Збірник праць Ін-ту математики НАН України 2014, Т. 11, № 3, 78-103

УДК 517.53

А. П. Голуб, Л. О. Чернецька (Ін–т математики НАН України, Київ)

ПОБУДОВА АПРОКСИМАНТ ПАДЕ ДЛЯ ДЕЯКИХ ГІПЕРГЕОМЕТРИЧНИХ РЯДІВ ЛАУРІЧЕЛЛИ ЗА ДОПОМОГОЮ МЕТОДУ УЗАГАЛЬНЕНИХ МОМЕНТНИХ ЗОБРАЖЕНЬ

By means of extension of V. K. Dzyadyk's method of generalized moment representations to the case of three–dimensional number sequences Padé approximants for some Lauricella hypergeometric series are constructed.

За допомогою поширення методу узагальнених моментних зображень В. К. Дзядика на випадок тривимірних числових послідовностей побудовано апроксиманти Паде для деяких гіпергеометричних рядів Лаурічелли.

Питанням побудови та дослідження апроксимацій Паде функцій багатьох змінних займаються вже понад чотирьох десятків років. Зокрема, різноманітні модифікації багатовимірних апроксимацій Паде розглядалися в роботах [1 – 8].

Одним з підходів до вивчення апроксимацій Паде аналітичних функцій є запропонований В. К. Дзядиком у 1981 році метод узагальнених моментних зображень [9, 10]. В [11] цей метод було поширено на випадок двовимірних числових послідовностей і застосовано до побудови апроксимант Паде функцій двох змінних. У даній роботі розглядається задача про побудову апроксимант типу Паде для функцій трьох змінних за допомогою методу узагальнених моментних зображень.

Означення. *Будемо говорити, що для тривимірної числової послідовності* $\{s_{\mathbf{k}}\}_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}_+^3}$ *має місце узагальнене моментне зображення на добутку лінійних просторів* $\mathscr{X}$ *та* $\mathscr{Y}$ *за означеною на цьому добутку білінійною формою* $\langle .,. \rangle$, *якщо у просторі* $\mathscr{X}$ *вказано тривимірну послідовність елементів* $\{x_{\mathbf{k}}\}_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}_+^3}$, *а у просторі* $\mathscr{Y}$ — *тривимірну послідовність елементів* $\{y_{\mathbf{j}}\}_{\mathbf{j}\in\mathbb{Z}_+^3}$ *такі, що*

$$s_{\mathbf{k}+\mathbf{j}} = \langle x_{\mathbf{k}}, y_{\mathbf{j}} \rangle, \quad \mathbf{k}, \mathbf{j} \in \mathbb{Z}^3_+. \tag{1}$$

Тривимірній числовій послідовності $\{s_{\mathbf{k}}\}_{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^3_+}$ можна поставити у відповідність формальний степеневий ряд від трьох змінних

$$f(\mathbf{z}) = \sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^3_+} s_{\mathbf{k}} \mathbf{z}^{\mathbf{k}}, \tag{2}$$

де $\mathbf{z} = (z_1, z_2, z_3), \mathbf{k} = (k_1, k_2, k_3), \mathbf{z}^{\mathbf{k}} = z_1^{k_1} z_2^{k_2} z_3^{k_3}$.

Визначати аналоги апроксимант Паде для рядів вигляду (2) можна за різними схемами (див. [12, с. 323]). Для цього фіксуються певні обмежені області $\mathscr{N}$ та $\mathscr{D}$ з $\mathbb{Z}^3_+$ і будуються алгебраїчні многочлени від трьох змінних

$$P_{\mathscr{N}}(\mathbf{z}) = \sum_{\mathbf{k} \in \mathscr{N}} p_{\mathbf{k}} \mathbf{z}^{\mathbf{k}},$$

$$Q_{\mathscr{D}}(\mathbf{z}) = \sum_{\mathbf{k} \in \mathscr{D}} q_{\mathbf{k}} \mathbf{z}^{\mathbf{k}},$$

для яких коефіцієнти $e_{\mathbf{k}}$ в розкладі

$$f(\mathbf{z}) - \frac{P_{\mathscr{N}}(\mathbf{z})}{Q_{\mathscr{D}}(\mathbf{z})} = \sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^3_+} e_{\mathbf{k}} \mathbf{z}^{\mathbf{k}}$$

дорівнюють нулю при $\mathbf{k} \in \mathscr{E}$, де $\mathscr{E}$ — деяка обмежена підмножина $\mathbb{Z}^3_+$.

Має місце такий результат.

Теорема 1. *Нехай формальний степеневий ряд від трьох змінних має вигляд* (2) *і для тривимірної послідовності* $\{s_{\mathbf{k}}\}_{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^3_+}$ *має місце узагальнене моментне зображення вигляду* (1). *Тоді якщо для деяких* $\mathbf{N} = (N_1, N_2, N_3) \in \mathbb{N}^3$ *та* $\mathbf{M} = (M_1, M_2, M_3) \in \mathbb{Z}^3_+$ *існує нетривіальний узагальнений поліном*

$$Y_{\mathbf{N}}^{(\mathbf{M})} = \sum_{j_1=0}^{N_1} \sum_{j_2=0}^{N_2} \sum_{j_3=0}^{N_3} c_{\mathbf{j}}^{(\mathbf{N},\mathbf{M})} y_{\mathbf{j}} \tag{3}$$

такий, що виконуються умови біортогональності

$$\langle x_{\mathbf{k}}, Y_{\mathbf{N}}^{(\mathbf{M})} \rangle = 0 \tag{4}$$

при $\mathbf{k} \in \Big\{(k_1,k_2,k_3) \in \mathbb{Z}_+^3 | k_i \in \big[M_i, M_i+N_i\big], i=\overline{1,3}\Big\} \setminus \Big\{\big(M_1+ +N_1, M_2+N_2, M_3+N_3\big)\Big\}$, *і* $c_{\mathbf{N}}^{(\mathbf{N},\mathbf{M})} \neq 0$, *то раціональна функція*

$$\frac{P_{\mathcal{N}}(\mathbf{z})}{Q_{\mathbf{N}}^{(\mathbf{M})}(\mathbf{z})} = \frac{1}{Q_{\mathbf{N}}^{(\mathbf{M})}(\mathbf{z})}\left\{\sum_{k_1=0}^{N_1-1}\sum_{k_2=0}^{N_2-1}\sum_{k_3=0}^{N_3-1}\mathbf{z}^{\mathbf{k}}\sum_{j_1=0}^{k_1}\sum_{j_2=0}^{k_2}\sum_{j_3=0}^{k_3} c_{\mathbf{N}-\mathbf{j}}^{(\mathbf{N},\mathbf{M})} s_{\mathbf{k}-\mathbf{j}} +\right.$$

$$+z_1^{N_1}\sum_{k_1=0}^{N_1+M_1}\sum_{k_2=0}^{N_2-1}\sum_{k_3=0}^{N_3-1}\mathbf{z}^{\mathbf{k}}\sum_{j_1=0}^{N_1}\sum_{j_2=0}^{k_2}\sum_{j_3=0}^{k_3} c_{(j_1,N_2-j_2,N_3-j_3)}^{(\mathbf{N},\mathbf{M})} s_{(k_1+j_1,k_2-j_2,k_3-j_3)} +$$

$$+z_2^{N_2}\sum_{k_1=0}^{N_1-1}\sum_{k_2=0}^{N_2+M_2}\sum_{k_3=0}^{N_3-1}\mathbf{z}^{\mathbf{k}}\sum_{j_1=0}^{k_1}\sum_{j_2=0}^{N_2}\sum_{j_3=0}^{k_3} c_{(N_1-j_1,j_2,N_3-j_3)}^{(\mathbf{N},\mathbf{M})} s_{(k_1-j_1,k_2+j_2,k_3-j_3)} +$$

$$+z_3^{N_3}\sum_{k_1=0}^{N_1-1}\sum_{k_2=0}^{N_2-1}\sum_{k_3=0}^{N_3+M_3}\mathbf{z}^{\mathbf{k}}\sum_{j_1=0}^{k_1}\sum_{j_2=0}^{k_2}\sum_{j_3=0}^{N_3} c_{(N_1-j_1,N_2-j_2,j_3)}^{(\mathbf{N},\mathbf{M})} s_{(k_1-j_1,k_2-j_2,k_3+j_3)} +$$

$$+z_1^{N_1}z_2^{N_2}\sum_{k_1=0}^{N_1+M_1}\sum_{k_2=0}^{N_2+M_2}\sum_{k_3=0}^{N_3-1}\mathbf{z}^{\mathbf{k}}\sum_{j_1=0}^{N_1}\sum_{j_2=0}^{N_2}\sum_{j_3=0}^{k_3} c_{(j_1,j_2,N_3-j_3)}^{(\mathbf{N},\mathbf{M})} s_{(k_1+j_1,k_2+j_2,k_3-j_3)} +$$

$$+z_1^{N_1}z_3^{N_3}\sum_{k_1=0}^{N_1+M_1}\sum_{k_2=0}^{N_2-1}\sum_{k_3=0}^{N_3+M_3}\mathbf{z}^{\mathbf{k}}\sum_{j_1=0}^{N_1}\sum_{j_2=0}^{k_2}\sum_{j_3=0}^{N_3} c_{(j_1,N_2-j_2,j_3)}^{(\mathbf{N},\mathbf{M})} s_{(k_1+j_1,k_2-j_2,k_3+j_3)} +$$

$$+z_2^{N_2}z_3^{N_3}\sum_{k_1=0}^{N_1-1}\sum_{k_2=0}^{N_2+M_2}\sum_{k_3=0}^{N_3+M_3}\mathbf{z}^{\mathbf{k}}\sum_{j_1=0}^{k_1}\sum_{j_2=0}^{N_2}\sum_{j_3=0}^{N_3} c_{(N_1-j_1,j_2,j_3)}^{(\mathbf{N},\mathbf{M})} s_{(k_1-j_1,k_2+j_2,k_3+j_3)} +$$

$$\left. +z_1^{N_1}z_2^{N_2}z_3^{N_3}\sum_{\mathbf{k}\in\Gamma_{\mathbf{M}}}\mathbf{z}^{\mathbf{k}}\sum_{j=0}^{N_1}\sum_{j_2=0}^{N_2}\sum_{j_3=0}^{N_3} c_{\mathbf{j}}^{(\mathbf{N},\mathbf{M})} s_{\mathbf{k}+\mathbf{j}}\right\},$$

де

$$\Gamma_{\mathbf{M}} = \left(\prod_{m=1}^{3}[0, M_m-1]\right) \bigcup \Big([0,M_1-1]\times[0,M_2+N_2]\times[M_3,M_3+N_3]\Big) \bigcup$$

$$\bigcup\Big([0, M_1+N_1]\times[M_2, M_2+N_2]\times[0, M_3-1]\Big)\bigcup$$

$$\bigcup\Big([M_1, M_1+N_1]\times[0, M_2-1]\times[0, M_3+N_3]\Big),$$

а

$$Q_{\mathbf{N}}^{(\mathbf{M})}(\mathbf{z})=\sum_{j_1=0}^{N_1}\sum_{j_2=0}^{N_2}\sum_{j_3=0}^{N_3}c_{\mathbf{N}-\mathbf{j}}^{(\mathbf{N},\mathbf{M})}\mathbf{z}^{\mathbf{j}},$$

матиме розвинення у степеневий ряд, коефіцієнти якого збігатимуться з коефіцієнтами ряду (2) *для всіх*

$$\mathbf{k}\in\Big\{(k_1,k_2,k_3)\in\mathbb{Z}_+^3|k_m\in\big[0,2N_m+M_m\big], m=\overline{1,3}\Big\}\backslash$$

$$\backslash\Big\{\big(2N_1+M_1, 2N_2+M_2, 2N_3+M_3\big)\Big\}.$$

Зауваження. У теоремі 1 та надалі символом $\prod\limits_{i=1}^{3}X_i$ будемо позначати декартів добуток множин X_i, тобто $\prod\limits_{i=1}^{3}X_i=\big\{(k_1,k_2,k_3)|$ $k_i\in X_i, i=\overline{1,3}\big\}$.

Доведення. Помножимо рівність

$$s_{k_1+j_1+M_1,k_2+j_2+M_2,k_3+j_3+M_3}=\langle x_{k_1+M_1,k_2+M_2,k_3+M_3}, y_{\mathbf{j}}\rangle,$$

$$k_1,k_2,k_3,j_1,j_2,j_3\in\mathbb{Z}_+,$$

на $\mathbf{z}^{\mathbf{k}}=z_1^{k_1}z_2^{k_2}z_3^{k_3}$ і підсумуємо по k_1,k_2,k_3 від 0 до досить великих чисел $\widetilde{k}_1,\widetilde{k}_2,\widetilde{k}_3$ відповідно. Справа отримаємо

$$\left\langle\sum_{k_1=0}^{\widetilde{k}_1}\sum_{k_2=0}^{\widetilde{k}_2}\sum_{k_3=0}^{\widetilde{k}_3}\mathbf{z}^{\mathbf{k}}x_{k_1+M_1,k_2+M_2,k_3+M_3}, y_{\mathbf{j}}\right\rangle,$$

зліва будемо мати

$$\sum_{k_1=0}^{\widetilde{k}_1}\sum_{k_2=0}^{\widetilde{k}_2}\sum_{k_3=0}^{\widetilde{k}_3}s_{k_1+j_1+M_1,k_2+j_2+M_2,k_3+j_3+M_3}\mathbf{z}^{\mathbf{k}}=$$

$$= \sum_{k_1=j_1+M_1}^{\widetilde{k}_1+j_1+M_1} \sum_{k_2=j_2+M_2}^{\widetilde{k}_2+j_2+M_2} \sum_{k_3=j_3+M_3}^{\widetilde{k}_3+j_3+M_3} s_{\mathbf{k}} \mathbf{z}^{\mathbf{k}-\mathbf{j}-\mathbf{M}} =$$

$$= \frac{1}{\mathbf{z}^{\mathbf{j}+\mathbf{M}}} \times \left\{ f(\mathbf{z}) - \sum_{k_1=0}^{j_1+M_1-1} \sum_{k_2=0}^{j_2+M_2-1} \sum_{k_3=0}^{j_3+M_3-1} s_{\mathbf{k}} \mathbf{z}^{\mathbf{k}} - \right.$$

$$- \sum_{k_1=0}^{j_1+M_1-1} \sum_{k_2=0}^{\widetilde{k}_2+j_2+M_2} \sum_{k_3=j_3+M_3}^{\widetilde{k}_3+j_3+M_3} s_{\mathbf{k}} \mathbf{z}^{\mathbf{k}} - \sum_{k_1=0}^{\widetilde{k}_1+j_1+M_1} \sum_{k_2=j_2+M_2}^{\widetilde{k}_2+j_2+M_2} \sum_{k_3=0}^{j_3+M_3-1} s_{\mathbf{k}} \mathbf{z}^{\mathbf{k}} -$$

$$- \sum_{k_1=j_1+M_1}^{\widetilde{k}_1+j_1+M_1} \sum_{k_2=0}^{j_2+M_2-1} \sum_{k_3=0}^{\widetilde{k}_3+j_3+M_3} s_{\mathbf{k}} \mathbf{z}^{\mathbf{k}} - \sum_{k_1=0}^{\widetilde{k}_1+j_1+M_1} \sum_{k_2=0}^{\widetilde{k}_2+j_2+M_2} \sum_{k_3=\widetilde{k}_3+j_3+M_3}^{\infty} s_{\mathbf{k}} \mathbf{z}^{\mathbf{k}} -$$

$$\left. - \sum_{k_1=\widetilde{k}_1+j_1+M_1}^{\infty} \sum_{k_2=0}^{\infty} \sum_{k_3=0}^{\infty} s_{\mathbf{k}} \mathbf{z}^{\mathbf{k}} - \sum_{k_1=0}^{\widetilde{k}_1+j_1+M_1} \sum_{k_2=\widetilde{k}_2+j_2+M_2}^{\infty} \sum_{k_3=0}^{\infty} s_{\mathbf{k}} \mathbf{z}^{\mathbf{k}} \right\}.$$

Домножимо тепер отримані рівності на коефіцієнти $c_{\mathbf{j}}^{(\mathbf{N},\mathbf{M})}$ полінома (3) і підсумуємо по j_1 від 0 до N_1, по j_2 від 0 до N_2, по j_3 від 0 до N_3. Справа отримаємо

$$\left\langle \sum_{k_1=0}^{\widetilde{k}_1} \sum_{k_2=0}^{\widetilde{k}_2} \sum_{k_3=0}^{\widetilde{k}_3} \mathbf{z}^{\mathbf{k}} x_{k_1+M_1,k_2+M_2,k_3+M_3}, Y_{\mathbf{N}}^{(\mathbf{M})} \right\rangle .$$

Враховуючи, що мають місце співвідношення біортогональності (4), розвинення отриманої справа величини в ряд за степенями z_1, z_2, z_3 матиме нульові коефіцієнти при степенях $\mathbf{k} \in \Big([M_1, M_1 + N_1] \times \times [M_2, M_2+N_2] \times [M_3, M_3+N_3] \Big) \setminus \Big\{ (M_1+N_1, M_2+N_2, M_3+N_3) \Big\}$.

Зліва отримаємо

$$\sum_{j_1=0}^{N_1} \sum_{j_2=0}^{N_2} \sum_{j_3=0}^{N_3} c_{\mathbf{j}}^{(\mathbf{N},\mathbf{M})} \frac{1}{\mathbf{z}^{\mathbf{j}+\mathbf{M}}} \left\{ f(\mathbf{z}) - \sum_{k_1=0}^{j_1+M_1-1} \sum_{k_2=0}^{j_2+M_2-1} \sum_{k_3=0}^{j_3+M_3-1} s_{\mathbf{k}} \mathbf{z}^{\mathbf{k}} - \right.$$

$$-\sum_{k_1=0}^{j_1+M_1-1}\sum_{k_2=0}^{\widetilde{k}_2+j_2+M_2}\sum_{k_3=j_3+M_3}^{\widetilde{k}_3+j_3+M_3}s_{\mathbf{k}}\mathbf{z}^{\mathbf{k}}-\sum_{k_1=0}^{\widetilde{k}_1+j_1+M_1}\sum_{k_2=j_2+M_2}^{\widetilde{k}_2+j_2+M_2}\sum_{k_3=0}^{j_3+M_3-1}s_{\mathbf{k}}\mathbf{z}^{\mathbf{k}}-$$

$$-\sum_{k_1=j_1+M_1}^{\widetilde{k}_1+j_1+M_1}\sum_{k_2=0}^{j_2+M_2-1}\sum_{k_3=0}^{\widetilde{k}_3+j_3+M_3}s_{\mathbf{k}}\mathbf{z}^{\mathbf{k}}-\sum_{k_1=0}^{\widetilde{k}_1+j_1+M_1}\sum_{k_2=0}^{\widetilde{k}_2+j_2+M_2}\sum_{k_3=\widetilde{k}_3+j_3+M_3}^{\infty}s_{\mathbf{k}}\mathbf{z}^{\mathbf{k}}-$$

$$\left.-\sum_{k_1=\widetilde{k}_1+j_1+M_1}^{\infty}\sum_{k_2=0}^{\infty}\sum_{k_3=0}^{\infty}s_{\mathbf{k}}\mathbf{z}^{\mathbf{k}}-\sum_{k_1=0}^{\widetilde{k}_1+j_1+M_1}\sum_{k_2=\widetilde{k}_2+j_2+M_2}^{\infty}\sum_{k_3=0}^{\infty}s_{\mathbf{k}}\mathbf{z}^{\mathbf{k}}\right\}=$$

$$=\frac{1}{\mathbf{z}^{\mathbf{N}+\mathbf{M}}}\times\left\{f(\mathbf{z})Q_{\mathbf{N}}^{(\mathbf{M})}(\mathbf{z})-\sum_{j_1=1}^{N_1}\sum_{j_2=1}^{N_2}\sum_{j_3=1}^{N_3}c_{\mathbf{j}}^{(\mathbf{N},\mathbf{M})}\mathbf{z}^{\mathbf{N}-\mathbf{j}}\sum_{\mathbf{k}\in D_{\mathbf{j},\mathbf{M}}}s_{\mathbf{k}}\mathbf{z}^{\mathbf{k}}\right\},$$

де $D_{\mathbf{j},\mathbf{M}}=D_{0,0,0}\cup D_{0,0,1}\cup D_{0,1,0}\cup D_{1,0,0}\cup D_{0,0,2}\cup D_{2,1,1}\cup D_{0,2,1}$, а

$$D_{0,0,0}=[0,j_1+M_1-1]\times[0,j_2+M_2-1]\times[0,j_3+M_3-1],$$

$$D_{0,0,1}=[0,j_1+M_1-1]\times[0,\widetilde{k}_2+j_2+M_2]\times[j_3+M_3,\widetilde{k}_3+j_3+M_3],$$

$$D_{0,1,0}=[0,\widetilde{k}_1+j_1+M_1]\times[j_2+M_2,\widetilde{k}_2+j_2+M_2]\times[0,j_3+M_3-1],$$

$$D_{1,0,0}=[j_1+M_1,\widetilde{k}_1+j_1+M_1]\times[0,j_2+M_2-1]\times[0,\widetilde{k}_3+j_3+M_3],$$

$$D_{0,0,2}=[0,\widetilde{k}_1+j_1+M_1]\times[0,\widetilde{k}_2+j_2+M_2]\times[\widetilde{k}_3+j_3+M_3,\infty),$$

$$D_{2,1,1}=[\widetilde{k}_1+j_1+M_1,\infty)\times[0,\infty)\times[0,\infty),$$

$$D_{0,2,1}=[0,\widetilde{k}_1+j_1+M_1]\times[\widetilde{k}_2+j_2+M_2,\infty)\times[0,\infty).$$

Будемо мати

$$f(\mathbf{z})Q_{\mathbf{N}}^{(\mathbf{M})}(\mathbf{z})-\sum_{j_1=1}^{N_1}\sum_{j_2=1}^{N_2}\sum_{j_3=1}^{N_3}c_{\mathbf{j}}^{(\mathbf{N},\mathbf{M})}\mathbf{z}^{\mathbf{N}-\mathbf{j}}\sum_{k_1=0}^{j_1+M_1-1}\sum_{k_2=0}^{j_2+M_2-1}\sum_{k_3=0}^{j_3+M_3-1}s_{\mathbf{k}}\mathbf{z}^{\mathbf{k}}-$$

$$-\sum_{j_1=1}^{N_1}\sum_{j_2=0}^{N_2}\sum_{j_3=0}^{N_3}c_{\mathbf{j}}^{(\mathbf{N},\mathbf{M})}\mathbf{z}^{\mathbf{N}-\mathbf{j}}\sum_{k_1=0}^{j_1+M_1-1}\sum_{k_2=0}^{\widetilde{k}_2+j_2+M_2}\sum_{k_3=j_3+M_3}^{\widetilde{k}_3+j_3+M_3}s_{\mathbf{k}}\mathbf{z}^{\mathbf{k}}-$$

$$-\sum_{j_1=0}^{N_1}\sum_{j_2=0}^{N_2}\sum_{j_3=1}^{N_3} c_{\mathbf{j}}^{(\mathbf{N},\mathbf{M})}\mathbf{z}^{\mathbf{N}-\mathbf{j}} \sum_{k_1=0}^{\widetilde{k}_1+j_1+M_1}\sum_{k_2=j_2+M_2}^{\widetilde{k}_2+j_2+M_2}\sum_{k_3=0}^{j_3+M_3-1} s_{\mathbf{k}}\mathbf{z}^{\mathbf{k}} -$$

$$-\sum_{j_1=0}^{N_1}\sum_{j_2=1}^{N_2}\sum_{j_3=0}^{N_3} c_{\mathbf{j}}^{(\mathbf{N},\mathbf{M})}\mathbf{z}^{\mathbf{N}-\mathbf{j}} \sum_{k_1=j_1+M_1}^{\widetilde{k}_1+j_1+M_1}\sum_{k_2=0}^{j_2+M_2-1}\sum_{k_3=0}^{\widetilde{k}_3+j_3+M_3} s_{\mathbf{k}}\mathbf{z}^{\mathbf{k}} = O\left(z_1^{\widetilde{k}_1}\right) +$$

$$+O\left(z_2^{\widetilde{k}_2}\right)+O\left(z_3^{\widetilde{k}_3}\right)+\mathbf{z}^{\mathbf{N}+\mathbf{M}}\left\langle \sum_{k_1=0}^{\widetilde{k}_1}\sum_{k_2=0}^{\widetilde{k}_2}\sum_{k_3=0}^{\widetilde{k}_3} \mathbf{z}^{\mathbf{k}} x_{k_1+M_1,k_2+M_2,k_3+M_3}, Y_{\mathbf{N}}^{(\mathbf{M})}\right\rangle.$$

Звідси за рахунок довільності вибору досить великих $\widetilde{k}_1, \widetilde{k}_2, \widetilde{k}_3$ і отримаємо твердження теореми.

Нехай тепер неперервно диференційовна функція $\Phi(x_1,x_2,x_3)$: $\mathbb{R}_+^3 \to \mathbb{R}$ має наступні властивості:

1) множина $\left\{(x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}_+^3 | \Phi(x_1,x_2,x_3) \leqslant 0\right\}$ є обмеженою в $\mathbb{R}_+^3$;

2) потужність множини $\left\{(x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{Z}_+^3 | \Phi(x_1,x_2,x_3) \leqslant 0\right\} \cap$ $\cap \left\{(x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{Z}_+^3 | x_i \geqslant N_i + M_i, i=\overline{1,3}\right\}$ дорівнює $(N_1+1)(N_2+1)(N_3+1)-1$;

3) існують однозначно визначені функції

$x_1 = \varphi_1(x_2,x_3), (x_2,x_3) \in D_{23} := \left\{(x_2,x_3) \in \mathbb{R}_+^2 | \exists x_1 \in \mathbb{R}^1 \colon \Phi(x_1,x_2,x_3) \leqslant 0\right\}$,

$x_2 = \varphi_2(x_1,x_3), (x_1,x_3) \in D_{13} := \left\{(x_1,x_3) \in \mathbb{R}_+^2 | \exists x_2 \in \mathbb{R}^1 \colon \Phi(x_1,x_2,x_3) \leqslant 0\right\}$,

$x_3 = \varphi_3(x_1,x_2), (x_1,x_2) \in D_{12} := \left\{(x_1,x_2) \in \mathbb{R}_+^2 | \exists x_3 \in \mathbb{R}^1 \colon \Phi(x_1,x_2,x_3) \leqslant 0\right\}$;

4)

$$\varphi_1(x_2,x_3) \geqslant N_1 \qquad \forall (x_2,x_3) \in D_{23},$$

$$\varphi_2(x_1,x_3) \geqslant N_2 \qquad \forall (x_1,x_3) \in D_{13},$$

$$\varphi_3(x_1,x_2) \geqslant N_3 \qquad \forall (x_1,x_2) \in D_{12}.$$

Тоді за умов теореми 1 має місце теорема $1'$.

Теорема $1'$**.** *Нехай для узагальненого полінома* (3) *виконуються умови біортогональності вигляду* (4) *при* $\mathbf{k} \in \left\{(k_1,k_2,k_3) \in \mathbb{Z}_+^3 |\right.$

$\Phi(k_1+N_1+M_1,k_2+N_2+M_2,k_3+N_3+M_3)\leqslant 0\big\}$, *і* $c_{\mathbf{N}}^{(\mathbf{N},\mathbf{M})}\neq 0$, *тоді раціональна функція*

$$\frac{P_{\mathscr{N}}(\mathbf{z})}{Q_{\mathbf{N}}^{(\mathbf{M})}(\mathbf{z})}=\frac{1}{Q_{\mathbf{N}}^{(\mathbf{M})}(\mathbf{z})}\Bigg\{\sum_{k_1=0}^{N_1-1}\sum_{k_2=0}^{N_2-1}\sum_{k_3=0}^{N_3-1}\mathbf{z}^{\mathbf{k}}\sum_{j_1=0}^{k_1}\sum_{j_2=0}^{k_2}\sum_{j_3=0}^{k_3}c_{\mathbf{N}-\mathbf{j}}^{(\mathbf{N},\mathbf{M})}s_{\mathbf{k}-\mathbf{j}}+$$

$$+z_1^{N_1}\sum_{k_2=0}^{N_2-1}\sum_{k_3=0}^{N_3-1}\sum_{k_1=0}^{M_1-N_1+\varphi_1(k_2,k_3)}\mathbf{z}^{\mathbf{k}}\sum_{j_1=0}^{N_1}\sum_{j_2=0}^{k_2}\sum_{j_3=0}^{k_3}c_{(j_1,N_2-j_2,N_3-j_3)}^{(\mathbf{N},\mathbf{M})}s_{(k_1+j_1,k_2-j_2,k_3-j_3)}+$$

$$+z_2^{N_2}\sum_{k_1=0}^{N_1-1}\sum_{k_3=0}^{N_3-1}\sum_{k_2=0}^{M_2-N_2+\varphi_2(k_1,k_3)}\mathbf{z}^{\mathbf{k}}\sum_{j_1=0}^{k_1}\sum_{j_2=0}^{N_2}\sum_{j_3=0}^{k_3}c_{(N_1-j_1,j_2,N_3-j_3)}^{(\mathbf{N},\mathbf{M})}s_{(k_1-j_1,k_2+j_2,k_3-j_3)}+$$

$$+z_3^{N_3}\sum_{k_1=0}^{N_1-1}\sum_{k_2=0}^{N_2-1}\sum_{k_3=0}^{M_3-N_3+\varphi_3(k_1,k_2)}\mathbf{z}^{\mathbf{k}}\sum_{j_1=0}^{k_1}\sum_{j_2=0}^{k_2}\sum_{j_3=0}^{N_3}c_{(N_1-j_1,N_2-j_2,j_3)}^{(\mathbf{N},\mathbf{M})}s_{(k_1-j_1,k_2-j_2,k_3+j_3)}+$$

$$+z_1^{N_1}z_2^{N_2}\sum_{k_3=0}^{N_3-1}\sum_{k_1=0}^{M_1-N_1+\varphi_1(N_2,k_3)}\sum_{k_2=0}^{M_2-N_2+\varphi_2(k_1,k_3)}\mathbf{z}^{\mathbf{k}}\times$$

$$\times\sum_{j_1=0}^{N_1}\sum_{j_2=0}^{N_2}\sum_{j_3=0}^{k_3}c_{(j_1,j_2,N_3-j_3)}^{(\mathbf{N},\mathbf{M})}s_{(k_1+j_1,k_2+j_2,k_3-j_3)}+$$

$$+z_1^{N_1}z_3^{N_3}\sum_{k_2=0}^{N_2-1}\sum_{k_1=0}^{M_1-N_1+\varphi_1(k_2,N_3)}\sum_{k_3=0}^{M_3-N_3+\varphi_3(k_1,k_2)}\mathbf{z}^{\mathbf{k}}\times$$

$$\times\sum_{j_1=0}^{N_1}\sum_{j_2=0}^{k_2}\sum_{j_3=0}^{N_3}c_{(j_1,N_2-j_2,j_3)}^{(\mathbf{N},\mathbf{M})}s_{(k_1+j_1,k_2-j_2,k_3+j_3)}+$$

$$+z_2^{N_2}z_3^{N_3}\sum_{k_1=0}^{N_1-1}\sum_{k_2=0}^{M_2-N_2+\varphi_2(k_1,N_3)}\sum_{k_3=0}^{M_3-N_3+\varphi_3(k_1,k_2)}\mathbf{z}^{\mathbf{k}}\times$$

$$\times\sum_{j_1=0}^{k_1}\sum_{j_2=0}^{N_2}\sum_{j_3=0}^{N_3}c_{(N_1-j_1,j_2,j_3)}^{(\mathbf{N},\mathbf{M})}s_{(k_1-j_1,k_2+j_2,k_3+j_3)}+$$

$$+z_1^{N_1} z_2^{N_2} z_3^{N_3} \sum_{\mathbf{k}\in\Gamma_{\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3}} \mathbf{z}^{\mathbf{k}} \sum_{j=0}^{N_1} \sum_{j_2=0}^{N_2} \sum_{j_3=0}^{N_3} c_{\mathbf{j}}^{(\mathbf{N},\mathbf{M})} s_{\mathbf{k}+\mathbf{j}} \Bigg\},$$

де

$$\Gamma_{\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3} = \big([0, M_1 - 1] \times [0, M_2 - 1] \times [0, M_3 - 1]\big) \bigcup$$

$$\bigcup \big([0, M_1 - 1] \times [0, M_2 - 1] \times [M_3, M_3 - N_3 + \varphi_3(k_1, k_2)]\big) \bigcup$$

$$\bigcup \big([0, M_1 - 1] \times [0, M_3 - 1] \times [M_2, M_2 - N_2 + \varphi_2(k_1, k_3)]\big) \bigcup$$

$$\bigcup \big([0, M_2 - 1] \times [0, M_3 - 1] \times [M_1, M_1 - N_1 + \varphi_1(k_2, k_3)]\big) \bigcup$$

$$\bigcup \big([0, M_1-1]\times[M_2, M_2-N_2+\varphi_2(k_1, N_3)]\times[M_3, M_3-N_3+\varphi_3(k_1, k_2)]\big) \bigcup$$

$$\bigcup \big([0, M_2-1]\times[M_1, M_1-N_1+\varphi_1(k_2, N_3)]\times[M_3, M_3-N_3+\varphi_3(k_1, k_2)]\big) \bigcup$$

$$\bigcup \big([0, M_3-1]\times[M_1, M_1-N_1+\varphi_1(N_2, k_3)]\times[M_2, M_2-N_2+\varphi_2(k_1, k_3)]\big),$$

а знаменник апроксиманти має вигляд

$$Q_{\mathbf{N}}^{(\mathbf{M})}(\mathbf{z}) = \sum_{j_1=0}^{N_1} \sum_{j_2=0}^{N_2} \sum_{j_3=0}^{N_3} c_{\mathbf{N}-\mathbf{j}}^{(\mathbf{N},\mathbf{M})} \mathbf{z}^{\mathbf{j}},$$

матиме розвинення у степеневий ряд, коефіцієнти якого збігатимуться з коефіцієнтами ряду (2) *для всіх* $(k_1, k_2, k_3) \in \mathscr{E} = \big\{(k_1, k_2, k_3) \in \mathbb{Z}_+^3 | \Phi(k_1, k_2, k_3) \leqslant 0\big\}$.

Доведення. У процесі доведення теореми 1 було встановлено рівність

$$\left\langle \sum_{k_1=0}^{\widetilde{k}_1} \sum_{k_2=0}^{\widetilde{k}_2} \sum_{k_3=0}^{\widetilde{k}_3} \mathbf{z}^{\mathbf{k}} x_{k_1+M_1, k_2+M_2, k_3+M_3}, Y_{\mathbf{N}}^{(\mathbf{M})} \right\rangle =$$

$$= \frac{1}{\mathbf{z}^{\mathbf{N}+\mathbf{M}}} \times \left\{ f(\mathbf{z}) Q_{\mathbf{N}}^{(\mathbf{M})}(\mathbf{z}) - \sum_{j_1=0}^{N_1} \sum_{j_2=0}^{N_2} \sum_{j_3=0}^{N_3} c_{\mathbf{j}}^{(\mathbf{N},\mathbf{M})} \mathbf{z}^{\mathbf{N}-\mathbf{j}} \sum_{\mathbf{k}\in D_{\mathbf{j},\mathbf{M}}} s_{\mathbf{k}} \mathbf{z}^{\mathbf{k}} \right\}.$$

Розглянемо

$$\sum_{j_1=1}^{N_1}\sum_{j_2=1}^{N_2}\sum_{j_3=1}^{N_3} c_{\mathbf{j}}^{(\mathbf{N},\mathbf{M})}\mathbf{z}^{\mathbf{N}-\mathbf{j}} \sum_{\mathbf{k}\in D_{0,0,0}} s_{\mathbf{k}}\mathbf{z}^{\mathbf{k}} =$$

$$= \mathbf{z}^{\mathbf{N}} \sum_{j_1=1}^{N_1}\sum_{j_2=1}^{N_2}\sum_{j_3=1}^{N_3} c_{\mathbf{j}}^{(\mathbf{N},\mathbf{M})} \sum_{k_1=0}^{j_1+M_1-1}\sum_{k_2=0}^{j_2+M_2-1}\sum_{k_3=0}^{j_3+M_3-1} s_{\mathbf{k}}\mathbf{z}^{\mathbf{k}-\mathbf{j}} =$$

$$= \sum_{k_1=0}^{N_1-1}\sum_{k_2=0}^{N_2-1}\sum_{k_3=0}^{N_3-1} \mathbf{z}^{\mathbf{k}} \sum_{j_1=0}^{k_1}\sum_{j_2=0}^{k_2}\sum_{j_3=0}^{k_3} c_{\mathbf{N}-\mathbf{j}}^{(\mathbf{N},\mathbf{M})} s_{\mathbf{k}-\mathbf{j}} +$$

$$+ z_1^{N_1} \sum_{k_1=0}^{M_1-1}\sum_{k_2=0}^{N_2-1}\sum_{k_3=0}^{N_3-1} \mathbf{z}^{\mathbf{k}} \sum_{j_1=0}^{N_1}\sum_{j_2=0}^{k_2}\sum_{j_3=0}^{k_3} c_{(j_1,N_2-j_2,N_3-j_3)}^{(\mathbf{N},\mathbf{M})} s_{(k_1+j_1,k_2-j_2,k_3-j_3)} +$$

$$+ z_2^{N_2} \sum_{k_1=0}^{N_1-1}\sum_{k_2=0}^{M_2-1}\sum_{k_3=0}^{N_3-1} \mathbf{z}^{\mathbf{k}} \sum_{j_1=0}^{k_1}\sum_{j_2=0}^{N_2}\sum_{j_3=0}^{k_3} c_{(N_1-j_1,j_2,N_3-j_3)}^{(\mathbf{N},\mathbf{M})} s_{(k_1-j_1,k_2+j_2,k_3-j_3)} +$$

$$+ z_3^{N_3} \sum_{k_1=0}^{N_1-1}\sum_{k_2=0}^{N_2-1}\sum_{k_3=0}^{M_3-1} \mathbf{z}^{\mathbf{k}} \sum_{j_1=0}^{k_1}\sum_{j_2=0}^{k_2}\sum_{j_3=0}^{N_3} c_{(N_1-j_1,N_2-j_2,j_3)}^{(\mathbf{N},\mathbf{M})} s_{(k_1-j_1,k_2-j_2,k_3+j_3)} +$$

$$+ z_1^{N_1} z_2^{N_2} \sum_{k_1=0}^{M_1-1}\sum_{k_2=0}^{M_2-1}\sum_{k_3=0}^{N_3-1} \mathbf{z}^{\mathbf{k}} \sum_{j_1=0}^{N_1}\sum_{j_2=0}^{N_2}\sum_{j_3=0}^{k_3} c_{(j_1,j_2,N_3-j_3)}^{(\mathbf{N},\mathbf{M})} s_{(k_1+j_1,k_2+j_2,k_3-j_3)} +$$

$$+ z_1^{N_1} z_3^{N_3} \sum_{k_1=0}^{M_1-1}\sum_{k_2=0}^{N_2-1}\sum_{k_3=0}^{M_3-1} \mathbf{z}^{\mathbf{k}} \sum_{j_1=0}^{N_1}\sum_{j_2=0}^{k_2}\sum_{j_3=0}^{N_3} c_{(j_1,N_2-j_2,j_3)}^{(\mathbf{N},\mathbf{M})} s_{(k_1+j_1,k_2-j_2,k_3+j_3)} +$$

$$+ z_2^{N_2} z_3^{N_3} \sum_{k_1=0}^{N_1-1}\sum_{k_2=0}^{M_2-1}\sum_{k_3=0}^{M_3-1} \mathbf{z}^{\mathbf{k}} \sum_{j_1=0}^{k_1}\sum_{j_2=0}^{N_2}\sum_{j_3=0}^{N_3} c_{(N_1-j_1,j_2,j_3)}^{(\mathbf{N},\mathbf{M})} s_{(k_1-j_1,k_2+j_2,k_3+j_3)} +$$

$$+ z_1^{N_1} z_2^{N_2} z_3^{N_3} \sum_{k_1=0}^{M_1-1}\sum_{k_2=0}^{M_2-1}\sum_{k_3=0}^{M_3-1} \mathbf{z}^{\mathbf{k}} \sum_{j=0}^{N_1}\sum_{j_2=0}^{N_2}\sum_{j_3=0}^{N_3} c_{\mathbf{j}}^{(\mathbf{N},\mathbf{M})} s_{\mathbf{k}+\mathbf{j}}.$$

Далі розглянемо

$$\sum_{j_1=1}^{N_1}\sum_{j_2=1}^{N_2}\sum_{j_3=1}^{N_3} c_{\mathbf{j}}^{(\mathbf{N},\mathbf{M})}\mathbf{z}^{\mathbf{N}-\mathbf{j}}\sum_{\mathbf{k}\in D_{0,0,1}} s_{\mathbf{k}}\mathbf{z}^{\mathbf{k}} =$$

$$= z_3^{N_3}\sum_{k_1=0}^{N_1-1}\sum_{k_2=0}^{N_2-1}\sum_{k_3=M_3}^{\widetilde{k}_3+M_3}\mathbf{z}^{\mathbf{k}}\sum_{j_1=0}^{k_1}\sum_{j_2=0}^{k_2}\sum_{j_3=0}^{N_3} c_{(N_1-j_1,N_2-j_2,j_3)}^{(\mathbf{N},\mathbf{M})} s_{(k_1-j_1,k_2-j_2,k_3+j_3)}+$$

$$+z_1^{N_1}z_3^{N_3}\sum_{k_1=0}^{M_1-1}\sum_{k_2=0}^{N_2-1}\sum_{k_3=M_3}^{\widetilde{k}_3+M_3}\mathbf{z}^{\mathbf{k}}\sum_{j_1=0}^{N_1}\sum_{j_2=0}^{k_2}\sum_{j_3=0}^{N_3} c_{(j_1,N_2-j_2,j_3)}^{(\mathbf{N},\mathbf{M})} s_{(k_1+j_1,k_2-j_2,k_3+j_3)}+$$

$$+z_2^{N_2}z_3^{N_3}\sum_{k_1=0}^{N_1-1}\sum_{k_2=0}^{\widetilde{k}_2+M_2}\sum_{k_3=M_3}^{\widetilde{k}_3+M_3}\mathbf{z}^{\mathbf{k}}\sum_{j_1=0}^{k_1}\sum_{j_2=0}^{N_2}\sum_{j_3=0}^{N_3} c_{(N_1-j_1,j_2,j_3)}^{(\mathbf{N},\mathbf{M})} s_{(k_1-j_1,k_2+j_2,k_3+j_3)}+$$

$$+z_1^{N_1}z_2^{N_2}z_3^{N_3}\sum_{k_1=0}^{M_1-1}\sum_{k_2=0}^{\widetilde{k}_2+M_2}\sum_{k_3=M_3}^{\widetilde{k}_3+M_3}\mathbf{z}^{\mathbf{k}}\sum_{j=0}^{N_1}\sum_{j_2=0}^{N_2}\sum_{j_3=0}^{N_3} c_{\mathbf{j}}^{(\mathbf{N},\mathbf{M})} s_{\mathbf{k}+\mathbf{j}}.$$

Аналогічно запишуться суми по областях $D_{0,1,0}$ та $D_{1,0,0}$.

Формуючи чисельник тривимірної апроксиманти Паде, ми включаємо до нього першу суму повністю. З другої суми візьмемо

$$z_3^{N_3}\sum_{k_1=0}^{N_1-1}\sum_{k_2=0}^{N_2-1}\sum_{k_3=M_3}^{M_3-N_3+\varphi_3(k_1,k_2)}\mathbf{z}^{\mathbf{k}}\sum_{j_1=0}^{k_1}\sum_{j_2=0}^{k_2}\sum_{j_3=0}^{N_3} c_{(N_1-j_1,N_2-j_2,j_3)}^{(\mathbf{N},\mathbf{M})} s_{(k_1-j_1,k_2-j_2,k_3+j_3)}+$$

$$+z_1^{N_1}z_3^{N_3}\sum_{k_1=0}^{M_1-1}\sum_{k_2=0}^{N_2-1}\sum_{k_3=M_3}^{M_3-N_3+\varphi_3(k_1,k_2)}\mathbf{z}^{\mathbf{k}}\sum_{j_1=0}^{N_1}\sum_{j_2=0}^{k_2}\sum_{j_3=0}^{N_3} c_{(j_1,N_2-j_2,j_3)}^{(\mathbf{N},\mathbf{M})} s_{(k_1+j_1,k_2-j_2,k_3+j_3)}+$$

$$+z_2^{N_2}z_3^{N_3}\sum_{k_1=0}^{N_1-1}\sum_{k_2=0}^{M_2-N_2+\varphi_2(k_1,N_3)}\sum_{k_3=M_3}^{M_3-N_3+\varphi_3(k_1,k_2)}\mathbf{z}^{\mathbf{k}}\times$$

$$\times\sum_{j_1=0}^{k_1}\sum_{j_2=0}^{N_2}\sum_{j_3=0}^{N_3} c_{(N_1-j_1,j_2,j_3)}^{(\mathbf{N},\mathbf{M})} s_{(k_1-j_1,k_2+j_2,k_3+j_3)}+$$

$$+z_1^{N_1}z_2^{N_2}z_3^{N_3}\sum_{k_1=0}^{M_1-1}\sum_{k_2=0}^{M_2-N_2+\varphi_2(k_1,N_3)}\sum_{k_3=M_3}^{M_3-N_3+\varphi_3(k_1,k_2)}\mathbf{z}^{\mathbf{k}}\sum_{j=0}^{N_1}\sum_{j_2=0}^{N_2}\sum_{j_3=0}^{N_3}c_{\mathbf{j}}^{(\mathbf{N},\mathbf{M})}s_{\mathbf{k}+\mathbf{j}},$$

а решта

$$z_3^{N_3}\sum_{k_1=0}^{N_1-1}\sum_{k_2=0}^{N_2-1}\sum_{k_3=M_3-N_3+\varphi_3(k_1,k_2)+1}^{\widetilde{k}_3+M_3}\mathbf{z}^{\mathbf{k}}\times$$

$$\times\sum_{j_1=0}^{k_1}\sum_{j_2=0}^{k_2}\sum_{j_3=0}^{N_3}c_{(N_1-j_1,N_2-j_2,j_3)}^{(\mathbf{N},\mathbf{M})}s_{(k_1-j_1,k_2-j_2,k_3+j_3)}+$$

$$+z_1^{N_1}z_3^{N_3}\sum_{k_1=0}^{M_1-1}\sum_{k_2=0}^{N_2-1}\sum_{k_3=M_3-N_3+\varphi_3(k_1,k_2)+1}^{\widetilde{k}_3+M_3}\mathbf{z}^{\mathbf{k}}\times$$

$$\times\sum_{j_1=0}^{N_1}\sum_{j_2=0}^{k_2}\sum_{j_3=0}^{N_3}c_{(j_1,N_2-j_2,j_3)}^{(\mathbf{N},\mathbf{M})}s_{(k_1+j_1,k_2-j_2,k_3+j_3)}+$$

$$+z_2^{N_2}z_3^{N_3}\sum_{k_1=0}^{N_1-1}\sum_{k_2=M_2-N_2+\varphi_2(k_1,N_3)+1}^{\widetilde{k}_2+M_2}\sum_{k_3=M_3-N_3+\varphi_3(k_1,k_2)+1}^{\widetilde{k}_3+M_3}\mathbf{z}^{\mathbf{k}}\times$$

$$\times\sum_{j_1=0}^{k_1}\sum_{j_2=0}^{N_2}\sum_{j_3=0}^{N_3}c_{(N_1-j_1,j_2,j_3)}^{(\mathbf{N},\mathbf{M})}s_{(k_1-j_1,k_2+j_2,k_3+j_3)}+z_1^{N_1}z_2^{N_2}z_3^{N_3}\times$$

$$\times\sum_{k_1=0}^{M_1-1}\sum_{k_2=M_2-N_2+\varphi_2(k_1,N_3)+1}^{\widetilde{k}_2+M_2}\sum_{k_3=M_3-N_3+\varphi_3(k_1,k_2)+1}^{\widetilde{k}_3+M_3}\mathbf{z}^{\mathbf{k}}\sum_{j=0}^{N_1}\sum_{j_2=0}^{N_2}\sum_{j_3=0}^{N_3}c_{\mathbf{j}}^{(\mathbf{N},\mathbf{M})}s_{\mathbf{k}+\mathbf{j}}$$

потрапляє до залишку.

Аналогічні дії зробимо з третьою і четвертою сумами (сумами по областях $D_{0,1,0}$ та $D_{1,0,0}$) і отримаємо твердження теореми.

У випадку, якщо простори $\mathscr{X}$ та $\mathscr{Y}$ є нормованими, білінійна форма $\langle.,.\rangle$ є роздільно неперервною [13, с. 63] і в просторі $\mathscr{X}$ задано комутуючі між собою обмежені лінійні оператори $A_1, A_2, A_3 : \mathscr{X}\to\mathscr{X}$ такі, що

$$A_1x_{k_1,k_2,k_3}=x_{k_1+1,k_2,k_3},$$

$$A_2 x_{k_1,k_2,k_3} = x_{k_1,k_2+1,k_3},$$

$$A_3 x_{k_1,k_2,k_3} = x_{k_1,k_2,k_3+1},$$

для $\forall\ \mathbf{k} = (k_1, k_2, k_3) \in \mathbb{Z}_+^3$, а в просторі $\mathscr{Y}$ існують обмежені лінійні оператори $A_1^\star, A_2^\star, A_3^\star : \mathscr{Y} \to \mathscr{Y}$, спряжені відповідно до операторів A_1, A_2 та A_3 відносно білінійної форми $\langle .,. \rangle$ (див., наприклад, [10, с. 18]), за умов теореми 1 матиме місце така формула для похибки апроксимації

$$f(\mathbf{z}) - \frac{P_{\mathscr{N}}(\mathbf{z})}{Q_{\mathbf{N}}^{(\mathbf{M})}(\mathbf{z})} = \frac{1}{Q_{\mathbf{N}}^{(\mathbf{M})}(\mathbf{z})} \times$$

$$\times \Bigg\{ z_1^{N_1+M_1} z_2^{N_2+M_2} z_3^{N_3+M_3} \left\langle \widehat{R_{z_1}}(A_1) \widehat{R_{z_2}}(A_2) \widehat{R_{z_3}}(A_3) x_{M_1,M_2,M_3}, Y_{\mathbf{N}}^{(\mathbf{M})} \right\rangle +$$

$$+ z_1^{N_1} \sum_{k_1=N_1+M_1+1}^{\infty} \sum_{k_2=0}^{N_2-1} \sum_{k_3=0}^{N_3-1} \mathbf{z}^{\mathbf{k}} \sum_{j_1=0}^{N_1} \sum_{j_2=0}^{k_2} \sum_{j_3=0}^{k_3} c_{(j_1,N_2-j_2,N_3-j_3)}^{(\mathbf{N},\mathbf{M})} s_{(k_1+j_1,k_2-j_2,k_3-j_3)} +$$

$$+ z_2^{N_2} \sum_{k_1=0}^{N_1-1} \sum_{k_2=N_2+M_2+1}^{\infty} \sum_{k_3=0}^{N_3-1} \mathbf{z}^{\mathbf{k}} \sum_{j_1=0}^{k_1} \sum_{j_2=0}^{N_2} \sum_{j_3=0}^{k_3} c_{(N_1-j_1,j_2,N_3-j_3)}^{(\mathbf{N},\mathbf{M})} s_{(k_1-j_1,k_2+j_2,k_3-j_3)} +$$

$$+ z_3^{N_3} \sum_{k_1=0}^{N_1-1} \sum_{k_2=0}^{N_2-1} \sum_{k_3=N_3+M_3+1}^{\infty} \mathbf{z}^{\mathbf{k}} \sum_{j_1=0}^{k_1} \sum_{j_2=0}^{k_2} \sum_{j_3=0}^{N_3} c_{(N_1-j_1,N_2-j_2,j_3)}^{(\mathbf{N},\mathbf{M})} s_{(k_1-j_1,k_2-j_2,k_3+j_3)} +$$

$$+ z_1^{N_1} z_2^{N_2} \sum_{k_1=N_1+M_1+1}^{\infty} \sum_{k_2=0}^{\infty} \sum_{k_3=0}^{N_3-1} \mathbf{z}^{\mathbf{k}} \sum_{j_1=0}^{N_1} \sum_{j_2=0}^{N_2} \sum_{j_3=0}^{k_3} c_{(j_1,j_2,N_3-j_3)}^{(\mathbf{N},\mathbf{M})} s_{(k_1+j_1,k_2+j_2,k_3-j_3)} +$$

$$+ z_1^{N_1} z_2^{N_2} \sum_{k_1=0}^{N_1+M_1} \sum_{k_2=N_2+M_2+1}^{\infty} \sum_{k_3=0}^{N_3-1} \mathbf{z}^{\mathbf{k}} \sum_{j_1=0}^{N_1} \sum_{j_2=0}^{N_2} \sum_{j_3=0}^{k_3} c_{(j_1,j_2,N_3-j_3)}^{(\mathbf{N},\mathbf{M})} s_{(k_1+j_1,k_2+j_2,k_3-j_3)} +$$

$$+ z_1^{N_1} z_3^{N_3} \sum_{k_1=0}^{\infty} \sum_{k_2=0}^{N_2-1} \sum_{k_3=N_3+M_3+1}^{\infty} \mathbf{z}^{\mathbf{k}} \sum_{j_1=0}^{N_1} \sum_{j_2=0}^{k_2} \sum_{j_3=0}^{N_3} c_{(j_1,N_2-j_2,j_3)}^{(\mathbf{N},\mathbf{M})} s_{(k_1+j_1,k_2-j_2,k_3+j_3)} +$$

$$+ z_1^{N_1} z_3^{N_3} \sum_{k_1=N_1+M_1+1}^{\infty} \sum_{k_2=0}^{N_2-1} \sum_{k_3=0}^{N_3+M_3} \mathbf{z}^{\mathbf{k}} \sum_{j_1=0}^{N_1} \sum_{j_2=0}^{k_2} \sum_{j_3=0}^{N_3} c_{(j_1,N_2-j_2,j_3)}^{(\mathbf{N},\mathbf{M})} s_{(k_1+j_1,k_2-j_2,k_3+j_3)} +$$

$$+z_2^{N_2}z_3^{N_3}\sum_{k_1=0}^{N_1-1}\sum_{k_2=N_2+M_2+1}^{\infty}\sum_{k_3=0}^{\infty}\mathbf{z}^{\mathbf{k}}\sum_{j_1=0}^{k_1}\sum_{j_2=0}^{N_2}\sum_{j_3=0}^{N_3}c^{(\mathbf{N},\mathbf{M})}_{(N_1-j_1,j_2,j_3)}s_{(k_1-j_1,k_2+j_2,k_3+j_3)}+$$

$$+z_2^{N_2}z_3^{N_3}\sum_{k_1=0}^{N_1-1}\sum_{k_2=0}^{N_2+M_2}\sum_{k_3=N_3+M_3+1}^{\infty}\mathbf{z}^{\mathbf{k}}\sum_{j_1=0}^{k_1}\sum_{j_2=0}^{N_2}\sum_{j_3=0}^{N_3}c^{(\mathbf{N},\mathbf{M})}_{(N_1-j_1,j_2,j_3)}s_{(k_1-j_1,k_2+j_2,k_3+j_3)}+$$

$$+z_1^{N_1}z_2^{N_2}z_3^{N_3}\sum_{\mathbf{k}\in\Gamma^*_{\mathbf{M}}}\mathbf{z}^{\mathbf{k}}\sum_{j=0}^{N_1}\sum_{j_2=0}^{N_2}\sum_{j_3=0}^{N_3}c^{(\mathbf{N},\mathbf{M})}_{\mathbf{j}}s_{\mathbf{k}+\mathbf{j}}\Bigg\},$$

де

$$\Gamma^*_{\mathbf{M}}=\Big([0,M_1-1]\times[N_2+M_2+1,\infty)\times[M_3,N_3+M_3]\Big)\bigcup$$

$$\bigcup\Big([N_1+M_1+1,\infty)\times[M_2,N_2+M_2]\times[0,M_3-1]\Big)\bigcup$$

$$\bigcup\Big([M_1,N_1+M_1]\times[0,M_2-1]\times[N_3+M_3+1,\infty)\Big)\bigcup$$

$$\bigcup\Big([0,M_1-1]\times[0,\infty)\times[N_3+M_3+1,\infty)\Big)\bigcup$$

$$\bigcup\Big([N_1+M_1+1,\infty)\times[0,M_2-1]\times[0,\infty)\Big)\bigcup$$

$$\bigcup\Big([0,\infty)\times[N_2+M_2+1,\infty)\times[0,M_3-1]\Big),$$

а резольвентна функція визначається рівністю $\widehat{R_z}(A)=(I-zA)^{-1}$.

За умов теореми $1'$ ця формула набуває вигляду

$$f(\mathbf{z})-\frac{P_{\mathscr{N}}(\mathbf{z})}{Q^{(\mathbf{M})}_{\mathbf{N}}(\mathbf{z})}=\frac{1}{Q^{(\mathbf{M})}_{\mathbf{N}}(\mathbf{z})}\times$$

$$\times\Bigg\{z_1^{N_1+M_1}z_2^{N_2+M_2}z_3^{N_3+M_3}\Big\langle\widehat{R_{z_1}}(A_1)\widehat{R_{z_2}}(A_2)\widehat{R_{z_3}}(A_3)x_{M_1,M_2,M_3},Y^{(\mathbf{M})}_{\mathbf{N}}\Big\rangle+$$

$$+z_1^{N_1}\sum_{k_2=0}^{N_2-1}\sum_{k_3=0}^{N_3-1}\sum_{k_1=M_1-N_1+1+\varphi_1(k_2,k_3)}^{\infty}\mathbf{z}^{\mathbf{k}}\times$$

$$\times\sum_{j_1=0}^{N_1}\sum_{j_2=0}^{k_2}\sum_{j_3=0}^{k_3}c^{(\mathbf{N},\mathbf{M})}_{(j_1,N_2-j_2,N_3-j_3)}s_{(k_1+j_1,k_2-j_2,k_3-j_3)}+$$

$$+z_2^{N_2}\sum_{k_1=0}^{N_1-1}\sum_{k_3=0}^{N_3-1}\sum_{k_2=M_2-N_2+1+\varphi_2(k_1,k_3)}^{\infty}\mathbf{z}^{\mathbf{k}}\times$$

$$\times\sum_{j_1=0}^{k_1}\sum_{j_2=0}^{N_2}\sum_{j_3=0}^{k_3}c^{(\mathbf{N},\mathbf{M})}_{(N_1-j_1,j_2,N_3-j_3)}s_{(k_1-j_1,k_2+j_2,k_3-j_3)}+$$

$$+z_3^{N_3}\sum_{k_1=0}^{N_1-1}\sum_{k_2=0}^{N_2-1}\sum_{k_3=M_3-N_3+1+\varphi_3(k_1,k_2)}^{\infty}\mathbf{z}^{\mathbf{k}}\times$$

$$\times\sum_{j_1=0}^{k_1}\sum_{j_2=0}^{k_2}\sum_{j_3=0}^{N_3}c^{(\mathbf{N},\mathbf{M})}_{(N_1-j_1,N_2-j_2,j_3)}s_{(k_1-j_1,k_2-j_2,k_3+j_3)}+$$

$$+z_1^{N_1}z_2^{N_2}\sum_{k_3=0}^{N_3-1}\left(\sum_{k_1=M_1-N_1+1+\varphi_1(N_2,k_3)}^{\infty}\sum_{k_2=0}^{\infty}+\sum_{k_1=0}^{M_1-N_1+\varphi_1(N_2,k_3)}\sum_{k_2=M_2-N_2+1+\varphi_2(k_1,k_3)}^{\infty}\right)\times$$

$$\times\mathbf{z}^{\mathbf{k}}\sum_{j_1=0}^{N_1}\sum_{j_2=0}^{N_2}\sum_{j_3=0}^{k_3}c^{(\mathbf{N},\mathbf{M})}_{(j_1,j_2,N_3-j_3)}s_{(k_1+j_1,k_2+j_2,k_3-j_3)}+$$

$$+z_1^{N_1}z_3^{N_3}\sum_{k_2=0}^{N_2-1}\left(\sum_{k_1=0}^{\infty}\sum_{k_3=M_3-N_3+1+\varphi_3(k_1,k_2)}^{\infty}+\sum_{k_1=M_1-N_1+1+\varphi_1(k_2,N_3)}^{\infty}\sum_{k_3=0}^{M_3-N_3+\varphi_3(k_1,k_2)}\right)\times$$

$$\times\mathbf{z}^{\mathbf{k}}\sum_{j_1=0}^{N_1}\sum_{j_2=0}^{k_2}\sum_{j_3=0}^{N_3}c^{(\mathbf{N},\mathbf{M})}_{(j_1,N_2-j_2,j_3)}s_{(k_1+j_1,k_2-j_2,k_3+j_3)}+$$

$$+z_2^{N_2}z_3^{N_3}\sum_{k_1=0}^{N_1-1}\left(\sum_{k_2=M_2-N_2+1+\varphi_2(k_1,N_3)}^{\infty}\sum_{k_3=0}^{\infty}+\sum_{k_2=0}^{M_2-N_2+\varphi_2(k_1,N_3)}\sum_{k_3=M_3-N_3+1+\varphi_3(k_1,k_2)}^{\infty}\right)\times$$

$$\times \mathbf{z}^{\mathbf{k}} \sum_{j_1=0}^{k_1} \sum_{j_2=0}^{N_2} \sum_{j_3=0}^{N_3} c^{(\mathbf{N},\mathbf{M})}_{(N_1-j_1,j_2,j_3)} s_{(k_1-j_1,k_2+j_2,k_3+j_3)} +$$

$$+ z_1^{N_1} z_2^{N_2} z_3^{N_3} \sum_{\mathbf{k}\in\Gamma^*_{\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3}} \mathbf{z}^{\mathbf{k}} \sum_{j=0}^{N_1} \sum_{j_2=0}^{N_2} \sum_{j_3=0}^{N_3} c^{(\mathbf{N},\mathbf{M})}_{\mathbf{j}} s_{\mathbf{k}+\mathbf{j}} \Bigg\},$$

де

$$\Gamma^*_{\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3} = \Big([0, M_1-1]\times[0, M_2-1]\times[M_3-N_3+1+\varphi_3(k_1,k_2),\infty)\Big) \bigcup$$

$$\bigcup \Big([0, M_1-1]\times[M_2-N_2+1+\varphi_2(k_1,k_3),\infty)\times[0, M_3-1]\Big) \bigcup$$

$$\bigcup \Big([M_1-N_1+1+\varphi_1(k_2,k_3),\infty)\times[0, M_2-1]\times[0, M_3-1]\Big) \bigcup$$

$$\bigcup \Big([0, M_1-1]\times[M_2,\infty)\times[M_3-N_3+1+\varphi_3(k_1,k_2),\infty)\Big) \bigcup$$

$$\bigcup \Big([0, M_1-1]\times[M_2-N_2+1+\varphi_2(k_1,N_3),\infty)\times[M_3, M_3-N_3+\varphi_3(k_1,k_2)]\Big) \bigcup$$

$$\bigcup \Big([M_1-N_1+1+\varphi_1(k_2,N_3),\infty)\times[0, M_2-1]\times[M_3,\infty]\Big) \bigcup$$

$$\bigcup \Big([M_1, M_1-N_1+\varphi_1(k_2,N_3)]\times[0, M_2-1]\times[M_3-N_3+1+\varphi_3(k_1,k_2),\infty)\Big) \bigcup$$

$$\bigcup \Big([M_1,\infty]\times[M_2-N_2+1+\varphi_2(k_1,k_3),\infty)\times[0, M_3-1]\Big) \bigcup$$

$$\bigcup \Big([M_1-N_1+1+\varphi_1(N_2,k_3),\infty)\times[M_2, M_2-N_2+\varphi_2(k_1,k_3)]\times[0, M_3-1]\Big).$$

Розглянемо окремі приклади зображень вигляду (1) та застосуємо їх до побудови раціональних апроксимацій.

Нехай $\mathscr{X} = \mathscr{Y} = L_2([0,1], d\mu)$ для деякої міри, що визначається неспадною функцією $\mu(t)$, яка має нескінченну кількість точок зростання на $[0,1]$.

Введемо на декартовому добутку $\mathscr{X} \times \mathscr{Y}$ білінійну форму

$$\langle x, y \rangle = \int_0^1 x(t)y(t)d\mu(t).$$

Визначимо в просторі $\mathscr{X}$ оператори множення на незалежну змінну

$$(A_1\varphi)(t) = (A_2\varphi)(t) = (A_3\varphi)(t) = t\varphi(t).$$

Їх резольвентні функції мають вигляд

$$\left(\widehat{R_{z_1}}(A_1)\varphi\right)(t) = \frac{\varphi(t)}{1 - z_1 t},$$

$$\left(\widehat{R_{z_2}}(A_2)\varphi\right)(t) = \frac{\varphi(t)}{1 - z_2 t},$$

$$\left(\widehat{R_{z_3}}(A_3)\varphi\right)(t) = \frac{\varphi(t)}{1 - z_3 t}.$$

Таким чином, при $x_{0,0,0}(t) = y_{0,0,0}(t) \equiv 1$ функцію $f(z_1, z_2, z_3) = f(\mathbf{z})$ можна записати у вигляді

$$f(\mathbf{z}) = \left\langle \widehat{R_{z_1}}(A_1)\widehat{R_{z_2}}(A_2)\widehat{R_{z_3}}(A_3)x_{0,0,0}, y_{0,0,0} \right\rangle = \int_0^1 \frac{d\mu(t)}{(1-z_1t)(1-z_2t)(1-z_3t)} =$$

$$= \frac{{z_1}^2(z_3 - z_2)g(z_1) + {z_2}^2(z_1 - z_3)g(z_2) + {z_3}^2(z_2 - z_1)g(z_3)}{(z_3 - z_2)(z_3 - z_1)(z_2 - z_1)}, \qquad (5)$$

де $g(z_i) = \int\limits_0^1 \dfrac{d\mu(t)}{1 - z_i t}$.

Наприклад, для $\mu(t) = t$ будемо мати $g(z_i) = -\dfrac{\ln(1 - z_i)}{z_i}$. Отже, функція (5) набуде вигляду

$$f(\mathbf{z}) = \frac{z_1(z_2 - z_3)\ln(1 - z_1) + z_2(z_3 - z_1)\ln(1 - z_2) + z_3(z_1 - z_2)\ln(1 - z_3)}{(z_3 - z_2)(z_3 - z_1)(z_2 - z_1)}.$$

Неважко встановити, що взагалі кожного разу, коли оператори A_1, A_2, A_3 будуть однаковими, тобто $A_1 = A_2 = A_3 = A$, будемо мати функцію трьох змінних, що є лінійною комбінацією функцій однієї змінної:

$$f(z_1,z_2,z_3)=\frac{{z_1}^2(z_3-z_2)g(z_1)+{z_2}^2(z_1-z_3)g(z_2)+{z_3}^2(z_2-z_1)g(z_3)}{(z_3-z_2)(z_3-z_1)(z_2-z_1)},$$

де функція $g(z)$ визначається рядом $g(z)=\sum\limits_{k=0}^{\infty} s_k z^k = \left\langle \widehat{R_z}(A)x_{\mathbf{0}}, y_{\mathbf{0}} \right\rangle$.

Коефіцієнти s_{k_1,k_2,k_3} в розвиненні функції $f(z_1,z_2,z_3)$ вигляду (5) в ряд (2) при

$$d\mu(t) = t^{\nu}(1-t)^{\rho}dt, \nu, \rho > -1 \tag{6}$$

будуть мати вигляд

$$s_{k_1,k_2,k_3} = \langle x_{k_1,k_2,k_3}, y_{\mathbf{0}}\rangle = \int\limits_0^1 \left(A_1^{k_1}A_2^{k_2}A_3^{k_3}x_{\mathbf{0}}\right)(t)y_{\mathbf{0}}(t)d\mu(t) =$$

$$= \int\limits_0^1 t^{k_1+k_2+k_3}t^{\nu}(1-t)^{\rho}dt = \frac{\Gamma(k_1+k_2+k_3+\nu+1)\Gamma(\rho+1)}{\Gamma(k_1+k_2+k_3+\nu+\rho+2)},$$

а отже, побудована функція

$$f(z_1,z_2,z_3) = \sum_{k_1,k_2,k_3=0}^{\infty} \frac{\Gamma(k_1+k_2+k_3+\nu+1)\Gamma(\rho+1)}{\Gamma(k_1+k_2+k_3+\nu+\rho+2)} z_1^{k_1}z_2^{k_2}z_3^{k_3} \tag{7}$$

буде частинним випадком гіпергеометричного ряду Лаурічелли

$$F_D^{(3)}(a,b_1,b_2,b_3,c;z_1,z_2,z_3) = \sum_{k_1,k_2,k_3=0}^{\infty} \frac{(a)_{k_1+k_2+k_3}(b_1)_{k_1}(b_2)_{k_2}(b_3)_{k_3}}{c_{k_1+k_2+k_3}k_1!k_2!k_3!}\mathbf{z}^{\mathbf{k}}$$

(див. [14, с. 114]) при $a=\nu+1$, $b_1=b_2=b_3=1$, $c=\rho+\nu+2$.

Оскільки функція $f(\mathbf{z})$ вигляду (5) є симетричною відносно своїх змінних, то має сенс наближати її симетричними агрегатами. Отже, обмежимось випадком $N_1=N_2=N_3=N$, $M_1=M_2=M_3=0$. Для знаходження апроксиманти Паде для $f(\mathbf{z})$ вигляду (5) за теоремами $1 - 1'$ нам потрібно побудувати узагальнений поліном вигляду (3), для якого виконуються умови біортогональності (4). Оскільки $Y_{\mathbf{N}}(t)$ в даному випадку буде алгебраїчним многочленом степеня $3N$, який ортогональний до многочленів степеня $\leqslant 3N-1$, то він співпадатиме з точністю до сталого множника з многочленом степеня $3N$, ортонормованим на $[0,1]$ за мірою $d\mu(t)$ (див. [15, с. 268]):

$$Y_{\mathbf{N}}(t) = P_{3N}(t). \tag{8}$$

Зауважимо, що поліном (8) при цьому буде ортогональним не лише до $x_{\mathbf{k}}(t)$ при $\mathbf{k} \in \big\{(k_1,k_2,k_3) \in \big([0,N]^3\big) \setminus (N,N,N)\big\}$, але і до $x_{\mathbf{k}}(t)$ при $\mathbf{k} \in \{(k_1,k_2,k_3) \in \mathbb{Z}_+, k_1+k_2+k_3 \leqslant 3N-1\}$. Тому при побудові апроксиманти Паде функцій вигляду (5) має сенс брати коефіцієнти чисельника з множини

$$\mathscr{N} = \{(k_1,k_2,k_3) : k_1+k_2+k_3 \leqslant 6N-1\} \setminus \{(k_1,k_2,k_3) : k_1,k_2,k_3 \geqslant N\},$$

а індекси коефіцієнтів знаменника — з області $\mathscr{D} = [0,N]^3$.

Для обраної нами області $\mathscr{N}$ в теоремі $1'$ ми повинні покласти $\varphi(k_1,k_2) = 6N-1-k_1-k_2$, $\varphi(k_1,k_3) = 6N-1-k_1-k_3$, $\varphi(k_2,k_3) = 6N-1-k_2-k_3$.

Запишемо многочлен $P_{3N}(t)$ у вигляді:

$$P_{3N}(t) = \sum_{j=0}^{3N} p_j^{(3N)} t^j.$$

Отже, маємо

$$\sum_{k_1=0}^{N}\sum_{k_2=0}^{N}\sum_{k_3=0}^{N} c_{\mathbf{k}}^{(\mathbf{N})} t^{k_1+k_2+k_3} = \sum_{j=0}^{3N} p_j^{(3N)} t^j.$$

З цієї рівності коефіцієнти $c_{\mathbf{k}}^{(\mathbf{N})} : \mathbf{k} = (k_1,k_2,k_3) \in [0,N]^3$ можна визначити безліччю способами. Оскільки функція $f(\mathbf{z})$ симетрична за своїми змінними z_1, z_2, z_3, нас будуть цікавити тільки симетричні розв'язки. Виокремимо з них наступний: будемо вибирати коефіцієнти $c_{\mathbf{k}}^{(\mathbf{N})}$ таким чином, щоб при $k_1+k_2+k_3 = {k_1}^\star + {k_2}^\star + {k_3}^\star$ виконувались рівності

$$c_{k_1,k_2,k_3}^{(\mathbf{N})} = c_{{k_1}^\star,{k_2}^\star,{k_3}^\star}^{(\mathbf{N})}.$$

Для визначення коефіцієнтів $c_{\mathbf{k}}^{(\mathbf{N})}$ встановимо наступний допоміжний результат.

Лема. *Нехай $N \in \mathbb{N}, 0 \leqslant j \leqslant 3N$. Тоді кількість впорядкованих трійок $(k_1, k_2, k_3) \in \mathbb{Z}_+^3$, таких що $k_i \leqslant N, i = \overline{1,3}$, і $k_1 + k_2 + k_3 = j$ дорівнює*

$$\gamma_j^{(\mathbf{N})} = \begin{cases} \dfrac{(j+1)(j+2)}{2} & \text{при } 0 \leqslant j \leqslant N, \\ \dfrac{-3N^2 + (6j+3)N - 2j^2 + 2}{2} & \text{при } N+1 \leqslant j \leqslant 2N-1, \\ \dfrac{(3N-j+1)(3N-j+2)}{2} & \text{при } 2N \leqslant j \leqslant 3N. \end{cases} \quad (9)$$

Доведення. Побудуємо алгебраїчний многочлен від трьох змінних

$$Y_N(z_1, z_2, z_3) = \sum_{k_1=0}^{N} \sum_{k_2=0}^{N} \sum_{k_3=0}^{N} z_1^{k_1} z_2^{k_2} z_3^{k_3}.$$

Очевидно, його можна зобразити у вигляді

$$Y_N(z_1, z_2, z_3) = \left(\sum_{k_1=0}^{N} z_1^{k_1} \right) \left(\sum_{k_2=0}^{N} z_2^{k_2} \right) \left(\sum_{k_3=0}^{N} z_3^{k_3} \right) =$$

$$= \frac{1 - z_1^{N+1}}{1 - z_1} \cdot \frac{1 - z_2^{N+1}}{1 - z_2} \cdot \frac{1 - z_3^{N+1}}{1 - z_3}.$$

Якщо покласти $z_1 = z_2 = z_3 = z$, то

$$Y_N(z, z, z) = \frac{\left(1 - z^{N+1}\right)^3}{(1 - z)^3}. \quad (10)$$

З іншого боку, очевидно,

$$Y_N(z, z, z) = \sum_{j=0}^{3N} \gamma_j^{(N)} z^j.$$

Тому потрібно порахувати коефіцієнти розкладу многочлена (10) за степенями z. Маємо

$$\left(1 - z^{N+1}\right)^3 = 1 - 3z^{N+1} + 3z^{2N+2} - z^{3N+3}, \quad (11)$$

$$\frac{1}{(1-z)^3} = 1 + 3z + 6z^2 + \dots + \frac{(j+1)(j+2)}{2} z^j + \dots \,. \tag{12}$$

Перемножаючи (11) та (12), отримаємо:

$$Y_N(z,z,z) = 1 + 3z + 6z^2 + \dots + \frac{(j+1)(j+2)}{2} z^j + \dots -$$

$$-3z^{N+1} - 9z^{N+2} - 18z^{N+3} - \dots - 3\frac{(j+1)(j+2)}{2} z^{N+1+j} - \dots +$$

$$+3z^{2N+2} + 9z^{2N+3} + 18z^{2N+4} + \dots + 3\frac{(j+1)(j+2)}{2} z^{2N+2+j} + \dots -$$

$$-z^{3N+3} - 3z^{3N+4} - 6z^{3N+5} - \dots - \frac{(j+1)(j+2)}{2} z^{3N+3+j} - \dots$$

Звідси і випливає рівність (9).

Таким чином, на основі леми для коефіцієнтів $c_{\mathbf{k}}^{(\mathbf{N})}$ отримаємо наступні співвідношення:

$$c_{k_1,k_2,k_3}^{(\mathbf{N})} = \begin{cases} \dfrac{2}{(j+1)(j+2)}\, p_j^{(3N)} & \text{при } k_1+k_2+k_3=j\leqslant N, \\ \dfrac{2}{-3N^2+(6j+3)N-2j^2+2}\, p_j^{(3N)} & \text{при } N+1\leqslant j\leqslant 2N-1, \\ \dfrac{2}{(3N-j+1)(3N-j+2)}\, p_j^{(3N)} & \text{при } 2N\leqslant j\leqslant 3N. \end{cases} \tag{13}$$

Зупинимось на наближенні функції $f(\mathbf{z})$ вигляду (5) для ваги (6). У цьому випадку многочлен $Y_{\mathbf{N}}(t)$ буде співпадати з точністю до сталого множника з ортонормованим зсунутим на $[0,1]$ многочленом Якобі $P_{3N}^{(\nu,\rho)}(t)$ степеня $3N$.

Враховуючи явний вираз для коефіцієнтів ортогональних многочленів Якобі (див. [16, с. 581], (п. (22.3.3))) (константу для зручності покладемо рівною 1)

$$P_{3N}^{(\nu,\rho)}(t) = \sum_{m=0}^{3N} (-1)^m \binom{3N}{m} \frac{\Gamma(3N+\nu+\rho+1+m)}{\Gamma(\nu+1+m)} t^m,$$

$$p_j^{3N} = (-1)^j \binom{3N}{j} \frac{\Gamma(3N+\nu+\sigma+1+j)}{\Gamma(\nu+1+j)},$$

коефіцієнти вигляду (13) запишемо:

$$c^{(\mathbf{N})}_{k_1,k_2,k_3} = \begin{cases} \dfrac{2\cdot(-1)^j}{(j+1)(j+2)} \dbinom{3N}{j} \dfrac{\Gamma(3N+\nu+\sigma+1+j)}{\Gamma(\nu+1+j)} \\ \qquad\qquad \text{при } k_1+k_2+k_3 = j \leqslant N, \\ \dfrac{2\cdot(-1)^j}{-3N^2+(6j+3)N-2j^2+2} \dbinom{3N}{j} \dfrac{\Gamma(3N+\nu+\sigma+1+j)}{\Gamma(\nu+1+j)} \\ \qquad\qquad \text{при } N+1 \leqslant j \leqslant 2N-1, \\ \dfrac{2\cdot(-1)^j}{(3N-j+1)(3N-j+2)} \dbinom{3N}{j} \dfrac{\Gamma(3N+\nu+\sigma+1+j)}{\Gamma(\nu+1+j)} \\ \qquad\qquad \text{при } 2N \leqslant j \leqslant 3N. \end{cases} \tag{14}$$

Отримаємо наступний результат.

Теорема 2. *Для гіпергеометричного ряду Лаурічелли*

$$F_D^{(3)}(\nu+1,1,1,1,\rho+\nu+2;z_1,z_2,z_3) = \sum_{k_1,k_2,k_3=0}^{\infty} \frac{(\nu+1)_{k_1+k_2+k_3}}{(\rho+\nu+2)_{k_1+k_2+k_3}} \mathbf{z}^{\mathbf{k}}$$

при будь-якому $N \in \mathbb{N}$ *раціональна функція*

$$[\mathscr{N}/\mathscr{D}]_f(\mathbf{z}) = \frac{P_{\mathscr{N}}(\mathbf{z})}{Q_{\mathbf{N}}(\mathbf{z})},$$

де

$$Q_{\mathbf{N}}(\mathbf{z}) = \sum_{j=2N}^{3N} \frac{2\cdot(-1)^{N-j}}{(3N-j+1)(3N-j+2)} \frac{\Gamma(6N+\nu+\sigma+1-j)}{\Gamma(3N+\nu+1-j)} \times$$

$$\times \binom{3N}{3N-j} \sum_{\substack{k_1+k_2+k_3=j \\ k_i \leqslant N, i=\overline{1,3}}} \mathbf{z}^{\mathbf{k}} + \sum_{j=N+1}^{2N-1} \frac{2\cdot(-1)^{N-j}}{-3N^2+(6j+3)N-2j^2+2} \times$$

$$\times \binom{3N}{3N-j} \frac{\Gamma(6N+\nu+\sigma+1-j)}{\Gamma(3N+\nu+1-j)} \sum_{\substack{k_1+k_2+k_3=j \\ k_i \leqslant N, i=\overline{1,3}}} \mathbf{z}^{\mathbf{k}} +$$

$$+\sum_{j=0}^{N}\frac{2\cdot(-1)^{N-j}}{(j+1)(j+2)}\binom{3N}{3N-j}\frac{\Gamma(6N+\nu+\sigma+1-j)}{\Gamma(3N+\nu+1-j)}\sum_{k_1+k_2+k_3=j}\mathbf{z}^{\mathbf{k}},$$

$$P_{\mathscr{N}}(\mathbf{z})=\sum_{k_1=0}^{N-1}\sum_{k_2=0}^{N-1}\sum_{k_3=0}^{N-1}\mathbf{z}^{\mathbf{k}}\sum_{j_1=0}^{k_1}\sum_{j_2=0}^{k_2}\sum_{j_3=0}^{k_3}\frac{c^{(\mathbf{N})}_{\mathbf{N}-\mathbf{j}}}{k_1+k_2+k_3-j_1-j_2-j_3+1}+$$

$$+z_1^N\sum_{k_2=0}^{N-1}\sum_{k_3=0}^{N-1}\sum_{k_1=0}^{5N-1-k_2-k_3}\mathbf{z}^{\mathbf{k}}\sum_{j_1=0}^{N}\sum_{j_2=0}^{k_2}\sum_{j_3=0}^{k_3}\frac{c^{(\mathbf{N})}_{(j_1,N-j_2,N-j_3)}}{k_1+k_2+k_3+j_1-j_2-j_3+1}+$$

$$+z_2^N\sum_{k_1=0}^{N-1}\sum_{k_3=0}^{N-1}\sum_{k_2=0}^{5N-1-k_1-k_3}\mathbf{z}^{\mathbf{k}}\sum_{j_1=0}^{k_1}\sum_{j_2=0}^{N_2}\sum_{j_3=0}^{k_3}\frac{c^{(\mathbf{N})}_{(N-j_1,j_2,N-j_3)}}{k_1+k_2+k_3-j_1+j_2-j_3+1}+$$

$$+z_3^N\sum_{k_1=0}^{N-1}\sum_{k_2=0}^{N-1}\sum_{k_3=0}^{5N-1-k_1-k_2}\mathbf{z}^{\mathbf{k}}\sum_{j_1=0}^{k_1}\sum_{j_2=0}^{k_2}\sum_{j_3=0}^{N}\frac{c^{(\mathbf{N})}_{(N-j_1,N-j_2,j_3)}}{k_1+k_2+k_3-j_1-j_2+j_3+1}+$$

$$+z_1^Nz_2^N\sum_{k_3=0}^{N-1}\sum_{k_1=0}^{4N-1-k_3}\sum_{k_2=0}^{5N-1-k_1-k_3}\mathbf{z}^{\mathbf{k}}\sum_{j_1=0}^{N}\sum_{j_2=0}^{N}\sum_{j_3=0}^{k_3}\frac{c^{(\mathbf{N})}_{(j_1,j_2,N-j_3)}}{k_1+k_2+k_3+j_1+j_2-j_3+1}+$$

$$+z_1^Nz_3^N\sum_{k_2=0}^{N-1}\sum_{k_1=0}^{4N-1-k_2}\sum_{k_3=0}^{5N-1-k_1-k_2}\mathbf{z}^{\mathbf{k}}\sum_{j_1=0}^{N}\sum_{j_2=0}^{k_2}\sum_{j_3=0}^{N}\frac{c^{(\mathbf{N})}_{(j_1,N-j_2,j_3)}}{k_1+k_2+k_3+j_1-j_2+j_3+1}+$$

$$+z_2^Nz_3^N\sum_{k_1=0}^{N-1}\sum_{k_2=0}^{4N-1-k_1}\sum_{k_3=0}^{5N-1-k_1-k_2}\mathbf{z}^{\mathbf{k}}\sum_{j_1=0}^{k_1}\sum_{j_2=0}^{N}\sum_{j_3=0}^{N}\frac{c^{(\mathbf{N})}_{(N-j_1,j_2,j_3)}}{k_1+k_2+k_3-j_1+j_2+j_3+1},$$

де $c^{(\mathbf{N})}_{(k_1,k_2,k_3)}$ *мають вигляд* (14), *матиме розвинення у степеневий ряд, коефіцієнти якого збігатимуться з коефіцієнтами ряду* (7) *для всіх* $(j_1,j_2,j_3)\in\mathscr{E}=\big\{(j_1,j_2,j_3)\in Z_+^3 : j_1+j_2+j_3\leqslant 6N-1\big\}$.

Щоб проілюструвати результат теореми 2, розглянемо частинний випадок ряду (7) при $\nu=\rho=0$. Тоді функція f, як було зазначено раніше, матиме вигляд

$$f(\mathbf{z})=\frac{z_1(z_2-z_3)\ln(1-z_1)+z_2(z_3-z_1)\ln(1-z_2)+z_3(z_1-z_2)\ln(1-z_3)}{(z_3-z_2)(z_3-z_1)(z_2-z_1)}. \tag{15}$$

Покладемо $N = 1$. За теоремою 2 отримаємо раціональну функцію

$$\frac{P_{\mathscr{N}}(\mathbf{z})}{Q_{\mathbf{1}}(\mathbf{z})} = \frac{1}{35}\Big(-4200-350(z_1^2+z_2^2+z_3^2)-350(z_1^3+z_2^3+z_3^3)-315(z_1^4+z_2^4+ +z_3^4)-280(z_1^5+z_2^5+z_3^5)-140(z_1z_2+z_1z_3+z_2z_3)-70(z_1^2z_2+z_1z_2^2+z_1^2z_3+ +z_1z_3^2+z_2^2z_3+z_2z_3^2)-70(z_1^3z_2+z_1z_2^3+z_1z_3^3+z_1^3z_3+z_2z_3^3+z_2^3z_3+z_1^2z_2^2+z_1^2z_3^2+ +z_1^2z_2^2+z_2^2z_3^2)-70(z_1^4z_2+z_1z_2^4+z_1z_3^4+z_1^4z_3+z_2z_3^4+z_2^4z_3+z_1^3z_2^2+z_1^2z_2^3+ +z_1^3z_3^2+z_1^2z_3^3+z_2^3z_3^2+z_2^2z_3^3)-68(z_1^4z_2^2+z_1^2z_2^4+z_1^4z_3^2+z_1^2z_3^4+z_2^4z_3^2+z_2^2z_3^4+ +z_1^5z_2+z_1z_2^5+z_1z_3^5+z_1^5z_3+z_2z_3^5+z_2^5z_3+z_1^3z_3^3+z_1^3z_2^3+z_2^3z_3^3\Big)\times\Big(-120+ +60(z_1+z_2+z_3)-24(z_1z_2+z_1z_3+z_2z_3)+6z_1z_2z_3\Big)^{-1}. \qquad (16)$$

Частинна сума степеневого ряду, що включає степені $z_1^{k_1}z_2^{k_2}z_3^{k_3}, k_1+k_2+k_3 \leqslant 6$, матиме вигляд

$$P_6(z_1,z_2,z_3) = 1+\frac{1}{2}(z_1+z_2+z_3)+\frac{1}{3}(z_1^2+z_2^2+z_3^2+z_1z_2+z_1z_3+z_2z_3)+ +\frac{1}{4}(z_1^3+z_2^3+z_3^3+z_1^2z_2+z_1z_2^2+z_1^2z_3+z_1z_3^2+z_2^2z_3+z_2z_3^2+z_1z_2z_3)+ +\frac{1}{5}(z_1^4+z_2^4+z_3^4+z_1^3z_2+z_1z_2^3+z_1^3z_3+z_1z_3^3+z_2^3z_3+z_2z_3^3+z_1^2z_2^2+z_1^2z_3^2+ +z_2^2z_3^2+z_1z_2z_3^2+z_1z_2^2z_3+z_1^2z_2z_3)+\frac{1}{6}(z_1^5+z_2^5+z_3^5+z_1^4z_2+z_1z_2^4+z_1^4z_3+ +z_1z_3^4+z_2^4z_3+z_2z_3^4+z_1^3z_2^2+z_1^2z_2^3+z_1^3z_3^2+z_1^2z_3^3+z_2^3z_3^2+z_2^2z_3^3+z_1^2z_2^2z_3+ +z_1^2z_2z_3^2+z_1z_2^2z_3^2+z_1^3z_2z_3+z_1z_2^3z_3+z_1z_2z_3^3)+\frac{1}{7}(z_1^6+z_2^6+z_3^6+z_1^5z_2+ +z_1z_2^5+z_1^5z_3+z_1z_3^5+z_2^5z_3+z_2z_3^5+z_1^4z_2^2+z_1^2z_2^4+z_1^4z_3^2+z_1^2z_3^4+z_2^4z_3^2+z_2^2z_3^4+ +z_1^4z_2z_3+z_1z_2^4z_3+z_1z_2z_3^4+z_1^3z_2^3+z_2^3z_3^3+z_1^3z_3^3+z_1^2z_2^2z_3^2+z_1^3z_2^2z_3+ +z_1^2z_2^3z_3+z_1^3z_2z_3^2+z_1^2z_2z_3^3+z_1z_2^3z_3^2+z_1z_2^2z_3^3). \qquad (17)$$

Наведемо значення наближуваної функції (15), побудованої нами апроксиманти (16) та частинної суми степеневого ряду (17) в точках $(0.4; 0.6; 0.8)$, $(0.6; 0.6; 0.6)$, $(0.8; 0.8; 0)$.

	f($\mathbf{z}$)	$P_{\mathcal{N}}/Q_1$	P_6
(0.4; 0.6; 0.8)	4.90414626	4.49783506	4.20011048
(0.6; 0.6; 0.6)	4.37500000	4.22794427	4.00758400
(0.8; 0.8; 0)	5.00000000	4.25253946	3.95142400

Наведений приклад показує, що побудовані на основі теореми 2 раціональні апроксиманти наближають функцію (15) краще за частинну суму степеневого ряду з такою ж кількістю вільних коефіцієнтів.

1. *Alabiso C., Butera P.* N-variable rational approximants and method of moments // J. Math. Phys. — 1975. — **16**, № 4. — P. 840 – 845.
2. *Hughes Jones R.* General rational approximants in N variables // J. Approx. Theory. — 1976. — **16**. — P. 201 – 233.
3. *Cuyt A.* Padé approximants for operators: theory and applications. — Berlin: Springer – Verlag, 1984. — 138 p.
4. *Zhou P.* Explicit construction of multivariate Padé approximants // J. Comput. Appl. Math. — 1997. — **79**. — P. 1 – 17.
5. *Guillaume P., Huard A., Robin V.* Generalized multivariate Padé approximants // J. Approx. Theory. — 1998. — **95**. — P. 203 – 214.
6. *Cuyt A.* How well can the concept of Padé approximant be generalized to the multivariate case? // J. Comput. Appl. Math. — 1999. — **105**, № 1 – 2. — P. 25 – 50.
7. *Cuyt A., Driver K., Tan J., Verdonk B.* Exploring multivariate Padé approximants for multiple hypergeometric series // Adv. Comput. Math. — 1999. — **10**, № 1. — P. 29 – 49.
8. *Borwein P.B., Cuyt A., Zhou P.* Explicit construction of general multivariate Padé approximants to an Appell function // Adv. Comput. Math. — 2005. — **22**, № 3. — P. 249 – 273.
9. *Дзядик В. К.* Про узагальнення проблеми моментів // Доп. АН УРСР. — 1981. — **6**. — С. 8 – 12.
10. *Голуб А.П.* Узагальнені моментні зображення та апроксимації Паде. — К.: Ін-т математики НАН України, 2002. — 222 с.
11. *Голуб А.П., Чернецька Л.О.* Двовимірні узагальнені моментні зображення та раціональні апроксимації функцій двох змінних // Укр. мат. журн. — 2013. — **65**, № 8. — С. 1035 – 1058.
12. *Бейкер Дж., Грейвс-Моррис П. Р.* Аппроксимации Паде. — М.: Мир, 1986. — 502 с.
13. *Рудин У.* Функциональный анализ. — М.: Мир, 1975. — 444 с.

14. *Appell P., Kampé de Fériet J.* Fonctions hypergeométriques et hypersphériques: polynomes d'Hermite. — Paris: Gauthier—Villars, 1926. — 434 p.

15. *Суетин П. К.* Классические ортогональные многочлены. — М.: Наука, 1979. — 416 с.

16. Справочник по специальным функциям. Под ред. М. Абрамовица, И. Стиган. — М.: Наука, 1979. — 832 с.