Збірник праць Інституту математики НАН України 2016, т. 13, № 3, 261–265

УДК 517.53

Узагальнені моментні зображення та апроксиманти типу Паде функцій багатьох змінних

Л.О. Чернецька

Інститут математики НАН України, Київ;
chernets. liliya@yandex. ua

The approach is proposed to construction of multidimensional Padé type approximants for analytic functions based on extension of V.K. Dzyadyk's method of generalized moment representations

Предложен подход к построению многомерных аппроксимаций типа Паде аналитических функций, основанный на распространении метода обобщенных моментных представлений В.К. Дзядыка

Теорія апроксимацій Паде — локально найкращих раціональних апроксимацій степеневого ряду — становить самостійний напрям в комплексному аналізі та теорії наближень. Ці апроксиманти названі на честь французького математика Анрі Паде, який першим почав їх систематичне вивчення (1892 – 1907 рр.), хоча їх запровадження і окремі результати були відомі задовго до нього. В XVIII – XIX ст. цей напрям розвивався в основному в рамках класичної теорії неперервних дробів. Інтерес до апроксимацій Паде та більш загальних конструкцій раціональних апроксимацій аналітичних функцій різко зріс у другій половині минулого століття. Завдяки розвитку обчислювальної техніки такі апроксимації знайшли численні застосування в різноманітних задачах математичної фізики, механіки та прикладної математики.

Питанням побудови та дослідження апроксимацій типу Паде функцій багатьох змінних займаються вже понад чотирьох десятків років. Різноманітні модифікації багатовимірних апроксимацій типу Паде розглядалися J. S. R. Chisholm, C. H. Lutterodt, R. Hughes Jones, P. R. Graves–Morris, C. Chaffy, D. Levin, P. Guillaume, P. B. Borwein, A. Cuyt, B. Verdonk, K. A. Driver, J. Tan, P. Zhou.

З використанням неперервних дробів значний внесок до теорії та застосувань апроксимацій Паде і їх узагальнень було зроблено В. Я. Скоробагатьком, П. І. Боднарчуком, Д. І. Боднаром, Х. Й. Кучмінською.

Одним з підходів до побудови та дослідження апроксимант Паде аналітичних функцій є запропонований В. К. Дзядиком у 1981 році метод узагальнених моментних зображень, який дозволив з єдиних позицій розглядати питання, пов'язані з вивченням апроксимант Паде як марковських функцій, так і багатьох важливих спеціальних функцій, що не належать до класу марковських функцій. Так, А. П. Голубом за допомогою методу узагальнених моментних зображень було побудовано та досліджено апроксимації Паде для ряду елементарних та спеціальних функцій однієї змінної.

Враховуючи ефективність вказаного підходу до побудови одновимірних апроксимант Паде, актуальним є питання побудови раціональних апроксимацій функцій багатьох змінних за допомогою цього методу. Таким чином, цілком природно постає задача поширення методу узагальнених моментних зображень на d-вимірний випадок.

Означення 1. *Узагальненим моментним зображенням двовимірної числової послідовності* $\{s_{k,m}\}_{k,m=0}^{\infty}$ *на добутку лінійних просторів* $\mathscr{X}$ *та* $\mathscr{Y}$ *за означеною на цьому добутку білінійною формою* $\langle\cdot,\cdot\rangle$ *називається сукупність рівностей*

$$s_{k+j,m+n} = \langle x_{k,m}, y_{j,n}\rangle, \quad k,j,m,n \in \mathbb{Z}_+, \tag{1}$$

де $\{x_{k,m}\}_{k,m=0}^{\infty} \in \mathscr{X}$, $\{y_{j,n}\}_{j,n=0}^{\infty} \in \mathscr{Y}$.

Двовимірній числовій послідовності $\{s_{k,m}\}_{k,m=0}^{\infty}$ можна поставити у відповідність формальний степеневий ряд двох змінних

$$f(z,w) = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} s_{k,m} z^k w^m. \tag{2}$$

Щоб побудувати раціональні апроксиманти для рядів вигляду (2), потрібно зафіксувати деякі обмежені множини $\mathscr{N}$ і $\mathscr{D}$ з $\mathbb{Z}_+^2$ та побудувати алгебраїчні многочлени

$$P_{\mathscr{N}}(z,w) = \sum_{(k,m)\in\mathscr{N}} p_{k,m} z^k w^m,$$

$$Q_{\mathscr{D}}(z,w) = \sum_{(k,m)\in\mathscr{D}} q_{k,m} z^k w^m,$$

для яких у розвиненні

$$f(z,w) - \frac{P_{\mathscr{N}}(z,w)}{Q_{\mathscr{D}}(z,w)} = \sum_{(k,m)\in\mathbb{Z}_+^2} e_{k,m} z^k w^m$$

$e_{k,m} = 0$ при $(k,m) \in \mathscr{E}$, де $\mathscr{E}$ — деяка обмежена підмножина $\mathbb{Z}_+^2$.

Розглянемо деяку неперервно диференційовну функцію $\Phi(x,y)$: $\mathbb{R}_+^2 \to \mathbb{R}$, яка має такі властивості (див. рис. 1):

1) множина $\mathscr{D}_\Phi = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}_+^2 \,|\, \Phi(x,y) \leqslant 0\big\}$ — обмежена в $\mathbb{R}_+^2$;

2) потужність множини $\mathscr{D}_\Phi \cap \big\{(x,y) \in \mathbb{Z}_+^2 \,|\, x \geqslant N_1 + M_1, y \geqslant N_2 + M_2\big\}$ дорівнює $(N_1+1)(N_2+1) - 1$;

3) існують однозначно визначені функції

$x = \varphi_1(y), y \in D_1 := \big\{y \in \mathbb{R}_+ \,|\, \exists x \in \mathbb{R}_+ : \Phi(x,y) \leqslant 0\big\}$,

$y = \varphi_2(x), x \in D_2 := \big\{x \in \mathbb{R}_+^2 \,|\, \exists y \in \mathbb{R}_+ : \Phi(x,y) \leqslant 0\big\}$;

4) $\varphi_1(y) \geqslant N_1$, $\forall y \in D_1$ та $\varphi_2(x) \geqslant N_2$, $\forall x \in D_2$.

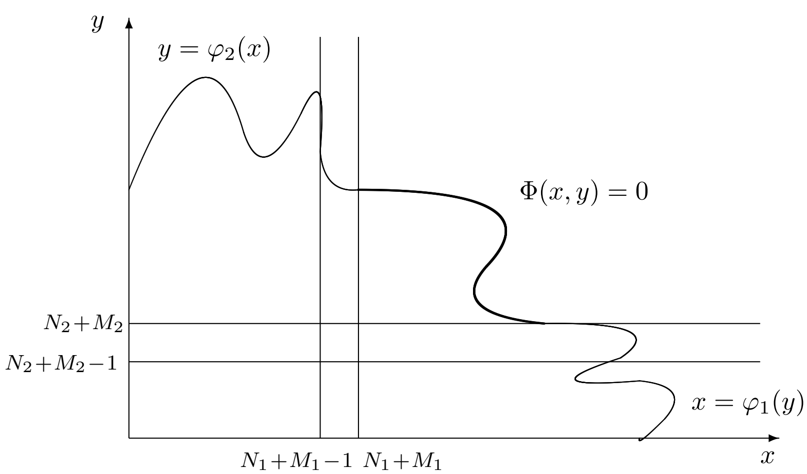

Рис. 1

Теорема 1. *Нехай формальний степеневий ряд двох змінних має вигляд* (2), *а двовимірна послідовність* $\{s_{k,m}\}_{k,m=0}^{\infty}$ *має узагальнене моментне зображення* (1) *на добутку лінійних просторів* $\mathscr{X}$ *та* $\mathscr{Y}$.

Якщо для деяких $N_1, N_2 \in \mathbb{N}$ та $M_1, M_2 \in \mathbb{Z}_+$ існує нетривіальний узагальнений поліном

$$Y_{N_1,N_2}^{(M_1,M_2)} = \sum_{j=0}^{N_1} \sum_{n=0}^{N_2} c_{j,n}^{(N_1,N_2),(M_1,M_2)} y_{j,n}$$

такий, що для $(k,m) \in \big\{(k,m) \in \mathbb{Z}_+^2 \,|\, \Phi(k+N_1+M_1, m+N_2+M_2) \leqslant 0\big\}$ виконуються умови біортогональності $\langle x_{k,m}, Y_{N_1,N_2}^{(M_1,M_2)} \rangle = 0$, та $c_{N_1,N_2}^{(N_1,N_2),(M_1,M_2)} \neq 0$, то раціональна функція

$$\frac{1}{Q_{N_1,N_2}^{(M_1,M_2)}(z,w)} \Bigg\{ \sum_{k=0}^{N_1-1} \sum_{m=0}^{N_2-1} z^k w^m \sum_{j=0}^{k} \sum_{n=0}^{m} c_{N_1-j,N_2-n}^{(N_1,N_2),(M_1,M_2)} s_{k-j,m-n} +$$

$$+ z^{N_1} \sum_{m=0}^{N_2-1} \sum_{k=0}^{M_1+\varphi_1(m)-N_1} z^k w^m \sum_{j=0}^{N_1} \sum_{n=0}^{m} c_{j,N_2-n}^{(N_1,N_2),(M_1,M_2)} s_{k+j,m-n} +$$

$$+ w^{N_2} \sum_{k=0}^{N_1-1} \sum_{m=0}^{M_2+\varphi_2(k)-N_2} z^k w^m \sum_{j=0}^{k} \sum_{n=0}^{N_2} c_{N_1-j,n}^{(N_1,N_2),(M_1,M_2)} s_{k-j,m+n} +$$

$$+ z^{N_1} w^{N_2} \sum_{(k,m)\in\Gamma_{\varphi_1,\varphi_2}} z^k w^m \sum_{j=0}^{N_1} \sum_{n=0}^{N_2} c_{j,n}^{(N_1,N_2),(M_1,M_2)} s_{k+j,m+n} \Bigg\},$$

де

$$\Gamma_{\varphi_1,\varphi_2} = \big\{(k,m) : k \in [0, M_1-1], m \in [0, M_2+\varphi_2(k)-N_2]\big\} \cup$$

$$\cup \big\{(k,m) : k \in [0, M_1+\varphi_1(m)-N_1], m \in [0, M_2-1]\big\},$$

$$Q_{N_1,N_2}^{(M_1,M_2)}(z,w) = \sum_{j=0}^{N_1} \sum_{n=0}^{N_2} c_{N_1-j,N_2-n}^{(N_1,N_2),(M_1,M_2)} z^j w^n,$$

матиме розвинення у степеневий ряд, коефіцієнти якого збігатимуться з коефіцієнтами ряду (2) для всіх $(k,m) \in \mathscr{E} = \mathscr{D}_\Phi \cap \mathbb{Z}_+^2$.

На основі теореми 1 побудовано раціональні апроксиманти типу Паде для широких класів спеціальних функцій двох змінних, зокрема, для функцій, які з точністю до сталих множників збігаються з гіпергеометричними рядами Аппеля $F_1(\nu+1, 1, 1, \nu+\sigma+2, z, w)$ [1],

$F_3(\nu+1, \sigma+1, 1, 1, \nu+\sigma+2, z, w)$ [2], з виродженим гіпергеометричним рядом Гумберта $\Phi_2(1, 1, \nu+\sigma+2, z, w)$ [3], при $\rho = 0$ з гіпергеометричним рядом Аппеля $F_3(\sigma+1, \nu+1, 1, 1, \nu+\sigma+3, z, w)$ [4].

В роботі [5] результат, сформульований в теоремі 1 поширено на випадок довільної розмірності.

[1] Голуб А. П., Чернецька Л. О. Двовимірні узагальнені моментні зображення та апроксимації функцій двох змінних // Укр. мат. журнал. — 2013. — Т. 65, № 8. — С. 1035–1058.

[2] Голуб А. П., Чернецька Л. О. Побудова апроксимант Паде для деяких гіпергеометричних рядів Аппеля за допомогою методу узагальнених моментних зображень // Теорія наближення функцій та суміжні питання: Зб. праць Ін-ту математики НАН України. — 2013. — Т. 10, № 1. — С. 69–94.

[3] Голуб А., Чернецька Л. О. Двовимірні узагальнені моментні зображення та апроксимації Паде деяких рядів Гумберта // Укр. мат. журнал. — 2013. — Т. 65, № 10. — С. 1315–1331.

[4] Чернецька Л. Побудова двовимірних апроксимант Паде деяких аналітичних функцій двох змінних за допомогою методу узагальнених моментних зображень // Математичні студії. — 2014. — Т. 41, № 2. — С. 201–213.

[5] Голуб А., Чернецька Л. Багатовимірні узагальнені моментні зображення та апроксимації типу Паде для функцій багатьох змінних // Укр. мат. журнал. — 2014. — Т. 66, № 9. — С. 1166–1174.