^k$, які відповідають функції $w \mapsto w + \alpha_0$. У зв'язку з цим природно виникає питання про описання функцій $\Psi \in \Sigma$, для яких перші n многочленів Фабера збігаються з іншими добре відомим частинними випадками многочленів Фабера, наприклад, з многочленами Чебишева.

Наступне твердження описує деякі з таких випадків.

Теорема 2. *Нехай* $\Psi \in \Sigma$, $\mathcal{F}(\Psi) = \{F_j\}_{j=0}^{\infty}$ *— система многочленів Фабера функції* Ψ, $z_0 \in \mathbb{C}$, $m, n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, $m < n - 1$. *Тоді наступні твердження рівносильні:*

1) $\displaystyle\sum_{\substack{j=1,\\ j \neq m+1}}^{n} |F_j(z_0)| = 0 < |F_{m+1}(z_0)F_{n+1}(z_0)|$;

2) $\displaystyle\Psi(w) = w + z_0 + \alpha_m w^{-m} + \sum_{j=n}^{\infty} \alpha_j w^{-j}, \quad \forall\, w \in \mathbb{D}^-, \quad |\alpha_m \alpha_n| > 0$;

3)

$$F_{j+1}(z)=\begin{cases}(z-z_0)^{j+1}, & j=\overline{0,m-1},\\ (z-z_0)^{m+1}-(m+1)\alpha_m, & j=m,\\ (z-z_0)F_j(z)-\alpha_m F_{j-m}(z), & j=\overline{m+1,n-1},\\ (z-z_0)F_j(z)-\alpha_m F_{j-m}(z)-\sum\limits_{k=n}^{j}\alpha_k F_{j-k}(z)-j\alpha_j, & j\geq n.\end{cases}$$

Доведення є цілком аналогічним до доведення теореми 1. Тому окреслимо лише його ключові моменти.

Якщо справджується твердження 1), то за теоремою 1 $\alpha_j=0$, $j=\overline{1,m-1}$, і $F_j(z)=(z-\alpha_0)^j$, $j=\overline{1,m}$. Далі, згідно з (3) $F_{m+1}(z_0)=$ $=-(m+1)\alpha_m\neq 0$ і $0=F_{j+1}(z_0)=-\sum_{k=m}^{j-1}\alpha_k F_{j-k}(z_0)-ja_j$, $j=\overline{m,n-1}$, тобто $\alpha_j=0$, $j=\overline{m+1,n-1}$.

На підставі цих фактів усі рекурентні формули в твердженні 3) випливають із формули (3), і навпаки.

***Приклад* 1.** Нехай в умовах теореми 2 $\alpha_m=1/m$, тобто

$$\Psi(w)=w+\frac{1}{mw^m}+\sum_{j=n}^{\infty}\alpha_j w^{-j},\quad m\in\mathbb{N}. \tag{4}$$

Відомо, що функція $\widetilde{\Psi}(w):=w+1/(mw^m)$ здійснює конформне відображення області $\mathbb{D}^-$ на зовнішність m–гіпоциклоїди з $m+1$ точкою звороту (див., наприклад, [5, с. 295]).

Для такої функції $\widetilde{\Psi}$ в [6] одержано явний вираз для системи многочленів Фабера $\mathcal{F}(\widetilde{\Psi})$:

$$\widetilde{F}_j(z)=j\sum_{k=0}^{[j/(m+1)]}\frac{(-1)^k\Gamma(j-mk)}{\Gamma(j-(m+1)k+1)m^k k!}z^{j-(m+1)k},\ j\in\mathbb{N},$$

де

$$\left[\frac{j}{m+1}\right] := \begin{cases} \dfrac{j}{m+1}, & j = 0 \mod(m+1), \\[2ex] \dfrac{j-l}{m+1}, & j = l \mod(m+1),\ l = \overline{1,m}, \end{cases}$$

і $\Gamma(\cdot)$ — гамма-функція Ейлера, а у роботах [7, 8] показано, що всі нулі многочленів $\widetilde{F}_j$ лежать на променях, що з'єднують точку 0 з вершинами m–гіпоциклоїди.

Зокрема, при $m = 1$ областю значень функції Ψ є вся комплексна площина з розрізом вздовж відрізка $[-2, 2]$, тобто $\widetilde{\Psi}(\mathbb{D}^-) = \widehat{\mathbb{C}} \backslash [-2, 2]$. Отже,

$$\mathcal{F}(\widetilde{\Psi}) = \{T_0\} \cup \left\{2T_j\left(\frac{z}{2}\right)\right\}_{j=1}^{\infty},$$

де T_j — многочлени Чебишева (див., наприклад, [9, с. 56, 57]).

Таким чином, згідно з теоремою 2 для функції Ψ, визначеної рівністю (4), $F_j(z) = \widetilde{F}_j(z)$, $j = \overline{0,n}$.

Многочлени Фабера F_j, розглянуті в прикладі 1, при $j = \overline{m+1,n}$ утворюють підклас алгебраїчних многочленів, що породжуються так званими тричленними рекурентними співвідношеннями. Такі многочлени відіграють важливу роль в багатьох розділах сучасного аналізу, зокрема, в асимптотичній теорії ортогональних многочленів і в теорії апроксимацій Ерміта–Паде. Цим та іншим аспектам теорії присвячена робота [10].

2. Розглянемо тепер задачу про *описання множини функцій* $\Psi \in \Sigma$, *для яких існує принаймні одна точка* $z_0 \in \mathbb{C}$ *така, що для деякого натурального* n

$$\sum_{j=1}^{n} |F_j(z_0)| > 0 = \sum_{j=n+1}^{\infty} |F_j(z_0)|. \tag{5}$$

Наступне твердження дає розв'язок поставленої задачі у випадку $n = 1$.

Теорема 3. *Нехай* Ψ — *мероморфна в* $\mathbb{D}^-$ *функція вигляду* (1), $\mathcal{F}(\Psi) = \{F_j\}_{j=0}^{\infty}$ — *система многочленів Фабера функції* Ψ *і* $z_0 \in \mathbb{C}$. *Тоді:*

1) *для того, щоб співвідношення* (5) *виконувалося при* $n = 1$ *необхідно і достатньо, щоб* $z_0 \neq \alpha_0$ *і*

$$\Psi(w) = z_0 + w \exp\left(\frac{\alpha_0 - z_0}{w}\right) = w + \alpha_0 + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(\alpha_0 - z_0)^{j+1}}{(j+1)!} w^{-j}; \quad (6)$$

2) *функція* Ψ*, задана формулою* (6)*, є однолистою тоді і тільки тоді, коли* $|\alpha_0 - z_0| \leq 1$.

Наслідок 1. *Нехай* Ψ *— функція мероморфна в* $\mathbb{D}^-$ *і* $\mathcal{F}(\Psi)$ *— система многочленів Фабера функції* Ψ*. Якщо* z_0 *— точка, для якої виконується співвідношення* (5) *при* $n = 1$*, то вона єдина.*

Справді, рівняння $F_2(z) = (z - \alpha_0)^2 - (z_0 - \alpha_0)^2 = 0$ має два корені: $z_1 = z_0$, $z_2 = 2\alpha_0 - z_0$. Тому іншою точкою, для якої може виконуватися співвідношення (5) є тільки точка $z_0^* := 2\alpha_0 - z_0$. Але в такому випадку для всіх $w \in \mathbb{D}^-$ мала б виконуватися рівність $\exp((\alpha_0 - z_0)/w) = \exp(-(\alpha_0 - z_0)/w)$, що неможливо, оскільки $z_0 \neq \alpha_0$.

Зауваження 2. Як буде видно з доведення теореми 3, умова $|\alpha_0 - z_0| \leq 1$ є критерієм того, що функція Ψ, задана формулою (6), є зірковою відносно точки z_0, тобто, що область $\widehat{\mathbb{C}} \setminus \overline{\Psi(\mathbb{D}^-) - z_0}$ є зірковою відносно початку координат.

Доведення. 1). Нехай $F_2(z_0) = F_3(z_0) = \ldots = 0$ і $z_0 \neq \alpha_0$. Тоді застосовуючи формулу (3) послідовно для $j = 1, 2, \ldots$ при $z = z_0$, отримаємо рівності

$$\begin{gathered} 0 + (\alpha_0 - z_0)(z_0 - \alpha_0) + 2\alpha_1 = 0, \\ 0 + (\alpha_0 - z_0) \cdot 0 + \alpha_1(z_0 - \alpha_0) + 3\alpha_2 = 0, \\ 0 + (\alpha_0 - z_0) \cdot 0 + \alpha_1 \cdot 0 + \alpha_2(z_0 - \alpha_0) \cdot 0 + 4\alpha_3 = 0 \end{gathered} \quad (7)$$

і т. д.

Звідси випливає, що

$$\alpha_1 = \frac{(z_0 - \alpha_0)^2}{2}, \alpha_2 = \frac{(z_0 - \alpha_0)^3}{2 \cdot 3}, \alpha_3 = \frac{(z_0 - \alpha_0)^4}{2 \cdot 3 \cdot 4}, \ldots .$$

Отже,

$$\Psi(w) = w + \alpha_0 + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(z_0 - \alpha_0)^{j+1}}{(j+1)!} w^{-j}.$$

Навпаки, якщо функція Ψ має вигляд (6) і $z_0 \neq \alpha_0$, то будуть виконуватися рівності (7), які згідно з формулами (3) й доводять, що $F_2(z_0) = F_3(z_0) = \ldots = 0$.

Зауважимо, що якщо ж виконується (5) при $n = 1$ і функція $\Psi \in \Sigma$, то висновок про її вигляд можна зробити безпосередньо з рівності (2). Справді, у такому випадку розвинення (2) в околі нескінченно віддаленої точки набуває вигляду

$$\ln \frac{\Psi(w) - z_0}{w} = -F_1(z_0) w^{-1} = (\alpha_0 - z_0) w^{-1}. \tag{8}$$

Припустимо, що $z_0 = \Psi(w_0)$ для деякого $w_0 \in \mathbb{D}^-$. Тоді ліву частину рівності (8) можна переписати у вигляді

$$\ln \frac{\Psi(w) - z_0}{w} = \ln \frac{\Psi(w) - \Psi(w_0)}{w - w_0} + \ln \left(1 - \frac{w_0}{w}\right).$$

Звідки випливає, що при значеннях w з околу w_0 абсолютна величина лівої частини рівності (8) за рахунок доданка $\ln(1 - w_0/w)$ може бути як завгодно великою, в той час як права частина (8) є обмеженою.

Отримана суперечність доводить, що рівність (8) справджується для всіх $w \in \mathbb{D}^-$ і не існує такого $w_0 \in \mathbb{D}^-$, щоб $z_0 = \Psi(w_0)$.

Отже, неодмінно $z_0 \in \widehat{\mathbb{C}} \setminus \overline{\Psi(\mathbb{D}^-)}$ і

$$\Psi(w) = z_0 + w \exp\left(\frac{\alpha_0 - z_0}{w}\right), \quad w \in \mathbb{D}^-.$$

2). Нехай функція Ψ, задана формулою (6), є однолистою.

Тоді згідно з відомою ознакою однолистості (див. [11]) справджується співвідношення

$$A(\Psi) := \sup_{w \in \mathbb{D}^-} \left\{ (|w|^2 - 1) \left| w \frac{\Psi''(w)}{\Psi'(w)} \right| \right\} \le 6.$$

Оскільки

$$\Psi'(w) = \frac{w-\lambda}{w}\exp\left(\frac{\lambda}{w}\right),\ \Psi''(w) = \frac{\lambda^2}{w^3}\exp\left(\frac{\lambda}{w}\right), \quad w \in \mathbb{D}^-,$$

де $\lambda := \alpha_0 - z_0$, то

$$6 \geq A(\Psi) \geq (R^2-1)\left|\frac{\lambda^2}{Re^{i\arg\lambda}\,(Re^{i\arg\lambda}-\lambda)}\right| =$$

$$= (R^2-1)\frac{|\lambda|^2}{R\big|R-|\lambda|\big|} \quad \forall\ R > 1,$$

звідки й випливає, що $|\lambda| \leq 1$.

Доведемо тепер достатність умови $|\lambda| \leq 1$ для однолистості функції $\Psi(w) = z_0 + w\exp(\lambda w^{-1})$.

Зрозуміло, що однолистість функції Ψ є рівносильною однолистості функції $w \mapsto (\Psi(w) - z_0)$. Тому, не втрачаючи загальності, покладаємо $z_0 = 0$.

Насправді, у нашому випадку про функцію Ψ можна стверджувати більше. А саме, функція Ψ є зірковою в $\mathbb{D}^-$, а отже, і однолистою. У цьому легко переконатися за допомогою такого критерію (див., наприклад, [1, с. 42]): голоморфна функція Ψ є зірковою в $\mathbb{D}^-$ тоді і тільки тоді, коли

$$B(\Psi) := \inf_{w\in\mathbb{D}^-} \operatorname{Re}\left(w\frac{\Psi'(w)}{\Psi(w)}\right) \geq 0.$$

Маємо

$$B(\Psi) = \inf_{w\in\mathbb{D}^-} \operatorname{Re}\frac{w-\lambda}{w} = \inf_{w\in\mathbb{D}^-}\left(1 - \left|\frac{\lambda}{w}\right|\right) = 1 - |\lambda| \geq 0,$$

що й доводить зірковість і однолистість функції Ψ.

3. Наведемо тепер деякі властивості многочленів Фабера функції Ψ, заданої формулою (6).

Розпочнемо з твердження, в якому дано явний вигляд многочленів Фабера такої функції.

Теорема 4. *Нехай* $\Psi(w) = \eta + w \exp\left(\frac{\lambda}{w}\right)$, $\eta, \lambda \in \mathbb{C}$, $|\lambda| \leq 1$ *і* $\mathcal{F}(\Psi)$ *— система многочленів Фабера функції* Ψ*. Тоді*

$$F_1(z) = z-\eta-\lambda, \quad F_j(z) = j\sum_{k=1}^{j}(-\lambda)^{j-k}\frac{k^{j-k-1}}{(j-k)!}(z-\eta)^k,\ j \geq 2, 0^0 = 1.$$

Доведення. Теорема є очевидною у випадку, коли $\lambda = 0$, тому далі у доведенні цей випадок виключаємо.

Нехай $\Phi := \Psi^{-1}$ — функція, обернена до Ψ. За теоремою 3 функція Ψ є однолистою в $\mathbb{D}^-$, тому Φ є визначеною і однолистою в області $\Psi(\mathbb{D}^-)$.

Добре відомо (див., наприклад, [2, с. 53]), що многочлени Фабера F_j функції Ψ збігаються з правильною частиною (тейлорівською частиною) функції Φ^j у розвиненні в ряд Лорана в околі нескінченно віддаленої точки, тобто

$$(\Phi(z))^j = Q_j(z) + F_j(z), \quad j = 1, 2, \ldots, \tag{9}$$

де $Q_j(z) = O(1/z)$, $|z| \to \infty$.

Знайдемо явний вигляд функції Φ. Для цього при довільному фіксованому $z \in \Psi(\mathbb{D}^-)$ розглянемо рівняння відносно w:

$$z = \eta + w\exp\left(\frac{\lambda}{w}\right).$$

Оскільки $\eta \notin \Psi(\mathbb{D}^-)$, то останнє рівняння рівносильне такому

$$-\frac{\lambda}{w}\exp\left(-\frac{\lambda}{w}\right) = -\frac{\lambda}{z-\eta}.$$

Розв'язки цього рівняння мають вигляд

$$w = -\frac{\lambda}{W\left(-\frac{\lambda}{z-\eta}\right)}, \tag{10}$$

де W — функція Ламберта, яка означається як обернена функція до функції $w \mapsto we^w$, тобто $W(we^w) = w$ (див., наприклад, [12]).

Функція W є багатозначною з розгалуженням в точці $-e^{-1}$ і межею однозначності гілок — променем $(-\infty, -e^{-1}]$. Але оскільки $-\lambda/(z-\eta) \notin (-\infty, -e^{-1}]$, то в правій частині (10) беремо головну гілку W_0 функції Ламберта.

Таким чином,

$$\Phi(z) = -\frac{\lambda}{W_0\left(-\dfrac{\lambda}{z-\eta}\right)}. \tag{11}$$

Оскільки, як показано в [12], для будь-якого цілого j

$$(W_0(t))^j = -j\sum_{k=j}^{+\infty} \frac{(-k)^{k-j-1}}{(k-j)!} t^k, \quad |t| < e^{-1},\ (0/0 = 1),$$

то згідно з (9) і (11)

$$F_j(z) = (-\lambda)^j \left(W_0\left(-\frac{\lambda}{z-\eta}\right)\right)^{-j} - Q_j(z) =$$

$$= (-\lambda)^j j \sum_{k=-j}^{0} \frac{(-k)^{k+j-1}}{(k+j)!} \left(-\frac{\lambda}{z-\eta}\right)^k, \quad \left(0^0 = 1\right),$$

що й потрібно було довести.

Розглянемо задачу з [13, с. 57] про явний вигляд алгебраїчних многочленів P_j, які породжуються твірною функцією

$$K(z,t) := \frac{A(t)}{1 - zg(t)},$$

де $A(t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k$, $|a_0| > 0$ і $g(t) = \sum_{k=1}^{\infty} g_k t^k$, $|g_1| > 0$ — функції, голоморфні в крузі $\mathbb{D} := \left\{t \in \mathbb{C} : |t| < 1\right\}$.

Йдеться про послідовність алгебраїчних многочленів $\{P_j\}_{j=0}^{\infty}$, для яких справджується рівність

$$K(z,t) = \sum_{j=0}^{\infty} P_j(z) t^j \tag{12}$$

при деякому фіксованому z для всіх t в околі 0, а також про визначення області $\Omega \times \mathbb{D}$ всіх таких допустимих значень (z, t).

Теорема 5. *Нехай* $A(t) = 1$, $g(t) = t\exp(-\lambda t)$, $\lambda \in \mathbb{C}$, $|\lambda| \le 1$. *Тоді рівність* (12) *справджується для всіх* $(z, t) \in \Omega \times \mathbb{D}$*, де* Ω *— зіркова відносно точки* 0 *область з межею* $\Gamma := \{\zeta = e^{i\theta}\exp(\lambda e^{-i\theta}) : \theta \in \in [0, 2\pi]\}$,

$$P_j = \sum_{k=0}^{j} \lambda^{j-k} F_k, \quad j = 0, 1, 2, \dots,$$

і F_k *— многочлени Фабера функції* $\Psi(w) = w\exp\left(\frac{\lambda}{w}\right)$.

Доведення. За теоремою 3 і зауваженням 2 функція Ψ є зірковою, тобто область $\Omega := \widehat{\mathbb{C}} \setminus \overline{\Psi(\mathbb{D}^-)}$ є зірковою відносно точки 0. Зрозуміло також, що крива Γ є межею області Ω.

Нехай $z \in \Omega$. Тоді, продиференціювавши відносно w рівність (2), отримаємо добре відоме співвідношення

$$\frac{\Psi'(w)w}{\Psi(w) - z} = \sum_{j=0}^{\infty} F_j(z) w^{-j}, \tag{13}$$

в якому ряд відносно w збігається рівномірно і абсолютно в області $\mathbb{D}^-$.

З другого боку, для всіх $z \in \Omega$ і $w \in \mathbb{D}^-$

$$\frac{\Psi'(w)w}{\Psi(w) - z} = \frac{w - \lambda}{w} K\left(z, \frac{1}{w}\right).$$

Отже, за правилом множення степеневих рядів для будь-якого $z \in \Omega$ і $t \in \mathbb{D} \setminus \{0\}$ маємо рівності

$$K(z, t) = \frac{1}{1 - \lambda t} \cdot \frac{\Psi'\left(\frac{1}{t}\right)\frac{1}{t}}{\Psi\left(\frac{1}{t}\right) - z} =$$

$$= \left(\sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k t^k\right)\left(\sum_{k=0}^{\infty} F_k(z) t^k\right) = \sum_{j=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{j} \lambda^{j-k} F_k(z)\right) t^j,$$

що й потрібно було довести.

Область Ω не можна розширити не змінивши область $\mathbb{D}$. У цьому легко переконатися, зауваживши таке.

Припустимо $z \in \Gamma$, тобто $z = \Psi(w_0)$ для деякого $w_0, |w_0| = 1$. Тоді точка w_0 є особливою точкою для ряду в правій частині (13), що унеможливлює всі висновки, зроблені вище.

Теорему доведено.

Теорема 6. *Нехай* $\Psi(w) = w \exp\left(\frac{\lambda}{w}\right)$, $\lambda \in \mathbb{C}, |\lambda| \le 1$ *і* $\mathcal{F}(\Psi)$ *— система многочленів Фабера функції* Ψ*. Тоді*

$$zF_j'(z) = j \sum_{k=0}^{j} \lambda^{j-k} F_k(z), \quad j = 0, 1, 2, \dots. \tag{14}$$

Доведення. За теоремою 5 для будь-якого $z \in \Omega$ і $w \in \mathbb{D}^-$

$$\sum_{j=0}^{\infty} P_j(z) w^{-j} = \frac{1}{1 - \dfrac{z}{w} \exp\left(-\dfrac{\lambda}{w}\right)} = \frac{w \exp\left(\dfrac{\lambda}{w}\right)}{w \exp\left(\dfrac{\lambda}{w}\right) - z} =$$

$$= 1 + \frac{z}{w \exp\left(\dfrac{\lambda}{w}\right) - z}. \tag{15}$$

З другого боку, внаслідок диференціювання (2) відносно z (див. також [2, с. 129]), справджується рівність

$$\frac{1}{\Psi(w) - z} =$$

$$= \frac{1}{w \exp\left(\dfrac{\lambda}{w}\right) - z} = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{F_j'(z)}{j} w^{-j} \quad \forall\ z \in \Omega, w \in \mathbb{D}^-. \tag{16}$$

Підставивши (16) в (15) і зрівнявши коефіцієнти при w^{-j} в розвиненнях в обох частинах, за теоремою 5 отримаємо (14).

1. *Pommerenke Chr.* Univalent functions. — Göttingen: Vandenhoeck & Ruprecht, 1975. — 376 p.
2. *Суетин П. К.* Ряды по многочленам Фабера. — М.: Наука, 1984. — 336 с.
3. *Andrievskii V. V., Blatt H.–P.* On the Distribution of Zeros of Faber Polynomials // Comp. Meth. Funct. Th. — 2011. — **11**, № 1. — P. 263 – 282.
4. *Duren P.* Univalent Functions. — New York: Springer–Verlag, 2001. — 383 p.
5. *Иванов В. И., Попов В. Ю.* Конформные отображения и их приложения. — М: Едиториал УРСС, 2002. — 324 с.
6. *He M. X.* Explicit Representations of Faber Polynomials for m-Cusped Hypocycloids // J. Approx. Theory. — 1996. — **87**, № 2. — P. 137 – 147.
7. *Eiermann M. Varga R. S.* Zeros and local extreme points of Faber polynomials associated with hypocycloidal domains // Elec. Trans. Numer. Anal. — 1993. — **1**. — P. 49 – 71.
8. *He M. X., Saff E. B.* The zeros of Faber polynomials for an m-cusped hypocycloid // J. Approx. Theory. — 1994. — **78**, № 3. — P. 410 – 432.
9. *Gil A., Segura J., Temme N. M.* Numerical Methods for Special Functions. — Philadelphia: SIAM, 2007. — 417 p.
10. *Aptekarev A. I., Kalyagin V. A., Saff E. B.* Higher–Order Three–Term Recurrences and Asymptotics of Multiple Orthogonal Polynomials // Constr. Approx. — 2009. — **30**, № 2. — P. 175 – 223.
11. *Авхадиев Ф. А.* Об условиях однолистности аналитических функций // Изв. вузов. Матем. — 1970. — № 11. — С. 3 – 13.
12. *Corless R. M., Gonnet G. H., Hare D. E. G., Jeffrey D. J., Knuth D. E.* On the Lambert W function // Adv. Comp. Math. — 1996. — **5**, № 4. — P. 329 – 359.
13. *Boas R. P. Jr., Buck R. G.* Polynomial expansions of analytic functions. — Berlin: Springer–Verlag, 1964. — 77 p.