Збірник праць Ін-ту математики НАН України 2014, Т. 11, № 3, 56-70

УДК 517.5

Гаєвський М.В. (Кіровоградський державний педагогічний університет імені Володимира Винниченка)

ОЦІНКИ ГРУПИ ВІДХИЛЕНЬ $\bar{\psi}$-ДИФЕРЕНЦІЙОВНИХ ФУНКЦІЙ

In this paper estimates group of deviations of Fourier sums on the spaces $C^{\bar{\psi}}$ expressed in terms of the best approximation of $\bar{\psi}$-derivatives of functions in the sense of A. I. Stepanets are found. The sequence $\bar{\psi} = (\psi_1, \psi_2)$ are quasiconvex.

У роботі знайдено оцінки групи відхилень сум Фур'є на просторах $C^{\bar{\psi}}$, виражені через найкращі наближення $\bar{\psi}$-похідних функцій в розумінні О. І. Степанця. Послідовності $\bar{\psi} = (\psi_1, \psi_2)$ є квазіопуклими.

Нехай L — простір 2π-періодичних сумовних за Лебегом функцій f з нормою $\|f\|_L = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(t)|dt$, а C — підпростір L, що складається з неперервних функцій з нормою $\|f\|_C = \max\limits_t |f|$.

Нехай

$$S[f] := \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\big(a_k(f)\cos kx + b_k(f)\sin kx\big) \tag{1}$$

— ряд Фур'є за тригонометричною системою функції $f \in L$; $a_0(f)$, $a_k(f)$, $b_k(f)$, $k = 1, 2, \ldots$ — її коефіцієнти Фур'є. Позначимо через $S_n(f;x)$ — частинну суму ряду Фур'є (1) порядку n і покладемо $\rho_n(f;x) = f(x) - S_n(f;x)$. Нехай далі T_n — множина тригонометричних поліномів вигляду $t_n(x) = \sum_{k=0}^{n}\big(c_k \cos kx + d_k \sin kx\big)$ і

$$E_n(f) := E_n(f)_C := \inf_{t_n \in T_n}\|f - t_n\|_C$$

— найкраще наближення функції f за допомогою тригонометричних поліномів $t_n \in T_n$.

О.І. Степанець (див., наприклад, [1, с. 149]) ввів поняття $\bar{\psi}$-похідних і визначив класи $C^{\bar{\psi}}C^0$ таким чином.

Нехай $f \in L$ і (1) — її ряд Фур'є, $\bar{\psi} = (\psi_1, \psi_2)$ — пара довільних числових послідовностей $\psi_1(k)$ і $\psi_2(k)$, причому для довільного $k \in \mathbb{N}$

$\bar{\psi}^2(k) = \psi_1^2(k) + \psi_2^2(k) \neq 0$.

Якщо ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{\psi_1(k)}{\bar{\psi}^2(k)} A_k(f;x) - \frac{\psi_2(k)}{\bar{\psi}^2(k)} \widetilde{A}_k(f;x) \right),$$

де

$$A_k(f;x) = a_k(f)\cos kx + b_k(f)\sin kx,$$

$$\widetilde{A}_k(f;x) = a_k(f)\sin kx - b_k(f)\cos kx,$$

є рядом Фур'є деякої функції $\varphi \in L$, то φ назвемо $\bar{\psi}$-похідною функції f і позначимо її через $f^{\bar{\psi}}$.

Через $C^{\bar{\psi}}$ будемо позначати множину всіх неперервних функцій f, у яких існують $\bar{\psi}$-похідні і покладемо

$$C^{\bar{\psi}}C^0 = \left\{ f \in C^{\bar{\psi}} : f^{\bar{\psi}} \in C^0 \right\},$$

$$C^0 = \left\{ f \in C : \int_{-\pi}^{\pi} f(t)dt = 0 \right\}.$$

У даній роботі на множині функцій $C^{\bar{\psi}}C^0$ будуть досліджуватись величини

$$R_n^p(f;x) = \left(\frac{1}{n} \sum_{k=n}^{2n-1} |\rho_k(f;x)|^p \right)^{\frac{1}{p}} \text{ та } H_n^p(f;\lambda;x) = \sum_{k=n}^{\infty} \lambda_k |\rho_k(f;x)|^p,$$

де p — довільне додатне число, $\lambda = \{\lambda_k\}$ — послідовність дійсних чисел.

Вперше функціонали такого вигляду вивчалися у відомих роботах Харді і Літтлвуда [2, 3], в яких були закладені основи сучасної теорії сильного підсумовування рядів Фур'є. Сильне підсумовування досліджувалось багатьма авторами, більш детально з бібліографією та деякими результатами можна ознайомитись, наприклад, в [4−8].

Позначимо через $\mathfrak{M}$ множину додатних, неперервних та опуклих донизу при $v \geq 1$ функцій $\psi(v)$, що зникають на нескінченності, тобто

$$\mathfrak{M} = \Big\{ \psi(v) : \psi(v) > 0, \lim_{v\to\infty} \psi(v) = 0,$$

$$\psi(v_1) - 2\psi\left(\frac{v_1+v_2}{2}\right) + \psi(v_2) \le 0, \forall v_1, v_2 \in [1,\infty)\Big\};$$

$\mathfrak{M}_0$ — підмножина функцій $\psi \in \mathfrak{M}$, для яких $0 < \mu(\psi,t) \le K < \infty$, де $\mu(\psi,t) = \frac{t}{\eta(t)-t}$ та $\psi(\eta(t)) = \frac{1}{2}\psi(t)$; $\mathfrak{M}'$ — підмножина функцій $\psi \in \mathfrak{M}$, для яких $\int_1^\infty \frac{\psi(t)}{t}dt < \infty$. Зазначимо, що природними представниками множини $\mathfrak{M}$ є функції $t^{-r},\ \exp(-t^r),\ r>0$; до множини $\mathfrak{M}_0$ належать, наприклад, такі функції: $\ln^{-r}(t+e),\ r>0$; до $\mathfrak{M}'$ — функція $t^{-r},\ r>0$.

У роботі [8] О.І. Степанець отримав оцінки величин $R_n^p(f;x)$ і $H_n^p(f;\lambda;x)$. А саме справедливі наступні теореми:

Теорема А. *Нехай $\pm\psi_1 \in \mathfrak{M}_0$, $\pm\psi_2 \in \mathfrak{M}_0'$, тоді при кожному $p>0$ для довільної $f \in C^{\bar\psi}C^0$ у кожній точці x справедлива нерівність*

$$R_n^p(f;x) \le K_p\left(\int_n^\infty \frac{|\psi_2(t)|}{t}dt + \overline{\psi}(n)\right)E_{n-1}(f^{\overline{\psi}}).$$

Теорема Б. *Нехай $\pm\psi_1 \in \mathfrak{M}_0$, $\pm\psi_2 \in \mathfrak{M}_0'$, $p>0$, послідовність $\lambda = \{\lambda_k\},\ k \in \mathbb{N}$ така, що $\lambda_k \ge 0$ і числа $\beta_k = \lambda_k\alpha_k^p$, де*

$$\alpha_k = \int_k^\infty \frac{|\psi_2(t)|}{t}dt + \overline{\psi}(k),$$

не зростають при всіх $k \ge n$, тоді для довільної $f \in C^{\bar\psi}C^0$ у кожній точці x справедлива нерівність

$$H_n^p(f;\lambda;x) \le K_p\left(n\lambda_n\alpha_n^pE_n^p(f^{\overline{\psi}}) + \sum_{k=n}^\infty \lambda_k\alpha_k^pE_k^p(f^{\overline{\psi}})\right).$$

Тут і далі під K_p будемо розуміти деякі додатні величини, що можуть залежати лише від параметра p і є можливо неоднаковими у різних формулах.

Нехай $\triangle\gamma_k = \gamma_k - \gamma_{k+1}$, $\triangle^2\gamma_k = \triangle\gamma_k - \triangle\gamma_{k+1}$, де $\{\gamma_k\}$ — деяка числова послідовність. Кажуть, що послідовність $\{\gamma_k\}$ є опуклою, якщо $\triangle^2\gamma_k \ge 0, k = 0,1,2,\ldots$. Послідовність γ_k є квазіопуклою, якщо

$$\sum_{k=0}^\infty (k+1)|\triangle^2\gamma_k| < \infty.$$

Метою даної роботи є узагальнення деяких результатів з [8] за умови, що послідовності $\psi_1(k)$ та $\psi_2(k)$ є квазіопуклими.

Має місце наступна лема.

Лема 1. *Нехай послідовності $\psi_1(k)$ та $\psi_2(k)$, що прямують до нуля, є квазіопуклими та крім того*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{|\psi_2(k)|}{k} < \infty. \tag{2}$$

Тоді для довільної функції $f \in C^{\overline{\psi}}C^0$ у всіх точках $x \in [-\pi, \pi]$ має місце наступна рівність

$$\rho_n(f; x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^{\overline{\psi}}(x+t) F_n(\overline{\psi}, t) dt,$$

де

$$F_n(\overline{\psi}, t) = \sum_{k=n+1}^{\infty} \big(\psi_1(k) \cos kt + \psi_2(k) \sin kt\big).$$

Доведення. Зазначимо, що з умов леми на послідовності $\psi_1(k)$ та $\psi_2(k)$ ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \big(\psi_1(k) \cos kt + \psi_2(k) \sin kt\big)$ є рядом Фур'є сумовної функції (див., наприклад, [9]), тому $F_n(\overline{\psi}, t) \in L$ при кожному фіксованому $n \in \mathbb{N}$. Крім цього, $f^{\overline{\psi}} \in L_\infty$. Таким чином, застосувавши твердження 1.1$'$ [1, с. 178], отримаємо лему 1.

Теорема 1. *Нехай послідовності $\psi_1(k)$ та $\psi_2(k)$, що прямують до нуля, є квазіопуклими та крім того виконується* (2). *Тоді для довільної функції $f \in C^{\overline{\psi}}C^0$ та довільного $0 < p < \infty$ у всіх точках $x \in [-\pi, \pi]$ має місце наступна нерівність*

$$R_n^p(f; x) \leq K_p \left(\sum_{k=2n+1}^{\infty} \frac{|\psi_2(k)|}{k} + \right.$$

$$\left. + \sum_{k=n+1}^{\infty} (k+1)(|\triangle^2 \psi_1(k)| + |\triangle^2 \psi_2(k)|) \right) E_n(f^{\overline{\psi}}). \tag{3}$$

Доведення. Нехай t_n — тригонометричний поліном найкращого наближення порядку не вище n функції $f^{\overline{\psi}}$. Будемо спочатку вважати, що $2 \le p < \infty$. Враховуючи лему 1 та ортогональність тригонометричної системи функцій отримаємо наступне співвідношення

$$R_n^p(f;x) = \left(\frac{1}{n}\sum_{k=n}^{2n-1}\Big|\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(f^{\overline{\psi}}(x+t)-t_n(x+t))\times\right.$$

$$\left.\times\sum_{\nu=k+1}^{\infty}\big(\psi_1(\nu)\cos\nu t+\psi_2(\nu)\sin\nu t\big)dt\Big|^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Скориставшись нерівностями

$$|a+b|^p \le 2^p(|a|^p+|b|^p), \quad p \ge 1,$$

та

$$|a+b|^p \le \big(|a|^p+|b|^p\big), \quad 0 \le p \le 1,$$

отримаємо

$$R_n^p(f;x) \le K_p\left(\left(\frac{1}{n}\sum_{k=n}^{2n-1}\Big|\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}(f^{\overline{\psi}}(x+t)-t_n(x+t))\times\right.\right.$$

$$\left.\times\sum_{\nu=k+1}^{\infty}(\psi_1(\nu)\cos\nu t+\psi_2(\nu)\sin\nu t)dt\Big|^p\right)^{\frac{1}{p}}+$$

$$+\left(\frac{1}{n}\sum_{k=n}^{2n-1}\Big|\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}\big(f^{\overline{\psi}}(x-t)-t_n(x-t)\big)\times\right.$$

$$\left.\left.\times\sum_{\nu=k+1}^{\infty}(\psi_1(\nu)\cos\nu t-\psi_2(\nu)\sin\nu t)dt\Big|^p\right)^{\frac{1}{p}}\right) = K_p(R_+ + R_-). \qquad (4)$$

Оцінимо спочатку перший доданок у правій частині рівності (4)

$$R_+ \le$$

$$\leq K_p\left(\left(\frac{1}{n}\sum_{k=n}^{2n-1}\Big|\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\frac{\pi}{k}}\Delta_n(f)\sum_{\nu=k+1}^{\infty}\big(\psi_1(\nu)\cos\nu t+\psi_2(\nu)\sin\nu t\big)dt\Big|^p\right)^{\frac{1}{p}}+\right.$$

$$+\left(\frac{1}{n}\sum_{k=n}^{2n-1}\Big|\frac{1}{\pi}\int_{\frac{\pi}{k}}^{\pi}\Delta_n(f)\sum_{\nu=k+1}^{\infty}\psi_1(\nu)\cos\nu t dt\Big|^p\right)^{\frac{1}{p}}+$$

$$\left.+\left(\frac{1}{n}\sum_{k=n}^{2n-1}\Big|\frac{1}{\pi}\int_{\frac{\pi}{k}}^{\pi}\Delta_n(f)\sum_{\nu=k+1}^{\infty}\psi_2(\nu)\sin\nu t dt\Big|^p\right)^{\frac{1}{p}}\right)=K_p(I_1+I_2+I_3),$$

де

$$\Delta_n(f)=\Delta_n(f^{\overline{\psi}},t_n,x,t)=f^{\overline{\psi}}(x+t)-t_n(x+t).$$

Для оцінки величини I_1 скористаємося співвідношенням, що є наслідком теорем 1 та 2 [10]

$$\Big|\int_0^{\frac{\pi}{m}}\Big|\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\big(a_k\cos kt+b_k\sin kt\big)\Big|dt-\sum_{k=2m+1}^{\infty}\frac{|b_k|}{k}\Big|\leq$$

$$\leq K\left(\sum_{k=1}^{m-1}\frac{k(m-k)}{m}(|\triangle^2a_{k-1}|+|\triangle^2b_{k-1}|)+\right.$$

$$\left.+\sum_{k=m}^{\infty}(k+1)(|\triangle^2a_k|+|\triangle^2b_k|)\right). \qquad (5)$$

Тоді

$$I_1\leq\left(\frac{1}{n}\sum_{k=n}^{2n-1}\Big|\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\frac{\pi}{k}}\Delta_n(f)\sum_{\nu=k+1}^{\infty}\big(\psi_1(\nu)\cos\nu t+\psi_2(\nu)\sin\nu t\big)dt\Big|^p\right)^{\frac{1}{p}}\leq$$

$$\leq E_n(f^{\overline{\psi}})\left(\frac{1}{n}\sum_{k=n}^{2n-1}\left(\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\frac{\pi}{k}}\Big|\sum_{\nu=k+1}^{\infty}(\psi_1(\nu)\cos\nu t+\psi_2(\nu)\sin\nu t)\Big|dt\right)^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Отже, поклавши в (5) $m = k$ та $a_\nu = b_\nu = 0$ при $\nu \le k$; $a_\nu = \psi_1(\nu)$, $b_\nu = \psi_2(\nu)$ при $\nu > k$, отримаємо

$$I_1 \le K_p E_n(f^{\overline{\psi}}) \Bigg(\sum_{k=2n+1}^{\infty} \frac{|\psi_2(k)|}{k} + \sum_{k=n+1}^{\infty} (k+1)\big(|\triangle^2\psi_1(k)| + |\triangle^2\psi_2(k)|\big) \Bigg).$$

Для оцінки I_2 до суми під інтегралом двічі застосуємо перетворення Абеля:

$$\sum_{\nu=k+1}^{\infty} \psi_1(\nu)\cos\nu t =$$

$$= \sum_{\nu=k+1}^{\infty} (\nu+1)\triangle^2\psi_1(\nu)F_\nu(t) - (k+1)\triangle\psi_1(k+1)F_k(t) - \psi_1(k+1)D_k(t),$$

де

$$D_k(t) = \frac{1}{2} + \sum_{\nu=1}^{k} \cos\nu t = \frac{\sin(k+\frac{1}{2})t}{2\sin\frac{t}{2}}$$

та

$$F_k(t) = \frac{1}{k+1}\sum_{\nu=0}^{k} D_\nu(t) = \frac{\sin^2 kt}{4(k+1)\sin^2\frac{t}{2}}.$$

Тоді

$$I_2 \le K_p \Bigg(\bigg(\frac{1}{n}\sum_{k=n}^{2n-1} \Big| \frac{\psi_1(k+1)}{\pi} \int_{\frac{\pi}{n}}^{\pi} \Delta_n(f) D_k(t)dt \Big|^p \bigg)^{\frac{1}{p}} +$$

$$+ \bigg(\frac{1}{n}\sum_{k=n}^{2n-1} \Big| \frac{\psi_1(k+1)}{\pi} \int_{\frac{\pi}{k}}^{\frac{\pi}{n}} \Delta_n(f) D_k(t)dt \Big|^p \bigg)^{\frac{1}{p}} +$$

$$+ \bigg(\frac{1}{n}\sum_{k=n}^{2n-1} \Big| \frac{(k+1)\triangle\psi_1(k+1)}{\pi} \int_{\frac{\pi}{k}}^{\pi} \Delta_n(f) F_k(t)dt \Big|^p \bigg)^{\frac{1}{p}} +$$

$$+ \bigg(\frac{1}{n}\sum_{k=n}^{2n-1} \Big| \frac{1}{\pi} \int_{\frac{\pi}{k}}^{\pi} \Delta_n(f) \sum_{\nu=k+1}^{\infty} (\nu+1)\triangle^2\psi_1(\nu)F_\nu(t)dt \Big|^p \bigg)^{\frac{1}{p}} \Bigg).$$

Враховуючи, що мають місце наступні нерівності та співвідношення

$$F_\nu(t) \geq 0, \ t \in [-\pi, \pi] \ \text{ та } \int_{\frac{\pi}{\nu}}^{\pi} F_\nu(t)dt \leq \int_{-\pi}^{\pi} F_\nu(t)dt = \pi,$$

$$(n+1)|\triangle\psi_1(n+1)| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty}(k+1)|\triangle^2\psi_1(k)|,$$

$$|\psi_1(n+1)| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty}(k+1)|\triangle^2\psi_1(k)|,$$

$$D_k(t) = \frac{\sin{(k+\frac{1}{2})t}}{2\sin\frac{t}{2}} = \cos\frac{t}{2}\cdot\frac{\sin kt}{2\sin\frac{t}{2}} + \frac{\cos kt}{2},$$

$$|D_k(t)| \leq \frac{K}{t}, t \in \left[\frac{\pi}{k}, \pi\right], \int_{\frac{\pi}{k}}^{\frac{\pi}{n}} |D_k(t)|dt \leq \int_{\frac{\pi}{k}}^{\frac{\pi}{n}} \frac{K}{t}dt \leq K,$$

а також те, що функція $\dfrac{1}{2\sin\frac{t}{2}} - \dfrac{1}{t}$ є обмеженою при $t \in \left[\dfrac{\pi}{n}, \pi\right]$, остаточно отримаємо

$$I_2 \leq K_p \left(\left(\frac{1}{n}\sum_{k=n}^{2n-1} \Big| \frac{\psi_1(k+1)}{\pi} \int_{\frac{\pi}{n}}^{\pi} \Delta_n(f)\frac{\sin kt}{t}dt \Big|^p \right)^{\frac{1}{p}} + \right.$$

$$\left. + E_n(f^{\overline{\psi}}) \sum_{k=n+1}^{\infty}(k+1)|\triangle^2\psi_1(k)| \right).$$

Аналогічно проводиться оцінка I_3:

$$\sum_{\nu=k+1}^{\infty}\psi_2(\nu)\sin\nu t = \sum_{\nu=k+1}^{\infty}(\nu+1)\triangle^2\psi_1(\nu)\triangle^2\psi_1(\nu)\overline{F}_\nu(t) -$$

$$-(k+1)\triangle\psi_1(k+1)\overline{F}_k(t) - \psi_1(k+1)\overline{D}_k(t),$$

де

$$\overline{D}_k(t) = -\frac{\cos\frac{t}{2}}{2\sin\frac{t}{2}} + \sum_{\nu=1}^{k}\sin\nu t = -\frac{\cos{(k+\frac{1}{2})t}}{2\sin\frac{t}{2}}$$

та

$$\overline{F}_k(t) = \frac{1}{k+1}\sum_{\nu=0}^{k}\overline{D}_\nu(t) = -\frac{\sin{(k+1)t}}{4(k+1)\sin^2\frac{t}{2}}.$$

Також, зауважимо, що мають місце наступні співвідношення

$$\int_{\frac{\pi}{k}}^{\pi}\Big|\overline{F}_k(t)\Big|dt \leq K\int_{\frac{\pi}{k}}^{\pi}\frac{1}{4(k+1)t^2}dt \leq K,$$

$$\overline{D}_k(t) = \frac{\cos{(k+\frac{1}{2})t}}{2\sin\frac{t}{2}} = \cos\frac{t}{2}\cdot\frac{\cos kt}{2\sin\frac{t}{2}} - \frac{\sin kt}{2},$$

$$|\overline{D}_k(t)| \leq \frac{K}{t}, t\in\left[\frac{\pi}{k},\pi\right], \int_{\frac{\pi}{k}}^{\frac{\pi}{n}}|\overline{D}_k(t)|dt \leq \int_{\frac{\pi}{k}}^{\frac{\pi}{n}}\frac{K}{t}dt \leq K,$$

тому

$$I_3 \leq K_p\Bigg(\Bigg(\frac{1}{n}\sum_{k=n}^{2n-1}\Big|\frac{\psi_2(k+1)}{\pi}\int_{\frac{\pi}{n}}^{\pi}\Delta_n(f)\frac{\cos kt}{t}dt\Big|^p\Bigg)^{\frac{1}{p}} +$$

$$+E_n(f^{\overline{\psi}})\sum_{k=n+1}^{\infty}(k+1)|\triangle^2\psi_2(k)|\Bigg).$$

Об'єднавши оцінки величин I_1, I_2 та I_3, отримаємо

$$R_+ \leq K_p\Bigg(E_n(f^{\overline{\psi}})\Bigg(\sum_{k=2n+1}^{\infty}\frac{|\psi_2(k)|}{k}+$$

$$+\sum_{k=n+1}^{\infty}(k+1)\big(|\triangle^2\psi_1(k)|+|\triangle^2\psi_2(k)|\big)\Bigg)+$$

$$+\Bigg(\frac{1}{n}\sum_{k=n}^{2n-1}\Big|\frac{\psi_1(k+1)}{\pi}\int_{\frac{\pi}{n}}^{\pi}\Delta_n(f)\frac{\sin kt}{t}dt\Big|^p\Bigg)^{\frac{1}{p}} +$$

$$+\Bigg(\frac{1}{n}\sum_{k=n}^{2n-1}\Big|\frac{\psi_2(k+1)}{\pi}\int_{\frac{\pi}{n}}^{\pi}\Delta_n(f)\frac{\cos kt}{t}dt\Big|^p\Bigg)^{\frac{1}{p}}\Bigg) \leq$$

$$\le K_p \left(E_n(f^{\overline{\psi}}) \left(\sum_{k=2n+1}^{\infty} \frac{|\psi_2(k)|}{k} + \right.\right.$$

$$\left. + \sum_{k=n+1}^{\infty} (k+1)(|\triangle^2 \psi_1(k)| + |\triangle^2 \psi_2(k)|) \right) +$$

$$+ \max_{n+1 \le k \le 2n} |\psi_1(k)| \left(\frac{1}{n} \sum_{k=n}^{2n-1} \Big| \frac{1}{\pi} \int_{\frac{\pi}{n}}^{\pi} \Delta_n(f) \frac{\sin kt}{t} dt \Big|^p \right)^{\frac{1}{p}} +$$

$$\left. + \max_{n+1 \le k \le 2n} |\psi_2(k)| \left(\frac{1}{n} \sum_{k=n}^{2n-1} \Big| \frac{1}{\pi} \int_{\frac{\pi}{n}}^{\pi} \Delta_n(f) \frac{\cos kt}{t} dt \Big|^p \right)^{\frac{1}{p}} \right) \le$$

$$\le K_p E_n(f^{\overline{\psi}}) \left(\sum_{k=2n+1}^{\infty} \frac{|\psi_2(k)|}{k} + \right.$$

$$\left. + \sum_{k=n+1}^{\infty} (k+1)(|\triangle^2 \psi_1(k)| + |\triangle^2 \psi_2(k)|) \right) +$$

$$+ K_p \left(\sum_{k=n+1}^{\infty} (k+1)(|\triangle^2 \psi_1(k)| + |\triangle^2 \psi_2(k)|) \right) \times$$

$$\times \left(\left(\frac{1}{n} \sum_{k=n}^{2n-1} \Big| \frac{1}{\pi} \int\limits_{\frac{\pi}{n}}^{\pi} \Delta_n(f) \frac{\sin kt}{t} dt \Big|^p \right)^{\frac{1}{p}} + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{1}{n} \sum_{k=n}^{2n-1} \Big| \frac{1}{\pi} \int\limits_{\frac{\pi}{n}}^{\pi} \Delta_n(f) \frac{\cos kt}{t} dt \Big|^p \right)^{\frac{1}{p}} \right).$$

Далі позначимо через S суму двох доданків

$$S = \left(\frac{1}{n} \sum_{k=n}^{2n-1} \Big| \frac{1}{\pi} \int\limits_{\frac{\pi}{n}}^{\pi} \Delta_n(f) \frac{\sin kt}{t} dt \Big|^p \right)^{\frac{1}{p}} +$$

$$+\left(\frac{1}{n}\sum_{k=n}^{2n-1}\Big|\frac{1}{\pi}\int_{\frac{\pi}{n}}^{\pi}\Delta_n(f)\frac{\cos kt}{t}dt\Big|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

і для її оцінки при фіксованих x та n покладемо

$$\varphi_n(t)=\begin{cases}\frac{\Delta_n(f)}{t} & \text{при } t\in[\frac{\pi}{n},\pi],\\ 0, & \text{при інших значеннях } t.\end{cases}$$

Коефіцієнти Фур'є цієї функції позначимо через $\alpha_k=\alpha_k(\varphi_n)$ та $\beta_k=\beta_k(\varphi_n)$, тоді

$$S=\left(\frac{1}{n}\sum_{k=n}^{2n-1}|\alpha_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\frac{1}{n}\sum_{k=n}^{2n-1}|\beta_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Оскільки $1<p'\le 2$, $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{p'}=1$, то можемо використати теорему Хаусдорфа–Юнга [11, с. 153], згідно з якою

$$\left(\frac{1}{n}\sum_{k=n}^{2n-1}|\alpha_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}\le\frac{1}{n^{\frac{1}{p}}}\|\varphi_n\|_{p'}\le\frac{1}{\pi n^{\frac{1}{p}}}\left(\int_{\frac{\pi}{n}}^{\pi}\frac{|\Delta_n(f)|^{p'}}{t^{p'}}dt\right)^{\frac{1}{p'}}\le$$

$$\le K_pE_n(f^{\overline{\psi}})n^{-\frac{1}{p}}n^{\frac{p'-1}{p'}}=K_pE_n(f^{\overline{\psi}})n^{1-\frac{1}{p'}-\frac{1}{p}}=K_pE_n(f^{\overline{\psi}}).$$

Аналогічно

$$\left(\frac{1}{n}\sum_{k=n}^{2n-1}|\beta_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}\le K_pE_n(f^{\overline{\psi}}).$$

Отже,

$$S\le K_pE_n(f^{\overline{\psi}})$$

і тому

$$R_+\le K_pE_n(f^{\overline{\psi}})\left(\sum_{k=2n+1}^{\infty}\frac{|\psi_2(k)|}{k}\quad+\right.$$

$$+\sum_{k=n+1}^{\infty}(k+1)(|\triangle^2\psi_1(k)|+|\triangle^2\psi_2(k)|)\Bigg).$$

Оцінка величини R_- із співвідношення (4) проводиться аналогічно і має місце нерівність

$$R_-\leq K_pE_n(f^{\overline{\psi}})\Bigg(\sum_{k=2n+1}^{\infty}\frac{|\psi_2(k)|}{k}\quad+$$

$$+\sum_{k=n+1}^{\infty}(k+1)(|\triangle^2\psi_1(k)|+|\triangle^2\psi_2(k)|)\Bigg),$$

тому з (4) слідує

$$R_n^p(f;x)\leq K_pE_n(f^{\overline{\psi}})\Bigg(\sum_{k=2n+1}^{\infty}\frac{|\psi_2(k)|}{k}\quad+$$

$$+\sum_{k=n+1}^{\infty}(k+1)(|\triangle^2\psi_1(k)|+|\triangle^2\psi_2(k)|)\Bigg),$$

У випадку $2\leq p<\infty$ теорема доведена.

Оцінка (3) у випадку $0<p<2$ слідує з доведеного, для цього слід використати наслідок з нерівності Гельдера [12, c. 41], тобто

$$\left(\frac{1}{n}\sum_{k=n}^{2n-1}|\rho_n(f;x)|^p\right)^{\frac{1}{p}}\leq\left(\frac{1}{n}\sum_{k=n}^{2n-1}|\rho_n(f;x)|^s\right)^{\frac{1}{s}},$$

де $0<p\leq s$.

Теорема доведена.

Зауваження. Якщо в умові теореми 1 послідовності $\psi_1(k)$ та $\psi_2(k)$ є опуклими, то співвідношення (3) раніше було встановлено О. І. Степанцем [1].

Теорема 2. *Нехай послідовності $\psi_1(k)$ та $\psi_2(k)$, що прямують до нуля, є квазіопуклими та крім того виконується* (2), λ_k —

незростаюча послідовність невід'ємних чисел і числа $\beta_k = \lambda_k \alpha_k^p$, *де*

$$\alpha_k = \sum_{k=2n+1}^{\infty} \frac{|\psi_2(k)|}{k} + \sum_{k=n+1}^{\infty} (k+1)\big(|\triangle^2\psi_1(k)| + |\triangle^2\psi_2(k)|\big),$$

не зростають. Тоді для довільної функції $f \in C^{\overline{\psi}}C^0$ *та довільного* $0 < p < \infty$ *у всіх точках* $x \in [-\pi, \pi]$ *має місце наступна нерівність*

$$H_n^p(f;\lambda;x) \leq K_p \left(n\lambda_n \alpha_n^p E_n^p(f^{\overline{\psi}}) + \sum_{k=n}^{\infty} \lambda_k \alpha_k^p E_k^p(f^{\overline{\psi}}) \right).$$

Доведення. Покладемо $n_0 = n$, $n_1 = 2n_0, \ldots,$ $n_i = 2n_{i-1}, \ldots$. Тоді

$$H_n^p(f;\lambda;x) = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{k=n_i}^{n_{i+1}-1} \lambda_k |\rho_k(f;x)|^p \leq \sum_{i=0}^{\infty} \lambda_{n_i} \sum_{k=n_i}^{2n_i-1} |\rho_k(f;x)|^p.$$

Для оцінки останнього виразу застосуємо теорему 1 і отримаємо

$$H_n^p(f;\lambda;x) \leq K_p \sum_{i=0}^{\infty} \lambda_{n_i} n_i \alpha_{n_i}^p E_{n_i}^p(f^{\overline{\psi}}).$$

Оскільки за умовою теореми $\lambda_k \alpha_k^p \geq \lambda_{k+1}\alpha_{k+1}^p$, то для всіх k таких, що $n_{i-1} \leq k \leq 2n_{i-1} - 1 < n_i$ буде мати місце нерівність $\lambda_{n_i}\alpha_{n_i}^p E_{n_i}^p(f^{\overline{\psi}}) \leq \lambda_k \alpha_k^p E_k^p(f^{\overline{\psi}})$ і значить

$$\lambda_{n_i}\alpha_{n_i}^p E_{n_i}^p(f^{\overline{\psi}}) = \frac{1}{n_{i-1}} \sum_{k=n_{i-1}}^{2n_{i-1}-1} \lambda_{n_i}\alpha_{n_i}^p E_{n_i}^p(f^{\overline{\psi}}) \leq$$

$$\leq \frac{1}{n_{i-1}} \sum_{k=n_{i-1}}^{2n_{i-1}-1} \lambda_k \alpha_k^p E_k^p(f^{\overline{\psi}}).$$

Тоді

$$H_n^p(f;\lambda;x) \leq$$

$$\leq K_p\left(\lambda_{n_0}n_0\alpha_{n_0}^p E_{n_0}^p(f^{\overline{\psi}})+\sum_{i=1}^{\infty}\frac{n_i}{n_{i-1}}\sum_{k=n_{i-1}}^{2n_{i-1}-1}\lambda_{n_i}\alpha_{n_i}^p E_{n_i}^p(f^{\overline{\psi}})\right)\leq$$

$$\leq K_p\left(\lambda_{n_0}n_0\alpha_{n_0}^p E_{n_0}^p(f^{\overline{\psi}})+\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{k=n_{i-1}}^{2n_{i-1}-1}\lambda_k\alpha_k^p E_k^p(f^{\overline{\psi}})\right)\leq$$

$$\leq K_p\left(n\lambda_n\alpha_n^p E_n^p(f^{\overline{\psi}})+\sum_{k=n}^{\infty}\lambda_k\alpha_k^p E_k^p(f^{\overline{\psi}})\right).$$

Теорему доведено.

Якщо в теоремі 2 покласти $n=0$ і задати послідовність λ_k так

$$\lambda_k=\lambda_k^{(m)}=\begin{cases}\frac{1}{m+1}, & \text{при } k\in[0,m],\\ 0, & \text{при } k\geq m+1,\end{cases}$$

то отримаємо такий наслідок

Наслідок. *Нехай послідовності $\psi_1(k)$ та $\psi_2(k)$ є квазіопуклими та виконується (2), тоді для довільної функції $f\in C^{\overline{\psi}}C^0$ та довільного $0<p<\infty$ має місце така нерівність*

$$\sum_{k=0}^{m}|\rho_k(f;x)|^p\leq K_p\alpha_0^p\sum_{k=0}^{m}E_k^p(f^{\overline{\psi}}).$$

Автор висловлює подяку рецензентам за увагу до роботи та слушні зауваження.

1. *Степанец А. И.* Методы теории приближений: В 2 ч. // Праці Ін-ту математики НАН України. — 2002. — **40**. — Ч. I. — 427 с.
2. *Hardy G. H., Littlewood J. E.* Sur la serie de Fourier d'une fonction a carre sommable // Comput. Rev. — 1913. — **153**. — P. 1307 – 1309.
3. *Hardy G. H., Littlewood J. E.* On the strong summability of Fourier series // Proc. London. Math. Soc. — 1926. — **26**. — P. 273 – 286.
4. *Alexits G., Kralik D.* Über die Approximation mit starken de la Vallee-Poussinschen Mitteln // Acta Math. Hungar. — 1965. — **16**, №1 – 2. — P. 43 – 49.

5. *Totik V.* On the strong approximation of Fourier series // Acta Math. Acad. Sci. Hungar. — 1980. — **35**, № 1 – 2. — P. 151 — 172.
6. *Пачулиа Н. Л., Степанец А. И.* Сильная суммируемость рядов Фурье на классах (ψ, β)–дифференцируемых функций // Мат. заметки. — 1988. — **44**, № 4. — С. 506 – 516.
7. *Пачулиа Н. Л.* О сильной суммируемости рядов Фурье по системам функций полиномиального вида // Тр. Мат. ин-та АН СССР. — 1987. — **180**. — С. 172 – 174
8. *Степанец А. И.* Скорость сходимости группы отклонений на множествах $\overline{\psi}$-интегралов // Укр. мат. журн. — 1999. — **51**, № 12. — С. 1673 – 1693.
9. *Теляковский С. А.* Условия интегрируемости тригонометрических рядов и их приложение к изучению линейных методов суммирования рядов Фурье // Изв. АН СССР. Сер. Мат. — 1964. — **28**. — С. 1209 – 1236.
10. *Теляковский С. А.* Оценка нормы функции через ее коэффициенты Фурье, удобная в задачах теории аппроксимации // Тр. Мат. ин-та АН СССР. — 1971. — **109**. — С. 65 – 97.
11. *Зигмунд А.* Тригонометрические ряды. — М.: Мир, 1965. — Т.2 — 537 с.
12. *Харди Г. Г., Литтлвуд Д. Е., Полиа Г.* Неравенства. — М.: ИЛ, 1948. — 456 с.