Збірник праць Ін-ту математики НАН України 2014, Т. 11, № 3, 35-46

УДК 517.51

С. Б. Вакарчук (Днепропетровский университет имени Альфреда Нобеля)
А. В. Швачко (Днепропетровский государственный аграрно-экономический университет)

О НАИЛУЧШЕМ ПРИБЛИЖЕНИИ "УГЛОМ" В СРЕДНЕМ НА ПЛОСКОСТИ $\mathbb{R}^2$ С ВЕСОМ ЧЕБЫШЕВА–ЭРМИТА

Exact inequalities of Jackson type connected with the best approximation by "angles" of algebraic polynomials are obtained on the classes of differentiable functions of two variables in the metric of space $L_{2,\rho}(\mathbb{R}^2)$ at the Chebyshev–Hermite weight.

Точні нерівності типу Джексона, пов'язані з найкращим наближенням "кутами" з алгебраїчних поліномів отримано для класів диференційованих функцій двох змінних у метриці простору $L_{2,\rho}(\mathbb{R}^2)$ з вагою Чебишева–Ермiта.

1. Символом $L_2(\mathbb{R}^2)$, где $\mathbb{R}^2 := \mathbb{R} \otimes \mathbb{R} = \big\{(x,y) : -\infty < x, y < \infty\big\}$, обозначим пространство действительнозначных измеримых функций, суммируемых в квадрате на плоскости $\mathbb{R}^2$. Под $L_{2,\rho}(\mathbb{R}^2)$, где $\rho(x,y) := \exp(-(x^2+y^2)/2)$, понимаем множество таких функций f, для которых $f \cdot \rho \in L_2(\mathbb{R}^2)$. Норма в $L_{2,\rho}(\mathbb{R}^2)$ определяется следующим образом:

$$\|f\| := \|f\|_{2,\rho} = \left\{ \iint\limits_{\mathbb{R}^2} (f(x,y)\rho(x,y))^2 \, dxdy \right\}^{1/2}.$$

Пусть $H_k(x), k \in \mathbb{Z}_+$, есть ортонормированная система многочленов Эрмита (см., например, [1]) и

$$\sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} c_{ij}(f) H_i(x) H_j(y) \tag{1}$$

— двойной ряд Фурье–Эрмита, который сопоставляется функции $f \in L_{2,\rho}(\mathbb{R}^2)$, а

$$c_{ij}(f) := \iint\limits_{\mathbb{R}^2} f(x,y)H_i(x)H_j(y)\rho^2(x,y)dxdy$$

— коэффициенты Фурье–Эрмита функции f. Хорошо известно, что

$$\|f\|^2 = \sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty} c_{ij}^2(f).$$

Сходимость ряда (1) к функции f в метрике пространства $L_{2,\rho}(\mathbb{R}^2)$ понимается в смысле сходимости к f его прямоугольных частных сумм.

Символом $L_{2,\widetilde{\rho}}(\mathbb{R})$, где $\mathbb{R} := \{x : -\infty < x < \infty\}$, $\widetilde{\rho}(x) :=$ $:= \exp(-x^2/2)$, обозначим множество действительнозначных измеримых функций f таких, что функции $f \cdot \widetilde{\rho}$ суммируемы в квадрате на действительной оси $\mathbb{R}$. Пусть $L_{2,\widetilde{\rho(x)}}(\mathbb{R})$ (соответственно $L_{2,\widetilde{\rho(y)}}(\mathbb{R})$) есть пространство $L_{2,\widetilde{\rho}}(\mathbb{R})$ в случае, когда в качестве $\mathbb{R}$ выступает ось абсцисс OX (соответственно ось ординат OY). Полагаем, что $\mathfrak{N}_{N+1} \subset L_{2,\widetilde{\rho(x)}}(\mathbb{R})$ и $\mathfrak{M}_{M+1} \subset L_{2,\widetilde{\rho(y)}}(\mathbb{R})$ есть конечномерные подпространства с базисами $\{H_i(x)\}_{i=0}^{N}$ и $\{H_j(y)\}_{j=0}^{M}$ соответственно, где $N, M \in \mathbb{Z}_+$. В пространстве $L_{2,\rho}(\mathbb{R}^2)$ рассмотрим множество функций

$$G(\mathfrak{N}_{N+1}, \mathfrak{M}_{M+1}) := L_{2,\widetilde{\rho}(y)}(\mathbb{R}) \otimes \mathfrak{N}_{N+1} \oplus L_{2,\widetilde{\rho}(x)}(\mathbb{R}) \otimes \mathfrak{M}_{M+1}, \qquad (2)$$

где символами $\otimes$ и $\oplus$ обозначены операции тензорного произведения и прямой суммы множеств. Элементы множества (2) имеют следующий вид:

$$g_{N,M}(x,y) := \sum_{i=0}^{N} \varphi_i(y)H_i(x) + \sum_{j=0}^{M} \psi_j(x)H_j(y), \qquad (3)$$

где $\{\varphi_i\}_{i=0}^{N} \subset L_{2,\widetilde{\rho}(y)}(\mathbb{R})$ и $\{\psi_j\}_{j=0}^{M} \subset L_{2,\widetilde{\rho}(x)}(\mathbb{R})$ — произвольные наборы функций из указанных пространств. Функции вида (3) называют "углами" из алгебраических полиномов [2]. Напомним, что понятие "угла", как одного из эффективных средств теории аппроксимации функций многих переменных, было впервые введено М. К. Потаповым в работе [3] и нашло применение в исследованиях других математиков (см., например, [4 – 8]).

Для произвольной функции $f \in L_{2,\rho}(\mathbb{R}^2)$ символом $\mathcal{E}_{N,M}(f)$ обозначим ее наилучшее приближение элементами множества (2) в метрике пространства $L_{2,\rho}(\mathbb{R}^2)$, т.е.

$$\mathcal{E}_{N,M}(f) := \inf\big\{\|f - g_{N,M}\| : g_{N,M} \in G(\mathfrak{N}_{N+1}, \mathfrak{M}_{M+1})\big\}. \qquad (4)$$

Символами $S_{N,\infty}(f)$ и $S_{\infty,M}(f)$ обозначим отрезки ряда (1) функции $f \in L_{2,\rho}(\mathbb{R}^2)$ порядка N по x и M по y соответственно, т.е.

$$S_{N,\infty}(f;x,y) := \sum_{i=0}^{N}\sum_{j=0}^{\infty} c_{ij}(f)H_i(x)H_j(y),$$

$$S_{\infty,M}(f;x,y) := \sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{M} c_{ij}(f)H_i(x)H_j(y)$$

(в смысле сходимости рядов в правой части в пространстве $L_{2,\rho}(\mathbb{R}^2)$). Под $S_{N,M}(f)$ понимаем частную сумму ряда Фурье–Эрмита (1) функции $f \in L_{2,\rho}(\mathbb{R}^2)$ порядка N по x и M по y:

$$S_{N,M}(f;x,y) := \sum_{i=0}^{N}\sum_{j=0}^{M} c_{ij}(f)H_i(x)H_j(y).$$

Функцию

$$\widetilde{S}_{N,M}(f;x,y) := S_{N,\infty}(f;x,y) + S_{\infty,M}(f;x,y) - S_{N,M}(f;x,y) =$$

$$= \sum_{i=0}^{N}\sum_{j=0}^{\infty} c_{ij}(f)H_i(x)H_j(y) + \sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{M} c_{ij}(f)H_i(x)H_j(y) -$$

$$- \sum_{i=0}^{N}\sum_{j=0}^{M} c_{ij}(f)H_i(x)H_j(y) \qquad (5)$$

будем называть обобщенным полиномом Фурье–Эрмита функции $f \in L_{2,\rho}(\mathbb{R}^2)$ порядка N по x и M по y. Несложно показать, что функция (5) может быть представлена в виде (3), т.е. $\widetilde{S}_{N,M}(f)$ является элементом множества (2).

2.

Теорема 1. *Пусть $N, M \in \mathbb{N}$ и $f \in L_{2,\rho}(\mathbb{R}^2)$ — произвольная функция. Тогда справедливо равенство*

$$\mathcal{E}_{N-1,M-1}(f) = \|f - \widetilde{S}_{N-1,M-1}(f)\| = \left\{ \sum_{i=N}^{\infty} \sum_{j=M}^{\infty} c_{ij}^2(f) \right\}^{1/2}, \tag{6}$$

т.е. среди всех элементов $g_{N-1,M-1}$ вида (3)*, принадлежащих множеству $G(\mathfrak{N}_N, \mathfrak{M}_M)$, наилучшее приближение функции f доставляет ее обобщенный полином Фурье–Эрмита $\widetilde{S}_{N-1,M-1}(f)$ порядка $N-1$ по x и $M-1$ по y.*

Доказательство. Пусть фиксирована произвольная функция $g_{N-1,M-1} \in G(\mathfrak{N}_N, \mathfrak{M}_M)$ вида (3). Поскольку $\{\varphi_i\}_{i=0}^{N-1} \subset L_{2,\widetilde{\rho}(y)}(\mathbb{R})$ и $\{\psi_j\}_{j=0}^{M-1} \subset L_{2,\widetilde{\rho}(x)}(\mathbb{R})$, то в смысле сходимости в метриках пространств $L_{2,\widetilde{\rho}(x)}(\mathbb{R})$ и $L_{2,\widetilde{\rho}(y)}(\mathbb{R})$ имеют место следующие равенства

$$\varphi_i(y) = \sum_{j=0}^{\infty} c_j(\varphi_i) H_j(y); \quad i = \overline{0, N-1}, \tag{7}$$

$$\psi_j(x) = \sum_{i=0}^{\infty} c_i(\psi_j) H_i(x); \quad j = \overline{0, M-1}. \tag{8}$$

Из равенств (3) и (7), (8), в смысле сходимости в метрике пространства $L_{2,\rho}(\mathbb{R}^2)$, получаем соотношение

$$g_{N-1,M-1}(x,y) = \sum_{i=0}^{N-1} \sum_{j=0}^{\infty} c_j(\varphi_i) H_i(x) H_j(y) + \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{M-1} c_i(\psi_j) H_i(x) H_j(y). \tag{9}$$

Известно, что пространство $L_{2,\rho}(\mathbb{R}^2)$ со скалярным произведением

$$< f, h >:= \iint\limits_{\mathbb{R}^2} \rho(x,y) f(x,y) h(x,y) dxdy,$$

где $f, h \in L_{2,\rho}(\mathbb{R}^2)$, и нормой $\|f\| := \sqrt{< f, f >}$ является полным гильбертовым пространством. Используя свойства скалярного произведения, отсюда имеем

$$\|f - g_{N-1,M-1}\|^2 =< f - g_{N-1,M-1}, f - g_{N-1,M-1} >=$$

$$=< f, f > -2 < f, g_{N-1,M-1} > + < g_{N-1,M-1}, g_{N-1,M-1} >=$$

$$= \|f\|^2 - 2 < f, g_{N-1,M-1} > + \|g_{N-1,M-1}\|^2. \tag{10}$$

Используя формулы (9), (10), получаем

$$\|f - g_{N-1,M-1}\|^2 = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} c_{ij}^2(f) - 2 \sum_{i=0}^{N-1} \sum_{j=0}^{\infty} c_j(\varphi_i) c_{ij}(f) -$$

$$-2 \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{M-1} c_i(\psi_j) c_{ij}(f) + \sum_{i=0}^{N-1} \sum_{j=0}^{\infty} c_j^2(\varphi_i) +$$

$$+ \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{M-1} c_i^2(\psi_j) + 2 \sum_{i=0}^{N-1} \sum_{j=0}^{M-1} c_i(\psi_j) c_j(\varphi_i) =$$

$$= \sum_{i=N}^{\infty} \sum_{j=M}^{\infty} c_{ij}^2(f) + \sum_{i=0}^{N-1} \sum_{j=M}^{\infty} (c_{ij}(f) - c_j(\varphi_i))^2 + \sum_{i=N}^{\infty} \sum_{j=0}^{M-1} (c_{ij}(f) - c_i(\psi_j))^2 +$$

$$+ \sum_{i=0}^{N-1} \sum_{j=0}^{M-1} (c_{ij}(f) - c_i(\psi_j) - c_j(\varphi_i))^2. \tag{11}$$

Из соотношения (11) следует, что нижняя граница

$$\inf \left\{ \|f - g_{N-1,M-1}\| : g_{N-1,M-1} \in G(\mathfrak{N}_N, \mathfrak{M}_M) \right\}$$

достигается в единственном случае, когда

$$\begin{cases} c_{ij}(f) = c_j(\varphi_i), & \text{где } i = \overline{0, N-1};\ \ j = M, M+1, ...; \\ c_{ij}(f) = c_i(\psi_j), & \text{где } j = \overline{0, M-1};\ \ i = N, N+1, ...; \\ c_{ij}(f) = c_i(\psi_j) + c_j(\varphi_i), & \text{где } i = \overline{0, N-1};\ \ j = \overline{0, M-1} \end{cases} \tag{12}$$

и равна $\sum\limits_{i=N}^{\infty}\sum\limits_{j=M}^{\infty} c_{ij}^2(f)$. Таким образом,

$$\mathcal{E}_{N-1,M-1}(f) = \left\{ \sum_{i=N}^{\infty}\sum_{j=M}^{\infty} c_{ij}^2(f) \right\}^{1/2}.$$

Подставляя в формулу (9) вместо коэффициентов $c_j(\varphi_i)$, где $i = \overline{0, N-1}$; $j = 0, 1, ...,$ и $c_i(\psi_j)$, где $j = \overline{0, M-1}; i = 0, 1, ...,$ их выражения через коэффициенты $c_{ij}(f)$, где $i, j \in \mathbb{Z}_+$, из соотношения (12) получаем обобщенный полином Фурье–Эрмита $\widetilde{S}_{N-1,M-1}(f)$ рассматриваемой функции $f \in L_{2,\rho}(\mathbb{R}^2)$. При этом, согласно (4), $\mathcal{E}_{N-1,M-1}(f) = \|f - \widetilde{S}_{N-1,M-1}(f)\|$. Теорема 1 доказана.

3. При определении характеристик гладкости функций $f \in L_{2,\widetilde{\rho}(x)}(\mathbb{R})$ С. З. Рафальсон предложил использовать оператор обобщенного сдвига следующего специального вида [9]:

$$\mathcal{F}_t(f, x) := \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{\mathbb{R}} f\left(x\sqrt{1-t^2} + tu\right) \widetilde{\rho}^2(u) du, \tag{13}$$

где $|t| \leqslant 1$. Указанный подход получил свое дальнейшее развитие в работах других математиков (см., например, [10–13]). Напомним [11], что оператор $\mathcal{F}_t : L_{2,\widetilde{\rho}(x)}(\mathbb{R}) \to L_{2,\widetilde{\rho}(x)}(\mathbb{R})$ обладает следующими свойствами:

1) $\mathcal{F}_t(f_1 + f_2) = \mathcal{F}_t(f_1) + \mathcal{F}_t(f_2)$,
2) $\mathcal{F}_t(\lambda f) = \lambda \mathcal{F}_t(f),\ \lambda \in \mathbb{R}$,
3) $\mathcal{F}_0(f) \equiv f$,
4) $\|\mathcal{F}_t(f)\| \leqslant \|f\|$,
5) $\|\mathcal{F}_t - f\| \to 0$ при $t \to 0+$,
6) $\mathcal{F}_t(H_n, x) = \left(1-t^2\right)^{n/2} H_n(x),\ n \in \mathbb{Z}_+$.

Символом $\mathcal{F}_t^x(f)$ (соответственно $\mathcal{F}_\tau^y(f)$, где $|\tau| \leqslant 1$) обозначим действие оператора обобщенного сдвига (13) на функцию $f \in L_{2,\rho}(\mathbb{R}^2)$, как на функцию от переменной x (соответственно y) при произвольном, но фиксированном значении другой переменной y (соответственно x). При этом полагаем $\mathcal{F}_t^{\nu,x}(f) := \mathcal{F}_t^{1,x}\left(\mathcal{F}_t^{\nu-1,x}(f)\right)$, где $\nu \in \mathbb{N}$, $\mathcal{F}_t^{0,x}(f) := f$, $\mathcal{F}_t^{1,x}(f) := \mathcal{F}_t^x(f)$. Аналогичным образом записываем $\mathcal{F}_\tau^{\mu,y}(f) := \mathcal{F}_\tau^{1,y}\left(\mathcal{F}_\tau^{\mu-1,y}(f)\right)$, где $\mu \in \mathbb{N}$, $\mathcal{F}_\tau^{0,y}(f) := f$, $\mathcal{F}_\tau^{1,y}(f) := \mathcal{F}_\tau^y(f)$.

Как и в классическом случае, определяем обобщенные конечные разности первого и высших порядков по переменной x, используя оператор обобщенного сдвига (13). Для этого в случае $f \in L_{2,\rho}(\mathbb{R}^2)$ полагаем

$$\Delta_t^x(f) := \mathcal{F}_t^x(f) - f = (\mathcal{F}_t^x - \mathbb{I})\, f,$$

где $\mathbb{I}$ — единичный оператор в пространстве $L_{2,\rho}(\mathbb{R}^2)$. Для $k = 2, 3, ...$ под $\Delta_t^{k,x}(f)$ подразумеваем следующую величину:

$$\Delta_t^{k,x}(f) := \Delta_t^{1,x}\left(\Delta_t^{k-1,x}(f)\right) = (\mathcal{F}_t^x - \mathbb{I})^k\, f = \sum_{i=0}^{k}(-1)^{k-i}\binom{k}{i}\mathcal{F}_t^{i,x}(f),$$

где $\Delta_t^{1,x}(f) := \Delta_t^x(f)$. Аналогичным образом по переменной y получаем

$$\Delta_\tau^y(f) := \mathcal{F}_\tau^y(f) - f = (\mathcal{F}_\tau^y - \mathbb{I})\, f,$$

$$\Delta_\tau^{l,y}(f) := \Delta_\tau^{1,y}\left(\Delta_\tau^{l-1,y}(f)\right) = (\mathcal{F}_\tau^y - \mathbb{I})^l\, f = \sum_{j=0}^{l}(-1)^{l-j}\binom{l}{j}\mathcal{F}_\tau^{j,y}(f),$$

где $l = 2, 3, ...$; $\Delta_\tau^{1,y}(f) := \Delta_\tau^y(f)$.

Для произвольной функции $f \in L_{2,\rho}(\mathbb{R}^2)$ определим обобщенную смешанную конечную разность первого порядка по переменной x и первого порядка по переменной y, т.е.

$$\Delta_t^x\left(\Delta_\tau^y(f)\right) := \mathcal{F}_t^x\left(\mathcal{F}_\tau^y(f)\right) - \mathcal{F}_t^x(f) - \mathcal{F}_\tau^y(f) + f = (\mathcal{F}_t^x - \mathbb{I})\,(\mathcal{F}_\tau^y - \mathbb{I})\, f.$$

При этом $\Delta_t^x\left(\Delta_\tau^y(f)\right) = \Delta_\tau^y\left(\Delta_t^x(f)\right)$. Для обобщенных смешанных конечных разностей высших порядков получаем

$$\Delta_t^{k,x}\left(\Delta_\tau^{l,y}(f)\right) = \Delta_t^{1,x}\left(\Delta_t^{k-1,x}\left(\Delta_\tau^{l,y}(f)\right)\right) = \Delta_t^{k,x}\left(\Delta_\tau^{1,y}\left(\Delta_\tau^{l-1,y}(f)\right)\right) =$$

$$= \left(\mathcal{F}_t^x - \mathbb{I}\right)^k \left(\mathcal{F}_\tau^y - \mathbb{I}\right)^l f = \sum_{i=0}^{k} \sum_{j=0}^{l} (-1)^{k+l-i-j} \binom{k}{i} \binom{l}{j} \mathcal{F}_t^{i,x} \left(\mathcal{F}_\tau^{j,y}(f)\right), \tag{14}$$

где $(k,l) \in \mathbb{N}^2 \backslash (1,1)$, $\mathbb{N}^2 := \mathbb{N} \otimes \mathbb{N}$; $\Delta_t^{1,x} := \Delta_t^x$, $\Delta_\tau^{1,y} := \Delta_\tau^y$; $\Delta_t^{0,x} = \Delta_\tau^{0,y} := \mathbb{I}$. Отметим, что $\Delta_t^{k,x}\left(\Delta_\tau^{l,y}(f)\right) = \Delta_\tau^{l,y}\left(\Delta_t^{k,x}(f)\right)$.

Величину

$$\widetilde{\omega}_{k,l}(f;\delta,\lambda) := \sup\left\{ \left\| \Delta_t^{k,x}\left(\Delta_\tau^{l,y}(f)\right) \right\| : |t| \leqslant \delta, |\tau| \leqslant \lambda \right\}, \tag{15}$$

где $0 \leqslant \delta, \lambda \leqslant 1$, будем называть обобщенным смешанным модулем непрерывности функции $f \in L_{2,\rho}(\mathbb{R}^2)$.

4. Согласно [10] введем следующие дифференциальные операторы:

$$D_x := \frac{\partial^2}{\partial x^2} - 2x\frac{\partial}{\partial x}; \ \ D_y := \frac{\partial^2}{\partial y^2} - 2y\frac{\partial}{\partial y};$$

$$D := D_x + D_y = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} - 2x\frac{\partial}{\partial x} - 2y\frac{\partial}{\partial y}.$$

Пусть $L_{2,\rho}^r(\mathbb{R}^2)$ есть класс функций $f \in L_{2,\rho}(\mathbb{R}^2)$, которые имеют обобщенные частные производные $\dfrac{\partial^m f}{\partial x^i \partial y^j}$, где $i + j = m$, $m = \overline{1, 2r}$, принадлежащие пространству $L_{2,\rho}(\mathbb{R}^2)$. При этом $D^r f = D\left(D^{r-1} f\right) \in L_{2,\rho}(\mathbb{R}^2)$, $D^1 := D$, $D^0 f := f$. Полагаем $L_{2,\rho}^0(\mathbb{R}^2) := L_{2,\rho}(\mathbb{R}^2)$.

Имеет место следующее утверждение.

Теорема 2. *Пусть $N, M, k, l \in \mathbb{N}$; $r \in \mathbb{Z}_+$. Тогда справедливо равенство*

$$\sup_{N,M\in\mathbb{N}} \ \sup_{\substack{f \in L_{2,\rho}^r(\mathbb{R}^2) \\ f \not\equiv const}} \frac{2^r (N+M)^r \mathcal{E}_{N-1,M-1}(f)}{\widetilde{\omega}_{k,l}\left(D^r f; \frac{1}{\sqrt{N}}, \frac{1}{\sqrt{M}}\right)} = \frac{1}{(1 - e^{-1/2})^{k+l}}\ . \tag{16}$$

Доказательство. Пусть f есть произвольная функция из класса $L_{2,\rho}(\mathbb{R}^2)$ такая, что $f \not\equiv const$. В работе [10] было показано, что для любых $i, j \in \mathbb{N}$ справедливо равенство

$$c_{ij}(f) = \frac{(-1)^r}{2^r (i+j)^r}\ c_{ij}(D^r f), \tag{17}$$

где $c_{ij}(f)$ и $c_{ij}(D^r f)$ — коэффициенты Фурье–Эрмита функций f и $D^r f$ соответственно. Используя формулы (6) и (17), для произвольной функции $f \in L_{2,\rho}(\mathbb{R}^2)$ получаем

$$\mathcal{E}_{N-1,M-1}(f) = \left\{ \sum_{i=N}^{\infty} \sum_{j=M}^{\infty} \frac{1}{2^{2r}(i+j)^{2r}} c_{ij}^2(D^r f) \right\}^{1/2} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{2^r (N+M)^r} \left\{ \sum_{i=N}^{\infty} \sum_{j=M}^{\infty} c_{ij}^2(D^r f) \right\}^{1/2} = \frac{1}{2^r (N+M)^r} \mathcal{E}_{N-1,M-1}(D^r f). \tag{18}$$

На основании перечисленных ранее свойств оператора обобщенного сдвига (13) и формулы (14) запишем

$$\Delta_t^{k,x} \left(\Delta_\tau^{l,y} (D^r f); x, y \right) =$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} c_{ij}^2(D^r f) \left(\left(1 - t^2\right)^{i/2} - 1 \right)^k \left(\left(1 - \tau^2\right)^{j/2} - 1 \right)^l H_i(x) H_j(y), \tag{19}$$

где равенство понимается в смысле сходимости в метрике пространства $L_{2,\rho}(\mathbb{R}^2)$. Из равенства (19) и определения обобщенного смешанного модуля непрерывности (15) имеем

$$\widetilde{\omega}_{k,l}(D^r f; \delta, \lambda) = \sup_{\substack{|t| \leqslant \delta, \\ |\tau| \leqslant \lambda}} \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} c_{ij}^2(D^r f) \left(\left(1 - t^2\right)^{i/2} - 1 \right)^{2k} \times \right.$$

$$\left. \times \left(\left(1 - \tau^2\right)^{j/2} - 1 \right)^{2l} \right\}^{1/2} =$$

$$= \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} c_{ij}^2(D^r f) \left(1-\left(1-\delta^2\right)^{i/2}\right)^{2k} \left(1-\left(1-\lambda^2\right)^{j/2}\right)^{2l} \right\}^{1/2}, \tag{20}$$

где $0 < \delta, \lambda \leqslant 1$. Используя соотношения (6) и (20), получаем

$$\widetilde{\omega}_{k,l}^2(D^r f; \delta, \lambda) \geqslant \sum_{i=N}^{\infty} \sum_{j=M}^{\infty} c_{ij}^2(D^r f) \left(1-\left(1-\delta^2\right)^{i/2}\right)^{2k} \left(1-\left(1-\lambda^2\right)^{j/2}\right)^{2l} \geqslant$$

$$\geqslant \left(1-\left(1-\delta^2\right)^{N/2}\right)^{2k} \left(1-\left(1-\lambda^2\right)^{M/2}\right)^{2l} \mathcal{E}_{N-1,M-1}^2(D^r f). \tag{21}$$

Из цепочек соотношений (18) и (21) следует оценка сверху наилучшего приближения функции $f \in L_{2,\rho}(\mathbb{R})$ элементами множества $G(\mathfrak{N}_N, \mathfrak{M}_M)$ в метрике пространства $L_{2,\rho}(\mathbb{R})$, т.е.

$$\mathcal{E}_{N-1,M-1}(f) \leqslant \frac{\left(1-\left(1-\delta^2\right)^{N/2}\right)^{-k} \left(1-\left(1-\lambda^2\right)^{M/2}\right)^{-l}}{2^r (N+M)^r} \widetilde{\omega}_{k,l}(D^r f; \delta, \lambda).$$

Отсюда получаем следующую оценку

$$\sup_{\substack{f \in L_{2,\rho}^r(\mathbb{R}^2) \\ f \not\equiv const}} \frac{2^r (N+M)^r \mathcal{E}_{N-1,M-1}(f)}{\widetilde{\omega}_{k,l}(D^r f; \delta, \lambda)} \leqslant \frac{1}{\left(1-(1-\delta^2)^{N/2}\right)^k \left(1-(1-\lambda^2)^{M/2}\right)^l}, \tag{22}$$

где $0 < \delta, \lambda \leqslant 1$. Для получения оценки снизу величины, расположенной в левой части неравенства (22), рассмотрим функцию $f_0(x,y) := H_N(x) H_M(y)$, которая принадлежит классу $L_{2,\rho}^r(\mathbb{R}^2)$.

Из формулы (6) получаем

$$\mathcal{E}_{N-1,M-1}(f_0) = 1. \tag{23}$$

Используя равенство (17), для функции f_0 имеем $c_{ij}(D^r f_0) = \big\{0$, если $i \neq N$ и $j \neq M$; $(-1)^r 2^r (N+M)^r$, если $i = N$ и $j = M\big\}$, где $i, j \in \mathbb{Z}_+$, т.е. $D^r f_0(x,y) = (-1)^r 2^r (N+M)^r H_N(x) H_M(y)$. Тогда из формулы (20) имеем

$$\widetilde{\omega}_{k,l}(D^r f_0; \delta, \lambda) = 2^r (N+M)^r \left(1-\left(1-\delta^2\right)^{N/2}\right)^k \left(1-\left(1-\lambda^2\right)^{M/2}\right)^l. \tag{24}$$

Из соотношений (23), (24) следует оценка снизу рассматриваемой экстремальной характеристики

$$\sup_{\substack{f\in L_{2,\rho}^{r}(\mathbb{R}^2)\\ f\not\equiv const}} \frac{2^r(N+M)^r\mathcal{E}_{N-1,M-1}(f)}{\widetilde{\omega}_{k,l}(D^rf;\delta,\lambda)} \geqslant \frac{2^r(N+M)^r\mathcal{E}_{N-1,M-1}(f_0)}{\widetilde{\omega}_{k,l}(D^rf_0;\delta,\lambda)} =$$

$$= \frac{1}{\Big(1-(1-\delta^2)^{N/2}\Big)^k\Big(1-(1-\lambda^2)^{M/2}\Big)^l}. \tag{25}$$

Сопоставляя неравенства (22) и (25), имеем равенство

$$\sup_{\substack{f\in L_{2,\rho}^{r}(\mathbb{R}^2)\\ f\not\equiv const}} \frac{2^r(N+M)^r\mathcal{E}_{N-1,M-1}(f)}{\widetilde{\omega}_{k,l}(D^rf;\delta,\lambda)} = \frac{1}{\Big(1-(1-\delta^2)^{N/2}\Big)^k\Big(1-(1-\lambda^2)^{M/2}\Big)^l}, \tag{26}$$

где $0<\delta,\lambda\leqslant 1$. Полагая в формуле (26) $\delta:=1/\sqrt{N},\ \lambda:=1/\sqrt{M}$ и вычисляя верхнюю грань по $N,M\in\mathbb{N}$ от левой и правой частей указанного равенства, получаем требуемое соотношение (16). Теорема 2 доказана.

Следствие. *Пусть $N,M,r\in\mathbb{N}$. Тогда имеет место равенство*

$$\sup_{\substack{f\in L_{2,\rho}^{r}(\mathbb{R}^2)\\ f\not\equiv const}} \frac{2^r(N+M)^r\mathcal{E}_{N-1,M-1}(f)}{\mathcal{E}_{N-1,M-1}(D^rf)} = 1.$$

1. *Суетин П. К.* Классические ортогональные многочлены. Изд. 3-е. — М.: Физматлит, 2007. — 480 с.
2. *Ржавинская Е. В.* О приближении алгебраическими многочленами в метрике L_p с весом. Дис. канд. физ.-мат. н. — М., 1980. — 126 с.
3. *Потапов М. К.* О приближении "углом" // Proc. of the Conf. on Constructive Theory of Functions. — Budapesht, 1972. — С. 371 – 399.
4. *Томич М.* О приближении "углом" функций с доминирующим модулем гладкости // Publ. De L'inst. Math. — 1978. — **23**, № 37. — P. 193 – 206.
5. *Haufman W., Zeller K.* Uniqueness and non-uniqueness in bivariate L^1-approximation // Approx. Theory IV. Proc. in Intern. Symp., College Station. Tex., January 10 – 14, 1983. — New York, 1983. — P. 509 – 514.
6. *Темляков В. Н.* Приближение функций с ограниченной смешанной производной // Тр. Мат. ин-та АН СССР. — 1986. — **178**. — С. 1 – 113.

7. *Gonska H., Jetter K.* Jackson-type theorems on approximation by trigonometric and algebraic pseudopolynomials // J. Approx. Theory. — 1986. — **48**, №4. — P. 396 – 406.

8. *Вакарчук С.Ḃ.* О наилучшем приближении обобщенными полиномами в одном пространстве аналитических функций двух комплексных переменных // Изв. вузов. Матем. — 1991. — №7. — С. 14 – 25.

9. *Рафальсон С. З.* О приближении функций в среднем суммами Фурье–Эрмита // Изв. вузов. Матем. — 1968. — №7. — С. 78 – 84.

10. *Абилов В. А., Абилова М. В.* Приближение функций в пространстве $L_2(\mathbb{R}^N; e^{-|x|^2})$ // Мат. заметки. — 1995. — **57**, №1. — С. 3 – 19.

11. *Абилов М. В., Абилова Ф. В.* Некоторые вопросы приближения функций суммами Фурье–Эрмита в пространстве $L_2(\mathbb{R}, e^{-x^2})$ // Изв. вузов. Матем. — 2006. — №1. — С. 3 – 12.

12. *Вакарчук С. Б., Вакарчук М. Б.* О приближении функций алгебраическими полиномами в среднем на вещественной оси с весом Чебышева–Эрмита // Вісник Дніпропетровського ун-ту. Серія матем. Вип. 16. — 2011. — **19**, №6/1. — С. 28 – 31.

13. *Вакарчук С. Б., Швачко А. В.* О наилучшем приближении в среднем с весом Чебышева–Эрмита алгебраическими полиномами на всей вещественной оси // Теорія наближення функцій та суміжні питання: Зб. праць Ін-ту математики НАН України. — 2013. — **10**, №1. — С. 28 – 38.