Збірник праць Ін-ту математики НАН України 2015, том 12, № 1, 57–73

УДК 517.9

Т.І. Вдовенко, М.Є. Дудкін

(Національний технічний університет України “КПІ”, Київ)

Сингулярні рангу один несиметричні збурення самоспряженого оператора.

tanyavdovenko@meta.ua, dudkin@imath.kiev.ua

We present a construction and discuss the eigenvalue problem for a rank one singular nonselfadjoint perturbation $\tilde{A} = A+\alpha \langle \cdot, \omega_1 \rangle \omega_2$ of a selfadjoint half-bounded operator A, i.e. the operator A perturbed by nonsymmetric potential ($\omega_1 \neq \omega_2$). We give the constructive description of the operator $\tilde{A}$ and investigate the point spectrum that possess the operator $\tilde{A}$ in case of weakly singular perturbations.

Наведено конструкцію та описано задача на власні значення для рангу один сингулярного несиметричного збурення $\tilde{A} = A + \alpha \langle \cdot, \omega_1 \rangle \omega_2$ самоспряженого напівобмеженого оператора A, тобто оператора A збуреного несиметричним потенціалом ($\omega_1 \neq \omega_2$). Надано конструктивний опис оператора $\tilde{A}$ і досліджено точковий спектр, який набуває оператор $\tilde{A}$ у випадку слабо сингулярного збурення.

1. Вступ

В цій роботі досліджується сингулярне рангу один збурення самоспряженого оператора косим проектором. Таке збурення відповідає формальному виразу $A+\alpha\langle\cdot,\omega_1\rangle\omega_2$, де $A = A^*$ – необмежений самоспряжений оператор в гільбертовому просторі $\mathcal{H}$, $\alpha \in \mathbb{C}$ а вектори ω_i, $i = 1, 2$ належать деякому негативному простору $\mathcal{H}_{-1}$, взятому зі шкали, побудованої за оператором A.

У випадку $\omega_1 = \omega_2$ і $\alpha \in \mathbb{R}$ ми потрапляємо до добре відомої теорії сингулярних збурень самоспряжених операторів (див. наприклад [1, 2, 3, 4, 6, 9, 10, 13, 14] та цитовану там літературу).

Взагалі, ідея і мотивації розглядати такі несиметричні збурення наведені в [6, 11, 12] та з точки зору не самоспряжених розширень в [15]. Відзначимо, що із названих робіт найбільш близькими до теми даної роботи є цикл публікацій стосовних нелокальних взаємодій [4, 13, 14].

2. Означення та основні властивості

Нехай $A = A^*$ – самоспряжений необмежений оператор, визначений на $\mathrm{Dom}A = \mathfrak{D}(A)$ у сепарабельному гільбертовому просторі $\mathcal{H}$ зі скалярним добутком $(\cdot,\cdot)$ і нормою $\|\cdot\|$. Позначимо $\sigma(\cdot)$, $\sigma_p(\cdot)$, $\rho(\cdot)$ спектр, точковий спектр і регулярну множину, відповідного оператора.

Нагадаємо, що $\{\mathcal{H}_k(A)\}_{k\in\mathbb{R}^1}$ позначає асоційовану A-шкалу гільбертових просторів [2, 10], де простір $\mathcal{H}_k := \mathcal{H}_k(A) = \mathfrak{D}(|A|^{k/2})$, $k \geq 1$ із нормою $\|\varphi\|_k = \|(|A| + I)^{k/2}\varphi\|$ (тут I позначає одиничний оператор) $\varphi \in \mathcal{H}_k(A)$ і $\mathcal{H}_{-k} := \mathcal{H}_{-k}(A)$ негативний (дуальний) простір – поповнення $\mathcal{H}$ за нормою $\|f\|_{-k} = \|(|A| + I)^{-k/2}f\|$, $f \in \mathcal{H}$. Нехай $\langle\cdot,\cdot\rangle$ позначає дуальний скалярний добуток – спарення просторів $\mathcal{H}_k$ і $\mathcal{H}_{-k}$. У подальшому розгляді буде використано тільки частина A-шкали для $k = 1, 2$.

Використовуючи A-шкалу, оператор A продовжується на $\mathcal{H}_{+1}$ і розуміється тепер як обмежений оператор зі всього $\mathcal{H}_{+1}$ у $\mathcal{H}_{-1}$. Продовжений оператор позначено як $\mathbf{A}$. Отже, вираз $\langle\varphi,\omega\rangle$ для $\omega = \mathbf{A}\psi$ має сенс із $\varphi, \psi \in \mathcal{H}_{+1}$. Позначимо також $\mathbf{R}_z = (\mathbf{A} - z)^{-1}$ відповідну резольвенту $z \in \rho(\mathbf{A})$.

Розглянемо в A-шкалі оператор вигляду $V^{\omega_1,\omega_2} = \langle\cdot,\omega_1\rangle\omega_2$, в якого очевидно $\mathfrak{D}(V) \subseteq \mathcal{H}_{+1}$ і $\mathfrak{R}(V) \subseteq \mathcal{H}_{-1}$.

Сума $\mathbf{A}+V$ є обмежений оператор з $\mathcal{H}_{+1}$ в $\mathcal{H}_{-1}$. Завдяки [5], можна означити $(\mathbf{A}+V)^+$ – спряжений оператор, який діє також з $\mathcal{H}_{+1}$ в $\mathcal{H}_{-1}$.

Тепер формальний вираз $A + \alpha\langle\cdot,\omega_1\rangle\omega_2$ можна розуміти, як оператор $\mathbf{A} + \langle\cdot,\omega_1\rangle\omega_2$ з $\mathcal{H}_{+1}$ в $\mathcal{H}_{-1}$, звужений на $\mathcal{H}$:

$$A^{\omega_1,\omega_2} = (\mathbf{A} + \langle\cdot,\omega_1\rangle\omega_2) \restriction_{\mathcal{H}} . \tag{1}$$

Надамо означення A^{ω_1,ω_2} без виходу із простору $\mathcal{H}$.

Означення 1. *Оператор A^{ω_1,ω_2} називаеться рангу один несиметричним слабо сингулярним збуренням самоспряженого оператора A у сепарабельному гільбертовому просторі $\mathcal{H}$, якщо для $\eta_i = \mathbf{A}^{-1}\omega_i$, $\omega_1 \in \mathcal{H}_{-1} \setminus \mathcal{H}$, або $\omega_2 \in \mathcal{H}_{-1} \setminus \mathcal{H}$, $\omega_1 \neq \omega_2$:*

$$\mathfrak{D}(A^{\omega_1,\omega_2}) = \left\{ \psi = \varphi + b\eta_2 \mid \varphi \in \mathfrak{D}(A),\ b = \frac{(A\varphi, \eta_1)}{1 + (A^{1/2}\eta_2, A^{1/2}\eta_1)} \right\} \quad (2)$$

для випадку $(A^{1/2}\eta_2, A^{1/2}\eta_1) \neq -1$; і

$$\mathfrak{D}(A^{\omega_1,\omega_2}) = \mathfrak{D}_{\mathcal{H}_1} \dot{+} \{c\eta\},\ \mathfrak{D}_{\mathcal{H}_1} = \{\varphi \in \mathfrak{D}(A) \mid (A\varphi, \eta_1) = 0\} \quad (3)$$

для випадку $(A^{1/2}\eta_2, A^{1/2}\eta_1) = -1$;

$$A^{\omega_1,\omega_2}\psi = A\varphi.$$

Використовуючи зв'язок $\eta_i = \mathbf{A}^{-1}\omega_i$, $\omega_i \in \mathcal{H}_{-1}$, $i = 1,2$ можна також вживати позначення A_{η_1,η_2} для $\eta_i \in \mathcal{H}_{+1}$, $i = 1,2$.

Оператор A^{ω_1,ω_2} має такі загальні властивості.

Твердження 1. *Для $a \in \mathbb{C}$ маємо: $A^{a\omega_1,\omega_2} = A^{\omega_1,\bar{a}\omega_2}$.*

Доведення. З означення 1 для обох випадків (2) і (3) випливає: $\mathfrak{D}(A^{a\omega_1,\omega_2}) = \mathfrak{D}(A^{\omega_1,\bar{a}\omega_2})$ і $A^{a\omega_1,\omega_2}\psi = A^{\omega_1,\bar{a}\omega_2}\psi = A\varphi$. Твердження 1 доведено.

Твердження 2. *Спряжений до оператор $(A^{\omega_1,\omega_2})^*$ має властивість $(A^{\omega_1,\omega_2})^* = A^{\omega_2,\omega_1}$.*

Доведення. Для доведення використаємо означення 1 для A^{ω_1,ω_2} і A^{ω_2,ω_1} та перевіримо рівність

$$(A^{\omega_1,\omega_2} f_1, f_2) = (f_1, A^{\omega_2,\omega_1} f_2), \quad (4)$$

для $f_1 \in \mathfrak{D}(A^{\omega_1,\omega_2})$ і $f_2 \in \mathfrak{D}(A^{\omega_2,\omega_1})$ у вигляді $f_1 = \varphi_1 + b_1\eta_2$ і $f_2 = \varphi_2 + b_1\eta_1$ відповідно. Ліва частина (4) має вигляд:

$$(A^{\omega_1,\omega_2} f_1, f_2) = (A^{\omega_1,\omega_2}(\varphi_1 + b_1\eta_2), (\varphi_2 + b_2\eta_1)) \\ = (A\varphi_1, \varphi_2) + \bar{b}_2(A\varphi_1, \eta_1), \quad (5)$$

де $b_1 = \frac{(A\varphi_1,\eta_1)}{1+(A^{1/2}\eta_2,A^{1/2}\eta_1)}$. Права частина (4) має вигляд

$$(f_1, A^{\omega_2,\omega_1} f_2) = ((\varphi_1 + b_1\eta_2), A^{\omega_2,\omega_1}(\varphi_2 + b_2\eta_1)) \\ = (\varphi_1, A\varphi_2) + b_1(\eta_2, A\varphi_2), \quad (6)$$

де $b_2 = \frac{(A\varphi_2,\eta_2)}{1+(A^{1/2}\eta_1,A^{1/2}\eta_2)}$.

Висновок твердження, що доводиться, випливає з рівності останніх доданків (5) і (6):

$$\frac{\overline{(A\varphi_2,\eta_2)}}{1+\overline{(A^{1/2}\eta_1,A^{1/2}\eta_2)}}(A\varphi_1,\eta_1) = \frac{(A\varphi_1,\eta_1)}{1+(A^{1/2}\eta_2,A^{1/2}\eta_1)}(\eta_2,A\varphi_2).$$

Доведення у випадку (2), тобто $(A^{1/2}\eta_2, A^{1/2}\eta_1) \neq -1$, завершено. Твердження у випаду (3), тобто $(A^{1/2}\eta_2, A^{1/2}\eta_1) = -1$, також виконується. Твердження 2 доведено.

Приклад 1. Розглянемо оператор $A = -\frac{d^2}{dx^2}$ і у якості простору $L_2(\mathbb{R}^1, dx)$. Оператор $\mathbf{A}$ – продовження A на $W_2^1(\mathbb{R}^1)$ у сенсі узагальнених функцій. Нехай задано формальний вираз $A + \langle\cdot,\delta_{x_1}\rangle\delta_{x_2}$, де δ_{x_1} і δ_{x_2} – δ-функції Дірака зосереджені у точках $x_1 \neq x_2$, $x_i \in \mathbb{R}^1$, $i = 1, 2$. Згідно означення 1, (очевидно не симетричний) оператор

$$\Delta^{\delta_{x_1},\delta_{x_2}} := -\frac{d^2}{dx^2} + \langle\cdot,\delta_{x_1}\rangle\delta_{x_2}$$

визначений в $L_2(\mathbb{R}^1, dx)$ областю визначення

$$\mathfrak{D}(\Delta^{\delta_{x_1},\delta_{x_2}}) = \big\{\psi \in W_2^2(\mathbb{R}^1 \setminus \{x_1\}) \mid \psi(x_1+) = \psi(x_1-),$$
$$\psi'(x_2+) - \psi'(x_2-) = \psi(x_1)\}$$

і дією $\Delta^{\delta_{x_1},\delta_{x_2}}\psi = -\psi''$.

Інтегруванням частинами, встановлюємо, що спряжений оператор $(\Delta^{\delta_{x_1},\delta_{x_2}})^* = \Delta^{\delta_{x_2},\delta_{x_1}}$, має область визначення

$$\mathfrak{D}(\Delta^{\delta_{x_2},\delta_{x_1}}) = \big\{\psi \in W_2^2(\mathbb{R}^1 \setminus \{x_2\}) \mid \psi(x_2+) = \psi(x_2-),$$
$$\psi'(x_1+) - \psi'(x_1-) = \psi(x_2)\} \quad (7)$$

із тією ж дією.

3. Опис рангу один несиметричних збурень самоспряженого оператора

У цьому розділі ми розглядаємо збурення із параметром $\alpha \in \mathbb{C}$ і позначаємо його $\tilde{A} = A + \alpha\langle\cdot,\omega_1\rangle\omega_2$, де $\omega_i \in \mathcal{H}_{-1} \setminus \mathcal{H}$ і $\|\omega_i\|_{-1} = 1$, $i = 1, 2$.

Множину таких операторів позначимо $\mathcal{P}_{ws,ws}(A)$ що означає "weakly-weakly" "слабо-слабо" сингулярне збурення ((ws,ws)-збурення). Одразу зауважимо, що якщо $\tilde{A} \in \mathcal{P}_{ws,ws}(A)$ то і $\tilde{A}^* \in \mathcal{P}_{ws,ws}(A)$.

Теорема 1. *Для резольвент $R_z = (A-z)^{-1}$ і $\tilde{R}_z = (\tilde{A}-z)^{-1}$ операторів $A = A^* > c > 1$ і $\tilde{A} \in \mathcal{P}^{1,1}_{ws,ws}(A)$ у сепарабельному гільбертовому просторі $\mathcal{H}$ виконується формула типу М.Крейна $z, \xi, \zeta \in \rho(A) \cap \rho(\tilde{A})$:*

$$\tilde{R}_z = R_z + b_z(\cdot, n_{\bar{z}})m_z, \tag{8}$$

з

$$n_z = (A-\xi)(A-z)^{-1}n_\xi, \quad m_z = (A-\zeta)(A-z)^{-1}m_\zeta, \tag{9}$$

де $n_z, m_z \in \mathcal{H}_{+1} \setminus \mathcal{H}_{+2}$ і

$$b_z^{-1} - b_\xi^{-1} = (\xi - z)(m_\xi, n_{\bar{z}}). \tag{10}$$

Вектори n_z, m_z і число b_z пов'язані із ω_1 і ω_2 співвідношенням

$$n_z = R_z\omega_1, m_z = R_z\omega_2, \quad -b_z^{-1} = \alpha^{-1} + \langle \omega_2, R_{\bar{z}}\omega_1 \rangle, \tag{11}$$

де $\alpha \neq 0$.

Випадок $\alpha = 0$ можна включати у розгляд, оскільки якщо $\alpha = 0$, то можна покласти $b_z \equiv 0$ і вважати $\tilde{R}_z \equiv R_z$.

Доведення. Без втрати загальності надалі будемо писати A замість $\mathbf{A}$ та R_z замість $\mathbf{R}_z$. З (1) для деякого $z \in \rho(A) \cap \rho(\tilde{A})$ маємо $\tilde{A} - z = A - z + \alpha\langle \cdot, \omega_1 \rangle \omega_2$, і отже

$$(\tilde{A} - z)^{-1} = (A-z)^{-1} - \alpha\langle \cdot, (A-\bar{z})^{-1}\omega_1 \rangle (\tilde{A} - z)^{-1}\omega_2,$$

де $(A-z)^{-1}$ і $(\tilde{A}-z)^{-1}$ розуміємо як оператори з $\mathcal{H}_{-1}$ в $\mathcal{H}_{+1}$. Для довільного вектора з $\mathcal{H}_{-1}$ і зокрема $\omega_2 \in \mathcal{H}_{-1}$ маємо

$$(\tilde{A} - z)^{-1}\omega_2 = (A-z)^{-1}\omega_2 - \alpha\langle \omega_2, (A-\bar{z})^{-1}\omega_1 \rangle (\tilde{A} - z)^{-1}\omega_2,$$

а також

$$(\tilde{A} - z)^{-1}\omega_2 = \frac{1}{1 + \alpha\langle \omega_2, (A-\bar{z})^{-1}\omega_1 \rangle}(A-z)^{-1}\omega_2.$$

Остаточно для $\alpha \neq 0$

$$(\tilde{A} - z)^{-1} = (A-z)^{-1} - \frac{1}{\alpha^{-1} + \langle \omega_2, (A-\bar{z})^{-1}\omega_1 \rangle}(\cdot, (A-\bar{z})^{-1}\omega_1)(A-z)^{-1}\omega_2. \tag{12}$$

Тепер лише слід покласти

$$n_z = (A - z)^{-1}\omega_1, \quad m_z = (A - z)^{-1}\omega_2, \tag{13}$$

і

$$b_z = -\frac{1}{\alpha^{-1} + \langle\omega_2, (A - \bar{z})^{-1}\omega_1\rangle}, \tag{14}$$

що дає (11).

Аналогічно, починаючи з $\tilde{A}^* = A + \bar{\alpha}\langle\cdot, \omega_2\rangle\omega_1$, також приходимо до (13) і (14) у еквівалентній формі

$$\bar{b}_z = -\frac{1}{\bar{\alpha}^{-1} + \langle\omega_1, (A - z)^{-1}\omega_2\rangle},$$

Зауважимо, що якщо $\omega_1, \omega_2 \in \mathcal{H}_{-1} \setminus \mathcal{H}$ то $n_z, m_z \in \mathcal{H}_{+1} \setminus \mathcal{H}_{+2}$.

З рівності (13) у вигляді $n_z = (A - z)^{-1}\omega_1$ і $n_\xi = (A - \xi)^{-1}\omega_1$ отримуємо $\omega_1 = (A - z)n_z = (A - \xi)n_\xi$ і також перший вираз в (9)

$$n_z = (A - \xi)(A - z)^{-1}n_\xi.$$

Цей вираз має сенс в $\mathcal{H}$. Аналогічно отримуємо другий вираз в (9). З (9) використовуючи тотожність Гільберта отримуємо (10):

$$\begin{aligned} b_z^{-1} - b_\xi^{-1} &= -\langle\omega_2, (A - \bar{z})^{-1}\omega_1\rangle + \langle\omega_2, (A - \bar{\xi})^{-1}\omega_1\rangle \\ &= \langle\omega_2, \left((A - \bar{\xi})^{-1} - (A - \bar{z})^{-1}\right)\omega_1\rangle \\ &= \langle\left((A - \xi)^{-1} - (A - z)^{-1}\right)\omega_2, \omega_1\rangle \\ &= \langle(\xi - z)(A - \xi)^{-1}(A - z)^{-1}\omega_2, \omega_1\rangle \\ &= (\xi - z)\langle(A - \xi)^{-1}\omega_2, (A - \bar{z})^{-1}\omega_1\rangle \\ &= (\xi - z)(m_\xi, n_{\bar{z}}). \end{aligned} \tag{15}$$

Що і завершує доведення.

Наприкінці роботи ми наводимо приклад, який ілюструє наступний наслідок із попередньої теореми.

Наслідок 1. *Якщо оператор* $A = A^*$ *і* $\tilde{A} \in \mathcal{P}^{1,1}_{ws,ws}(A)$ *обидва мають зворотні в* $\mathcal{H}$*, тобто* $0 \in \rho(A) \cap \rho(\tilde{A})$*, то (8) і (9) та (11) мають вигляд*

$$\tilde{A}^{-1} = A^{-1} + b_0(\cdot, n_0)m_0, \tag{16}$$

де

$$n_0 = A^{-1}\omega_1, \quad m_0 = A^{-1}\omega_2, \quad -b_0^{-1} = \alpha^{-1} + \langle\omega_2, A^{-1}\omega_1\rangle. \tag{17}$$

Доведення випливає з теореми 1, якщо покласти $z = 0$.

4. Спектральні властивості

Одразу зауважимо, що неперервний спектр $\sigma_c(A)$ оператора A не міняється при збуреннях скінченого рангу, тобто $\sigma_c(A) = \sigma_c(\tilde{A})$, $\tilde{A} \in \mathcal{P}^{n,n}_{s,s}(A)$, $n < \infty$.

Теорема 2. *Нехай (ws, ws)-збурений оператор $\tilde{A} \in \mathcal{P}^{1,1}_{ws,ws}(A)$ набуває, порівняно із A, нову точку $\lambda \in \mathbb{C}$ точкового спектру, тобто існує $\lambda \in \sigma_p(\tilde{A})$, така що $\lambda \notin \sigma_p(A)$, тоді для відповідних власних векторів φ, ψ: $\tilde{A}\varphi = \lambda\varphi$ $\tilde{A}^*\psi = \bar{\lambda}\psi$ виконуються такі співвідношення*

$$(\lambda - z)b_z(\varphi, n_{\bar{z}}) = 1, \quad \varphi = (A - z)(A - \lambda)^{-1}m_z; \tag{18}$$

$$(\bar{\lambda} - \bar{z})\bar{b}_z(\psi, m_z) = 1, \quad \psi = (A - \bar{z})(A - \bar{\lambda})^{-1}n_{\bar{z}}. \tag{19}$$

Доведення. Нехай $\tilde{A}\varphi = \lambda\varphi$, тобто

$$\tilde{R}_z\varphi = R_z\varphi + b_z(\varphi, n_{\bar{z}})m_z = \frac{1}{\lambda - z}\varphi,$$

і отже

$$b_z(\varphi, n_{\bar{z}})m_z = \left[\frac{1}{\lambda - z} - R_z\right]\varphi = \frac{1}{\lambda - z}(A - \lambda)(A - z)^{-1}\varphi,$$

$$(\lambda - z)b_z(\varphi, n_{\bar{z}})(A - z)(A - \lambda)^{-1}m_z = \varphi. \tag{20}$$

Домножаючи на $n_{\bar{z}}$ останній вираз, отримуємо

$$(\lambda - z)b_z(\varphi, n_{\bar{z}})\left((A - z)(A - \lambda)^{-1}m_z, n_{\bar{z}}\right) = (\varphi, n_{\bar{z}}),$$

і отже

$$(\lambda - z)b_z(\varphi, n_{\bar{z}}) = 1. \tag{21}$$

Зауважимо, що з (20) і (21) маємо $\varphi = (A - z)(A - \lambda)^{-1}m_z$. Отже доведено (18).

Аналогічно розглядаючи $\tilde{A}^*\psi = \bar{\lambda}\psi$ можна довести (19). Отже теорема доведена.

Наслідок 2. *Нехай в умовах (20) і (21) теореми 2 $z = 0$, тоді*

$$\lambda b_0(\varphi, n_0) = 1, \quad \varphi = A(A - \lambda)^{-1}m_0;$$
$$\bar{\lambda}\bar{b}_0(\psi, m_0) = 1, \quad \psi = A(A - \bar{\lambda})^{-1}n_0.$$

Твердження 3. *Нехай* (ws, ws)*-збурений опепатор* $\tilde{A} \in \mathcal{P}^{1,1}_{ws,ws}(A)$ *набуває, у порівнянні із* A*, нове власне значення* $\lambda \in \mathbb{C}$ *та власні вектори* φ *і* ψ*, тобто* $\tilde{A}\varphi = \lambda\varphi$ *і* $\tilde{A}^*\psi = \bar{\lambda}\psi$ *тоді співвідношення (18) і (19) у термінах* ω_1, ω_2 *мають вигляд*

$$\alpha\langle (A-\lambda)^{-1}\omega_2, \omega_1\rangle = -1, \quad \varphi = (A-\lambda)^{-1}\omega_2; \tag{22}$$

$$\bar{\alpha}\langle (A-\bar{\lambda})^{-1}\omega_1, \omega_2\rangle = -1, \quad \psi = (A-\bar{\lambda})^{-1}\omega_1. \tag{23}$$

Доведення випливає з теореми 2.

Якщо формулювання теореми 2 розуміти як пряма спектральна задача, то обернена сформульована у такій теоремі.

Теорема 3. *Для заданого самоспряженого додатного оператора* $A = A^*$ *в сепарабельному гільбертовому просторі* $\mathcal{H}$ *і* $\lambda \in \mathbb{C}$ *та векторам* $\varphi, \psi \in \mathcal{H}_{+1} \setminus \mathcal{H}_{+2}$*, знайдеться єдиний* (ws, ws)*-сингулярно збурений оператор* $\tilde{A} \in \mathcal{P}^{1,1}_{ws,ws}(A)$*, такий що* $\tilde{A}\varphi = \lambda\varphi$ *і* $\tilde{A}^*\psi = \bar{\lambda}\psi$*. При цьому оператор* $\tilde{A}$ *задається виразом (8):*

$$\tilde{R}_z = R_z + b_z(\cdot, n_{\bar{z}})m_z, \tag{24}$$

з

$$m_z = (A-\lambda)(A-z)^{-1}\varphi, \quad n_{\bar{z}} = (A-\bar{\lambda})(A-\bar{z})^{-1}\psi \tag{25}$$

і

$$b_z^{-1} = (\lambda - z)(\varphi, n_{\bar{z}}), \quad \left(\bar{b}_z^{-1} = (\bar{\lambda} - \bar{z})(\psi, m_z)\right). \tag{26}$$

Для доведення теореми необхідне допоміжне твердження загального характеру, відоме наприклад з [7] у випадку нормального оператора.

Твердження 4. *Нехай у сепарабельному гільбертовому просторі* $\mathcal{H}$ *задано додатній самоспряжений оператор* A *з областю визначення* $\mathfrak{D}(A)$*. Тоді для вектора* $\eta \in \mathcal{H} \setminus \mathfrak{D}(A)$ *і числа* $z \in \mathbb{C}$, $\mathrm{Im}(z) \neq 0$ *існує звуження* $\dot{A}$ *оператора* A*, таке що* $\eta = n_z$ *є його дефектним вектором, тобто* $(\dot{A} - z)^* n_z = 0$.

Далі наведемо твердження у певному розумінні зворотнє до теореми 1: формула типу М.Крейна з точки зору несиметричого збурення, тобто збурення резольвенти самоспряженого оператора косим проектором.

Твердження 5. *Нехай в сепарабельному гільбертовому просторі* $\mathcal{H}$ *задано самоспряжений оператор* A*. Тоді операторно значна функція*

$$\tilde{R}_z := (A-z)^{-1} + b_z(\cdot, n_{\bar{z}})m_z, \tag{27}$$

1) *є резольвентою замкненого оператора, якщо для n_z і b_z виконуються співвідношення (9) і (10) та $n_{\bar z}$, $(m_{\bar z})$ не є власними векторами для $A - z$, $(A - \bar z)$;*

2) *є резольвентою (ws, ws)-сингулярно збуреного оператора рангу один якщо додатково до попереднього пункту є включення $n_z, m_z \in \mathcal{H}_{+1} \setminus \mathcal{H}_{+2}$.*

Доведення. Доведемо пункт **1**). За теоремою 7.7.1 [8] $\tilde R_z$ є резольвентою замкненого оператора якщо:

a) $\tilde R_z$ задовольняє тотожність Гільберта: $\tilde R_z - \tilde R_\xi = (z - \xi)\tilde R_z \tilde R_\xi$, $\mathrm{Im} z, \xi \neq 0$;

b) $\tilde R_z$ має тривіальне ядро: $\ker(\tilde R_z) = \{0\}$, $\mathrm{Im} z \neq 0$.

Перевіримо умову **a**). Підставимо (27) у тотожність Гільберта:

$$(A - z)^{-1} + b_z(\cdot, n_{\bar z}))m_z - (A - \xi)^{-1} + b_\xi(\cdot, n_{\bar \xi})m_\xi = \\ = (z - \xi)\left((A - z)^{-1} + b_z(\cdot, n_{\bar z}))m_z\right)\left((A - \xi)^{-1} + b_\xi(\cdot, n_{\bar \xi})m_\xi\right).$$

Використовуючи тотожність Гільберта для $(A - z)^{-1}$ отримуємо

$$b_z(\cdot, n_{\bar z}))m_z - b_\xi(\cdot, n_{\bar \xi})m_\xi = (z - \xi)b_\xi(\cdot, n_{\bar \xi})(A - z)^{-1}m_\xi + \\ + (z - \xi)b_z(\cdot, (A - \bar \xi)^{-1}n_{\bar z})m_z + (z - \xi)b_z b_\xi(\cdot, n_{\bar \xi})(m_\xi, n_{\bar z}))m_z. \quad (28)$$

З (9) маємо $m_z = (A-\xi)(A-z)^{-1}m_\xi$, тоді $m_z = m_\xi + (z-\xi)(A-z)^{-1}m_\xi$, і $(z-\xi)(A-z)^{-1}m_\xi = m_z - m_\xi$. Аналогічно, з другої рівності (9) маємо: $(\bar z - \bar \xi)(A - \bar \xi)^{-1}n_{\bar z} = n_{\bar z} - n_{\bar \xi}$. Підставляємо останні дві рівності в (28):

$$b_z(\cdot, n_{\bar z}))m_z - b_\xi(\cdot, n_{\bar \xi})m_\xi = b_\xi(\cdot, n_{\bar \xi})[m_z - m_\xi] + \\ + b_z(\cdot, [n_{\bar z} - n_{\bar \xi}])m_z + (z - \xi)b_z b_\xi(\cdot, n_{\bar \xi})(m_\xi, n_{\bar z}))m_z.$$

Після спрощення

$$0 = b_\xi(\cdot, n_{\bar \xi})m_z - b_z(\cdot, n_{\bar \xi})m_z + (z - \xi)b_z b_\xi(\cdot, n_{\bar \xi})(m_\xi, n_{\bar z}))m_z.$$

Після скорочення на $(\cdot, m_\xi)n_{\bar z}$ отримуємо вираз еквівалентний (10).

Перевіримо умову **b**). Дійсно для $f \perp n_{\bar z}$ із фіксованою z, $\mathrm{Im} z \neq 0$ $\tilde R(z) = (A-z)^{-1}$ є резольвентою замкненого оператора і $\ker \tilde R(z) = \{0\}$. Для вектора $n_{\bar z}$ маємо

$$\tilde R_z n_{\bar z} = (A - z)^{-1}n_{\bar z} + b_z(n_{\bar z}, n_{\bar z})m_z \neq 0.$$

оскільки з іншого боку $n_{\bar z}$ є власний вектор оператора $(A-z)^{-1}$. Але за умови твердження, вектор $n_{\bar z}$ не є власним вектором оператора $(A-z)^{-1}$.

Аналогічно використовуючи спряжений вираз

$$\tilde R_z m_{\bar z} = (A-z)^{-1} m_{\bar z} + b_z(m_{\bar z}, m_{\bar z}) n_z \neq 0,$$

для вектора $m_{\bar z}$ і попередній доходимо висновку, що $\tilde R(z)$ є резольвентою деякого замкненого оператора. Тепер можна стверджувати, що існує замкнений лінійний оператор позначений $\tilde A$ і можна покласти $(\tilde A - z)^{-1} := \tilde R(z)$.

Зокрема $\tilde R(z)$ не є резольвентою самоспряженого оператора. За теоремою 7.7.3 з [8] операторно значна функція $\tilde R(z)$ є резольвентою самоспряженого оператора якщо $(\tilde R(z))^* = \tilde R(\bar z)$. Але ми маємо

$$(\tilde R_z)^* = (A-\bar z)^{-1} + \bar b_z(\cdot, m_{\bar z}) n_z \neq \tilde R_{\bar z}.$$

Нехай умова **1)** виконана і ми перевіряємо умову **2)**. Для цього припустимо додатково $n_z, m_z \in \mathcal H \setminus \mathfrak D(A)$. Покажемо, що множина $\mathfrak D = \{f \in \mathfrak D(A) \mid \langle f, \omega_2\rangle = 0\}$ і $\mathfrak D_* = \{f \in \mathfrak D(A) \mid \langle f, \omega_1\rangle = 0\}$ обидві є щільними в $\mathcal H$. Припустимо протилежне, тобто $\overline{\mathfrak D} \neq \mathcal H$. Тоді $\exists h \in \mathcal H$, так що $(\mathfrak D, h) = 0$. Тоді

$$0 = (\mathfrak D, h) = ((A-z)^{-1}\mathfrak M_z, h) = (\mathfrak M_z, (A-\bar z)^{-1} h).$$

Отже маємо $(A-z)^{-1} h \in \mathfrak N_z$, і $(A-z)^{-1} h \in \mathfrak D(A)$, але за умови твердження $\mathfrak N_z := \{c n_z\}_{c\in\mathbb C} \in \mathcal H \setminus \mathfrak D(A)$. Аналогічна суперечність доводиться для множини $\mathfrak D_*$. Отримані суперечності завершують доведення.

Зауваження. У твердженні 5 вектори $n_z, m_z \in \mathcal H \setminus \mathfrak D(A)$, отже автоматично $n_{\bar z}$ і m_z не є власними для $(A-z)^{-1}$ і $(A-\bar z)^{-1}$ відповідно.

Тепер доведемо теорему 3.

Доведення теореми 3.

1. Оскільки $\varphi \in \mathcal H_{+1} \setminus \mathcal H_{+2}$, то з (25) випливає $n_z, m_z \in \mathcal H_{+1} \setminus \mathcal H_{+2}$ а отже $n_z, m_z \in \mathcal H \setminus \mathfrak D(A)$, $\forall z \in \rho(A)$. За твердженням 4, вектор n_z є дефектним для ермітового оператора $\dot A$ з індексами дефекту $(1,1)$, що є звуженням оператора A і вектор m_z є дефектним для ермітова оператора $\dot A_*$ з індексами дефекту $(1,1)$, який є звуженням також A.

З теореми 1 випливає, що (ws, ws)-збурений оператор описаний формулами (8) з умовами (9) і (10). В твердженні 5 доведено, що оператор $\tilde R_z$, заданий в (27), є резольвентою самоспряженого оператора за умови що b_z задовольняє (10) і n_z, m_z задовольняють (9).

Нехай для n_z, m_z виконується (25) і (26):

$$
\begin{aligned}
m_z &= (A-\lambda)(A-z)^{-1}\varphi = \varphi + (z-\lambda)(A-z)^{-1}\varphi,\ b_z^{-1} = (\lambda - z)(\varphi, n_{\bar z});\\
n_z &= (A-\bar\lambda)(A-z)^{-1}\psi = \psi + (z-\bar\lambda)(A-z)^{-1}\psi,\ \bar b_z^{-1} = (\bar\lambda - \bar z)(\psi, m_z);\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad b_z^{-1} = (\lambda - z)(m_z, \psi).
\end{aligned}
$$

Враховуючи $(\varphi,\varphi) = 1$, запишемо ліву частину (10):

$$
\begin{aligned}
b_z - b_\xi &= (\lambda - z)(\varphi, [\psi + (\bar z - \bar\lambda)(A - \bar z)^{-1}\psi]) -\\
&- (\lambda - \xi)([\varphi + (\xi - \lambda)(A - \xi)^{-1}\varphi], \psi) =\\
&= (\lambda - z)(\varphi,\psi) - (\lambda - z)^2((A - z)^{-1}\varphi, \psi) -\\
&- (\lambda - \xi)(\varphi,\psi) + (\lambda - \xi)^2((A - \xi)^{-1}\varphi, \psi) =\\
&= (\xi - z)(\varphi,\psi) - (\lambda - z)^2((A - z)^{-1}\varphi, \psi) +\\
&+ (\lambda - \xi)^2((A - \xi)^{-1}\varphi, \psi).
\end{aligned}
\tag{29}
$$

Запишемо праву частину (10):

$$
\begin{aligned}
(\xi - z)(m_\xi, n_{\bar z}) &= (\xi - z)([\varphi + (\xi - \lambda)(A - \xi)^{-1}\varphi],\\
&[\psi + (\bar z - \bar\lambda)(A - \bar z)^{-1}\psi]) =\\
&= (\xi - z)[(\varphi,\psi) + (z - \lambda)((A - z)^{-1}\varphi, \psi) +\\
&+ (\xi - \lambda)((A - \xi)^{-1}\varphi, \psi) +\\
&+ (z - \lambda)(\xi - \lambda)((A - z)^{-1}(A - \xi)^{-1}\varphi, \psi)].
\end{aligned}
$$

В останньому рядку використано тотожність Гільберта для резольвент

$$
(A - z)^{-1} - (A - \xi)^{-1} = (z - \xi)(A - z)^{-1}(A - \xi)^{-1}.
$$

Отже

$$
\begin{aligned}
&(\xi - z)(m_\xi, n_{\bar z}) = \\
&= (\xi - z)(\varphi,\psi) + (\xi - z)(z-\lambda)((A-z)^{-1}\varphi,\psi) + \\
&+ (\xi - z)(\xi-\lambda)((A-\xi)^{-1}\varphi,\psi) + \\
&+ (\xi - \lambda)(z-\lambda)((A-\xi)^{-1}\varphi,\psi) - \\
&- (z - \lambda)(\xi-\lambda)((A-z)^{-1}\varphi,\psi) = \\
&= (\xi - z)(\varphi,\psi) + (-z^2 + z\xi - \lambda\xi + \lambda z)((A-z)^{-1}\varphi,\psi) + \\
&+ (\xi^2 - z\xi - \lambda\xi + \lambda z)((A-\xi)^{-1}\varphi,\psi) + \\
&+ (z\xi - \lambda z - \lambda\xi + \lambda^2)((A-\xi)^{-1}\varphi,\psi) - \\
&- (z\xi - \lambda z - \lambda\xi + \lambda^2)((A-z)^{-1}\varphi,\psi) = \\
&= (\xi - z)(\varphi,\psi) - (\lambda^2 - 2\lambda z + z^2)((A-z)^{-1}\varphi,\varphi) + \\
&+ (\xi^2 - 2\lambda\xi + \lambda^2)((A-\xi)^{-1}\varphi,\psi).
\end{aligned}
$$

Таким чином

$$
\begin{aligned}
(\xi - z)(m_z, n_{\bar\xi}) = (\xi - z)(\varphi,\psi) + (\xi-\lambda)^2((A-\xi)^{-1}\varphi,\psi) \\
- (z-\lambda)^2((A-z)^{-1}\varphi,\psi). \quad (30)
\end{aligned}
$$

Порівнюючи (29) і (30), отримуємо (10).

2. Оскільки вектори n_z і m_z належать до $\mathcal{H}_{+1}\setminus\mathcal{H}_{+2}$, то за твердженням 5 пункт **2**), оператор $\tilde A$ є (ws, ws)-сингулярно збурений відносно A.

3. Покажемо, що $\tilde A\varphi = \lambda\varphi$, або $(\tilde A - z)^{-1}\varphi = \frac{1}{\lambda - z}\varphi$. Дійсно, підстановка в (8) першого виразу з (25) і (26) з φ дає

$$
\begin{aligned}
(\tilde A - z)^{-1}\varphi = (A-z)^{-1}\varphi + \\
+ \frac{1}{(\lambda - z)(\varphi, n_{\bar z})}(\varphi, n_{\bar z})(\varphi + (z-\lambda)(A-z)^{-1}\varphi) = \frac{1}{\lambda - z}\varphi. \quad (31)
\end{aligned}
$$

Аналогічно $\tilde A^*\psi = \bar\lambda\psi$ або $(\tilde A^* - z)^{-1}\psi = \frac{1}{\bar\lambda - z}$ можемо отримати підставляючи в спряжений до (8) вираз друге рівняння з (25) і (26) з ψ.

4. Доведемо єдиність. Припустимо противне, тобто існує інший оператор $\hat A \in \mathcal{P}^{1,1}_{ws,ws}(A)$, такий що $\hat A\varphi = \lambda\varphi$ і $\hat A^*\psi = \lambda\psi$ але $\hat A \neq \tilde A$.

Оскільки $\hat{A} \in \mathcal{P}^{1,1}_{ws,ws}(A)$, то $\exists \hat{b}_z$ і $\exists \hat{n}_z$, $(\hat{m}_z)$, так що або $\hat{b}_z \neq b_z$, або $\hat{n}_z \neq n_z$ або $\hat{m}_z \neq m_z$, і

$$(\hat{A} - z)^{-1} := (A - z)^{-1} + \hat{b}_z(\cdot, \hat{n}_{\bar{z}})\hat{m}_z, \quad z \in \rho(\hat{A}) \cap \rho(A).$$

Тоді для λ і φ маємо

$$(\hat{A} - z)^{-1}\varphi = (\tilde{A} - z)^{-1}\varphi = \frac{1}{\lambda - z},$$

$$\frac{1}{\lambda - z} = (A - z)^{-1}\varphi + \hat{b}_z(\cdot, \hat{n}_{\bar{z}})\hat{m}_z = (A - z)^{-1}\varphi + b_z(\cdot, n_{\bar{z}})m_z.$$

З іншої рівності маємо що $\hat{n}_z = n_z, \hat{m}_z = m_z$ і також $\hat{b}_z = b_z$, тобто $\hat{A} \neq \tilde{A}$. Отримана суперечність завершує доведення єдиності і теореми в цілому.

Наслідок 3. *Для заданого додатного самоспряженого оператора A в сепарабельному гільбертовому просторі $\mathcal{H}$ і $0 \neq \lambda \in \mathbb{C}$ та векторів $\varphi, \psi \in \mathcal{H}_{+1} \setminus \mathcal{H}_{+2}$, знайдеться єдиний $\tilde{A} \in \mathcal{P}^{1,1}_{ws,ws}(A)$, такий що $\tilde{A}\varphi = \lambda\varphi$ і $\tilde{A}^*\psi = \bar{\lambda}\psi$. Припустимо додатково $0 \in \rho(A)$. При цьому оператор $\tilde{A}$ визначений в (16) має вигляд*

$$\tilde{A}^{-1} = A^{-1} + b_0(\cdot, n_0)m_0, \tag{32}$$

де

$$m_0 = (A - \lambda)A^{-1}\varphi, \quad n_0 = (A - \bar{\lambda})A^{-1}\psi, \tag{33}$$

$$b_0^{-1} = \lambda(\varphi, n_0), \quad or \quad \bar{b}_0^{-1} = \bar{\lambda}(\psi, m_0). \tag{34}$$

Доведення випливає з теореми 4.

Твердження 6. *Для заданого самоспряженого оператора A в сепарабельному гільбертовому просторі $\mathcal{H}$ і $\lambda \in \mathbb{C}$ та векторів $\varphi, \psi \in \mathcal{H}_{+1} \setminus \mathcal{H}_{+2}$, існує єдиний $\tilde{A} \in \mathcal{P}^{1,1}_{ws,ws}(A)$ такий що $\tilde{A}\varphi = \lambda\varphi$, $\tilde{A}^*\psi = \bar{\lambda}\psi$ При цьому оператор $\tilde{A}$ визначений (1) виразом $\tilde{A} = A + \alpha\langle\cdot, \omega_1\rangle\omega_2$, де $\omega_1 = (A - \bar{\lambda})\psi$, $\omega_2 = (A - \lambda)\varphi$, і $\alpha^{-1} = -\langle(A - \lambda)\omega_2, \omega_1\rangle$, або (що еквівалентно) $\alpha^{-1} = -\langle(A - \bar{\lambda})\omega_1, \omega_2\rangle$.*

Доведення є простим поєднанням висновків теорем 1 і 3.

5. Приклади

Приклад 2. Нехай $\mathcal{H} = L_2([\sqrt{2}, \infty), dx) = L_2$ і A оператор множення на незалежну змінну x, тобто

$$Af(x) = xf(x), \quad \mathfrak{D}(A) = \{f(x) \in L_2 \mid xf(x) \in L_2\}.$$

Очевидно оператор $A \geq \sqrt{2}$ і A має абсолютно неперервний спектр $\sigma(A) = \sigma_c(A) = [\sqrt{2}, \infty)$.

Покладемо $\mathcal{H}_{+1} = L_2([\sqrt{2}, \infty), xdx)$ і $\mathcal{H}_{-1} = L_2([\sqrt{2}, \infty), \frac{1}{x}dx)$ – простір із вагою. У такому випадку $\mathfrak{D}(A) = \mathcal{H}_{+2} = L_2([\sqrt{2}, \infty), x^2dx)$.

Візьмемо $\omega_1 = \frac{1}{\sqrt{x-1}}$ і $\omega_2 = \frac{1}{\sqrt{x+1}}$. Очевидно, що $\omega_1, \omega_2 \in \mathcal{H}_{-1} \setminus \mathcal{H}$. Отже наведено приклад оператора $\tilde{A} \in \mathcal{P}^{1,1}_{ws,ws}$.

Якщо припустити додатково, що $\tilde{A}$ набуває нову точку точкового спектру $\lambda = 0$ тобто $0 \in \sigma_p(\tilde{A})$, то за твердженням 3, $\alpha = -\frac{4}{\pi}$ за формулами (22), оскільки $\langle A^{-1}\omega_2, \omega_1\rangle = \int\limits_{\sqrt{2}}^{\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} = \frac{\pi}{4}$. Отже

$$\tilde{A}f(x) = xf(x) - \frac{4}{\pi}\frac{1}{\sqrt{x+1}}\int\limits_{\sqrt{2}}^{\infty}\frac{f(x)}{\sqrt{x-1}}\,dx.$$

У зв'язку зі сказаним $\varphi = \frac{1}{x\sqrt{x-1}}$, $\psi = \frac{1}{x\sqrt{x+1}}$.

Для ілюстрації теореми 1, формули (8) і теореми 3, формул (25) та (26) (для випадку $\lambda = 0$) достатньо покласти $n_z = \frac{1}{(x-z)\sqrt{x-1}}$, $m_z = \frac{1}{(x-z)\sqrt{x+1}}$, $b_z^{-1} = \frac{\pi}{4} - \int\limits_{\sqrt{2}}^{\infty} \frac{dx}{(x-z)\sqrt{x^2-1}}$.

Приклад 3. Нехай $\mathcal{H} = L_2([1, \infty), dx) = L_2$ і A оператор множення на незалежну змінну x як у попередньому прикладі, тобто $Af(x) = xf(x)$, $\mathfrak{D}(A) = \{f(x) \in L_2 \mid xf(x) \in L_2\}$. Очевидно $A \geq 1$ і A мають абсолютно неперервний спектр, тобто $\sigma(A) = \sigma_c(A) = [1, \infty)$.

Аналогічно візьмемо $\mathcal{H}_1 = L_2([1, \infty), xdx)$ і $\mathcal{H}_{-1} = L_2([1, \infty), \frac{1}{x}dx)$ – простір з вагою. У цьому випадку $\mathfrak{D}(A) = \mathcal{H}_2 = L_2([1, \infty), x^2dx)$.

Виберемо $\varphi = \frac{1}{x^{3/2}}$ і $\psi = \frac{1}{x^{5/4}}$. Очевидно, шо $\varphi, \psi \in \mathcal{H}_{+1} \setminus \mathcal{H}_{+2}$. Отже маємо приклад оператора $\tilde{A} \in \mathcal{P}^{1,1}_{ws,ws}$ визначеного в (24).

Якщо припустимо додатково що $\tilde{A}$ набуває нову точку точкового спектру $\lambda = i$, тобто $i \in \sigma_p(\tilde{A})$ і покладемо для простоти $z = 0$, то за наслідком 3 отримуємо вектори n_0, m_0 і число b_0 за формулами (33) і (34) для (32), оскільки $m_0 = \frac{x-i}{x^{5/2}}$, $n_0 = \frac{x+i}{x^{9/4}}$, $b_0^{-1} = i\int\limits_1^\infty \frac{1}{x^{3/2}}\frac{x-i}{x^{9/4}}\,dx = \frac{4}{11} - \frac{4}{7}i$. Отже

$$\tilde{A}^{-1}f(x) = \frac{1}{x}f(x) + \frac{1}{4/11 - i4/7}\frac{x-i}{x^{5/2}}\int\limits_1^\infty \frac{x-i}{x^{4/9}}f(x)\,dx.$$

І взагалі $n_z = \frac{1}{(x-i)x^{3/2}(x-z)}$, $m_z = \frac{1}{(x-i)x^{5/4}(x-z)}$, $b_z^{-1} = i\int\limits_1^\infty \frac{(x-i)\,dx}{x^{11/4}(x-z)}$.

Приклад 4. Нехай $\mathcal{H} = L_2(\mathbb{R}^1)$ і роль A грає оператор Лапласа, тобто $Af(x) = -f''(x)$, $\mathfrak{D}(A) = W_2^2(\mathbb{R}^1)$ простір Соболева. Оператор $A \geq 0$ і має абсолютно неперервний спектр, тобто $\sigma(A) = \sigma_c(A) = [0, \infty)$. Розглянемо вираз (1) для опису збурення δ-функцією.

За [1] можна записати резольвенти операторів, тобто ядро резольвенти

$$(-\tilde{\Delta} - k^2)^{-1}(x,\tau) = (i/2k)e^{ik|x-\tau|} + \alpha(2k)^{-1}(i\alpha + 2k)^{-1}e^{ik[|x-x_2|+|x_1-\tau|]},$$

де $\mathrm{Im}k > 0$, $\alpha \in \mathbb{C}$, $x, \tau, x_1, x_2 \in \mathbb{R}^1$, $x_1 < x_2$. Неважко зрозуміти, що істотній спектр $\sigma_{ess}(-\tilde{\Delta}) = \sigma_{ac}(-\Delta) = [0, \infty)$, і сингулярно неперервний $\sigma_{sc}(-\tilde{\Delta}) = \emptyset$.

Якщо $\mathrm{Re}(\alpha) < 0$, то оператори $-\tilde{\Delta}$ (і $-\tilde{\Delta}^*$) набувають одне просте власне значення $\{-\alpha^2/4\}$ (і $\{-\bar{\alpha}^2/4\}$) із нормованим власним вектором $\varphi = (-\alpha/2)^{1/2}e^{\alpha|x-y_1|/2}$, (і $\psi = (-\bar{\alpha}/2)^{1/2}e^{\bar{\alpha}|x-y_2|/2}$).

6. Висновки

В статті дано означення рангу один сингулярно не симетрично збуреного оператора, встановлені його властивості та досліджено точковий спектр, який набуває так збурений оператор.

Література

[1] *S. Albeverio, F. Gesztesy, R. Høegh-Krohn, H. Holden.* Solvable models in quantum mechanics.Second edition, With an appendix by Pavel Exner // AMS Chelsea Publishing, Providence, RI, 2005. xiv+488 pp.

[2] *S. Albeverio, and P. Kurasov.* Singular perturbations of differential operators. Solvable Schrödinger type operators // London Mathematical Society Lecture Note Series, 271, Cambridge University Press, Cambridge, 2000. xiv+429 pp.

[3] *S. Albeverio, S. Kuzhel and L. Nizhnik.* On the perturbation theorey of self-adjoint operators // Tokyo Journal of Mathematics **31** (2008), no. 2, 273–292.

[4] *S. Albeverio and L. Nizhnik.* Schrödinger operators with nonlocal potentials // Methods Funct. Anal. Topology **10** (2013), no. 3, 199–210.

[5] *Y. M. Berezansky and J. Brasche.* Generalized selfadjoint operators and their singular perturbations // Methods Funct. Anal. Topology **8** (2002), no. 4, 1–14.

[6] *A. Grod and S. Kuzhel.* Schrödinger operators with non-symmetric zero-range potentials // Methods Funct. Anal. Topology **20** (2014), no. 1, 34–49.

[7] *Дудкін М.Є.* Сингулярно збурені нормальні оператори // // Укр. мат. журн. — 1999. — **51**, № 8. — С. 1045-1053.

[8] *Като Т.* Теория возмущений линейных операторов // Т.Като. — М.:Мир, 1972. — 740 с.

[9] *Кошманенко В.Д.* Сингулярные билинейные формы в теории возмущений самосопряженных операторов. — Киев: Наук. думка, 1993. — 178 с.

[10] *Кошманенко В.Д., Дудкін М.Є.* Методи оснащених просторів у теорії сингулярних збурень самоспряжених операторів // Праці Інституту математики НАН України т. 96 Київ: –2013. – 320 с.

[11] *V. B. Lidskii.* The non self-adjoint operator of Sturm-Liouville type with discrete spectrum // Trudy Moskow. Mat. Obshchestva **9** (1960), 45–79.

[12] *M. M. Malamud and V. I. Mogilevskii.* Kreĭn type formula for canonical resolvents of dual pairs of linear relations // Methods Funct. Anal. Topology **8** (2002), no. 4, 72–100.

[13] *L. Nizhnik*. Inverse nonlocal Sturm-Liouville problem // Inverse problems **26** (2010), 9 pp.

[14] *L. Nizhnik*. Inverse spectral nonlocal problem for the first order ordinary differential equation // Tamkang Journal of Mathematics **42** (2011), no. 3, 385–394.

[15] *M. I. Vishik*. On general boundary-value problems for elliptic differential equation // Trudy Moskow. Mat. Obshchestva **1** (1952), 187–246.