

УДК 517.53

**А. П. Голуб** (Ін-т математики НАН України, Київ)**Г. М. Веселовська** (Тернопільський національний педагогічний університет ім. В. Гнатюка, Тернопіль)**ДВОВИМІРНІ АПРОКСИМАНТИ ТИПУ ПАДЕ ДЛЯ ДЕЯКИХ АНАЛІТИЧНИХ ФУНКЦІЙ ДВОХ ЗМІННИХ***Two-dimensional Padé type approximants are constructed for some analytic functions by means of method of generalized moment representations.**За допомогою методу узагальнених моментних зображень побудовано апроксиманти типу Паде для деяких аналітичних функцій.*

В [1] було запропоноване поширення методу узагальнених моментних зображень В. К. Дзядика [2] на випадок двовимірних числових послідовностей. Зокрема, було встановлено наступний результат.

**Теорема 1** [1]. *Нехай формальний степеневий ряд від двох змінних має вигляд*

$$f(z, w) = \sum_{k,m=0}^{\infty} s_{k,m} z^k w^m, \quad (1)$$

*і при цьому для двовимірної числової послідовності  $\{s_{k,m}\}_{k,m=0}^{\infty}$  має місце узагальнене моментне зображення на добутку деяких лінійних просторів  $\mathcal{X} \times \mathcal{Y}$  за білінійною формою  $\langle \cdot, \cdot \rangle$*

$$s_{k+j, m+n} = \langle x_{k,m}, y_{j,n} \rangle, \quad k, j, m, n \in \mathbb{Z}_+. \quad (2)$$

*Тоді, якщо при деяких  $N_1, N_2 \in \mathbb{N}$  існує узагальнений поліном*

$$Y_{N_1, N_2} = \sum_{j=0}^{N_1} \sum_{n=0}^{N_2} c_{j,n}^{(N_1, N_2)} y_{j,n},$$

*такий, що виконуються умови біортогональності*

$$\langle x_{k,m}, Y_{N_1, N_2} \rangle = 0,$$

*при  $(k, m) \in \{(k, m) \in \mathbb{Z}_+^2 : \Phi(k + N_1, m + N_2) \leq 0\}$ , де неперервно диференційовна функція  $\Phi : \mathbb{R}_+^2 \rightarrow \mathbb{R}$  має властивості:*

© А. П. Голуб, Г. М. Веселовська, 2014

1. множина  $D_\Phi = \{(u, t) \in \mathbb{R}_+^2 : \Phi(u, t) \leq 0\}$  є обмеженою в  $\mathbb{R}_+^2$ ;
2. потужність множини  $D_\Phi \cap \{(u, t) \in \mathbb{Z}_+^2 : u \geq N_1, t \geq N_2\}$  дорівнює  $(N_1 + 1)(N_2 + 1) - 1$ ;
3. існують однозначно визначені функції  $u = \varphi(t)$  для  $t \in D_1 = \{t \in \mathbb{R}_+ : \exists u \in \mathbb{R}_+, (u, t) \in D_\Phi\}$  та  $t = \psi(u)$  для  $u \in D_2 = \{u \in \mathbb{R}_+ : \exists t \in \mathbb{R}_+, (u, t) \in D_\Phi\}$ ;
4.  $\varphi(t) \geq N_1 \forall t \in D_1, \psi(u) \geq N_2 \forall u \in D_2$ ,

і при цьому  $c_{N_1, N_2}^{(N_1, N_2)} \neq 0$ , то раціональна функція

$$[\mathcal{N}/\mathcal{D}]_f(z, w) = \frac{P(z, w)}{Q(z, w)}, \quad (3)$$

де

$$Q(z, w) = \sum_{j=0}^{N_1} \sum_{n=0}^{N_2} c_{N_1-j, N_2-n}^{(N_1, N_2)} z^j w^n, \quad (4)$$

а

$$\begin{aligned} P(z, w) = & \sum_{k=0}^{N_1-1} \sum_{m=0}^{N_2-1} z^k w^m \sum_{j=0}^k \sum_{n=0}^m c_{N_1-j, N_2-n}^{(N_1, N_2)} s_{k-j, m-n} + \\ & + z^{N_1} \sum_{m=0}^{N_2-1} \sum_{k=0}^{[\varphi(m)]-N_1} z^k w^m \sum_{j=0}^{N_1} \sum_{n=0}^m c_{j, N_2-n}^{(N_1, N_2)} s_{k+j, m-n} + \\ & + w^{N_2} \sum_{k=0}^{N_1-1} \sum_{m=0}^{[\psi(k)]-N_2} z^k w^m \sum_{j=0}^k \sum_{n=0}^{N_2} c_{N_1-j, n}^{(N_1, N_2)} s_{k-j, m+n}, \quad (5) \end{aligned}$$

матиме розвинення у степеневий ряд, коефіцієнти якого збігаються з коефіцієнтами ряду (1) для  $(k, m) \in \{(k, m) \in \mathbb{Z}_+^2 : \Phi(k, m) \leq 0\}$ .

З використанням цієї теореми в [1, 3, 4] було побудовано та досліджено апроксиманти типу Паде для деяких класів гіпергеометричних рядів від двох змінних.

Дана стаття продовжує вказані дослідження для нових класів функцій.

Як і в [1, 3, 4] будемо розглядати випадки, коли узагальнені моментні зображення (2) можуть бути переформульовані в операторному вигляді, а саме, коли в лінійному нормованому просторі  $\mathcal{X}$  існують лінійні обмежені оператори  $A$  та  $B$ , що комутують між собою, і такі що

$$\begin{aligned} Ax_{k,m} &= x_{k+1,m} \quad \forall (k, m) \in \mathbb{Z}_+^2, \\ Bx_{k,m} &= x_{k,m+1} \quad \forall (k, m) \in \mathbb{Z}_+^2, \end{aligned}$$

а в лінійному нормованому просторі  $\mathcal{Y}$  існують оператори  $A^*$  та  $B^*$ , що є спряженими до операторів  $A$  та  $B$  відповідно відносно білінійної форми  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  (див. [5, с. 21]).

В [1] та [4] розглядаються випадки, коли оператори  $A$  та  $B$  збігаються між собою. Тоді має місце зображення

$$f(z, w) = \langle \widehat{R}_z(A) \widehat{R}_w(A) x_{0,0}, y_{0,0} \rangle = \frac{zh(z) - wh(w)}{z - w},$$

де

$$h(z) = \langle \widehat{R}_z(A) x_{0,0}, y_{0,0} \rangle,$$

а резольвентна функція оператора  $A$  визначається формулою

$$\widehat{R}_z(A) = (I - zA)^{-1}.$$

Найпростішою є ситуація, коли оператори  $A$  та  $B$  є операторами множення на незалежну змінну, що відповідають класичній степеневій проблемі моментів (див. [6, с. 172])

$$(A\varphi)(t) = (B\varphi)(t) = t\varphi(t), \quad \varphi \in L_2([0, 1], d\mu). \quad (6)$$

Відповідні узагальнені моментні зображення розглянуті в [1]. В [4] розглянуто випадок, коли

$$(A\varphi)(t) = (B\varphi)(t) = \int_0^t \varphi(\tau) d\tau, \quad \varphi \in L_1([0, 1]). \quad (7)$$

Розгляд лінійної комбінації операторів (6) та (7)

$$(A\varphi)(t) = (B\varphi)(t) = \kappa \int_0^t \varphi(\tau) d\tau + t\varphi(t), \quad \varphi \in L_1([0, 1]),$$

безпосередньо приводить до наступного результату.

**Теорема 2.** Для аналітичної функції вигляду

$$f(z, w) = \frac{zh(z) - wh(w)}{z - w}, \quad (8)$$

де

$$h(z) = \frac{1}{\nu + 1} {}_2F_1(\nu + \varkappa + 1, 1; \nu + 2; z) := \frac{1}{\nu + 1} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\nu + \varkappa + 1)_k}{(\nu + 2)_k} z^k,$$

при  $\nu > -1$ , а символ Похгаммера  $(\alpha)_k$  визначається наступним співвідношенням (див. [7, с. 82])

$$(\alpha)_k = \begin{cases} \alpha(\alpha + 1) \cdot \dots \cdot (\alpha + k - 1), & \text{якщо } k \in \mathbb{N}, \\ 1, & \text{якщо } k = 0, \end{cases}$$

при довільному  $N \in \mathbb{N}$  раціональна функція, що визначається рівностями (3)–(5) при  $\varphi(m) = 4N - 1 - m$ ,  $\psi(k) = 4N - 1 - k$ ,  $N_1 = N_2 = N$ , в яких коефіцієнти  $c_{j,n}^{(N,N)}$ ,  $j, n = 0, 1, \dots, N$ , задовольняють рівності

$$\sum_{k=0}^N \sum_{m=0}^N \frac{(\varkappa + \nu + 1)_{k+m}}{(\nu + 1)_{k+m}} c_{k,m}^{(N,N)} t^{k+m} = \sum_{j=0}^{2N} p_j^{(2N)} t^j, \quad (9)$$

а  $p_j^{(2N)}$  – коефіцієнти зсунутого ортонормованого на  $[0, 1]$  з вагою  $t^\nu dt$  многочлена Якобі степеня  $2N$

$$p_j^{(2N)} = \alpha_N (-1)^j \binom{2N}{j} \frac{(\nu + 1)_{2N+j}}{(\nu + 1)_j}, \quad j = 0, 1, \dots, 2N,$$

(див. [7, с. 581]) матиме розвинення в степеневий ряд, коефіцієнти якого збігаються з коефіцієнтами розвинення функції (8) для  $(k, m) \in \{(k, m) \in \mathbb{Z}_+^2 : k + m \leq 4N - 1\}$ .

**Зауваження.** Як і в [1], рівності (9) не дають можливості визначити коефіцієнти  $c_{k,m}^{(N,N)}$ ,  $k, m = 1, 2, \dots, N$ , однозначно. Тому можуть

бути використані різні підходи до їх визначення (див. [1]). Відзначимо також, що коефіцієнти степеневого розвинення функцій вигляду (8) будуть наступними

$$s_{k,m} = \frac{(\nu + \varkappa + 1)_{k+m}}{(\nu + 1)(\nu + 2)_{k+m}}, \quad (k, m) \in \mathbb{Z}_+^2,$$

а отже, функції (8) будуть з точністю до постійного множника частинними випадками гіпергеометричних рядів Аппеля (див. [8, с. 219])

$$F_1(\alpha, \beta, \beta', \gamma, z, w) = \sum_{k,m=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_{k+m}(\beta)_k(\beta')_m}{(\gamma)_{k+m}k!m!} z^k w^m$$

при  $\beta = \beta' = 1$ ,  $\alpha = \varkappa + \nu + 1$ ,  $\gamma = \nu + 2$ .

Розглянемо тепер випадок, коли у просторі  $\mathcal{X} = L_2([0, 1], d\mu)$  визначено оператори

$$(A\varphi)(t) = t\varphi(t), \quad (B\varphi)(t) = (A^2\varphi)(t) = t^2\varphi(t).$$

Тоді

$$f(z, w) = \langle \widehat{R}_z(A)\widehat{R}_w(A^2)x_{0,0}, y_{0,0} \rangle.$$

Можна записати

$$\begin{aligned} \widehat{R}_z(A)\widehat{R}_w(A^2) &= (I - zA)^{-1}(I - \sqrt{w}A)^{-1}(I + \sqrt{w}A)^{-1} = \\ &= \alpha(I - zA)^{-1} + \beta(I - \sqrt{w}A)^{-1} + \gamma(I + \sqrt{w}A)^{-1}. \end{aligned}$$

Звідси отримаємо систему рівнянь для визначення параметрів  $\alpha, \beta, \gamma$

$$\begin{cases} \alpha + \beta + \gamma = 1, \\ (\sqrt{w} - z)\beta - (\sqrt{w} + z)\gamma = 0, \\ w\alpha + z\sqrt{w}\beta - z\sqrt{w}\gamma = 0. \end{cases}$$

Розв'язуючи систему, будемо мати

$$\begin{cases} \alpha = \frac{z^2}{z^2 - w}, \\ \beta = \frac{\sqrt{w}}{2(\sqrt{w} - z)}, \\ \gamma = \frac{\sqrt{w}}{2(\sqrt{w} + z)}. \end{cases}$$

Покладаючи  $x_{0,0}(t) = y_{0,0}(t) \equiv 1$ , дістанемо

$$f(z, w) = \frac{z^2}{z^2 - w} h(z) + \frac{\sqrt{w}}{2(\sqrt{w} - z)} h(\sqrt{w}) + \frac{\sqrt{w}}{2(\sqrt{w} + z)} h(-\sqrt{w}),$$

де

$$h(z) = \int_0^1 \frac{d\mu(t)}{1 - zt}.$$

Звідси отримуємо зображення

$$f(z, w) = \frac{z^2}{z^2 - w} \int_0^1 \frac{d\mu(t)}{1 - zt} + \frac{w}{w - z^2} \int_0^1 \frac{(1 + zt)d\mu(t)}{1 - wt^2}. \quad (10)$$

Щоб побудувати апроксиманти типу Паде функції (10) за теоремою 1 потрібно побудувати біортогональний поліном вигляду

$$Y_{N_1, N_2}(t) = \sum_{j=0}^{N_1} \sum_{n=0}^{N_2} c_{j,n}^{(N_1, N_2)} y_{j,n}(t),$$

де  $y_{j,n}(t) = t^{j+2n}$ ,  $(j, n) \in \mathbb{Z}_+^2$ , для якого є справедливими співвідношення

$$\int_0^1 x_{k,m}(t) Y_{N_1, N_2}(t) d\mu(t) = 0,$$

де  $x_{k,m}(t) = t^{k+2m}$ ,  $(k, m) \in \mathbb{Z}_+^2$ , при  $(k, m) \in ([0, N_1] \times [0, N_2]) \setminus \{(N_1, N_2)\}$ . Очевидно,  $Y_{N_1, N_2}(t)$  є алгебраїчним многочленом степеня  $N_1 + 2N_2$ . Оскільки ми розглядаємо випадок  $N_1, N_2 \in \mathbb{N}$ , то цей многочлен має бути ортогональним до всіх степенів змінної з показником, що не перевищує  $N_1 + 2N_2 - 1$ . А це означає, що він повинен збігатися з точністю до постійного множника з ортонормованим на  $[0, 1]$  з вагою  $d\mu$  многочленом  $P_{N_1+2N_2}(t)$ . Отже, коефіцієнти полінома  $Y_{N_1, N_2}$  задовольняють рівність

$$\sum_{j=0}^{N_1} \sum_{n=0}^{N_2} c_{j,n}^{(N_1, N_2)} t^{j+2n} = \sum_{r=0}^{N_1+2N_2} p_r^{(N_1+2N_2)} t^r. \quad (11)$$

Як і у випадку рівності (9), рівність (11) не дає можливості однозначно визначити коефіцієнти  $c_{j,n}^{(N_1, N_2)}$ . Один з варіантів розв'язання цієї рівності:

$$c_{j,n}^{(N_1, N_2)} = \begin{cases} p_{2n+j} & \text{при } j = 0, 1; n = 0, 1, \dots, N_2, \\ p_{2N_2+j} & \text{при } j = 2, 3, \dots, N_1; n = N_2, \\ 0 & \text{при } j = 2, \dots, N_1; n = 0, \dots, N_2 - 1. \end{cases} \quad (12)$$

Це дає можливість встановити наступний результат.

**Теорема 3.** Для аналітичної функції  $f(z, w)$ , що має зображення (10) при довільних  $N_1, N_2 \in \mathbb{N}$ , раціональна функція, що визначається рівностями (3) – (5) при  $\varphi(m) = 2N_1$ ,  $\psi(k) = 2N_2$ , в яких коефіцієнти  $c_{j,n}^{(N_1, N_2)}$ ,  $j = 0, 1, \dots, N_1$ ,  $n = 0, 1, \dots, N_2$ , задовольняють рівності (12), матиме розвинення в степеневий ряд, коефіцієнти якого збігаються з коефіцієнтами розвинення функції (10) для  $(k, m) \in \{(k, m) \in \mathbb{Z}_+^2 : k \leq 2N_1, m \leq 2N_2\} \setminus \{(2N_1, 2N_2)\}$ .

1. Голуб А. П., Чернецька Л. О. Двовимірні узагальнені моментні зображення та раціональні апроксимації функцій двох змінних // Укр. мат. журн. — 2013. — **65**, № 8. — С. 1035–1058.
2. Дзядик В. К. Про узагальнення проблеми моментів // Доп. АН УРСР. — 1981. — **6**. — С. 8–12.
3. Голуб А. П., Чернецька Л. О. Побудова апроксимант Паде для деяких гіпергеометричних рядів Аппеля за допомогою методу узагальнених моментних зображень // Теорія наближення функцій та суміжні питання: Зб. праць Ін-ту математики НАН України. — 2013. — **10**, № 1. — С. 69–94.
4. Голуб А. П., Чернецька Л. О. Двовимірні узагальнені моментні зображення та апроксимації Паде деяких рядів Гумберта // Укр. мат. журн. — 2013. — **65**, № 10. — С. 1315–1331.
5. Голуб А. П. Узагальнені моментні зображення та апроксимації Паде. — К.: Ін-т математики НАН України, 2002. — 222 с.
6. Ахизер Н. И. Классическая проблема моментов и некоторые вопросы анализа, связанные с нею. — М.: Физматгиз, 1961. — 312 с.
7. Справочник по специальным функциям. Под ред. М. Абрамовица, И. Стиган. — М.: Наука, 1979. — 832 с.
8. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. Гипергеометрическая функция. Функции Лежандра. — М.: Наука, 1965. — 296 с.