УДК 517.547.3+519.652

Е. И. Радзиевская (Национальный университет пищевых технологий, Киев)

ТЕОРЕМА О СРЕДНЕМ

The mean value theorem for holomorphic function was proved. The statement of this theorem allows to define the domain of application.

Доказывается теорема о среднем для голоморфной функции, из формулировки которой можно определить область ее применения.

Классическая теорема о среднем значении для действительной функции $f(z)$, определенной на отрезке действительной оси $[z_0, z_1]$, утверждает, что если функция f непрерывна на $[z_0, z_1]$ и дифференцируема на интервале (z_0, z_1), то найдется такая точка, для которой справедливо равенство

$$f(z_1) - f(z_0) = (z_1 - z_0)f'(\xi). \tag{1}$$

Этот результат распространяется на функции, определенные и дифференцируемые в n-мерной выпуклой области эвклидова пространства Ω, и принимающие действительные значения. В этом случае справедливо равенство

$$f(z_1) - f(z_0) = Df'(\xi)(z_1 - z_0) = (gradf(\xi), z_1 - z_0). \tag{2}$$

Здесь ξ лежит на отрезке, соединяющем точки z_0 и z_1 При $n = 1$ этот результат совпадает с формулой (1), а при $n = 2$ дает распространение теоремы о среднем на функции, определенные в комплексной плоскости и принимающие действительные значения.

Ситуация изменяется, если значения функции могут быть комплексными. В этом легко убедиться на простом примере. Пусть $f(z) = e^{iz}$ и $z_1 = z_0 + 2\pi$. Тогда левая часть в (1) равна нулю, а правая отлична от нуля, каково бы ни было ξ из $\mathbb{C}$. Кроме того, в [1] (гл. 3, пример 9) показано, что для $f(z) = e^{iz}$ и произвольных вещественных z_0 и z_1, $z_0 \neq z_1$ не существует вещественного ξ, для которого выполняется равенство (1). Тем не менее в [2] доказана теорема (дополняющая теорему 10 из [3]), гарантирующая существование хотя бы одного ξ из круга $U(z_0; |z_1 - z_0|)$, для которого справедлива формула (1), если только z_1 достаточно близко расположено к z_0 и $z_1 \neq z_0$, причем в случае $f''(z_0) \neq 0$ это ξ можно выбрать уже из круга $U((z_1 + z_0)/2;\ |z_1 - z_0|/2)$ (см. случай 1 в доказательстве теоремы из [2]). Этот результат был уточнен в [4], где снято условие $f''(z_0) \neq 0$ для локализации ξ в круге $U((z_1 + z_0)/2;\ |z_1 - z_0|/2)$ для формулы (1).

Отметим, что в упомянутых здесь результатах устанавливается справедливость формулы (1) для голоморфной функции, т.е. существования среднего значения ξ, при этом предполагается достаточная близость точек z_0 и z_1. Определение области применения теоремы о среднем для конкретных функций получить из формулировок этих теорем невозможно. Такая попытка была сделана в работе [5]. При значительных ограничениях было установлено, как близко должны располагаться z_0 и z_1, чтобы равенство (1) выполнялось. Результаты работы [6] обобщают и уточняют утверждения из [2] и [4], а также позволяют определить область применения теоремы о среднем для конкретных голоморфных функций без всех ограничений теоремы 3 работы [5]. Но из-за общности формулировок теорем работы [6] их затруднительно использовать для сравнения с уже известными результатами. Поэтому докажем аналог теоремы работы [6] для частного случая и покажем на примере функции e^{iz}, что используя этот результат, можно значительно расширить область применения теоремы о среднем.

Введем обозначения, используемые в работе. Как обычно, $\mathbb{R}$, $\mathbb{Z}$ и $\mathbb{N}$ множества вещественных, целых и целых положительных (натуральных) чисел соответственно. Везде далее f голоморфная в области D комплексной плоскости $\mathbb{C}$ функция, ∂D граница D, а $\overline{D}$ замыкание D. Через $U(\alpha; r) = \big\{z \in \mathbb{C},\ |z - \alpha| < r\big\}$ обозначен открытый круг с центром в точке α и радиуса $r > 0$. Считаем, что точки z_0 и z_1 принадлежат области D.

Теорема 1. *Пусть f — голоморфная в области D функция не являющаяся линейной, точки z_0 и z_1 не совпадают, а замыкание круга $U((z_1 + z_0)/2; |z_1 - z_0|/2)$ принадлежит D. Предположим, что s — наименьшее из натуральных чисел, удовлетворяющих требованию $f^{(s+1)}((z_1 + z_0)/2) \neq 0$, и*

$$|z_1 - z_0| \left(\sup_{\zeta \in U((z_1+z_0)/2;\ |z_1-z_0|/2)} |f^{(s+2)}(\zeta)| \right) <$$
$$< \frac{s+2}{s+3}(2s+1-(-1)^s)|f^{(s+1)}((z_1+z_0)/2)|. \tag{3}$$

Тогда в круге $U((z_1+z_0)/2;\ |z_1-z_0|/2)$ *найдется, по крайней мере одно, но не более* s*, различных* ξ*, для которых справедлива формула* (1).

Доказательство. Поскольку

$$f(z_1) - f(z_0) = \int\limits_{[z_0;z_1]} f'(\tau)d\tau,$$

то утверждение теоремы равносильно тому, что функция F, заданная равенством

$$F(z) := f'(z) - \frac{1}{(z_1 - z_0)} \int\limits_{[z_0;z_1]} f'(\tau)d\tau,$$

имеет, по крайней мере один, но не более s, различных нулей в круге $U((z_1+z_0)/2;\ |z_1-z_0|/2)$.

Далее, для краткости, положим

$$\alpha := (z_1 + z_0)/2$$

и введем две функции

$$F_1(z) := f'(z) - f'(\alpha), \tag{4}$$

$$F_2(z) := f'(z) - f'(\alpha) - \frac{(z-\alpha)^s}{s!} f^{(s+1)}(\alpha), \tag{5}$$

и также два числа

$$c := -\frac{1}{2(z_1 - \alpha)} \int\limits_{[z_0;z_1]} F_2(\tau)d\tau, \tag{6}$$

$$c_s := -\frac{1}{s!2(z_1-\alpha)} \int\limits_{[z_0;z_1]} (\tau-\alpha)^s d\tau. \qquad (7)$$

Одним из основных моментов доказательства теоремы является представление

$$F = F_1 + c + c_s f^{(s+1)}(\alpha),$$

которое доказывается непосредственной проверкой.

Так как при $s > 1$ справедливы равенства $f^{(2)}(\alpha) = ... = f^{(s)}(\alpha) = = 0$, то функция F_2 совпадает с остаточным членом в формуле Тейлора $Q_{s+1}(z_0; z_1; f')$, записанным для функции f'.

Используя интегральную форму остаточного члена и предположив принадлежность z замыканию круга $U((\alpha);\ |z_1 - z_0|/2)$, получим

$$|F_2(z)| = \frac{1}{s!}\left| \int\limits_{[\alpha;z]} f^{(s+2)}(\tau)(z-\tau)^s d\tau \right| \leq$$

$$\leq \frac{|z-\alpha|^{s+1}}{(s+1)!}\left(\sup_{\zeta\in U(\alpha;\ |z_1-z_0|/2)} |f^{(s+2)}(\zeta)| \right),\ z \in \overline{U(\alpha; |z_1 - z_0|/2)}. \quad (8)$$

Из этой оценки, определений (5) и (6) функций F_1 и F_2 следуют соотношения

$$|F_1(z)| \geq \frac{|z-\alpha|^s}{s!}|f^{(s+2}(\alpha)| - |F_2(z)| \geq$$

$$\geq \frac{|z-\alpha|^s}{s!}|f^{(s+2}(\alpha)| -$$

$$-\frac{|z-\alpha|^{s+1}}{(s+1)!} \sup_{\zeta\in U(\alpha;\ |z_1-z_0|/2)} |f^{(s+2}(\zeta)|,\ z \in \overline{U(\alpha; |z_1 - z_0|/2)}. \qquad (9)$$

Покажем теперь, что у функции F_1 в круге $U(\alpha; |z_1 - z_0|/2)$ имеется один s — кратный ноль в точке α. Действительно, так как первым отличным от нуля членом в разложении функции F_1 в ряд Тейлора в точке α является

$$\frac{(z-\alpha)^s}{s!} f^{(s+1)}(\alpha),$$

то α будет s — кратным нулем F_1. Покажем, что в круге $U(\alpha; |z_1 - z_0|/2)$ других нулей у F_1 нет. Воспользовавшись очевидной оценкой

$$|z - \alpha| \le |z_1 - z_0|/2$$

для $z \in U(\alpha; |z_1 - z_0|/2)$, неравенством

$$2(s+1) > \frac{s+2}{s+3}(2s + 1 - (-1)^s)$$

при $s \in \mathbb{N}$, условием (4) и соотношениями (9), получим, что $F_1 \ne 0$ при $s \ne \alpha$ и $z \in U(\alpha; |z_1 - z_0|/2)$.

Оценим теперь модуль числа c и найдем выражение для числа c_s, заданных равенствами (6) и (7).

Из определения (6) числа c и оценки (8) имеем

$$|c| \le \frac{1}{(s+1)!2|z_1 - \alpha|}\left(\sup_{\zeta \in U(\alpha;\ |z_1 - z_0|/2)} |f^{(s+2)}(\zeta)|\right)|I|,$$

где интеграл

$$I = \int\limits_{[z_0; z_1]} |(\tau - \alpha)^{s+1}| d\tau.$$

Делая замену

$$\tau = \alpha + (z_1 - \alpha)t,$$

заключаем

$$I = (z_1 - \alpha)^{s+2} \int\limits_{-1}^{1} |t|^{s+1} dt = \frac{2(z_1 - \alpha)^{s+2}}{s+2},$$

а значит,

$$|c| \le \frac{|z_1 - \alpha|^{s+1}}{(s+2)!}\left(\sup_{\zeta \in U(\alpha;\ |z_1 - z_0|/2)} |f^{(s+2)}(\zeta)|\right). \tag{10}$$

Аналогично вычислению интеграла I вычисляется число c_s, заданное формулой (7). Получаем

$$c_s = \frac{(z_1 - \alpha)^s}{(s+1)!2}(1 + (-1)^s). \tag{11}$$

Теперь оценка

$$|F_1(z)| > |c| + |c_s f^{(s+1)}(\alpha)|$$

при $z \in \partial U(\alpha; |z_1 - z_0|/2)$ вытекает после простых преобразований из условия (3) теоремы, неравенства (9) при $z \in \partial U(\alpha; |z_1 - z_0|/2)$, соотношений (10) и (11). При этом используются очевидные равенства

$$|z - \alpha| = |z_1 - \alpha| = |z_1 - z_0|/2$$

при $z \in \partial U(\alpha; |z_1 - z_0|/2)$. Тем самым,

$$|F_1(z)| > |c + c_s f^{(s+1)}(\alpha)|$$

при $z \in \partial U(\alpha; |z_1 - z_0|/2)$. Отсюда, на основании представления

$$F = F_1 + c + c_s f^{(s+1)}(\alpha),$$

и теоремы Руше, у функций $F_1 + c + c_s f^{(s+1)}(\alpha)$ и F_1 в круге $U(\alpha;\ |z_1 - z_0|/2)$ равное (с учетом кратностей) количество нулей. Но, как уже было показано, у функции F_1 в этом круге имеется лишь один s-кратный ноль α. Это и доказывает теорему.

Замечание. В теореме предполагается, что функция f не является линейной. Это требование необходимо для утверждения единственности ξ или установления их количества, поскольку в противном случае формула(1) справедлива при произвольном ξ.

Пример. Если положить в теореме $f(z) = e^z$ и обозначить $|z_1 - z_0| = d$, то условие теоремы (3) запишется в виде

$$de^{d/2} < 3,$$

и как показывают вычисления $d > 1,451$.

Отметим, что в работе [2] справедливость теоремы о среднем для функции e^z была установлена при значительно жестком требовании $|z_1 - z_0| < 0,3$.

1. *Гелбаум Б., Олмстед Дж.* Контрпримеры в анализе. М.: Мир, 1967.
2. *Robertson J. M.* A local mean value theorem for the complex plane // Proc. Edinburg Math. Soc. — 1969. — **16**, №4. — P. 329–331.

3. *McLeod R. M.* Mean value theorems for vector valued function // Proc. Edinburgh Math. Soc. — 1965. — **14**, № 3. — P. 197 – 209.

4. *Samuelsson A.* A local mean value theorem for analytic function // Amer. Math. Monthly. — 1973. — **80**, № 1. — P. 45 – 46.

5. *Qazi M. A.*The mean value theorem and analytic functions of a complex variable // J. Math. Anal. Appl. — 2006. — **324**, № 1. — P. 30 – 38.

6. *Радзиевская Е. И.,Радзиевский Г. В.* Для голоморфной в области функции остаточный член в формуле Тейлора допускает запись в форме Лагранжа // Сиб. мат. журн. — 2003. — **44**, № 2. — С. 403 — 414.