Збірник праць Ін-ту математики НАН України 2014, Т. 11, № 3, 47-55

УДК 517.53

Н. М. Гаврилюк (Східноєвропейський національний університет імені Лесі Українки, Луцьк)

А. П. Голуб (Ін–т математики НАН України, Київ)

АПРОКСИМАНТИ ПАДЕ РЯДІВ, ПОВ'ЯЗАНИХ З ДРОБОВО–ЛІНІЙНИМИ ПЕРЕТВОРЕННЯМИ

Exact expressions of Padé approximants are constructed for some basic hypergeometric series.

Для деяких базисних гіпергеометричних рядів побудовано явні вирази їх апроксимант Паде.

В [1] встановлено такий результат.

Теорема 1. *Апроксиманти Паде функції*

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t_0 z^k}{(1-\delta\gamma^k)t_0 + \delta\gamma^k}, \tag{1}$$

де $\gamma, \delta \in (0,\infty)\backslash\{1\}$, $t_0 \in (0,1)$, *порядків* $[N-1/N]$, $N \geq 1$, *існують, невироджені і можуть бути записані у вигляді*

$$[N-1/N]_f(z) = \frac{P_{N-1}(z)}{Q_N(z)}, \tag{2}$$

де

$$Q_N(z) = \sum_{k=0}^{N} c_k^{(N)} z^{N-k}, \tag{3}$$

$$P_{N-1}(z) = \sum_{m=0}^{N-1} z^m \sum_{k=0}^{m} c_{N-k}^{(N)} \frac{t_0}{(1-\delta\gamma^{m-k})t_0 + \delta\gamma^{m-k}}, \tag{4}$$

а $c_k^{(N)}$, $k = \overline{0,N}$, *— коефіцієнти біортогонального полінома*

$$Y_N = \sum_{k=0}^{N} c_k^{(N)} y_k, \tag{5}$$

© **Н. М. Гаврилюк, А. П. Голуб, 2014**

що визначається співвідношеннями

$$Y_N(x_k) = 0, \quad k = \overline{0, N-1}, \tag{6}$$

де

$$x_k(t) = \frac{t}{(1-\delta\gamma^k)t + \delta\gamma^k}, \quad k = \overline{0, \infty},$$

$$y_j(x) = x(t_j) = x\left(\frac{t_0}{(1-\gamma^j)t_0 + \gamma^j}\right), \quad j = \overline{0, \infty}.$$

Відзначимо, що коефіцієнти ряду (1) можуть бути записані у вигляді

$$s_k = \frac{t_0}{t_0 - \delta t_0\gamma^k + \delta\gamma^k} = \frac{t_0}{t_0 + \delta(1-t_0)\gamma^k} = \frac{1}{1+\varepsilon\gamma^k},$$

де

$$\varepsilon = \frac{\delta(1-t_0)}{t_0}.$$

Для сталої ε, очевидно, справедливі нерівності $0 < \varepsilon < \infty$.

Отже, функцію (1) можна записати у вигляді

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{1+\varepsilon\gamma^k}.$$

При $q \neq 1$ та $a \in \mathbb{R}$ q–символ Похгаммера, або зсунутий q–факторіал визначається за формулою (див., наприклад, [2, с. 22])

$$(a;q)_n = \begin{cases} 1, & n = 0, \\ (1-a)(1-aq)\cdot\ldots\cdot(1-aq^{n-1}), & n = 1, 2, \ldots\ . \end{cases}$$

З урахуванням цього позначення

$$1+\varepsilon\gamma^k = \frac{(1+\varepsilon)(1+\varepsilon\gamma)\cdot\ldots\cdot(1+\varepsilon\gamma^k)}{(1+\varepsilon)(1+\varepsilon\gamma)\cdot\ldots\cdot(1+\varepsilon\gamma^{k-1})} = \frac{(1+\varepsilon)(-\varepsilon\gamma;\gamma)_k}{(-\varepsilon;\gamma)_k}.$$

Таким чином,

$$f(z) = \frac{1}{1+\varepsilon}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-\varepsilon;\gamma)_k}{(-\varepsilon\gamma;\gamma)_k} z^k = \frac{1}{1+\varepsilon}\ {}_2\phi_1\left[\begin{matrix} \gamma; -\varepsilon \\ -\varepsilon\gamma \end{matrix}\ ;\gamma; z\right], \tag{7}$$

де базисний гіпергеометричний ряд визначається формулою (див. [2, с. 23])

$$
{}_2\phi_1\left[\begin{array}{c} a;b \\ c \end{array};q;z\right]=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a;q)_n(b;q)_n}{(q;q)_n(c;q)_n}z^n.
$$

Відзначимо, що визначення коефіцієнтів біортогонального полінома (5) можна звести до підрахунку визначників матриці Коші, завдяки чому апроксиманти Паде (2) – (4) можна записати в явному вигляді. А саме, має місце наступний результат.

Теорема 2. *Апроксиманти Паде функції* (7) *при* $\gamma\in(0,\infty)\backslash\{1\}$, $\varepsilon\in(0,\infty)$, *порядків* $[N-1/N]$, $N\geq 1$, *можуть бути записані у вигляді* (2), *де*

$$
Q_N(z)=\sum_{k=0}^{N}z^{N-k}\frac{(-\varepsilon;\gamma)_{k+N}}{(-\varepsilon;\gamma)_k\gamma^{(2N-k-1)k/2}(\gamma;\gamma)_k(\gamma;\gamma)_{N-k}},
$$

$$
P_{N-1}(z)=\sum_{m=0}^{N-1}z^m\sum_{k=0}^{m}(-1)^k\frac{(-\varepsilon;\gamma)_{2N-k}}{(-\varepsilon;\gamma)_{N-k}\gamma^{\frac{(N+k-1)(N-k)}{2}}(\gamma;\gamma)_k(\gamma;\gamma)_{N-k}}\times
$$
$$
\times\frac{1}{1+\varepsilon\gamma^{m-k}}.
$$

Доведення. Згідно з [3, с. 94] нетривіальний біортогональний поліном (5), для якого є справедливими співвідношення (6), можна записати в детермінантному вигляді

$$
Y_N=\varepsilon_N\begin{vmatrix} s_0 & s_1 & \dots & s_N \\ s_1 & s_2 & \dots & s_{N-1} \\ . & . & \dots & . \\ . & . & \dots & . \\ s_{N-1} & s_N & \dots & s_{2N-1} \\ y_0 & y_1 & \dots & y_N \end{vmatrix}, \tag{8}
$$

де ε_N — ненульова константа, що може обиратися з міркувань нормування полінома Y_N. Розкладаючи визначник (8) за елементами останнього рядка, отримаємо

$$Y_N = \varepsilon_N \sum_{j=0}^{N} (-1)^{N-j} y_j \times$$

$$\times \begin{vmatrix} s_0 & \ldots & s_{j-1} & s_{j+1} & \ldots & s_N \\ s_1 & \ldots & s_j & s_{j+2} & \ldots & s_{N+1} \\ . & \ldots & . & . & \ldots & . \\ . & \ldots & . & . & \ldots & . \\ s_{N-1} & \ldots & s_{N+j-2} & s_{N+j} & \ldots & s_{2N-1} \end{vmatrix}. \tag{9}$$

Але для послідовності $\{s_k\}_{k=o}^{\infty}$ має місце узагальнене моментне зображення (див. [3, с. 91])

$$s_{k+j} = y_j(x_k) = x_k(t_j), \qquad k, j = \overline{0, \infty}.$$

Отже,

$$\begin{vmatrix} s_0 & \ldots & s_{j-1} & s_{j+1} & \ldots & s_N \\ s_1 & \ldots & s_j & s_{j+2} & \ldots & s_{N+1} \\ . & \ldots & . & . & \ldots & . \\ . & \ldots & . & . & \ldots & . \\ s_{N-1} & \ldots & s_{N+j-2} & s_{N+j} & \ldots & s_{2N-1} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} x_0(t_0) & \ldots & x_0(t_{j-1}) & x_0(t_{j+1}) & \ldots & x_0(t_N) \\ x_1(t_0) & \ldots & x_1(t_{j-1}) & x_1(t_{j+1}) & \ldots & x_1(t_N) \\ . & \ldots & . & . & \ldots & . \\ . & \ldots & . & . & \ldots & . \\ x_{N-1}(t_0) & \ldots & x_{N-1}(t_{j-1}) & x_{N-1}(t_{j+1}) & \ldots & x_{N-1}(t_N) \end{vmatrix}. \tag{10}$$

Неважко переконатися, що визначник (10) можна виразити через визначник матриці Коші (див., наприклад, [4, с. 494]).

Дійсно,

$$x_k(t_j) = \frac{t_j}{(1-\delta\gamma^k)t_j + \delta\gamma^k} = \frac{1}{1-\delta\gamma^k + \delta\gamma^k t_j^{-1}} = \frac{\gamma^{-k}}{\gamma^{-k} - \delta + \delta t_j^{-1}} =$$

$$= \frac{\gamma^{-k}}{\xi_k + \eta_j},$$

де $\xi_k = \gamma^{-k} - \delta, \quad \eta_j = \delta t_j^{-1}$.

Таким чином, останній визначник дорівнює

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{\xi_0+\eta_0} & \cdots & \frac{1}{\xi_0+\eta_{j-1}} & \frac{1}{\xi_0+\eta_{j+1}} & \cdots & \frac{1}{\xi_0+\eta_N} \\ \frac{\gamma^{-1}}{\xi_1+\eta_0} & \cdots & \frac{\gamma^{-1}}{\xi_1+\eta_{j-1}} & \frac{\gamma^{-1}}{\xi_1+\eta_{j+1}} & \cdots & \frac{\gamma^{-1}}{\xi_1+\eta_N} \\ . & \cdots & . & . & \cdots & . \\ . & \cdots & . & . & \cdots & . \\ \frac{\gamma^{-N+1}}{\xi_{N-1}+\eta_0} & \cdots & \frac{\gamma^{-N+1}}{\xi_{N-1}+\eta_{j-1}} & \frac{\gamma^{-N+1}}{\xi_{N-1}+\eta_{j+1}} & \cdots & \frac{\gamma^{-N+1}}{\xi_{N-1}+\eta_N} \end{vmatrix} =$$

$$= \prod_{k=0}^{N-1} \gamma^{-k} \begin{vmatrix} \frac{1}{\xi_0+\eta_0} & \cdots & \frac{1}{\xi_0+\eta_{j-1}} & \frac{1}{\xi_0+\eta_{j+1}} & \cdots & \frac{1}{\xi_0+\eta_N} \\ \frac{1}{\xi_1+\eta_0} & \cdots & \frac{1}{\xi_1+\eta_{j-1}} & \frac{1}{\xi_1+\eta_{j+1}} & \cdots & \frac{1}{\xi_1+\eta_N} \\ . & \cdots & . & . & \cdots & . \\ . & \cdots & . & . & \cdots & . \\ \frac{1}{\xi_{N-1}+\eta_0} & \cdots & \frac{1}{\xi_{N-1}+\eta_{j-1}} & \frac{1}{\xi_{N-1}+\eta_{j+1}} & \cdots & \frac{1}{\xi_{N-1}+\eta_N} \end{vmatrix} =$$

$$= \prod_{k=0}^{N-1} \gamma^{-k} \; \frac{\prod\limits_{i<m} (\xi_i - \xi_m) \prod\limits_{i<m;i,m\neq j} (\eta_i - \eta_m)}{\prod\limits_{i=0}^{N-1} \prod\limits_{m=0;m\neq j}^{N} (\xi_i + \eta_m)} =$$

$$= \varkappa_N^{(1)} \frac{\prod\limits_{m=1}^{N} \prod\limits_{i=0}^{m-1} (\eta_j - \eta_m)}{\prod\limits_{i=0}^{j-1} (\eta_i - \eta_j) \prod\limits_{m=j+1}^{N} (\eta_j - \eta_m)} \cdot \frac{\prod\limits_{i=0}^{N-1} (\xi_i + \eta_j)}{\prod\limits_{i=0}^{N-1} \prod\limits_{m=0}^{N} (\xi_i + \eta_m)} =$$

$$= \varkappa_N^{(2)} \frac{\prod\limits_{i=0}^{N-1} (\xi_i + \eta_j)}{\prod\limits_{i=0}^{j-1} (\eta_i - \eta_j) \prod\limits_{m=j+1}^{N} (\eta_j - \eta_m)},$$

тут і далі $\varkappa_N^{(l)}, \; l = 1, 2, ...,$ — деякі константи, що залежать від N, але не залежать від j. Підставимо в останню формулу значення

$$\xi_k = \gamma^{-k} - \delta, \quad \eta_j = \delta t_j^{-1}.$$

Отримаємо:

$$\varkappa_N^{(2)} \frac{\prod\limits_{i=0}^{N-1} (\gamma^{-i} - \delta + \delta t_j^{-1})}{\prod\limits_{i=0}^{j-1} (\delta t_i^{-1} - \delta t_j^{-1}) \prod\limits_{m=j+1}^{N} (\delta t_j^{-1} - \delta t_m^{-1})} =$$

$$= \varkappa_N^{(2)} \frac{t_j^{-N} \prod\limits_{i=0}^{N-1} \gamma^{-i} \prod\limits_{i=0}^{N-1} (t_j - \delta\gamma^i t_j + \delta\gamma^i)}{\delta^N t_j^{-N} \prod\limits_{i=0}^{j-1} t_i^{-1} \prod\limits_{m=j+1}^{N} t_m^{-1} \prod\limits_{i=0}^{j-1} (t_j - t_i) \prod\limits_{m=j+1}^{N} (t_m - t_j)} =$$

$$= \varkappa_N^{(3)} \frac{\prod\limits_{i=0}^{N-1} (t_j - \delta\gamma^i t_j + \delta\gamma^i)}{t_j \prod\limits_{i=0}^{N} t_i^{-1} \prod\limits_{i=0}^{j-1} (t_j - t_i) \prod\limits_{m=j+1}^{N} (t_m - t_j)}. \tag{11}$$

Розглянемо окремо

$$t_j - t_i = \frac{t_0}{(1-\gamma^j)t_0 + \gamma^j} - \frac{t_0}{(1-\gamma^i)t_0 + \gamma^i} =$$

$$= \frac{t_0(1-t_0)(\gamma^i - \gamma^j)}{\big((1-\gamma^j)t_0 + \gamma^j\big)\big((1-\gamma^i)t_0 + \gamma^i\big)}. \tag{12}$$

Підрахуємо чисельник дробу (11), матимемо

$$\prod_{i=0}^{N-1} (t_j - \delta\gamma^i t_j + \delta\gamma^i) =$$

$$= \prod_{i=0}^{N-1} \left(\frac{t_0}{(1-\gamma^j)t_0 + \gamma^j} - \frac{\delta\gamma^i t_0}{(1-\gamma^j)t_0 + \gamma^j} + \delta\gamma^i \right) =$$

$$= \frac{\prod\limits_{i=0}^{N-1} \left(t_0 - \delta\gamma^{i+j} t_0 + \delta\gamma^{i+j}\right)}{\big((1-\gamma^j)t_0 + \gamma^j\big)^N} = \frac{t_0^N \prod\limits_{i=0}^{N-1} \left(1 + \frac{\delta(1-t_0)}{t_0}\gamma^{i+j}\right)}{\big((1-\gamma^j)t_0 + \gamma^j\big)^N} =$$

$$= \frac{t_0^N \prod_{i=0}^{N-1}(1+\varepsilon\gamma^{i+j})}{((1-\gamma^j)t_0+\gamma^j)^N} = \frac{t_0^N(1+\varepsilon\gamma^j)(1+\varepsilon\gamma^{j+1})\cdot\ldots\cdot(1+\varepsilon\gamma^{j+N-1})}{\big((1-\gamma^j)t_0+\gamma^j\big)^N} =$$

$$= \frac{t_0^N(1+\varepsilon)(1+\varepsilon\gamma)\cdot\ldots\cdot(1+\varepsilon\gamma^{j+N-1})}{\big((1-\gamma^j)t_0+\gamma^j\big)^N(1+\varepsilon)(1+\varepsilon\gamma)\cdot\ldots\cdot(1+\varepsilon\gamma^{j-1})} =$$

$$= \frac{t_0^N(-\varepsilon;\gamma)_{j+N}}{\big((1-\gamma^j)t_0+\gamma^j\big)^N(-\varepsilon;\gamma)_j}. \tag{13}$$

Підставимо (12) та (13) в (11). Отримаємо:

$$\varkappa_N^{(4)} \frac{t_0^N(-\varepsilon;\gamma)_{j+N}}{\big((1-\gamma^j)t_0+\gamma^j\big)^N(-\varepsilon;\gamma)_j} \times \frac{(1-\gamma^j)t_0+\gamma^j}{t_0}\times$$

$$\times\prod_{i=0}^{j-1}\frac{\big((1-\gamma^j)t_0+\gamma^j\big)\big((1-\gamma^i)t_0+\gamma^i\big)}{t_0(1-t_0)(\gamma^i-\gamma^j)}\times$$

$$\times\prod_{m=j+1}^{N}\frac{\big((1-\gamma^m)t_0+\gamma^m\big)\big((1-\gamma^j)t_0+\gamma^j\big)}{t_0(1-t_0)(\gamma^j-\gamma^m)} =$$

$$= \varkappa_N^{(5)} \frac{(-\varepsilon;\gamma)_{j+N}\big((1-\gamma^j)t_0+\gamma^j\big)^{N+1}}{\big((1-\gamma^j)t_0+\gamma^j)^N(-\varepsilon;\gamma)_j}\times$$

$$\times\frac{\prod_{i=0}^{j-1}\big((1-\gamma^i)t_0+\gamma^i\big)\prod_{m=j+1}^{N}\big((1-\gamma^m)t_0+\gamma^m\big)}{\big(t_0(1-t_0)\big)^N\prod_{i=0}^{j-1}(\gamma^i-\gamma^j)\prod_{m=j+1}^{N}(\gamma^j-\gamma^m)} =$$

$$= \varkappa_N^{(6)} \frac{(-\varepsilon;\gamma)_{j+N}\prod_{i=0}^{N}((1-\gamma^i)t_0+\gamma^i)}{(-\varepsilon;\gamma)_j\prod_{i=0}^{j-1}(\gamma^i-\gamma^j)\prod_{m=j+1}^{N}(\gamma^j-\gamma^m)} =$$

$$= \varkappa_N^{(7)} \frac{(-\varepsilon;\gamma)_{j+N}}{(-\varepsilon;\gamma)_j\prod_{i=0}^{j-1}(\gamma^i-\gamma^j)\prod_{m=j+1}^{N}(\gamma^j-\gamma^m)}.$$

Розглянемо окремо

$$\prod_{i=0}^{j-1}(\gamma^i-\gamma^j)=\prod_{i=0}^{j-1}\gamma^i\prod_{i=0}^{j-1}(1-\gamma^{j-i})=\prod_{i=0}^{j-1}\gamma^i\prod_{i=1}^{j}(1-\gamma^i)=$$

$$=\gamma^{j(j-1)/2}\prod_{i=1}^{j}(1-\gamma^i)=\gamma^{j(j-1)/2}(\gamma;\gamma)_j.$$

Аналогічно

$$\prod_{m=j+1}^{N}(\gamma^j-\gamma^m)=\prod_{m=j+1}^{N}\gamma^m(\gamma^{j-m}-1)=\prod_{m=j+1}^{N}\gamma^m\cdot\prod_{m=1}^{N-j}(\gamma^{-m}-1)=$$

$$=\prod_{m=j+1}^{N}\gamma^m\cdot\prod_{m=1}^{N-j}\gamma^{-m}\cdot\prod_{m=1}^{N-j}(1-\gamma^m)=\gamma^{(j+1+N)(N-j)/2}\times$$

$$\times\gamma^{-(N-j)(N-j+1)/2}\prod_{m=1}^{N-j}(1-\gamma^m)=\gamma^{j(N-j)}(\gamma;\gamma)_{N-j}.$$

У результаті отримаємо для визначників (10) формулу

$$\varkappa_N^{(8)}\frac{(-\varepsilon;\gamma)_{j+N}}{(-\varepsilon;\gamma)_j\gamma^{j(j-1)/2+j(N-j)}(\gamma;\gamma)_j(\gamma;\gamma)_{N-j}}=$$

$$=\frac{(-\varepsilon;\gamma)_{j+N}}{(-\varepsilon;\gamma)_j\gamma^{(2N-j-1)j/2}(\gamma;\gamma)_j(\gamma;\gamma)_{N-j}}.$$

Згідно з (9) це означає, що коефіцієнти полінома (5) можуть бути записані у вигляді

$$c_k^{(N)}=\varepsilon_N(-1)^{N-k}\frac{(-\varepsilon;\gamma)_{k+N}}{(-\varepsilon;\gamma)_k\gamma^{(2N-k-1)k/2}(\gamma;\gamma)_k(\gamma;\gamma)_{N-k}},$$

звідки і випливає твердження теореми.

1. *Golub A. P.* Generalized moment representations and Padé approximants associated with bilinear transformations // Укр. мат. журн. — 2002. — **54**, № 5. — С. 335 – 339.

2. *Гаспер Дж., Рахман М.* Базисные гипергеометрические ряды. — М.: Мир, 1993. — 349 с.

3. *Голуб А.П.* Узагальнені моментні зображення та апроксимації Паде. — Київ: Ін-т математики НАН України, 2002. — 222 с.

4. *Маршалл А., Олкин И.* Неравенства: теория мажоризации и ее приложения. — М.: Мир, 1983. — 576 с.