Збірник праць Ін-ту математики НАН України 2014, Т. 11, № 3, 173-181

УДК 517.5

В. К. Маслюченко, В. С. Мельник (Чернівецький національний університет імені Ю. Федьковича, Чернівці)

ПРО РІВНОМІРНЕ ВІДХИЛЕННЯ ВІД ПРОСТОРУ НЕПЕРЕРВНИХ ФУНКЦІЙ

It's proven that for the normal space X and any function $f: X \to \mathbb{R}$ the uniform distance $d(f, C(X))$ of function f from the space $C(X)$ of all continuous functions $g: X \to \mathbb{R}$ is equal to the half of the uniform norm $\|\omega_f\|$ of the function's f oscillation ω_f and it is reached on some function g from $C(X)$.

Доведено, що для нормального простору X і довільної функції $f: X \to \mathbb{R}$ рівномірне відхилення $d(f, C(X))$ функції f від простору $C(X)$ всіх неперервних функцій $g: X \to \mathbb{R}$ дорівнює половині рівномірної норми $\|\omega_f\|$ коливання ω_f функції f, причому воно досягається на деякій функції g з $C(X)$.

1. Вступ. У праці Й. Бен'яміні та Й. Лінденштраусса [1, с. 23] був отриманий один результат про рівномірну відстань $d(f, C_b(X))$ від довільної обмеженої функції $f: X \to \mathbb{R}$, заданої на паракомпактному просторі X, до простору $C_b(X)$ всіх неперервних і обмежених функцій $g: X \to \mathbb{R}$. Доведення базувалося на відомій теоремі Гана–Д'єдонне–Тонґа–Катетова (див. [2, с. 105] і вказану там літературу), яку автори довели для паракомпактного простору за допомогою теореми Майкла про селекцію. Між тим, ця теорема справджується для нормальних просторів і є для них характеристичною. Крім того, в [3] незалежно від [1] було знайдено рівномірне відхилення деяких функцій $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ від простору $C(\mathbb{R})$ усіх неперервних функцій $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, зокрема, для необмеженої функції $f(x) = [x]$.

Тому постало природне питання про розширення згаданого результату з [1], тобто про знаходження рівномірного відхилення

$$d(f, C(X)) = \inf_{g \in C(X)} \sup_{x \in X} |f(x) - g(x)|$$

довільної функції $f: X \to \mathbb{R}$ від простору $C(X)$ усіх неперервних функцій $g: X \to \mathbb{R}$. Саме це і здійснюється у даній праці.

© **В. К. Маслюченко, В. С. Мельник, 2014**

2. Відхилення та рівномірне відхилення. Нагадаємо [4, с. 11], що *відхилення* на множині M — це функція $d : M^2 \to [0, +\infty]$, яка задовольняє умови:

E1. $d(f, f) = 0$ для кожного $f \in M$;

E2. $d(f, g) = d(g, f)$ для довільних f і g з M;

E3. $d(f, g) \leq d(f, h) + d(h, g)$ для довільних f, g і h з M.

Якщо $0 \leq d(f, g) < +\infty$ і з умови $d(f, g) = 0$ випливає, що $f = g$, то відхилення d називається *відстанню* або *метрикою* на M. Відхилення ж може набувати і значення $+\infty$.

Нехай (M, d) — простір з відхиленням d на M, $\varnothing \neq E \subseteq M$ і $f \in M$. Число

$$d(f, E) = \inf \big\{ d(f, g) : g \in E \big\}$$

називається *відхиленням елемента f від множини E*. Зрозуміло, що $0 \leq d(f, E) \leq +\infty$. Якщо d — метрика, то $0 \leq d(f, E) < +\infty$.

Зокрема, нехай X — довільна множина і $M = \mathbb{R}^X$ — сукупність усіх функцій $f : X \to \mathbb{R}$. Для кожної функції $f \in \mathbb{R}^X$ покладемо

$$\|f\| = \sup_{x \in X} |f(x)|.$$

Легко перевірити, що функція $f \mapsto \|f\|$ має такі властивості:

N1. $0 \leq \|f\| \leq +\infty$ для кожного $f \in \mathbb{R}^X$;

N2. $\|f\| = 0 \Leftrightarrow f = 0$ для кожного $f \in \mathbb{R}^X$;

N3. $\|\lambda f\| = |\lambda| \|f\|$ для довільних $\lambda \in \mathbb{R}$ і $f \in \mathbb{R}^X$;

N4. $\|f + g\| \leq \|f\| + \|g\|$ для будь-яких $f, g \in \mathbb{R}^X$.

Допускаючи вільність мови, назвемо введену функцію $\| \cdot \|$ *рівномірною нормою на* $\mathbb{R}^X$, хоча вона може набувати і значення $+\infty$.

З властивостей N1 – N4 нескладно вивести, що формулою

$$d(f, g) = \|f - g\|$$

визначається відхилення на множині $\mathbb{R}^X$, яке ми будемо називати *рівномірним відхиленням.* Це відхилення породжує *рівномірне відхилення*

$$d(f, E) = \inf \big\{ \|f - g\| : g \in E \big\}$$

функції $f : X \to \mathbb{R}$ від непорожньої підмножини E простору $\mathbb{R}^X$, зокрема, рівномірне відхилення $d(f, C(X))$ функції f від простору

$C(X)$ всіх неперервних функцій $g : X \to \mathbb{R}$, якщо X — це топологічний простір.

Для ілюстрації знайдемо відхилення $d(f, C(\mathbb{R}))$ для деяких розривних функцій. Символом χ_A ми будемо позначати характеристичну функцію $\chi_A : X \to \mathbb{R}$ множини $A \subseteq X$, для якої $\chi_A(x) = 1$, якщо $x \in A$, і $\chi_A(x) = 0$, якщо $x \in X \setminus A$.

Твердження 1. *Нехай $f = sgn = \chi_{[0,+\infty)} - \chi_{(-\infty,0]}$ і 0 — нульова функція на $\mathbb{R}$. Тоді*

$$d(f, C(\mathbb{R})) = \|f - 0\| = \|f\| = 1.$$

Доведення. Оскільки $0 \in C(\mathbb{R})$ і $\|f\| = 1$, то $d(f, C(\mathbb{R})) \leq$ $\leq \|f - 0\| = \|f\| = 1$. Візьмемо довільну функцію $g \in C(\mathbb{R})$ і доведемо, що $d(f, g) = \|f - g\| \geq 1$.

Припустимо, що $g(0) \leq 0$. Зауважимо, що

$$\|f - g\| \geq |f(x) - g(x)| = |1 - g(x)|$$

для кожного $x > 0$. Тому з неперервності функції g у точці 0 випливає, що

$$\|f - g\| \geq \lim_{x \to +0} |1 - g(x)| = |1 - g(0)| = 1 - g(0) \geq 1.$$

Якщо ж $g(0) > 0$, то

$$\|f - g\| \geq \lim_{x \to -0} |-1 - g(x)| = 1 + g(0) > 1.$$

Таким чином, $\|f - g\| \geq 1$ для кожного $g \in C(\mathbb{R})$. Отже, $d(f, C(\mathbb{R})) \geq 1$. З отриманих нерівностей випливає, що $d(f, C(\mathbb{R})) = 1$.

Твердження 2. *Нехай $f(x) = [x]$ — ціла частина дійсного числа x і $g_0(x) = x - \frac{1}{2}$ на $\mathbb{R}$. Тоді*

$$d(f, C(\mathbb{R})) = \|f - g_0\| = \frac{1}{2}.$$

Доведення. Спочатку покажемо, що $\|f - g_0\| = \frac{1}{2}$. Нехай $n \in \mathbb{Z}$ і $n \leq x < n + 1$. Тоді $f(x) = [x] = n$,

$$-\frac{1}{2} = n - n - 1 + \frac{1}{2} < f(x) - g_0(x) = n - x + \frac{1}{2} \leq n - n + \frac{1}{2} = \frac{1}{2},$$

і $f(n) - g_0(n) = n - n + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$. Звідси випливає, що для кожного $n \in \mathbb{Z}$

$$\max_{n \le x < n+1} |f(x) - g_0(x)| = \frac{1}{2},$$

а значить, і

$$\|f - g_0\| = \sup\left\{|f(x) - g_0(x)| : x \in \mathbb{R}\right\} = \max\left\{|f(x) - g_0(x)| : x \in \mathbb{R}\right\} = \frac{1}{2}.$$

Тепер візьмемо довільну функцію $g \in C(\mathbb{R})$ і доведемо, що $\|f - g\| \ge \frac{1}{2}$. У випадку $g(0) \le -\frac{1}{2}$ будемо мати

$$\|f - g\| \ge |f(0) - g(0)| = |g(0)| = -g(0) \ge \frac{1}{2}.$$

Якщо ж $g(0) > -\frac{1}{2}$, то оскільки при $-1 < x < 0$ маємо, що $f(x) = -1$ і

$$\|f - g\| \ge |f(x) - g(x)| = |-1 - g(x)| = |1 + g(x)|,$$

то

$$\|f - g\| \ge \lim_{x \to -0} |1 + g(x)| = |1 + g(0)| = 1 + g(0) > 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

Так чи інакше виходить, що $\|f - g\| \ge \frac{1}{2}$ для кожного $g \in C(\mathbb{R})$, а значить, $d(f, C(\mathbb{R})) \ge \frac{1}{2}$, більше того, $d(f, C(\mathbb{R})) = \frac{1}{2}$, бо $\|f - g_0\| = \frac{1}{2}$ і $g_0 \in C(\mathbb{R})$.

***Зауваження* 1.** Позначимо символом $C_0(\mathbb{R})$ множину всіх функцій $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, які неперервні в точці 0. Як показує доведення твердження 1, не тільки $d(sgn, C(\mathbb{R})) = 1$, а й $d(sgn, C_0(\mathbb{R})) = 1$.

***Зауваження* 2.** Зрозуміло, що у доведенні твердження 2 точку 0 можна замінити будь-яким цілим числом n, і тому для $f(x) = [x]$ справедлива рівність $d(f, E) = \frac{1}{2}$, якщо E — це сукупність усіх функцій $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, які неперервні хоча б в одній цілій точці n.

3. Функції Бера і коливання. Для топологічного простору X і точки $x \in X$ символом $\mathcal{U}_x$ позначимо систему всіх околів точки x в X. Нехай $f : X \to \mathbb{R}$ — деяка функція. Покладемо для кожного $U \in \mathcal{U}_x$

$$M_f(U) = \sup_{x \in U} f(x) \quad \text{і} \quad m_f(U) = \inf_{x \in U} f(x).$$

Формулами

$$f^{\vee}(x) = \inf_{U \in \mathcal{U}_x} M_f(U) \quad \text{та} \quad f^{\wedge}(x) = \sup_{U \in \mathcal{U}_x} m_f(U)$$

визначаються функції $f^{\vee}, f^{\wedge} : X \to \overline{\mathbb{R}} = [-\infty, +\infty]$, які називаються відповідно *верхньою* та *нижньою функцією Бера* чи *верхньою* та *нижньою граничними функціями* [5, с. 61]. В аналізі їх ще позначають так:

$$f^{\vee}(x) = \overline{\lim_{u \to x}} f(u) \quad \text{та} \quad f^{\wedge}(x) = \underline{\lim_{u \to x}} f(u).$$

Добре відомо, що функція $f^{\vee}$ напівнеперервна зверху, а функція $f^{\wedge}$ — знизу. Крім того, $f^{\wedge}(x) \le f(x) \le f^{\vee}(x)$ на X.

Для непорожньої множини $E \subseteq X$ число

$$\omega_f(E) = \sup_{x', x'' \in E} |f(x') - f(x'')|$$

називається *коливанням функції f на множині E*, а число

$$\omega_f(x) = \inf_{U \in \mathcal{U}_x} \omega_f(U)$$

— *коливанням функції f у точці x*. Функція $\omega_f : X \to [0, +\infty]$ називається *коливанням функції f*. Рівність $\omega_f(x) = 0$ рівносильна неперервності функції f у точці x. Для коливання справджується формула:

$$\omega_f = f^{\vee} - f^{\wedge}.$$

Оскільки $-\infty < f^{\vee}(x) \le +\infty$ і $-\infty \le f^{\wedge}(x) < +\infty$, то різниця $f^{\vee}(x) - f^{\wedge}(x)$ завжди визначена і дорівнює $+\infty$ тоді і тільки тоді, коли $f^{\vee}(x) = +\infty$ або $f^{\wedge}(x) = -\infty$. Коливання $\omega_f : X \to [0, +\infty]$ — це напівнеперервна функція і його рівномірна норма $\|\omega_f\| = \sup\{\omega_f(x) : x \in X\}$, причому $\|\omega_f\| = +\infty$, якщо $\omega_f(x) = +\infty$ для деякої точки $x \in X$.

4. Теорема Гана–Д'єдонне–Тонґа–Катетова. Виклад основного результату статті буде спиратися на одне твердження, яке ми називаємо *теоремою Гана–Д'єдонне–Тонґа–Катетова.*

Теорема А. *T_1-простір X буде нормальним тоді і тільки тоді, коли для довільних функцій $g : X \to \mathbb{R}$ і $h : X \to \mathbb{R}$, таких, що*

$g(x) \le h(x)$ на X, g — напівнеперервна зверху і h — напівнеперервна знизу, існує така неперервна функція $f : X \to \mathbb{R}$, що $g(x) \le f(x) \le$ $\le h(x)$ на X.

Для метричного простору X існування такої неперервної функції $f : X \to \mathbb{R}$, яка лежить між неперервними зверху і знизу відповідно функціями g і h, такими, що $g(x) \le h(x)$ на X, вперше довів Г. Ган [6]. При цьому він застосував це твердження для доведення того, що розривна функція $f : X \to \mathbb{R}$, у якої коливання $\omega_f(x) \le k$, може бути поданою у вигляді суми $f = g + h$ неперервної функції g і функції h, для якої $|h(x)| \le \frac{k}{2}$. Звідси легко виводиться, що $d(f, C(X)) \le \frac{1}{2}\|\omega_f\|$. Оскільки обернену нерівність нескладно пояснити (див. далі п. 4), то фактично у Г. Гана доведено, що $d(f, C(X)) = \frac{1}{2}\|\omega_f\|$ для метричних просторів X. Ж. Д'єдонне [7] переніс результат Гана на паракомпактні простори X(див. також [1], де розглянутий цей випадок). Саму ж теорему А довели Г. Тонґ [8, 9] і М. Катетов [10, 11]. Схема доведення теореми А подана у монографії Р. Енгелькінга [2, с. 105].

Відомі також аналоги теореми А: теорема Даукера–Катетова [10–12] і теорема Майкла [13]. Детальну інформацію на цю тему можна отримати з праць [14, 15]. Теорема А застосовувалась і в праці [16].

5. Основний результат. Наступна теорема розвиває результати праць [1, с. 23] і [6]. Вона була анонсована в тезах [19, 20].

Теорема 1. *Нехай X — нормальний простір і $f : X \to \mathbb{R}$ — довільна функція. Тоді $d(f, C(X)) = \frac{1}{2}\|\omega_f\|$, причому існує функція $g \in C(X)$, така, що $d(f, C(X)) = \|f - g\|$.*

Доведення. Нехай $\frac{1}{2}\|\omega_f\| = \delta$. Доведемо, що $d(f, C(X)) \ge \delta$. Нехай $g \in C(X)$, $x \in X$, $U \in \mathcal{U}_x$ і $x', x'' \in U$. Тоді

$$|f(x') - f(x'')| = |f(x') - g(x') + g(x') - g(x'') + g(x'') - f(x'')| \le$$

$$\le |f(x') - g(x')| + |g(x') - g(x'')| + |g(x'') - f(x'')| \le$$

$$\le \|f - g\| + \omega_g(U) + \|g - f\| = \omega_g(U) + 2\|f - g\|.$$

Переходячи до супремуму, отримаємо оцінку

$$\omega_f(U) \le \omega_g(U) + 2\|f - g\|.$$

Переходячи до інфімуму, будемо мати

$$\omega_f(x) = \inf_{U\in\mathcal{U}_x} \omega_f(U) \le \inf_{U\in\mathcal{U}_x} (\omega_g(U) + 2\|f-g\|) =$$

$$= \inf_{U\in\mathcal{U}_x} \omega_g(U) + 2\|f-g\| = \omega_g(x) + 2\|f-g\| = 2\|f-g\|,$$

бо $\omega_g(x) = 0$, адже функція g неперервна в точці x. Таким чином,

$$\omega_f(x) \le 2\|f-g\|$$

для кожного $x \in X$, а значить, $\|\omega_f\| \le 2\|f-g\|$. Звідки випливає, що $\|f-g\| \ge \frac{1}{2}\|\omega_f\| = \delta$. Тоді і

$$d(f, C(X)) = \inf_{g\in C(X)} \|f-g\| \ge \delta.$$

Зокрема, коли $\|\omega_f\| = +\infty$, то $\delta = +\infty$ і справджується рівність

$$d(f, C(X)) = \delta = +\infty.$$

Припустимо, що $\|\omega_f\| < +\infty$ і доведемо, що $d(f, C(X)) \le \delta$. Для цього розглянемо функції $\varphi = f^\vee - \delta$ і $\psi = f^\wedge + \delta$, які будуть напівнеперервними відповідно зверху і знизу. Оскільки $0 \le \omega_f(x) \le \|\omega_f\| < < +\infty$ і $\omega_f = f^\vee - f^\wedge$, то функції $f^\vee$ і $f^\wedge$ набувають лише скінченних значень. Оскільки $\|\omega_f\| = 2\delta$ і

$$f^\vee(x) - f^\wedge(x) = \omega_f(x) \le \|\omega_f\| = 2\delta,$$

то

$$\varphi(x) = f^\vee(x) - \delta \le f^\wedge(x) + \delta = \psi(x)$$

на множині X. За теоремою A існує така неперервна функція $g : X \to \mathbb{R}$, що $\varphi(x) \le g(x) \le \psi(x)$ на X. Для неї

$$g(x) - \delta \le \psi(x) - \delta = f^\wedge(x) \le f(x) \le f^\vee(x) = \varphi(x) + \delta \le g(x) + \delta$$

на X. Отже,

$$g(x) - \delta \le f(x) \le g(x) + \delta$$

на X. Звідки випливає, що $-\delta \le f(x) - g(x) \le \delta$ на X, а значить $|f(x) - g(x)| \le \delta$ на X, отже, і $\|f-g\| \le \delta$. Тому

$$d(f, C(X)) \le \|f-g\| \le \delta,$$

бо $g \in C(X)$. Таким чином, $d(f, C(X)) \le \delta$, а значить, $d(f, C(X)) = \delta$. При цьому $\|f - g\| = \delta$. Якщо $\|\omega_f\| = +\infty$, то $\|f - 0\| = +\infty$ і $0 \in C(X)$.

***Зауваження* 3.** Якщо функція f обмежена, то і $\delta = \frac{1}{2}\|\omega_f\| \le \le \|f\| < +\infty$. Знайдена на другому етапі доведення теореми 1 неперервна функція g задовольняє нерівність $\|f - g\| \le \delta < +\infty$. Отже, вона буде обмеженою, тому ми встановили рівність

$$d(f, C_b(X)) = \frac{1}{2}\|\omega_f\|$$

для нормального простору X, що теж розширює результат Бен'яміні–Ліnденштраусса. Про можливість такого розширення було зроблено зауваження у праці [17].

6. Прикінцеві зауваження. В останні роки ведеться активне дослідження різних ослаблень неперервності: квазінеперервність, ледь неперервність, майже неперервність тощо. Тому природно поставити задачу про знаходження відхилень функцій від інших функціональних класів. Така робота вже розпочата. Зокрема, в [18, 19] розглянуто класи $K_0(\mathbb{R})$ і $S_0(\mathbb{R})$ всіх функцій $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, які квазінеперервні чи ледь неперервні в точці 0 відповідно, і наведено такі результати:

Твердження 3. *Для довільних дійсних чисел b_1, b_2, b_3 і функції $f = b_1\chi_{(-\infty,0)} + b_2\chi_{\{0\}|} + b_3\chi_{(0,+\infty)}$ справджуються рівності:*

$$d\big(f, K_0(\mathbb{R})\big) = d\big(f, S_0(\mathbb{R})\big) = \frac{1}{2}\min\big\{|b_1 - b_2|, |b_2 - b_3|\big\}.$$

Твердження 4. *Нехай $|b| > 1$, $f(x) = \sin\frac{1}{x}$ при $x \neq 0$ і $f(0) = b$. Тоді*

$$d(f, K_0(\mathbb{R})) = d(f, S_0(\mathbb{R})) = \frac{|b| - 1}{2}.$$

Зокрема, коли $b_1 = -1$, $b_2 = 0$, $b_3 = 1$, то функція f з твердження 3 — це сигнум і $d(sgn, K_0(\mathbb{R})) = \frac{1}{2}$, але $d(sgn, C_0(\mathbb{R})) = 1$.

Розвитку цих результатів буде присвячена наступна публікація авторів.

1. *Benyamini Y., Lindenstrauss J.* Geometric nonlinear functional analysis. V.1. — Amer. Math. Soc., 2000. — 488 p.
2. *Энгелькинг Р.* Общая топология. — М.: Мир, 1986. — 752 с.

3. *Мельник В.* Знаходження відхилень від функцій першого класу Бера до простору неперервних функцій // Матеріали студ. наук. конф. ЧНУ. 17–18 травня 2011. Фіз.-мат. науки. — Чернівці: ЧНУ, 2011. — С. 409 – 410.
4. *Бурбаки Н.* Общая топология. Использование вещественных чисел в общей топологии. Функциональные пространства. Сводка результатов. — М.: Наука, 1975. — 408 с.
5. *Маслюченко О. В.* Побудова ω-первісних та різні аналоги компактних операторів. Дис. ... доктора фіз.-мат. наук. — Чернівці, 2012. — 300с.
6. *Hahn H.* Uber halbstetige und unstetige Functionen // Sitzungsberichte Akad. Wiss. Wien. Math.–naturwiss. Kl. Abt. IIa. — 1917. — **126**. — S. 91 – 110.
7. *Dieudonne J.* Une généralisation des espaces compacts // J. de Math. Pyres et Appl. — 1944. — **23**. — P. 65 – 76.
8. *Tong H.* Some characterizations of normal and perfectly normal spaces // Bull. Amer. Math. Soc. — 1948. — **54**. — P. 65.
9. *Tong H.* Some characterizations of normal and perfectly normal spaces // Duke Math.J. — 1952. — **19**. — P. 289 – 292.
10. *Katetov M.* On real-valued functions in topological spaces // Fund. Math. — 1952. — **38**. — P. 85 – 91.
11. *Katetov M.* Correction to 'On real-valued functions in topological spaces' // Fund. Math. — 1953. — **40**. — P. 203 – 205.
12. *Dowker C. H.* On countably paracompact spaces // Canad. J. Math. — 1951. — **3**. — P. 219 – 224.
13. *Michael E.* Continuous selections I// Ann. of Math. — 1956. – **63**. – P. 361 – 382.
14. *Yamazaki K.* The range of maps on classical insertion theorems // Acta Math. Hungar. — 2011. — **132** (1-2). — P. 42 – 48.
15. *Good C., Stares I.* New proofs of classical insertion theorems // Comm. Math. Univ. Carolinae. — 2000. — **41**, № 1. — P. 139 – 142.
16. *Волошин Г. А., Маслюченко В. К.,* Маслюченко О.В. Про пошарово рівномірне наближення нарізно неперервних функцій многочленами // Мат. вісн. НТШ. — 2013. — **10**. — С. 135 – 158.
17. *Cascales B., Marciszewski W., Raja M.* Distance to spaces of continuous functions // Topology Appl. — 2006. — **153**, № 13. — P. 2303 -– 2319.
18. *Мельник В.* Про відстань до множин квазінеперервних або ледь неперервних у нулі функцій // Матеріали студ. наук. конф. ЧНУ. 5 – 6 квітня 2012. Фіз.-мат. науки. — Чернівці: ЧНУ, 2012. — С. 341 – 342.
19. *V. Maslyuchenko, V. Mel'nyk.* Uniform distance to the space of continuous functions // Міжн. конф. "Комплексний аналіз, теорія потенціалу та її застосування"19 – 23 серпня 2013. — Київ: Інститут математики НАН України, 2013. — http://www.imath.kiev.ua/~complex/conf_2013/index.html
20. *Мельник В.* Навколо теореми Гана–Д'єдонне–Тонґа–Катетова // Матеріали студ. наук. конф. ЧНУ. 17 – 19 квітня 2013. Фіз.-мат. науки. — Чернівці: ЧНУ, 2013. — С. 441 – 442.