УДК 517.51

А. Ф. Конограй (Ін–т математики НАН України, Київ)
О. В. Федуник–Яремчук (Східноєвропейський національний університет імені Лесі Українки, Луцьк)

ОЦІНКИ ОРТОПРОЕКЦІЙНИХ ПОПЕРЕЧНИКІВ КЛАСІВ $B^{\Omega}_{p,\theta}$ ПЕРІОДИЧНИХ ФУНКЦІЙ БАГАТЬОХ ЗМІННИХ ІЗ ЗАДАНОЮ МАЖОРАНТОЮ МІШАНИХ МОДУЛІВ НЕПЕРЕРВНОСТІ

We obtain exact order estimates of approximation of classes $B^{\Omega}_{p,\theta}$ of periodic functions of several variables in the space L_q by using operators of orthogonal projection as well as linear operators subjected to some conditions.

Одержано точні за порядком оцінки наближення класів $B^{\Omega}_{p,\theta}$ періодичних функцій багатьох змінних у просторі L_q за допомогою операторів ортогонального проектування, а також лінійних операторів, які підпорядковані деяким умовам.

Нехай $L_p(\pi_d)$, $1 \le p < \infty$, — простір 2π-періодичних по кожній змінній і сумовних у степені p на кубі $\pi_d = \prod\limits_{j=1}^{d} [0; 2\pi]$ функцій $f(x) = f(x_1, ..., x_d)$, в якому норма визначається таким чином

$$\|f\|_{L_p(\pi_d)} = \|f\|_p = \left((2\pi)^{-d} \int\limits_{\pi_d} |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}},$$

$L_\infty(\pi_d)$ — простір 2π-періодичних за кожною змінною суттєво обмежених функцій $f(x) = f(x_1, ..., x_d)$ з нормою

$$\|f\|_{L_\infty(\pi_d)} = \|f\|_\infty = \operatorname*{ess\,sup}_{x \in \pi_d} |f(x)|.$$

Всюди далі будемо вважати, що для функцій $f \in L_p(\pi_d)$ виконується додаткова умова

$$\int_0^{2\pi} f(x) dx_j = 0 \ , \quad j = \overline{1, d}.$$

Для $f \in L_p(\pi_d)$, $1 \le p \le \infty$, і $t = (t_1, ..., t_d)$, $t_j \ge 0$, $j = \overline{1,d}$, розглянемо мішаний модуль неперервності порядку l

$$\Omega_l(f,t)_p = \sup_{\substack{|h_j| \le t_j \\ j=\overline{1,d}}} \|\Delta^l_h f(\cdot)\|_p,$$

де $l \in \mathbb{N}$, $\Delta^l_h f(x) = \Delta^l_{h_1} \dots \Delta^l_{h_d} f(x) = \Delta^l_{h_d}(\dots(\Delta^l_{h_1} f(x)))$ — мішана різниця порядку l з кроком h_j за змінною x_j і

$$\Delta^l_{h_j} f(x) = \sum_{n=0}^{l} (-1)^{l-n} C^n_l f(x_1, \dots, x_{j-1}, x_j + nh_j, x_{j+1}, \dots, x_d).$$

Нехай $\Omega(t) = \Omega(t_1, \dots, t_d)$ — задана функція типу мішаного модуля неперервності порядку l, яка задовольняє такі умови:

1) $\Omega(t) > 0$, $t_j > 0$, $j = \overline{1,d}$; $\Omega(t) = 0$, $\prod\limits_{j=1}^{d} t_j = 0$;

2) $\Omega(t)$ не спадає по кожній змінній;

3) $\Omega(m_1 t_1, \dots, m_d t_d) \le \left(\prod\limits_{j=1}^{d} m_j\right)^l \Omega(t)$, $m_j \in \mathbb{N}$, $j = \overline{1,d}$;

4) $\Omega(t)$ неперервна при $t_j \ge 0$, $j = \overline{1,d}$.

Будемо вважати, що Ω задовольняє також умови (S) і (S_l), які називають умовами Барі–Стєчкіна [1]. Це означає наступне.

Функція однієї змінної $\varphi(\tau) \ge 0$ задовольняє умову (S), якщо $\varphi(\tau)/\tau^{\alpha}$ майже зростає при деякому $\alpha > 0$, тобто існує така не залежна від τ_1 і τ_2 стала $C_1 > 0$, що

$$\frac{\varphi(\tau_1)}{\tau_1^{\alpha}} \le C_1 \frac{\varphi(\tau_2)}{\tau_2^{\alpha}}, \quad 0 < \tau_1 \le \tau_2 \le 1.$$

Функція $\varphi(\tau) \ge 0$ задовольняє умову (S_l), якщо $\varphi(\tau)/\tau^{\gamma}$ майже спадає при деякому $0 < \gamma < l$, тобто існує така не залежна від τ_1 і τ_2 стала $C_2 > 0$, що

$$\frac{\varphi(\tau_1)}{\tau_1^{\gamma}} \ge C_2 \frac{\varphi(\tau_2)}{\tau_2^{\gamma}}, \quad 0 < \tau_1 \le \tau_2 \le 1.$$

Будемо говорити, що $\Omega(t)$ задовольняє умови (S) і (S_l), якщо $\Omega(t)$ задовольняє ці умови по кожній змінній t_j при фіксованих t_i, $i \ne j$.

Нехай $1 \le p \le \infty$, $1 \le \theta \le \infty$, а Ω — задана функція типу мішаного модуля неперервності порядку l. Тоді, згідно з означенням [2]

$$B^{\Omega}_{p,\theta} = \big\{ f \in L_p(\pi_d): \ \|f\|_{B^{\Omega}_{p,\theta}} \le 1 \big\},$$

де

$$\|f\|_{B^{\Omega}_{p,\theta}} = \left\{ \int\limits_{\pi_d} \left(\frac{\Omega_l(f,t)_p}{\Omega(t)} \right)^{\theta} \prod_{j=1}^{d} \frac{dt_j}{t_j} \right\}^{\frac{1}{\theta}}, \quad 1 \le \theta < \infty,$$

$$\|f\|_{B^{\Omega}_{p,\infty}} = \sup_{t>0} \frac{\Omega_l(f,t)_p}{\Omega(t)},$$

(запис $t > 0$ для $t = (t_1, ..., t_d)$ рівносильний $t_j > 0, j = \overline{1,d}$).

Зазначимо, що при $\theta = \infty$ класи $B^{\Omega}_{p,\theta}$ співпадають з класами H^{Ω}_p, які були розглянуті М. М. Пустовойтовим [3].

Для подальших міркувань будемо використовувати еквівалентні (з точністю до абсолютних сталих) означення класів $B^{\Omega}_{p,\theta}$.

Кожному вектору $s = (s_1, ..., s_d)$, $s_j \in \mathbb{N}$, $j = \overline{1,d}$, поставимо у відповідність множину

$$\rho(s) = \big\{ k = (k_1, ..., k_d) : 2^{s_j - 1} \le |k_j| < 2^{s_j}, k_j \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}, j = \overline{1,d} \big\}$$

і для $f \in L_p(\pi_d)$ позначимо

$$\delta_s(f, x) = \sum_{k \in \rho(s)} \widehat{f}(k) e^{i(k,x)},$$

де

$$\widehat{f}(k) = (2\pi)^{-d} \int\limits_{\pi_d} f(t) e^{-i(k,t)} dt$$

— коефіцієнти Фур'є функції f, $(k, x) = k_1 x_1 + \ldots + k_d x_d$.

Отже, нехай $1 < p < \infty$, $1 \le \theta \le \infty$ і Ω — задана функція типу мішаного модуля неперервності порядку l, яка задовольняє умови (S) і (S_l), тоді з точністю до абсолютних сталих класи $B^{\Omega}_{p,\theta}$ можна означити наступним чином [2]:

$$B^{\Omega}_{p,\theta} = \left\{ f \in L_p(\pi_d) : \|f\|_{B^{\Omega}_{p,\theta}} = \left(\sum_s \Omega^{-\theta}(2^{-s}) \|\delta_s(f, \cdot)\|_p^{\theta} \right)^{\frac{1}{\theta}} \le 1 \right\}, \quad (1)$$

де $1 \leq \theta < \infty$ та

$$B^{\Omega}_{p,\infty} = \left\{ f \in L_p(\pi_d) : \|f\|_{B^{\Omega}_{p,\infty}} = \sup_s \frac{\|\delta_s(f,\cdot)\|_p}{\Omega(2^{-s})} \leq 1 \right\}, \qquad (2)$$

тут і надалі $\Omega(2^{-s}) = \Omega(2^{-s_1}, ..., 2^{-s_d})$, $s_j \in \mathbb{N}$, $j = \overline{1,d}$.

Наведене означення класів $B^{\Omega}_{p,\theta}$ можна поширити і на крайні випадки $p = 1$ і $p = \infty$, дещо змінивши в (1) і (2) "блоки" $\delta_s(f,x)$.

Нехай $V_n(t)$ позначає ядро Валле Пуссена порядку $2n-1$, тобто

$$V_n(t) = 1 + 2\sum_{k=1}^{n} \cos kt + 2 \sum_{k=n+1}^{2n-1} \left(1 - \frac{k-n}{n}\right) \cos kt.$$

Кожному вектору $s = (s_1, \ldots, s_d), s_j \in \mathbb{N}, j = \overline{1,d}$, поставимо у відповідність поліном

$$A_s(x) = \prod_{j=1}^{d} \left(V_{2^{s_j}}(x_j) - V_{2^{s_j-1}}(x_j)\right)$$

і для $f \in L_p(\pi_d), 1 \leq p \leq \infty$, через $A_s(f,x)$ позначимо згортку

$$A_s(f,x) = f * A_s.$$

У прийнятих позначеннях з точністю до абсолютних сталих класи $B^{\Omega}_{p,\theta}, 1 \leq p \leq \infty$, можна означити наступним чином

$$B^{\Omega}_{p,\theta} = \left\{ f \in L_p(\pi_d) : \|f\|_{B^{\Omega}_{p,\theta}} = \left(\sum_s \Omega^{-\theta}(2^{-s}) \|A_s(f,\cdot)\|_p^{\theta} \right)^{\frac{1}{\theta}} \leq 1 \right\}, \quad (3)$$

де $1 \leq \theta < \infty$ та

$$B^{\Omega}_{p,\infty} = \left\{ f \in L_p(\pi_d) : \|f\|_{B^{\Omega}_{p,\infty}} = \sup_s \frac{\|A_s(f,\cdot)\|_p}{\Omega(2^{-s})} \leq 1 \right\}. \qquad (4)$$

Зазначимо, що рівності (3) і (4) були отримані в роботах [4] і [3] відповідно.

Зауважимо, що при $\Omega(t) = \prod_{j=1}^{d} t_j^{r_j}$, $0 < r_j < l$, класи $B^{\Omega}_{p,\theta}$ є аналогами відомих класів Бєсова $B^{r}_{p,\theta}$, $1 \leq \theta < \infty$, та Нікольського $B^{r}_{p,\infty} = H^{r}_{p}$ (див., наприклад, [5]).

Нижче будемо розглядати класи $B^{\Omega}_{p,\theta}$, які визначаються функцією Ω деякого спеціального вигляду:

$$\Omega(t) = \Omega(t_1, ..., t_d) = \begin{cases} \prod\limits_{j=1}^{d} \dfrac{t_j^r}{\left(\log \frac{1}{t_j}\right)_+^{b_j}}, & \text{якщо } t_j > 0, \ j = \overline{1, d}; \\ 0, & \text{якщо } \prod\limits_{j=1}^{d} t_j = 0. \end{cases} \tag{5}$$

Тут і надалі розглядаються логарифми за основою 2, крім того

$$\left(\log \frac{1}{t_j}\right)_+ = \max\left\{1, \log \frac{1}{t_j}\right\}.$$

Також будемо вважати, що $b_j < r, j = \overline{1, d}$, і $0 < r < l$, а значить для функції Ω вигляду (5) виконуються властивості $1 - 4$, а також умови (S) і (S_l).

Метою роботи є встановлення точних за порядком оцінок ортопроекційних поперечників класів $B^{\Omega}_{p,\theta}$ в просторі $L_q(\pi_d)$ при $1 \leq p < q < \infty$. Нагадаємо, поняття ортопроекційного поперечника ввів В. М. Темляков [6]. Щоб навести означення величини, що нами досліджується, введемо деякі позначення.

Нехай $\{u_i\}_{i=1}^{M}$ — ортонормована система функцій $u_i \in L_\infty(\pi_d)$. Кожній функції $f \in L_q(\pi_d)$, $1 \leq q \leq \infty$, поставимо у відповідність апарат наближення вигляду $\sum\limits_{i=1}^{M}(f, u_i)u_i$, тобто ортогональну проекцію функції f на підпростір, породжений системою функцій $\{u_i\}_{i=1}^{M}$. Тоді для функціонального класу $F \subset L_q(\pi_d)$ величина

$$d^{\perp}_{M}(F, L_q) = \inf_{\{u_i\}_{i=1}^{M}} \sup_{f \in F} \left\| f(\cdot) - \sum_{i=1}^{M} (f, u_i) u_i(\cdot) \right\|_q \tag{6}$$

називається ортопроекційним поперечником (Фур'є–поперечником) цього класу в просторі $L_q(\pi_d)$.

У роботі, крім ортопроекційних поперечників, будемо досліджувати величини $d^B_M(F, L_q)$, розглянуті В. М. Темляковим (див., наприклад, [7]), які визначаються наступним чином:

$$d^B_M(F, L_q) = \inf_{G \in L_M(B)_q} \sup_{f \in F \cap D(G)} \|f(\cdot) - Gf(\cdot)\|_q . \tag{7}$$

Через $L_M(B)_q$ тут позначено множину лінійних операторів, які задовольняють умови:

а) область визначення $D(G)$ цих операторів містить всі тригонометричні поліноми, а їх область значень міститься в підпросторі розмірності M простору $L_q(\pi_d)$;

б) існує число $B \geq 1$ таке, що для всіх векторів $k = (k_1, \ldots, k_d)$, $k_j \in \mathbb{Z}, j = \overline{1, d}$, виконується нерівність $\left\|Ge^{i(k,\cdot)}\right\|_2 \leq B$.

Зазначимо, що до $L_M(1)_2$ належать оператори ортогонального проектування на простори розмірності M, а також оператори, які задаються на ортонормованій системі функцій за допомогою мультиплікатора, який визначається послідовністю $\{\lambda_m\}$ такою, що $|\lambda_m| \leq 1$ для всіх m. Із (6) і (7) легко бачити також, що величини $d^{\perp}_M(F, L_q)$ і $d^B_M(F, L_q)$ пов'язані між собою нерівністю

$$d^B_M(F, L_q) \leq d^{\perp}_M(F, L_q). \tag{8}$$

На сьогодні відомо багато робіт, в яких досліджувалися величини $d^{\perp}_M(F, L_q)$ і $d^B_M(F, L_q)$ для тих чи інших класів функцій. Тут згадаємо роботи [7–11], в яких вивчались величини (6) і (7) для класів функцій багатьох змінних $W^r_{p,\alpha}$, H^r_p, $B^r_{p,\theta}$ та H^{Ω}_p, і в яких можна ознайомитись з більш детальною бібліографією.

Зауважимо, що одержані нижче оцінки доповнюють результати, які отримані в роботах [12, 13].

Наведемо кілька відомих тверджень, які будемо використовувати у подальших міркуваннях.

Для натурального N покладемо

$$\chi(N) = \left\{ s = (s_1, ..., s_d) : \ s_j \in \mathbb{N}, \ j = \overline{1, d}, \ \Omega(2^{-s}) \geq \frac{1}{N} \right\},$$

$$Q(N) = \bigcup_{s \in \chi(N)} \rho(s).$$

У прийнятих позначеннях має місце твердження.

Лема 1 [11]. *Кількість елементів множини $Q(N)$ рівна за порядком:*

$$|Q(N)| \asymp N^{\frac{1}{r}} \big(\log N\big)^{-\frac{b_1}{r}-\ldots-\frac{b_d}{r}+d-1}.$$

Тут і далі для додатних функцій $\mu_1(N)$ та $\mu_2(N)$ запис $\mu_1 \ll \mu_2$ означає, що існує стала $C > 0$ така, що $\forall N \in \mathbb{N}$ виконується $\mu_1(N) \leq C\mu_2(N)$. Співвідношення $\mu_1 \asymp \mu_2$ рівносильне тому, що виконуються порядкові нерівності $\mu_1 \ll \mu_2$ та $\mu_1 \gg \mu_2$. Зауважимо також, що всі сталі $C_i, i = 1, 2, \ldots$, які будуть зустрічатися в роботі, можуть залежати тільки від параметрів, що входять в означення класу, метрики, в якій вимірюється похибка наближення, та розмірності d простору $\mathbb{R}^d$.

Враховуючи (5) множину $\chi(N)$ можна означити так:

$$\chi(N) = \Big\{ s = (s_1, ..., s_d): \ s_j \in \mathbb{N}, \ j = \overline{1,d}, \ \prod_{j=1}^{d} 2^{rs_j} s_j^{b_j} \leq N \Big\}.$$

Далі, нехай

$$\chi^{\perp}(N) = \mathbb{N}^d \setminus \chi(N),$$

$$\Theta(N) = \Big\{ s = (s_1, ..., s_d): \ s_j \in \mathbb{N}, j = \overline{1,d}, \ \frac{1}{2^l N} \leq \Omega(2^{-s}) < \frac{1}{N} \Big\}.$$

У [14] встановлено, що для кількості елементів множини $\Theta(N)$ має місце порядкова рівність

$$|\Theta(N)| \asymp (\log N)^{d-1}.$$

Лема 2 [7, с. 25]. *Нехай $1 \leq p < q < \infty$ і $f \in L_p(\pi_d)$. Тоді має місце співвідношення*

$$\|f\|_q^q \ll \sum_s \Big(\|\delta_s(f,\cdot)\|_p \ 2^{\|s\|_1 \left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)} \Big)^q,$$

де $\|s\|_1 = s_1 + ... + s_d, \ s_j \in \mathbb{N}$.

Лема 3 [11]. *Для функції Ω, яка визначена рівністю* (5), *при $0 < \beta < r$, $0 < p < \infty$ має місце співвідношення*

$$\sum_{s \in \chi^{\perp}(N)} \big(\Omega(2^{-s}) 2^{\|s\|_1 \beta}\big)^p \ll \sum_{s \in \Theta(N)} \big(\Omega(2^{-s}) 2^{\|s\|_1 \beta}\big)^p.$$

Лема 4 [11]. *Нехай $\gamma_1 \le ... \le \gamma_d < 1$. Тоді*

$$\sum_{s\in\Theta(N)} \prod_{j=1}^{d} s_j^{-\gamma_j} \asymp \big(\log N\big)^{-\gamma_1-\ldots-\gamma_d+d-1}.$$

Лема 5 [8]. *Нехай лінійний оператор A заданий рівністю*

$$Ae^{i(k,x)} = \sum_{m=1}^{\overline{M}} a_m^k \psi_m(x),$$

де $\big\{\psi_m(x)\big\}_{m=1}^{\overline{M}}$ *— набір функцій, для яких*

$$\|\psi_m(\cdot)\|_2 \le 1, \quad m = 1, ..., \overline{M}.$$

Тоді для будь-якого тригонометричного полінома t має місце співвідношення

$$\min_{y=x} \mathrm{Re}\ At(x-y) \le \mathrm{Re} \sum_k \sum_{m=1}^{\overline{M}} \widehat{t}(k) a_m^k \widehat{\psi}_m(k) \le \left(\overline{M} \sum_{m=1}^{\overline{M}} \sum_k |a_m^k \widehat{t}(k)|^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Теорема А (Літтлвуда–Пелі) (див., наприклад, [15, с. 65]). *Нехай задано $p \in (1, \infty)$. Тоді існують додатні сталі $C_3(p)$ і $C_4(p)$ такі, що для кожної функції $f \in L_p(\pi_d)$ виконується співвідношення*

$$C_3(p)||f||_p \le \left\| \left(\sum_s |\delta_s(f, \cdot)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_p \le C_4(p)\|f\|_p \ .$$

Теорема Б [16]. *Нехай T_n — тригонометричний поліном порядку $n = (n_1, \ldots, n_d)$*

$$T_n(x) = \sum_{|k_1|\le n_1} \cdots \sum_{|k_d|\le n_d} c_{k_1,\ldots,k_d} e^{i(k,x)},$$

де n_j, $j=\overline{1,d}$, *— натуральні числа,* $c_{k_1,\ldots,k_d}$ *— довільні коефіцієнти. Тоді при* $1\le p<q\le\infty$ *має місце нерівність*

$$\|T_n\|_q \le 2^d \biggl(\prod_{j=1}^{d} n_j\biggr)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} \|T_n\|_p \ . \qquad (9)$$

Нерівність (9) була встановлена С. М. Нікольським і отримала назву "нерівності різних метрик". В одновимірному випадку при $p=\infty$ відповідну нерівність довів Д. Джексон [17].

Перш ніж перейти до викладу отриманих результатів покладемо $M=|Q(N)|$. Тоді, згідно з лемою 1, отримаємо

$$M \asymp N^{\frac{1}{r}}\bigl(\log N\bigr)^{-\frac{b_1}{r}-\ldots-\frac{b_d}{r}+d-1},$$
$$\log M \asymp \log N, \quad N \asymp M^r\bigl(\log M\bigr)^{b_1+\ldots+b_d-(d-1)r}.$$

Має місце наступна теорема.

Теорема. *Нехай* $1\le p<q<\infty$, $1\le\theta<\infty$, *а* Ω *задана формулою* (5). *Тоді при* $\frac{1}{p}-\frac{1}{q}<r<l$, $b_j<\frac{r}{\frac{q}{p}-1}$, *мають місце співвідношення*

$$d_M^{\perp}(B^{\Omega}_{p,\theta},L_q) \asymp d_M^{B}(B^{\Omega}_{p,\theta},L_q) \asymp$$

$$\asymp M^{-r+\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}\bigl(\log M\bigr)^{-b_1-\ldots-b_d+(d-1)\left(r-\frac{1}{p}+\frac{1}{q}+\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{\theta}\right)_+\right)}, \qquad (10)$$

де $a_+=\max\{a,0\}$.

Доведення. Встановимо спочатку в (10) оцінку зверху. З цією метою розглянемо наближення функції $f\in B^{\Omega}_{p,\theta}$ її частинною сумою Фур'є з "номерами" гармонік з множини $Q(N)$

$$S_{Q(N)}(x)=\sum_{s\in\chi(N)}\delta_s(f,x).$$

Нехай q_0 — довільне число, яке задовольняє умову $p<q_0<q$. Використавши для $f\in B^{\Omega}_{p,\theta}$ лему 2, а також відоме співвідношення

$$\|\delta_s(f,\cdot)\|_{q_0} \asymp \|A_s(f,\cdot)\|_{q_0}, \ 1<q_0<\infty,$$

будемо мати

$$\|f(\cdot)-S_{Q(N)}(\cdot)\|_q=\Big\|\sum_{s\in\chi^{\perp}(N)}\delta_s(f,\cdot)\Big\|_q\ll$$

$$\ll\left(\sum_{s\in\chi^{\perp}(N)}\|\delta_s(f,\cdot)\|_{q_0}^q 2^{\|s\|_1\left(\frac{1}{q_0}-\frac{1}{q}\right)q}\right)^{\frac{1}{q}}\asymp$$

$$\asymp\left(\sum_{s\in\chi^{\perp}(N)}\|A_s(f,\cdot)\|_{q_0}^q 2^{\|s\|_1\left(\frac{1}{q_0}-\frac{1}{q}\right)q}\right)^{\frac{1}{q}}=I_1.$$

Далі, застосувавши до $A_s(f,x)$ "нерівність різних метрик" Нікольського, продовжимо оцінку

$$I_1\ll\left(\sum_{s\in\chi^{\perp}(N)}\|A_s(f,\cdot)\|_p^q 2^{\|s\|_1(\frac{1}{p}-\frac{1}{q_0})q}2^{\|s\|_1\left(\frac{1}{q_0}-\frac{1}{q}\right)q}\right)^{\frac{1}{q}}=$$

$$=\left(\sum_{s\in\chi^{\perp}(N)}\Omega^{-q}(2^{-s})\|A_s(f,\cdot)\|_p^q\Omega^q(2^{-s})2^{\|s\|_1\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)q}\right)^{\frac{1}{q}}=I_2.$$

Щоб оцінити I_2, розглянемо окремо два випадки.

Нехай спочатку $q<\theta<\infty$. Застосувавши до I_2 нерівність Гельдера з показником $\frac{\theta}{q}$, а також лему 3, одержимо

$$I_2\le\left(\sum_{s\in\chi^{\perp}(N)}\Omega^{-\theta}(2^{-s})\|A_s(f,\cdot)\|_p^{\theta}\right)^{\frac{1}{\theta}}\times$$

$$\times\left(\sum_{s\in\chi^{\perp}(N)}\left(\Omega(2^{-s})2^{\|s\|_1\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)}\right)^{\frac{\theta q}{\theta-q}}\right)^{\frac{\theta-q}{\theta q}}\ll$$

$$\ll\|f\|_{B^{\Omega}_{p,\theta}}\left(\sum_{s\in\chi^{\perp}(N)}\left(\Omega(2^{-s})2^{\|s\|_1\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)}\right)^{\frac{\theta q}{\theta-q}}\right)^{\frac{\theta-q}{\theta q}}\ll$$

$$\ll \left(\sum_{s \in \Theta(N)} \left(\Omega(2^{-s}) 2^{\|s\|_1 \left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)} \right)^{\frac{\theta q}{\theta - q}} \right)^{\frac{\theta - q}{\theta q}} \leq$$

$$\leq N^{-1} \left(\sum_{s \in \Theta(N)} 2^{\|s\|_1 \left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right) \frac{\theta q}{\theta - q}} \right)^{\frac{\theta - q}{\theta q}} = I_3.$$

Далі, враховуючи, що для $s \in \Theta(N)$

$$2^{\|s\|_1} \asymp N^{\frac{1}{r}} \prod_{j=1}^{d} s_j^{-\frac{b_j}{r}},$$

а також скориставшись лемою 4, будемо мати

$$I_3 \asymp N^{-1} \left(\sum_{s \in \Theta(N)} N^{\frac{1}{r}\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)\frac{\theta q}{\theta - q}} \prod_{j=1}^{d} s_j^{-\frac{b_j}{r}\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)\frac{\theta q}{\theta - q}} \right)^{\frac{\theta - q}{\theta q}} =$$

$$= N^{-1+\frac{1}{r}\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)} \left(\sum_{s \in \Theta(N)} \prod_{j=1}^{d} s_j^{-\frac{b_j}{r}\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)\frac{\theta q}{\theta - q}} \right)^{\frac{\theta - q}{\theta q}} \asymp$$

$$\asymp N^{-1+\frac{1}{r}\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)} \big(\log N\big)^{\left(-\frac{b_1}{r}-\ldots-\frac{b_d}{r}\right)\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)+(d-1)\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{\theta}\right)} \asymp$$

$$\asymp \left(M^r \big(\log M\big)^{b_1+\ldots+b_d-(d-1)r} \right)^{-1+\frac{1}{r}\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)} \times$$

$$\times \big(\log M\big)^{(-\frac{b_1}{r}-\ldots-\frac{b_d}{r})\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)+(d-1)\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{\theta}\right)} =$$

$$= M^{-r+\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} \big(\log M\big)^{-b_1-\ldots-b_d+(d-1)\left(r-\frac{1}{p}+\frac{2}{q}-\frac{1}{\theta}\right)}.$$

Нехай тепер $1 \leq \theta \leq q$. Будемо мати

$$I_2 = \left(\sum_{s \in \chi^{\perp}(N)} \Omega^{-q}(2^{-s}) \|A_s(f,\cdot)\|_p^q \Omega^q(2^{-s}) 2^{\|s\|_1\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)q} \right)^{\frac{1}{q}} =$$

$$= \left(\sum_{s \in \chi^{\perp}(N)} \Omega^{-q}(2^{-s}) \|A_s(f,\cdot)\|_p^q \frac{2^{-rq\|s\|_1}}{\prod\limits_{j=1}^{d} s_j^{qb_j}} 2^{\|s\|_1\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)q} \right)^{\frac{1}{q}} =$$

$$= \left(\sum_{s \in \chi^{\perp}(N)} \Omega^{-q}(2^{-s}) \|A_s(f,\cdot)\|_p^q \frac{2^{-q\|s\|_1\left(r-\frac{1}{p}+\frac{1}{q}\right)}}{\prod\limits_{j=1}^{d} s_j^{qb_j}} \right)^{\frac{1}{q}} = I_3.$$

Якщо $s \in \chi^{\perp}(N)$, то

$$2^{-\|s\|_1} < N^{-\frac{1}{r}} \prod_{j=1}^{d} s_j^{\frac{b_j}{r}}.$$

Звідси

$$I_3 < \left(\sum_{s \in \chi^{\perp}(N)} \Omega^{-q}(2^{-s}) \|A_s(f,\cdot)\|_p^q N^{-\frac{q}{r}\left(r-\frac{1}{p}+\frac{1}{q}\right)} \prod_{j=1}^{d} \frac{s_j^{q\frac{b_j}{r}\left(r-\frac{1}{p}+\frac{1}{q}\right)}}{s_j^{qb_j}} \right)^{\frac{1}{q}} =$$

$$= N^{-1+\frac{1}{r}\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)} \left(\sum_{s \in \chi^{\perp}(N)} \Omega^{-q}(2^{-s}) \|A_s(f,\cdot)\|_p^q \prod_{j=1}^{d} s_j^{-q\frac{b_j}{r}\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)} \right)^{\frac{1}{q}} \ll$$

$$\ll N^{-1+\frac{1}{r}\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)} \left(\log N\right)^{\left(-\frac{b_1}{r}-\ldots-\frac{b_d}{r}\right)\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)} \times$$

$$\times \left(\sum_{s \in \chi^{\perp}(N)} \Omega^{-q}(2^{-s}) \|A_s(f,\cdot)\|_p^q \right)^{\frac{1}{q}} = I_4.$$

Далі, використовуючи нерівність [18, с. 43]

$$\left(\sum_{k} |a_k|^{\nu_2} \right)^{\frac{1}{\nu_2}} \le \left(\sum_{k} |a_k|^{\nu_1} \right)^{\frac{1}{\nu_1}}, \quad 1 \le \nu_1 \le \nu_2 < \infty,$$

будемо мати

$$I_4 \leq N^{-1+\frac{1}{r}\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)}\left(\log N\right)^{\left(-\frac{b_1}{r}-\ldots-\frac{b_d}{r}\right)\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)}\times$$

$$\times\left(\sum_{s\in\chi^{\perp}(N)}\Omega^{-\theta}(2^{-s})||A_s(f,\cdot)||_p^{\theta}\right)^{\frac{1}{\theta}}\ll$$

$$\ll N^{-1+\frac{1}{r}\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)}\left(\log N\right)^{\left(-\frac{b_1}{r}-\ldots-\frac{b_d}{r}\right)\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)}\|f\|_{B^{\Omega}_{p,\theta}}\ll$$

$$\ll\left(M^r\left(\log M\right)^{b_1+\ldots+b_d-(d-1)r}\right)^{-1+\frac{1}{r}\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)}\left(\log M\right)^{\left(-\frac{b_1}{r}-\ldots-\frac{b_d}{r}\right)\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)}=$$

$$=M^{-r+\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}\left(\log M\right)^{-b_1-\ldots-b_d+(d-1)\left(r-\frac{1}{p}+\frac{1}{q}\right)}.$$

Таким чином, оцінка зверху в (10) встановлена.

Перейдемо до встановлення в (10) оцінки знизу. Оскільки має місце нерівність (8), то її достатньо отримати для величини $d_M^B(B^{\Omega}_{p,\theta},L_q)$. При цьому розглянемо два випадки.

Нехай спочатку $q\leq\theta<\infty$. За допомогою міркувань аналогічних тим, що і в [19], можна показати, що існує множина $\Theta'(N)\subset\Theta(N)$ така, що для $s=(s_1,...,s_d)\in\Theta'(N)$ будуть виконуватись співвідношення

$$s_j\asymp\log N,\quad j=\overline{1,d},\quad \text{і}\quad |\Theta'(N)|\asymp\left(\log N\right)^{d-1}.$$

Позначимо множини $\widetilde{Q}(N)=\bigcup\limits_{s\in\Theta(N)}\rho(s),\quad \widetilde{Q}'(N)=\bigcup\limits_{s\in\Theta'(N)}\rho(s).$ Тоді $T(\widetilde{Q}(N))$ і $T(\widetilde{Q}'(N))$ — відповідно множини тригонометричних поліномів з "номерами" гармонік із множин $\widetilde{Q}(N)$ і $\widetilde{Q}'(N)$.

Розглянемо функцію, яка аналогічна до функції з прикладу 2 роботи [8].

Нехай K_n — ядро Фейєра порядку n, тобто

$$K_n(t)=1+2\sum_{k=1}^{n}\left(1-\frac{k}{n+1}\right)\cos kt.$$

Через k^s позначимо вектор $k^s=(k_1^{s_1},...,k_d^{s_d})$, де

$$k_j^{s_j}=\begin{cases}2^{s_j-1}+2^{s_j-2}, & s_j\geq 2;\\ 1, & s_j=1,\quad j=\overline{1,d}.\end{cases}$$

Розглянемо функцію

$$g(x)=\sum_{s\in\Theta'(N)}\mathcal{K}^s(x),$$

де

$$\mathcal{K}^s(x)=e^{i(k^s,x)}\prod_{j=1}^{d}K_{2^{s_j-2}}(x_j).$$

У роботі [12] встановлено, що при $G\in L_M(B)_\infty$ існує вектор $y^*=(y_1^*,...,y_d^*)$ такий, що

$$\|g(x-y^*)-Gg(x-y^*)\|_\infty\gg M. \tag{11}$$

Розглянемо функцію

$$g_1(x)=C_5N^{-1}\Big(N^{\frac{1}{r}}\big(\log N\big)^{-\frac{b_1}{r}-\ldots-\frac{b_d}{r}}\Big)^{\frac{1}{p}-1}\big(\log N\big)^{-\frac{d-1}{\theta}}g(x),\ C_5>0.$$

Покажемо, що функція g_1 при відповідному виборі сталої C_5 належить до класу $B^{\Omega}_{p,\theta}$.

Дійсно, скориставшись властивостями ядра Фейера

$$\|\mathcal{K}^s(\cdot)\|_p\asymp 2^{\|s\|_1\left(1-\frac{1}{p}\right)},1\le p\le\infty,$$

будемо мати

$$\|g_1\|_{B^{\Omega}_{p,\theta}}=\left(\sum_s\Omega^{-\theta}(2^{-s})\|A_s(g_1,\cdot)\|_p^\theta\right)^{\frac{1}{\theta}}\ll$$

$$\ll N^{-1}\Big(N^{\frac{1}{r}}\big(\log N\big)^{-\frac{b_1}{r}-\ldots-\frac{b_d}{r}}\Big)^{\frac{1}{p}-1}\big(\log N\big)^{-\frac{d-1}{\theta}}\times$$

$$\times\left(\sum_{s\in\Theta'(N)}\Omega^{-\theta}(2^{-s})\|A_s(g,\cdot)\|_p^\theta\right)^{\frac{1}{\theta}}\asymp$$

$$\asymp\Big(N^{\frac{1}{r}}\big(\log N\big)^{-\frac{b_1}{r}-\ldots-\frac{b_d}{r}}\Big)^{\frac{1}{p}-1}\big(\log N\big)^{-\frac{d-1}{\theta}}\left(\sum_{s\in\Theta'(N)}2^{\|s\|_1\left(1-\frac{1}{p}\right)\theta}\right)^{\frac{1}{\theta}}=I_5.$$

Далі, враховуючи, що для $s \in \Theta'(N) \subset \Theta(N)$ виконуються співвідношення

$$2^{\|s\|_1} \asymp N^{\frac{1}{r}} \prod_{j=1}^{d} s_j^{-\frac{b_j}{r}} \quad \text{і} \quad s_j \asymp \log N,\ j=\overline{1,d},\ |\Theta'(N)| \asymp \big(\log N\big)^{d-1},$$

будемо мати

$$I_5 \asymp \Big(N^{\frac{1}{r}}\big(\log N\big)^{-\frac{b_1}{r}-\ldots-\frac{b_d}{r}}\Big)^{\frac{1}{p}-1}\big(\log N\big)^{-\frac{d-1}{\theta}} \times$$

$$\times\Big(N^{\frac{1}{r}}\big(\log N\big)^{-\frac{b_1}{r}-\ldots-\frac{b_d}{r}}\Big)^{1-\frac{1}{p}}|\Theta'(N)|^{\frac{1}{\theta}} \asymp$$

$$\asymp \big(\log N\big)^{-\frac{d-1}{\theta}}\big(\log N\big)^{\frac{d-1}{\theta}} = 1.$$

Отже, $g_1 \in B^{\Omega}_{p,\theta}$, з відповідною сталою $C_5 > 0$.

У роботі [11] встановлено, що для $t \in T(\widetilde{Q}'(N))$ має місце співвідношення

$$\|t\|_\infty \ll \|t\|_q\Big(N^{\frac{1}{r}}\big(\log N\big)^{-\frac{b_1}{r}-\ldots-\frac{b_d}{r}}\Big)^{\frac{1}{q}}\big(\log N\big)^{(d-1)\left(1-\frac{1}{q}\right)}.$$

Таким чином, скориставшись оцінкою (11), отримаємо

$$\|g_1(x-y^*) - Gg_1(x-y^*)\|_q \gg$$

$$\gg N^{-1}\Big(N^{\frac{1}{r}}\big(\log N\big)^{-\frac{b_1}{r}-\ldots-\frac{b_d}{r}}\Big)^{\frac{1}{p}-1}\big(\log N\big)^{-\frac{d-1}{\theta}} \times$$

$$\times \|g(x-y^*) - Gg(x-y^*)\|_q \gg$$

$$\gg N^{-1}\Big(N^{\frac{1}{r}}\big(\log N\big)^{-\frac{b_1}{r}-\ldots-\frac{b_d}{r}}\Big)^{\frac{1}{p}-1}\big(\log N\big)^{-\frac{d-1}{\theta}} \times$$

$$\times\Big(N^{\frac{1}{r}}\big(\log N\big)^{-\frac{b_1}{r}-\ldots-\frac{b_d}{r}}\Big)^{-\frac{1}{q}}\big(\log N\big)^{-(d-1)\left(1-\frac{1}{q}\right)}\|g(x-y^*)-Gg(x-y^*)\|_\infty \gg$$

$$\gg N^{-1}\Big(N^{\frac{1}{r}}\big(\log N\big)^{-\frac{b_1}{r}-\ldots-\frac{b_d}{r}+d-1}\Big)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}-1}\big(\log N\big)^{(d-1)\left(-\frac{1}{p}+\frac{2}{q}-\frac{1}{\theta}\right)}M \asymp$$

$$\asymp M^{-r}\big(\log M\big)^{-b_1-\ldots-b_d+(d-1)r}M^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}-1}\big(\log M\big)^{(d-1)\left(-\frac{1}{p}+\frac{2}{q}-\frac{1}{\theta}\right)}M =$$

$$= M^{-r+\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}\Big(\log M\Big)^{-b_1-\ldots-b_d+(d-1)\left(r-\frac{1}{p}+\frac{2}{q}-\frac{1}{\theta}\right)}.$$

Нехай тепер $1 \le \theta < q$.

При доведенні оцінки знизу в цьому випадку використаємо міркування аналогічні до тих, які використовувались у прикладі 4 роботи [8].

Нехай оператор G належить $L_M(B)_q, 1 < q < \infty$. Розглянемо оператор

$$A = (S_{Q(2^l N)} - S_{Q(N)})G,$$

де $S_{Q(N)}$ — оператор знаходження частинної суми Фур'є, що відповідає множині $Q(N)$. Тоді $A \in L_M(B)_q$ і область значень оператора A є підпростір A_M простору $T(\widetilde{Q}(N))$, розмірність якого $\dim A_M = \overline{M} \le M$. Із теореми A випливає, що для $f \in T(\widetilde{Q}(N))$ буде виконуватись

$$\|f - Af\|_q = \|(S_{Q(2^l N)} - S_{Q(N)})(f - Gf)\|_q \ll \|f - Gf\|_q.$$

Нехай $\big\{\psi_m(x)\big\}_{m=1}^{\overline{M}}$ — ортонормований базис в A_M. Розглянемо для $s \in \Theta'(N)$ оператори A_s:

$$A_s e^{i(k,x)} = \sum_{m=1}^{\overline{M}} a_m^k \delta_s(\psi_m, x),\ k \in \widetilde{Q}'(N).$$

Покладемо $g_s(x) = \mathcal{K}^s(x)$ і розглянемо величини

$$I_s = \sup_y \|g_s(x-y) - A_s(g_s(x-y))\|_\infty,\ s \in \Theta'(N).$$

Позначимо $b_s = \min\limits_{y=x} \mathrm{Re}\ A_s(g_s(x-y))$. Тоді

$$I_s \ge g_s(0) - b_s. \tag{12}$$

Далі, скориставшись лемою 5, будемо мати

$$b_s \le \mathrm{Re} \sum_{|k| \in \rho(s)} \sum_{m=1}^{\overline{M}} \widehat{g}_s(k) a_m^k \widehat{\psi}_m(k), s \in \Theta'(N),$$

звідки знаходимо

$$\sum_{s\in\Theta'(N)} b_s \le \mathrm{Re}\sum_{m=1}^{\overline{M}} \sum_{k\in\widetilde{Q}'(N)} \widehat{g}(k) a_m^k \widehat{\psi}_m(k) \le$$

$$\le \left(\overline{M}\sum_{m=1}^{\overline{M}} \sum_{k\in\widetilde{Q}'(N)} |a_m^k \widehat{g}(k)|^2\right)^{\frac{1}{2}} \le M^{\frac{1}{2}} B \left(\sum_{k\in\widetilde{Q}'(N)} |\widehat{g}(k)|^2\right)^{\frac{1}{2}} \ll$$

$$\ll M^{\frac{1}{2}} B |\widetilde{Q}'(N)|^{\frac{1}{2}}. \qquad (13)$$

Тут через $|\widetilde{Q}'(N)|$ позначено кількість елементів множини $\widetilde{Q}'(N)$.

Далі, враховуючи, що $|\Theta'(N)| \asymp \big(\log N\big)^{d-1}$, а також співвідношення

$$|\rho(s)| \asymp 2^{\|s\|_1} \asymp N^{\frac{1}{r}} \big(\log N\big)^{-\frac{b_1}{r} - \ldots - \frac{b_d}{r}},$$

будемо мати

$$|\widetilde{Q}'(N)| \asymp N^{\frac{1}{r}} \big(\log N\big)^{-\frac{b_1}{r} - \ldots - \frac{b_d}{r} + d - 1}. \qquad (14)$$

З іншого боку,

$$g(0) \asymp N^{\frac{1}{r}} \big(\log N\big)^{-\frac{b_1}{r} - \ldots - \frac{b_d}{r} + d - 1} \asymp |\widetilde{Q}'(N)|. \qquad (15)$$

Враховуючи (13) і (14), можна підібрати таке N, щоб $|\widetilde{Q}'(N)| \asymp M$ і права частина в (15) буде хоча б вдвічі більшою ніж права частина (13).

Оскільки $g(0) = \sum\limits_{s\in\Theta'(N)} g_s(0)$, то із (13) і (15) одержимо, що для деякого $s^* \in \Theta'(N)$ буде

$$g_{s^*}(0) - b_{s^*} \ge \frac{B(M|\widetilde{Q}'(N)|)^{\frac{1}{2}}}{|\Theta'(N)|} \asymp M\big(\log N\big)^{-(d-1)}.$$

Тоді із (12), користуючись "нерівністю різних метрик" Нікольського, одержимо, що для деякого y^* виконується

$$\|\mathcal{K}^{s^*}(x-y^*) - A_{s^*}(\mathcal{K}^{s^*}(x-y^*))\|_q = \|g_{s^*}(x-y^*) - A_{s^*}(g_{s^*}(x-y^*))\|_q \gg$$

$$\gg 2^{-\frac{1}{q}\|s\|_1}\|g_{s^*}(x-y^*)-A_{s^*}(g_{s^*}(x-y^*))\|_\infty \asymp$$

$$\asymp 2^{-\frac{1}{q}||s||_1}M\big(\log N\big)^{-(d-1)} \asymp M^{1-\frac{1}{q}}\big(\log M\big)^{-(d-1)\left(1-\frac{1}{q}\right)}.$$

Розглянемо функцію

$$g_2(x)=C_6N^{-1}\Big(N^{\frac{1}{r}}\big(\log N\big)^{-\frac{b_1}{r}-\ldots-\frac{b_d}{r}}\Big)^{\frac{1}{p}-1}\mathcal{K}^{s^*}(x),\ C_6>0.$$

Покажемо, що функція g_2 при відповідному виборі сталої C_6 належить до класу $B^{\Omega}_{p,\theta}$.

Дійсно,

$$\|A_{s^*}(g_2,\cdot)\|_p \ll N^{-1}\Big(N^{\frac{1}{r}}\big(\log N\big)^{-\frac{b_1}{r}-\ldots-\frac{b_d}{r}}\Big)^{\frac{1}{p}-1}\|\mathcal{K}^{s^*}(\cdot)\|_p \asymp$$

$$\asymp N^{-1}\Big(N^{\frac{1}{r}}\big(\log N\big)^{-\frac{b_1}{r}-\ldots-\frac{b_d}{r}}\Big)^{\frac{1}{p}-1}2^{\|s^*\|_1\left(1-\frac{1}{p}\right)} \asymp$$

$$\asymp N^{-1}\Big(N^{\frac{1}{r}}\big(\log N\big)^{-\frac{b_1}{r}-\ldots-\frac{b_d}{r}}\Big)^{\frac{1}{p}-1}\Big(N^{\frac{1}{r}}\big(\log N\big)^{-\frac{b_1}{r}-\ldots-\frac{b_d}{r}}\Big)^{1-\frac{1}{p}}=N^{-1}.$$

Тоді

$$\|g_2\|_{B^{\Omega}_{p,\theta}}=\left(\sum_s \Omega^{-\theta}(2^{-s})\|A_s(g_2,\cdot)\|_p^\theta\right)^{\frac{1}{\theta}}=$$

$$=\Omega^{-1}(2^{-s^*})\|A_{s^*}(g_2,\cdot)\|_p \ll \Omega^{-1}(2^{-s^*})N^{-1}\asymp 1.$$

Таким чином, робимо висновок, що $g_2\in B^{\Omega}_{p,\theta}$, з відповідною сталою $C_6>0$.

Оскільки

$$\|g_2-Gg_2\|_q \gg \|g_2-A_{s^*}g_2\|_q,$$

будемо мати

$$\|g_2(x-y^*)-Gg_2(x-y^*)\|_q \gg$$

$$\gg N^{-1}\Big(N^{\frac{1}{r}}\big(\log N\big)^{-\frac{b_1}{r}-\ldots-\frac{b_d}{r}}\Big)^{\frac{1}{p}-1}\|\mathcal{K}^{s^*}(x-y^*)-A_{s^*}(\mathcal{K}^{s^*}(x-y^*))\|_q \gg$$

$$\gg M^{-r}\big(\log M\big)^{-b_1-\ldots-b_d+(d-1)r}M^{\frac{1}{p}-1}M^{1-\frac{1}{q}}\big(\log M\big)^{(d-1)\left(1-\frac{1}{p}\right)-(d-1)(1-\frac{1}{q})}=$$

$$=M^{-r+\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}\big(\log M\big)^{-b_1-\ldots-b_d+(d-1)\left(r-\frac{1}{p}+\frac{1}{q}\right)}.$$

Оцінку знизу встановлено. Теорему доведено.

***Зауваження* 1.** У випадку $\Omega(t) = \prod_{j=1}^{d} t_j^r$ результати теореми (для класів $B^r_{p,\theta}, 1 \leq \theta < \infty$) отримані А. С. Романюком [10].

***Зауваження* 2.** Точні за порядком оцінки величин $d^{\perp}_M(H^{\Omega}_p, L_q)$ та $d^B_M(H^{\Omega}_p, L_q)$ при значеннях параметрів p і q, які задовольняють умову теореми, отримані М. М. Пустовойтовим [11].

1. *Бари Н. К., Стечкин С. Б.* Наилучшие приближения и дифференциальные свойства двух сопряженных функций // Тр. Моск. мат. о-ва. — 1956. — **5**. — С. 483 – 522.
2. *Sun Yongsheng, Wang Heping.* Representation and Approximation of Multivariate Periodic Functions with Bounded Mixed Moduli of Smoothness // Тр. Мат. ин-та им. В. А. Стеклова. — 1997. — **219**. — С. 356 – 377.
3. *Пустовойтов Н. Н.* Представление и приближение периодических функций многих переменных с заданным смешанным модулем непрерывности // Anal. Math. — 1994. — **20**, №1. — С. 35 – 48.
4. *Стасюк С. А., Федуник О. В.* Апроксимативні характеристики класів $B^{\Omega}_{p,\theta}$ періодичних функцій багатьох змінних // Укр. мат. журн. — 2006. — **58**, №5. — С. 69 – 704.
5. *Лизоркин П.И., Никольский С.М.* Пространства функций смешанной гладкости с декомпозиционной точки зрения // Тр. Мат. ин-та АН СССР. — 1989. — **187**. — С. 143 – 161.
6. *Темляков В. Н.* Поперечники некоторых классов функций нескольких переменных // Докл. АН СССР. — 1982. — **267**, №2. — С. 314 – 317.
7. *Темляков В. Н.* Приближение функций с ограниченной смешанной производной // Тр. Мат. ин-та АН СССР. — 1986. — **178**. — С. 1 – 112.
8. *Темляков В. Н.* Оценки асимптотических характеристик классов функций с ограниченной смешанной производной или разностью // Тр. Мат. ин-та АН СССР. — 1989. — **189**. — С. 138 – 168.
9. *Романюк А. С.* Наилучшие приближения и поперечники классов периодических функций многих переменных // Мат. сб. — 2008. — **199**, №2. — С. 93 – 114.
10. *Романюк А. С.* Поперечники и наилучшие приближения классов $B^r_{p,\theta}$ периодических функций многих переменных // Anal. Math. — 2011. — **37**, №3. — С. 181 – 213.
11. *Пустовойтов Н. Н.* Ортопоперечники классов многомерных периодических функций, мажоранта смешанных модулей непрерывности которых содержит как степенные, так и логарифмические множители // Anal. Math. — 2008. — **34**, №3. — С. 187 – 224.

12. *Конограй А. Ф.* Оценки аппроксимативных характеристик классов $B^{\Omega}_{p,\theta}$ периодических функций многих переменных с заданной мажорантой смешанных модулей непрерывности // Мат. заметки. — 2014. — **95**, №5. — С. 734 – 749.

13. *Конограй А. Ф.,Федуник–Яремчук О. В.* Оцінки апроксимативних характеристик класів $B^{\Omega}_{p,\theta}$ періодичних функцій багатьох змінних із заданою мажорантою мішаних модулів неперервності // Теорія наближення функцій та суміжні питання: Зб. праць Ін-ту математики НАН України. — 2013. — **10**, №1. — С. 148 – 160.

14. *Пустовойтов Н. Н.* Приближение многомерных функций с заданной мажорантой смешанных модулей непрерывности // Мат. заметки. — 1999. — **65**, №1. — С. 107 – 117.

15. *Никольский С. М.* Приближение функций многих переменных и теоремы вложения. — М.: Наука, 1977. — 456 с.

16. *Никольский С. М.* Неравенства для целых функций конечной степени и их применение в теории дифференцируемых функций многих переменных // Тр. Мат. ин-та им. В.А. Стеклова. — 1951. — **38**. — С. 244 – 278.

17. *Jakson D.* Certain problem of closest approximation // Bull. Amer. Math. Soc. — 1933. — **39**. — P. 889 – 906.

18. *Харди Г., Литтлвуд Д., Полиа Г.* Неравенства. — М.: Изд-во иностр. лит., 1948. — 456 с.

19. *Пустовойтов Н. Н.* О приближении и характеризации периодических функций многих переменных, имеющих мажоранту смешанных модулей непрерывности специального вида // Anal. Math. — 2003. — **29**, №3. — С. 201 – 218.