Збірник праць Інституту математики НАН України 2016, т. 13, № 3, 254–260

УДК 531.36;531.011

Про осцилюючі симетричні рухи у задачі трьох тіл

С.П. Сосницький

Інститут математики НАН України, Київ;
sosn@imath.kiev.ua

We study a special case of the three-body problem where two of the bodies are the same mass and there is a manifold of symmetrical motions. We consider sufficient conditions of nonexistence of oscillating symmetric motions. To analyze stability, we substantially rely on the structure of the manifold of symmetric motions.

Исследуется случай задачи трех тел, когда два из них имеют одинаковые массы, что обусловливает существование многообразия симметричных движений. Рассматриваются достаточные условия отсутствия осциллирующих симметричных движений. Для анализа оганиченности движения используется структура многообразия симметричных движений.

1 Вступ

Симетричні рухи у задачі трьох тіл (матеріальних точок) зазвичай пов'язують з питанням існування осцилюючих фінальних еволюцій, посилаючись при цьому на відому роботу Сітнікова [1], якому вдалося в спеціальному випадку обмеженої задачі трьох тіл, коли два з них мають рівні маси, довести існування осцилюючих рухів. Згодом твердження Сітнікова, враховуючи, що саму можливість існування таких рухів допускав Шазі [2], послужило поштовхом для подальших досліджень в цьому напрямку у загальному випадку задачі трьох тіл [3–5].

Нижче, як і в роботах автора [6, 7], будемо в деякому сенсі розглядати обернену задачу, тобто досліджувати умови, коли осцилюючі симетричні рухи не існують. Правда, якщо в роботах [6, 7] ми зосереджували нашу увагу на існуванні обмежених симетричних рухів, то тепер дещо послабимо вимоги, зводячи їх до пошуку умов, які виключають існування осцилюючих симетричних рухів. При цьому питання їх обмеженості (необмеженості) залишається відкритим.

В подальшому при дослідженні симетричних рухів будемо відштовхуватись від базових рівнянь задачі трьох тіл, які ми запишемо у формі [8]:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\rho}_1'' &= \mu_2 \frac{\boldsymbol{\rho}_2 - \boldsymbol{\rho}_1}{|\boldsymbol{\rho}_{12}|^3} + \mu_3 \frac{\boldsymbol{\rho}_3 - \boldsymbol{\rho}_1}{|\boldsymbol{\rho}_{13}|^3}, \\
\boldsymbol{\rho}_2'' &= -\mu_1 \frac{\boldsymbol{\rho}_2 - \boldsymbol{\rho}_1}{|\boldsymbol{\rho}_{12}|^3} + \mu_3 \frac{\boldsymbol{\rho}_3 - \boldsymbol{\rho}_2}{|\boldsymbol{\rho}_{23}|^3}, \\
\boldsymbol{\rho}_3'' &= -\mu_1 \frac{\boldsymbol{\rho}_3 - \boldsymbol{\rho}_1}{|\boldsymbol{\rho}_{13}|^3} - \mu_2 \frac{\boldsymbol{\rho}_3 - \boldsymbol{\rho}_2}{|\boldsymbol{\rho}_{23}|^3}.
\end{aligned} \tag{1}$$

Як показано в [6], при умові, що дві маси рівні, на підставі (1) приходимо до многовиду симетричних рухів у вигляді

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\rho}_{12}'' &= -2\mu \frac{\boldsymbol{\rho}_{12}}{|\boldsymbol{\rho}_{12}|^3} - \mu_3 \frac{\boldsymbol{\rho}_{12}}{|\boldsymbol{\rho}_{13}|^3}, \\
\boldsymbol{\rho}_3'' &= -\frac{\boldsymbol{\rho}_3}{|\boldsymbol{\rho}_{13}|^3},
\end{aligned} \tag{2}$$

в якому $|\boldsymbol{\rho}_{13}| = |\boldsymbol{\rho}_{23}|$, штрих означає диференціювання за часом $\tau = t\sqrt{GM}/r_0^{3/2}$, $\mu_i = m_i/M (i = 1, 2, 3), M = m_1 + m_2 + m_3$, $\boldsymbol{\rho}_i = \mathbf{r}_i/r_0$ – відносні радіуси-вектори, $\mu_1 = \mu_2 = \mu, 2\mu + \mu_3 = 1$. Параметр r_0, що має розмірність одиниці довжини, у вираз для τ введений для того, щоб в подальшому працювати з безрозмірними величинами. Відстані $|\boldsymbol{\rho}_{12}|, |\boldsymbol{\rho}_{13}|$ і $|\boldsymbol{\rho}_3|$ зв'язані рівністю

$$\boldsymbol{\rho}_3^2 = \mu^2 \left(-\boldsymbol{\rho}_{12}^2 + 4\boldsymbol{\rho}_{13}^2 \right). \tag{3}$$

Характерною особливістю многовиду симетричних рухів є справедливість рівностей

$$\boldsymbol{\rho}_{12} \times \boldsymbol{\rho}_{12}' = \mathbf{C_1}, \quad \boldsymbol{\rho}_3 \times \boldsymbol{\rho}_3' = \mathbf{C_2},$$

де $\mathbf{C_1}, \mathbf{C_2}$ – сталі вектори. Це дозволяє якісне дослідження системи (2) звести до системи з двома ступенями вільності:

$$\begin{aligned}
{\rho_{12}^2}'' &= 2v_{12}^2 - \frac{4\mu}{\rho_{12}} - 2\mu_3 \frac{\rho_{12}^2}{\rho_{13}^3}, \\
{\rho_3^2}'' &= 2v_3^2 - 2\frac{\rho_3^2}{\rho_{13}^3},
\end{aligned} \tag{4}$$

де $|\boldsymbol{\rho}_{12}| = \rho_{12}, |\boldsymbol{\rho}_{13}| = \rho_{13}, v_{12}^2 = \boldsymbol{\rho}_{12}'^2$, $v_3^2 = \boldsymbol{\rho}_3'^2$. Беручи до уваги, що

$$\boldsymbol{\rho}_{12}'^2 = \rho_{12}'^2 + \frac{|\boldsymbol{\rho}_{12} \times \boldsymbol{\rho}_{12}'|^2}{\rho_{12}^2}, \tag{5}$$

$$\boldsymbol{\rho}_3'^2 = \rho_3'^2 + \frac{|\boldsymbol{\rho}_3 \times \boldsymbol{\rho}_3'|^2}{\rho_3^2}, \tag{6}$$

рівняння (4) можемо представити у вигляді

$$\begin{aligned} {\rho_{12}^2}'' &= 2\left(\frac{({\rho_{12}^2}')^2}{4\rho_{12}^2} + \frac{|\mathbf{C}_1|^2}{\rho_{12}^2}\right) - \frac{4\mu}{\rho_{12}} - 2\mu_3\frac{\rho_{12}^2}{\rho_{13}^3}, \\ {\rho_3^2}'' &= 2\left(\frac{({\rho_3^2}')^2}{4\rho_3^2} + \frac{|\mathbf{C}_2|^2}{\rho_3^2}\right) - 2\frac{\rho_3^2}{\rho_{13}^3}. \end{aligned} \tag{7}$$

Якщо $\mathbf{C}_2 = \mathbf{0}$, то система (7) допускає рух, при якому тіло з масою μ_3 здійснює коливання уздовж осі, що проходить через центр мас системи і є перпендикулярною до площини, у якій рухаються інші два тіла з рівними масами.

Характерними ознаками многовиду симетричних рухів (7) є стійкість за Хіллом пари матеріальних точок (μ, μ) при умові, що $h < 0$, а також дистальність руху при $|\mathbf{C}_1| \neq 0$, як наслідок рівності $|\boldsymbol{\rho}_{13}| = |\boldsymbol{\rho}_{23}|$. Крім того, якщо рух на многовиді (7) є обмеженим, то ця обмеженість стосується як координат ρ_{12}, ρ_{13}, так і швидкостей v_{12}, v_{13}, тобто має місце стійкість за Лагранжем.

Як показано у роботі [6], на многовиді симетричних рухів (2) кінетичну енергію зручно зобразити в одній з форм

$$T = \frac{1}{2}\left(\mu^2\boldsymbol{\rho}_{12}'^2 + 2\mu\mu_3\boldsymbol{\rho}_{13}'^2\right), \tag{8}$$

$$T = \frac{1}{2}\left(\frac{\mu^2}{2\mu}\boldsymbol{\rho}_{12}'^2 + \frac{\mu_3}{2\mu}\boldsymbol{\rho}_3'^2\right), \tag{9}$$

що дозволяє для інтеграла енергії отримати такі вирази

$$\left(\mu^2\boldsymbol{\rho}_{12}'^2 + 2\mu\mu_3\boldsymbol{\rho}_{13}'^2\right) - \frac{2\mu^2}{\rho_{12}} - \frac{4\mu\mu_3}{\rho_{13}} = 2h, \tag{10}$$

$$\left(\frac{\mu^2}{2\mu}\boldsymbol{\rho}_{12}'^2 + \frac{\mu_3}{2\mu}\boldsymbol{\rho}_3'^2\right) - \frac{2\mu^2}{\rho_{12}} - \frac{4\mu\mu_3}{\rho_{13}} = 2h. \tag{11}$$

Торкаючись досліджень автора, присвячених існуванню обмежених рухів на многовиді симетричних рухів, як підсумок приходимо до такої теореми.

Теорема 1. *Нехай $\boldsymbol{\rho}(\tau) = (\boldsymbol{\rho}_1, \boldsymbol{\rho}_2, \boldsymbol{\rho}_3)^T$ – симетричний рух системи (2), який належить множині*

$$\Omega = \{(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\rho}') : T - U = h < 0\} .$$

Тоді, якщо

$$|\boldsymbol{\rho}_{12} \times \boldsymbol{\rho}'_{12}| = c > 0 \tag{12}$$

і виконується одна з умов:

$$\mu^3 + c^2 h < 0, \tag{13}$$

$$\frac{4}{c^2}\left[2\mu^3(1+\mu_3) + c^2 h\right] - \frac{\mu_3 c^2 h^2}{\mu(\mu+4\mu_3)^2} < 0, \tag{14}$$

$$\frac{2}{c^2}\left[4\mu^3 + c^2 h\right] - \frac{c^2 h^2}{2\mu(\mu+4\mu_3)^2} < 0, \tag{15}$$

$$\frac{2}{\mu\mu_3 c^2}[hc^2 + 4(1-\mu)\mu^3] - \frac{|h|}{\mu+4\mu_3} < 0, \tag{16}$$

то досліджуваний симетричний рух є обмеженим.

Доведення. Справедливість теореми у випадку (13) доведено у роботі [7], у випадках (14) і (15) в [6], у випадку (16) в [9].

2 Про достатні умови відсутності осцилюючих симетричних рухів

Як випливає з формулювання теореми 1, виконання достатніх умов обмеженості симетричних рухів істотно пов'язане як з абсолютним значенням моменту кількостей руху пари (μ, μ), так і з сталою інтеграла енергії h, а також із співвідношенням сталих $|c|$ і $|h|$. Вагому роль в цих умовах відіграє також співвідношення мас μ і μ_3. Таким чином, при встановленні умов обмеженості симетричних рухів у відповідності з теоремою 1 ми оперуємо сталими величинами. У цьому зв'язку було б цікаво розглянути вплив розподілу узагальнених швидкостей, тобто динамічних факторів, на характер руху системи (2). Частково відповідь на це питання дає наступна

Теорема 2. *Нехай $\boldsymbol{\rho}(\tau) = (\boldsymbol{\rho}_1, \boldsymbol{\rho}_2, \boldsymbol{\rho}_3)^T$ – симетричний рух системи (2), який належить множині*

$$\Omega = \{(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\rho}') : T - U = h < 0\}.$$

Тоді, якщо

$$-v_{12}^2 + 2v_{13}^2 \geq c > \frac{h}{\mu + 4\mu_3} \quad \forall \tau \in R, \quad c = const, \tag{17}$$

то даний симетричний рух не є осцилюючим.

Доведення. Скористаємося рівнянням

$$(\boldsymbol{\rho}_{23}\boldsymbol{\rho}'_{13})' = \frac{1}{2}(-v_{12}^2 + v_{13}^2 + v_{23}^2) - \frac{\mu_1 + \mu_3}{2\rho_{13}} \left(1 + \frac{\rho_{23}^2 - \rho_{12}^2}{\rho_{13}^2}\right) + \\ + \frac{\mu_2}{2\rho_{12}} \left(1 + \frac{\rho_{23}^2 - \rho_{13}^2}{\rho_{12}^2}\right) - \frac{\mu_2}{\rho_{23}}, \tag{18}$$

отриманим у роботі [8]. На многовиді симетричних рухів воно набуває вигляду

$$(\boldsymbol{\rho}_{23}\boldsymbol{\rho}'_{13})' = \frac{1}{2}(-v_{12}^2 + 2v_{13}^2) + \frac{\mu}{2\rho_{12}} - \frac{\mu + \mu_3}{2\rho_{13}} \left(1 + \frac{\rho_{13}^2 - \rho_{12}^2}{\rho_{13}^2}\right) - \frac{\mu_2}{\rho_{13}}. \tag{19}$$

Враховуючи оцінку [9]:

$$\frac{1}{\rho_{12}} > \frac{-h}{\mu(\mu + 4\mu_3)},$$

на підставі (19) приходимо до нерівності

$$(\boldsymbol{\rho}_{23}\boldsymbol{\rho}'_{13})' > \frac{1}{2}(-v_{12}^2 + 2v_{13}^2) + \frac{-h}{2(\mu + 4\mu_3)} - \frac{\mu + \mu_3}{2\rho_{13}} \left(1 + \frac{\rho_{13}^2 - \rho_{12}^2}{\rho_{13}^2}\right) - \frac{\mu_2}{\rho_{13}}, \tag{20}$$

яку, беручи до уваги умову (17) теореми 2, перепишемо у вигляді

$$(\boldsymbol{\rho}_{23}\boldsymbol{\rho}'_{13})' > \frac{1}{2}\left[c + \frac{-h}{(\mu + 4\mu_3)}\right] - \frac{\mu + \mu_3}{2\rho_{13}} \left(1 + \frac{\rho_{13}^2 - \rho_{12}^2}{\rho_{13}^2}\right) - \frac{\mu_2}{\rho_{13}}. \tag{21}$$

Як показано у роботі [9], має місце рівність

$$\boldsymbol{\rho}_{23}\boldsymbol{\rho}'_{13} = \frac{1}{4}\left(-\rho_{12}^2 + 2\rho_{13}^2\right)',$$

а тому на підставі (21) маємо

$$\frac{1}{4}\left(-\rho_{12}^2+2\rho_{13}^2\right)''>\frac{1}{2}\left[c+\frac{-h}{(\mu+4\mu_3)}\right]-\frac{\mu+\mu_3}{2\rho_{13}}\left(1+\frac{\rho_{13}^2-\rho_{12}^2}{\rho_{13}^2}\right)-\frac{\mu_2}{\rho_{13}}. \tag{22}$$

Припустимо тепер, що досліджуваний рух є осцилюючим. Тоді відстань ρ_{13} може досягати будь-яких великих значень, а отже, враховуючи умову (17) теореми, існує куля B_r з достатньо великим радіусом r, за межами якої виконується нерівність

$$\frac{1}{4}\left(-\rho_{12}^2+2\rho_{13}^2\right)''>\delta>0, \quad \delta=\mathrm{const}. \tag{23}$$

Для осцилюючого руху справедлива рівність

$$\overline{\lim_{k\to\infty}}\,\rho_{13}=\infty$$

і, таким чином, при достатньо великому радіусі r функція $(-\rho_{12}^2+2\rho_{13}^2)$ має максимуми, для яких її друга похідна принаймні не додатна. Отримуємо суперечність, звідки робимо висновок про справедливість теореми 2. □

На завершення скажемо, що оскільки на многовиді симетричних рухів можливий вибір початкових умов, які призводять до осцилюючих фінальних еволюцій, то теорема 2 в цьому сенсі може становити певний інтерес якраз для з'ясування тих ключових моментів, які і спричиняють реалізацію осцилюючих фінальних еволюцій.

[1] *Ситников К.А.* Существование осциллирующих движений в задаче трех тел // ДАН СССР. — 1960. — vol. 133. — С. 303–306.

[2] *Chazy J.* Sur l'allure finale mouvement dans le problème des trois corps quand le temps croit indéfiniment // Ann. l'Ecole Norm. Supér., 3ème Sér. — 1922. — vol. 39. — P. 29–130.

[3] *Алексеев В.М.* Лекции по небесной механике.— Москва-Ижевск: НИЦ РХД, 2001.— С. 156.—

[4] *Moser J.* Stable and Random Motion in Dynamical System.— Princeton: Princeton University Press, 1973.— P. 190.—

[5] *Маршал К.* Задача трех тел.— Москва-Ижевск: Ин-т компьют. иссл., 2004.— С. 639.—

[6] *Sosnitskii S.P.* On the bounded symmetrical motions in the three-body problem // Intern. J. Non-Linear Mech. — 2014. — vol. 67. — P. 34–38.

[7] *Sosnitskii S.P.* On the Hill stable motions in the three-body problem // Adv. Space Res. — 2015. — vol. 56. — P. 859–864.

[8] *Sosnitskii S.P.* On the orbital stability of triangular Lagrangian motions in the three-body problem // Astron. J. — 2008. — vol. 136. — P. 2533–2540.

[9] *Сосницький С.П.* Про деякі особливості симетричних рухів у задачі трьох тіл.// Зб. праць Ін-ту математики НАН України.— 2013. т.10, №3.— С.178–190.