Збірник праць Інституту математики НАН України 2016, т. 13, № 3, 243–253

УДК 531.36;531.011

Про орбітальну нестійкість трикутних лагранжевих рухів у задачі трьох тіл

С.П. Сосницький

Інститут математики НАН України, Київ; sosn@imath.kiev.ua

For the three-body problem (mass points), the orbital stability of stationary triangular Lagrangian motions is investigated. A theorem on the orbital instability of stationary triangular solutions related to circular orbits of mass points is proved.

Исследуется орбитальная устойчивость стационарных лагранжевых движений в задаче трех тел (материальных точек). Устанавливается теорема об орбитальной неустойчивости треугольных стационарных решений, которым соответствуют круговые орбиты материальных точек.

1 Вступ

Питання про стійкість стаціонарних лагранжевих трикутників, причому коли притягання обернено пропорційне n - му степеню відстані між тілами, бере свій початок від Рауса [1]. Зокрема, при ньютонівському законі притягання в рамках лінійного наближення умова стійкості, вказана Раусом, має вигляд

$$(m_1 + m_2 + m_3)^2 > 27(m_1 m_2 + m_1 m_3 + m_2 m_3), \tag{1}$$

де $m_i (i = 1, 2, 3)$ – маси тіл (матеріальних точок).

У 1889 році А.М. Ляпунов [2] в лінійному наближенні дослідив стійкість лагранжевих трикутних розв'язків, коли сторони трикутника не є сталими, а періодично змінюються з плином часу. Дослідження Ляпунова знайшли подальший розвиток в роботах, присвячених стійкості точок лібрації плоскої еліптичної обмеженої задачі трьох тіл (в цьому зв'язку див. наприклад книгу [3] і посилання в ній).

Далі ми обмежимося розглядом лише стаціонарних лагранжевих трикутних розв'язків при ньютонівському законі притягання. Наразі відомо (див. наприклад $[4,5]$), що стаціонарні лагранжеві трикутні розв'язки нестійкі за Ляпуновим, незалежно від виконання умови (1). Однак нестійкість за Ляпуновим ще не виключає орбітальної стійкості досліджуваних розв'язків. Саме тому надалі ми зосередимо нашу увагу якраз на питанні орбітальної стійкості.

Порівняно недавно у загальному випадку просторової задачі трьох тіл автором доведено орбітальну нестійкість лагранжевих розв'язків незалежно від виконання умови (1) [6]. Однак це доведення здійснено на підставі наближених комбінованих моделей руху, які ми конструювали, використовуючи , зокрема, і систему координат, що обертається, приходячи, таким чином, до рівнянь, для яких лагранжеві стаціонарні трикутники є рівноважними станами. При цьому ми істотно спирались на інтеграл Якобі у збуреному русі, який відповідав якраз рівнянням у рухомій системі координат. Виявляється, що доведення орбітальної нестійкості можна одержати набагато простіше, ніж це зроблено у роботі [6], причому на підставі точних рівнянь руху, що важливо як у плані підтвердження отриманого іншим шляхом результату автора, так і у плані ефективності застосування інтеграла моменту кількостей руху при аналізі стійкості руху. Адже саме роль інтеграла моменту кількостей руху є ключовою в рамках дослідження, що пропонується.

Отже розглянемо рух трьох матеріальних точок з масами m_1, m_2 і m_3 у тривимірному евклідовому просторі під дією сил ньютонівського взаємного притягання. В інерційній системі відліку з початком у центрі мас m_i $(i=1,2,3)$ відповідним рівнянням руху можна надати вигляду [6]:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\rho}_1'' &= \mu_2 \frac{\boldsymbol{\rho}_2-\boldsymbol{\rho}_1}{|\boldsymbol{\rho}_{12}|^3} + \mu_3 \frac{\boldsymbol{\rho}_3-\boldsymbol{\rho}_1}{|\boldsymbol{\rho}_{13}|^3},\\
\boldsymbol{\rho}_2'' &= -\mu_1 \frac{\boldsymbol{\rho}_2-\boldsymbol{\rho}_1}{|\boldsymbol{\rho}_{12}|^3} + \mu_3 \frac{\boldsymbol{\rho}_3-\boldsymbol{\rho}_2}{|\boldsymbol{\rho}_{23}|^3},\\
\boldsymbol{\rho}_3'' &= -\mu_1 \frac{\boldsymbol{\rho}_3-\boldsymbol{\rho}_1}{|\boldsymbol{\rho}_{13}|^3} - \mu_2 \frac{\boldsymbol{\rho}_3-\boldsymbol{\rho}_2}{|\boldsymbol{\rho}_{23}|^3}.
\end{aligned} \tag{2}$$

Тут штрих означає диференціювання за незалежною змінною $\tau = t\sqrt{GM}/r_0^{3/2}$, де $G > 0$ – гравітаційна стала, $M = m_1 + m_2 + m_3$, $\mu_i = m_i/M$, а r_0 – параметр, що має розмірність одиниці довжини, $\boldsymbol{\rho}_i = \mathbf{r_i}/r_0$ – відносні радіуси-вектори матеріальних точок в інерційній системі відліку з початком у центрі мас μ_i. Відповідно до визначення величин μ_i справедлива рівність $\mu_1+\mu_2+\mu_3 = 1$. Ввівши змінні $\boldsymbol{\rho}_i$, ми одержуємо можливість оперувати надалі безрозмірними величинами, що досить зручно для подальшого дослідження.

На підставі структури вихідного лагранжіана системи, що розглядається, маємо інтеграл енергії

$$T - U = \frac{1}{2}\sum_{i}^{3} \mu_i \boldsymbol{\rho}_i'^2 - \sum_{i<j} \frac{\mu_i \mu_j}{|\boldsymbol{\rho}_{ij}|} = h = \mathrm{const}, (i, j = 1, 2, 3), \qquad (3)$$

а також векторний інтеграл моменту кількостей руху

$$\sum_{i}^{3} \mu_i (\boldsymbol{\rho}_i \times \boldsymbol{\rho}_i') = \mathbf{C}. \qquad (4)$$

Крім того, оскільки для даної системи існують ще інтеграли руху центра мас, то у відповідності з вибором системи відліку без обмеження загальності розгляду далі вважатимемо, що

$$\sum_{i}^{3} \mu_i \boldsymbol{\rho}_i' = \mathbf{0}, \quad \sum_{i}^{3} \mu_i \boldsymbol{\rho}_i = \mathbf{0}, \qquad (5)$$

і як наслідок [4, 7, 8]:

$$\sum_{i}^{3} \mu_i \boldsymbol{\rho}_i^2 = \sum_{i<j} \mu_i \mu_j |\boldsymbol{\rho}_{ij}|^2. \qquad (6)$$

Як наслідок з (5) випливають також рівності

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\rho}_1^2 &= \mu_2(\mu_2+\mu_3)\boldsymbol{\rho}_{12}^2 + \mu_3(\mu_2+\mu_3)\boldsymbol{\rho}_{13}^2 - \mu_2\mu_3\boldsymbol{\rho}_{23}^2,\\
\boldsymbol{\rho}_2^2 &= \mu_1(\mu_1+\mu_3)\boldsymbol{\rho}_{12}^2 - \mu_1\mu_3\boldsymbol{\rho}_{13}^2 + \mu_3(\mu_1+\mu_3)\boldsymbol{\rho}_{23}^2, \qquad (7)\\
\boldsymbol{\rho}_3^2 &= -\mu_1\mu_2\boldsymbol{\rho}_{12}^2 + \mu_1(\mu_1+\mu_2)\boldsymbol{\rho}_{13}^2 + \mu_2(\mu_1+\mu_2)\boldsymbol{\rho}_{23}^2.
\end{aligned}$$

Аналогічні рівності зв'язують $\boldsymbol{\rho}_i'^2$ і $\boldsymbol{\rho}_{ij}'^2$. Подробиці див. у [9].

Поряд з рівняннями (2) будемо також розглядати рівняння відстаней [6]:

$$\rho_{12}^{2\,\prime\prime} = 2E_{12} + \frac{2}{\rho_{12}} +$$

$$+\mu_3\left\{\frac{2}{\rho_{12}}+\frac{1}{\rho_{13}}\left(\frac{\rho_{23}^2-\rho_{12}^2}{\rho_{13}^2}-1\right)+\frac{1}{\rho_{23}}\left(\frac{\rho_{13}^2-\rho_{12}^2}{\rho_{23}^2}-1\right)\right\},$$

$$\rho_{13}^2{}''=2E_{13}+\frac{2}{\rho_{13}}+$$

$$+\mu_2\left\{\frac{2}{\rho_{13}}+\frac{1}{\rho_{12}}\left(\frac{\rho_{23}^2-\rho_{13}^2}{\rho_{12}^2}-1\right)+\frac{1}{\rho_{23}}\left(\frac{\rho_{12}^2-\rho_{13}^2}{\rho_{23}^2}-1\right)\right\},$$

$$\rho_{23}^2{}''=2E_{23}+\frac{2}{\rho_{23}}+$$

$$+\mu_1\left\{\frac{2}{\rho_{23}}+\frac{1}{\rho_{12}}\left(\frac{\rho_{13}^2-\rho_{23}^2}{\rho_{12}^2}-1\right)+\frac{1}{\rho_{13}}\left(\frac{\rho_{12}^2-\rho_{23}^2}{\rho_{13}^2}-1\right)\right\},$$

$$E_{12}'=\mu_3\left[\rho_{12}^2{}'\left(\frac{1}{\rho_{12}^3}-\frac{1}{\rho_{13}^3}\right)+\right.$$

$$\left.+\rho_{23}^2{}'\left(\frac{1}{\rho_{13}^3}-\frac{1}{\rho_{23}^3}\right)+2\boldsymbol{\rho}_{23}\boldsymbol{\rho}_{13}'\left(\frac{1}{\rho_{23}^3}-\frac{1}{\rho_{13}^3}\right)\right], \tag{8}$$

$$E_{13}'=-\mu_2\left[\rho_{13}^2{}'\left(\frac{1}{\rho_{12}^3}-\frac{1}{\rho_{13}^3}\right)+2\boldsymbol{\rho}_{23}\boldsymbol{\rho}_{13}'\left(\frac{1}{\rho_{23}^3}-\frac{1}{\rho_{12}^3}\right)\right],$$

$$E_{23}'=\mu_1\left[\rho_{23}^2{}'\left(\frac{1}{\rho_{23}^3}-\frac{1}{\rho_{12}^3}\right)+\right.$$

$$\left.+2(\boldsymbol{\rho}_{13}\boldsymbol{\rho}_{23})'\left(\frac{1}{\rho_{12}^3}-\frac{1}{\rho_{13}^3}\right)-2\boldsymbol{\rho}_{23}\boldsymbol{\rho}_{13}'\left(\frac{1}{\rho_{12}^3}-\frac{1}{\rho_{13}^3}\right)\right],$$

$$(\boldsymbol{\rho}_{23}\boldsymbol{\rho}_{13}')'=\frac{1}{2}(-E_{12}+E_{13}+E_{23})+\left[-\frac{1}{\rho_{12}}+\frac{1}{\rho_{13}}+\frac{1}{\rho_{23}}-\right.$$

$$\left.-\frac{(\mu_1+\mu_3)}{2\rho_{13}}\left(1+\frac{\rho_{23}^2-\rho_{12}^2}{\rho_{13}^2}\right)+\frac{\mu_2}{2\rho_{12}}\left(1+\frac{\rho_{23}^2-\rho_{13}^2}{\rho_{12}^2}\right)-\frac{\mu_2}{\rho_{23}}\right],$$

де

$$E_{12}=v_{12}^2-\frac{2}{\rho_{12}},\ E_{13}=v_{13}^2-\frac{2}{\rho_{13}},\ E_{23}=v_{23}^2-\frac{2}{\rho_{23}}. \tag{9}$$

Рівняння відстаней становлять інтерес з точки зору дослідження орбітальної стійкості. Вони є інтегральним многовидом (інтегральною підмножиною) системи (2) і мають більш низький порядок в порівнянні з (2). Інтеграл енергії в змінних системи (8) набуває вигляду

$$\mu_1\mu_2E_{12}+\mu_1\mu_3E_{13}+\mu_2\mu_3E_{23}=2h. \tag{10}$$

Як бачимо, він містить лише частину змінних, які входять у систему (8), а тому хотілося б мати ще інші співвідношення, які б охоплювали більшу частину змінних, що входять у рівняння (8). І от отримати таке співвідношення можна, використовуючи таку процедуру. Піднесемо до квадрата обидві частини рівності (4). В результаті одержуємо

$$\sum_{i=1}^{3} \mu_i^2 (\boldsymbol{\rho}_i \times \boldsymbol{\rho}_i')^2 + 2 \sum_{i<j} \mu_i \mu_j (\boldsymbol{\rho}_i \times \boldsymbol{\rho}_i')(\boldsymbol{\rho}_j \times \boldsymbol{\rho}_j') = ||\mathbf{C}||^2 = C^2, \quad (11)$$

де, в свою чергу,

$$(\boldsymbol{\rho}_i \times \boldsymbol{\rho}_i')^2 = \boldsymbol{\rho}_i^2 {\boldsymbol{\rho}_i'}^2 - \frac{1}{4}[(\boldsymbol{\rho}_i^2)']^2, \quad (12)$$

$$(\boldsymbol{\rho}_i \times \boldsymbol{\rho}_i')(\boldsymbol{\rho}_j \times \boldsymbol{\rho}_j') = (\boldsymbol{\rho}_i \cdot \boldsymbol{\rho}_j)(\boldsymbol{\rho}_i' \cdot \boldsymbol{\rho}_j') - (\boldsymbol{\rho}_i' \cdot \boldsymbol{\rho}_j)(\boldsymbol{\rho}_i \cdot \boldsymbol{\rho}_j'),\ i < j. \quad (13)$$

Якщо зауважити, що справедливе представлення

$$\boldsymbol{\rho}_1 = -\mu_2 \boldsymbol{\rho}_{12} - \mu_3 \boldsymbol{\rho}_{13},\ \boldsymbol{\rho}_2 = \mu_1 \boldsymbol{\rho}_{12} - \mu_3 \boldsymbol{\rho}_{23},\ \boldsymbol{\rho}_3 = \mu_1 \boldsymbol{\rho}_{13} + \mu_2 \boldsymbol{\rho}_{23}, \quad (14)$$

і, крім того, мають місце рівності

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\rho}_1 \boldsymbol{\rho}_2 &= -I + \frac{1}{2}\mu_3(-\rho_{12}^2 + \rho_{13}^2 + \rho_{23}^2), \\
\boldsymbol{\rho}_1' \boldsymbol{\rho}_2' &= -I^* + \frac{1}{2}\mu_3(-\boldsymbol{\rho}_{12}'^2 + \boldsymbol{\rho}_{13}'^2 + \boldsymbol{\rho}_{23}'^2), \\
\boldsymbol{\rho}_1 \boldsymbol{\rho}_3 &= -I + \frac{1}{2}\mu_2(\rho_{12}^2 - \rho_{13}^2 + \rho_{23}^2), \\
\boldsymbol{\rho}_1' \boldsymbol{\rho}_3' &= -I^* + \frac{1}{2}\mu_2(\boldsymbol{\rho}_{12}'^2 - \boldsymbol{\rho}_{13}'^2 + \boldsymbol{\rho}_{23}'^2), \\
\boldsymbol{\rho}_2 \boldsymbol{\rho}_3 &= -I + \frac{1}{2}\mu_1(\rho_{12}^2 + \rho_{13}^2 - \rho_{23}^2), \\
\boldsymbol{\rho}_2' \boldsymbol{\rho}_3' &= -I^* + \frac{1}{2}\mu_1(\boldsymbol{\rho}_{12}'^2 + \boldsymbol{\rho}_{13}'^2 - \boldsymbol{\rho}_{23}'^2),
\end{aligned} \quad (15)$$

$$\boldsymbol{\rho}_1'\boldsymbol{\rho}_2 = -\frac{1}{2}I' + \mu_3\boldsymbol{\rho}_{13}'\boldsymbol{\rho}_{23},$$

$$\boldsymbol{\rho}_1\boldsymbol{\rho}_2' = -\frac{1}{2}I' + \frac{1}{2}\mu_3(-\rho_{12}^2 + \rho_{13}^2 + \rho_{23}^2)' - \mu_3\boldsymbol{\rho}_{13}'\boldsymbol{\rho}_{23},$$

$$\boldsymbol{\rho}_1'\boldsymbol{\rho}_3 = -\frac{1}{2}I' + \frac{1}{2}\mu_2(\rho_{23}^2)' - \mu_2\boldsymbol{\rho}_{13}'\boldsymbol{\rho}_{23},$$

$$\boldsymbol{\rho}_1\boldsymbol{\rho}_3' = -\frac{1}{2}I' - \frac{1}{2}\mu_2(-\rho_{12}^2 + \rho_{13}^2)' + \mu_2\boldsymbol{\rho}_{13}'\boldsymbol{\rho}_{23},$$

$$\boldsymbol{\rho}_2'\boldsymbol{\rho}_3 = -\frac{1}{2}I' + \frac{1}{2}\mu_1(\rho_{12}^2 - \rho_{23}^2)' + \mu_1\boldsymbol{\rho}_{13}'\boldsymbol{\rho}_{23},$$

$$\boldsymbol{\rho}_2\boldsymbol{\rho}_3' = -\frac{1}{2}I' + \frac{1}{2}\mu_1(\rho_{13}^2)' - \mu_1\boldsymbol{\rho}_{13}'\boldsymbol{\rho}_{23},$$

де

$$I = \mu_1\mu_2\rho_{12}^2 + \mu_1\mu_3\rho_{13}^2, +\mu_2\mu_3\rho_{23}^2, I^* = \mu_1\mu_2\boldsymbol{\rho}_{12}'^2 + \mu_1\mu_3\boldsymbol{\rho}_{13}'^2 + \mu_2\mu_3\boldsymbol{\rho}_{23}'^2,$$

то з врахуванням співвідношень

$$\boldsymbol{\rho}_{12}\boldsymbol{\rho}_{13} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{\rho}_{12}^2 + \boldsymbol{\rho}_{13}^2 - \boldsymbol{\rho}_{23}^2),$$

$$\boldsymbol{\rho}_{12}\boldsymbol{\rho}_{23} = \frac{1}{2}(-\boldsymbol{\rho}_{12}^2 + \boldsymbol{\rho}_{13}^2 - \boldsymbol{\rho}_{23}^2),$$

$$\boldsymbol{\rho}_{13}\boldsymbol{\rho}_{23} = \frac{1}{2}(-\boldsymbol{\rho}_{12}^2 + \boldsymbol{\rho}_{13}^2 + \boldsymbol{\rho}_{23}^2),$$

а також рівностей (7) і (10), видно, що ліву частину рівності (11) можна выразити через змінні, які входять у систему (8).

2 Про рівняння збуреного руху в околі стаціонарних лагранжевих трикутників

Зупинимося на системі рівнянь (8). Згідно з вибором у ній залежних змінних стаціонарним трикутникам Лагранжа відповідає такий її розв'язок [6]:

$$\rho_{ij}^2 = (\rho_{ij}^2)^0 = 1, E_{ij} = (E_{ij})^0 = -1, \boldsymbol{\rho}_{23}\boldsymbol{\rho}_{13}' = (\boldsymbol{\rho}_{23}\boldsymbol{\rho}_{13}')^0 = y^0. \qquad (16)$$

Тут $i < j$. Зображаючи далі ці розв'язки у вигляді

$$\rho_{ij}^2 = 1 + x_{ij},\ E_{ij} = -1 + y_{ij},\ \boldsymbol{\rho}_{23}\boldsymbol{\rho}'_{13} = y^0 + y, \tag{17}$$

де x_{ij}, y_{ij} і y – малі відхилення залежних змінних від стаціонарного розв'язку (16), рівняння збуреного руху у малому його околі отримаємо у вигляді [6]

$$\begin{aligned}
&x''_{12} = 2y_{12} - (1 + 3\mu_3)x_{12} + \frac{3}{2}\mu_3(x_{13} + x_{23}) + O(\tilde{\mathbf{x}}^2),\\
&x''_{13} = 2y_{13} - (1 + 3\mu_2)x_{13} + \frac{3}{2}\mu_2(x_{12} + x_{23}) + O(\tilde{\mathbf{x}}^2),\\
&x''_{23} = 2y_{23} - (1 + 3\mu_1)x_{23} + \frac{3}{2}\mu_1(x_{12} + x_{13}) + O(\tilde{\mathbf{x}}^2),\\
&y'_{12} = 3\mu_3 y^0(x_{13} - x_{23}) + O(\tilde{\mathbf{x}}^2 + \tilde{\mathbf{x}}'^2 + y^2),\\
&y'_{13} = 3\mu_2 y^0(-x_{12} + x_{23}) + O(\tilde{\mathbf{x}}^2 + \tilde{\mathbf{x}}'^2 + y^2),\\
&y'_{23} = 3\mu_1 y^0(x_{12} - x_{13}) + O(\tilde{\mathbf{x}}^2 + \tilde{\mathbf{x}}'^2 + y^2),\\
&y' = \frac{1}{2}(-y_{12} + y_{13} + y_{23}) + \frac{1}{4}(4 - 3\mu_2)x_{12} - \frac{1}{4}(1 + 3\mu_2)x_{13} +\\
&+\frac{1}{2}(-2 + 3\mu_2)x_{23} + O(\tilde{\mathbf{x}}^2).
\end{aligned} \tag{18}$$

Тут $\tilde{\mathbf{x}} = (x_{12}, x_{13}, x_{23})^T$.

Відповідно до того, як визначені збурення у системі (18), особливо якщо взяти до уваги збурення x_{ij}, які торкаються сторін лагранжевого трикутника, її стійкість (нестійкість) є орбітальною.

У збуреному русі для інтеграла енергії (10) отримуємо вираз

$$\mu_1\mu_2 y_{12} + \mu_1\mu_3 y_{13} + \mu_2\mu_3 y_{23} = 2h^*. \tag{19}$$

Що ж стосується інтеграла моменту кількостей руху, то відповідно до рівності (11) з врахуванням (7), (12) -(16) маємо

$$C^2 = k^2 + 2h^*k + \mu_1\mu_2\mu_3\left[-\frac{1}{2}(y_{12} + y_{13} + y_{23}) + \right.$$

$$+\frac{\sqrt{3}}{2}(x'_{12}-x'_{13}-x'_{23}+4y)\Bigg]+O(\tilde{\mathbf{x}}^2+\tilde{\mathbf{x}}'^2+\tilde{\mathbf{y}}^2+y^2), \qquad (20)$$

де

$$\mu_1\mu_2+\mu_1\mu_3+\mu_2\mu_3=k,\ \tilde{\mathbf{y}}=(y_{12},y_{13},y_{23})^T$$

і отже у збуреному русі приходимо до рівності

$$-(y_{12}+y_{13}+y_{23})+\sqrt{3}(x'_{12}-x'_{13}-x'_{23}+$$

$$+4y)+O(\tilde{\mathbf{x}}^2+\tilde{\mathbf{x}}'^2+\tilde{\mathbf{y}}^2+y^2)=\delta=\mathrm{const}. \qquad (21)$$

3 Теорема про орбітальну нестійкість лагранжевих стаціонарних рухів у задачі трьох тіл

Згідно з [6]

$$y^0=\frac{\sqrt{3}}{2},$$

а тому характеристичне рівняння, що відповідає лінійному наближенню системи (18), можемо записати у вигляді

$$\lambda^2(\lambda^2+1)(\lambda^2+4)(\lambda^4+\lambda^2+\frac{27}{4}k)=0. \qquad (22)$$

На підставі (22) виконання нерівності $27k>1$ є достатньою умовою орбітальної нестійкості. До речі, ця умова завжди виконується, якщо всі маси рівні. Однак орбітальна нестійкість не виключається, якщо ця умова не виконується, а, наприклад, у рамках лінійного наближення має місце умова стійкості: $27k<1$.

Здавалося б отримати нову інформацію щодо стійкості, обмежуючись лиш лінійним наближенням рівнянь збуреного руху, неможливо, і неминучим є перехід до аналізу нелінійної частини цих рівнянь. Проте не забуваймо, що у нас є інтеграл руху (21). Тому надалі спираючись на нього, нам вдасться значно спростити підхід до дослідження орбітальної стійкості стаціонарних трикутних лагранжевих розв'язків і уникнути розгляду нелінійної частини рівнянь збуреного руху.

Теорема. *Кругові орбіти системи (2), які відповідають стаціонарним трикутним лагранжевим рухам, орбітально нестійкі.*

Доведення. Для розгляду околу досліджуваних лагранжевих орбіт скористаємося системою рівнянь (18). Спочатку здійснимо таку заміну змінних

$$4\sqrt{3}y - \delta = z_3, \tag{23}$$

в результаті чого рівність (21) набуває вигляду

$$\begin{aligned}
&-(y_{12} + y_{13} + y_{23}) + \sqrt{3}(x'_{12} - x'_{13} - x'_{23}) + \\
&\quad + z_3 + O(\tilde{\mathbf{x}}^2 + \tilde{\mathbf{x}}'^2 + \tilde{\mathbf{y}}^2 + z_3^2 + \delta^2) = 0.
\end{aligned} \tag{24}$$

Далі зробивши заміну змінних

$$\begin{aligned}
x_{12} &= \frac{z_1 - z_2}{\mu_1\mu_2}, \\
x_{13} &= \frac{1}{\mu_1\mu_3}(z_2 - \mu_2\mu_3 x_{23}),
\end{aligned} \tag{25}$$

з допомогою (19), (24) і (25) приходимо до системи рівнянь збуреного руху у формі

$$\begin{aligned}
&z''_1 = 4h^* - z_1 + O(\mathbf{w}^2), \\
&z''_2 = 4h^* - 2\mu_1\mu_2 y_{12} - (1 + \frac{3}{2}\mu_2 + 3\mu_3)z_2 + 3\mu_3 z_1 - \\
&-\frac{3}{2}\mu_2\mu_3(\mu_1 - \mu_2)x_{23} + O(\mathbf{w}^2), \\
&x''_{23} = 2y_{23} - (1 + 3\mu_1 + \frac{3}{2}\mu_2)x_{23} + \frac{3}{2\mu_2}z_1 + \\
&+\frac{3}{2}\frac{(\mu_2 - \mu_3)}{\mu_2\mu_3}z_2 + O(\mathbf{w}^2), \\
&y'_{12} = 3\frac{y^0}{\mu_1}[-\mu_3(\mu_1 + \mu_2)x_{23} + z_2] + O(\mathbf{w}^2 + \mathbf{w}'^2 + \mathbf{y}^2 + z_3^2 + \delta^2), \qquad (26) \\
&y'_{23} = 3y^0\left[\frac{z_1}{\mu_2} - \frac{(\mu_2 + \mu_3)}{\mu_2\mu_3}z_2 + \mu_2 x_{23}\right] + O(\mathbf{w}^2 + \mathbf{w}'^2 + \mathbf{y}^2 + z_3^2 + \delta^2)), \\
&z'_3 = 2\sqrt{3}z_3 + 6\left\{\frac{1}{\mu_1\mu_2\mu_3}[\mu_3 z'_1 - (\mu_2 + \mu_3)z'_2] - \frac{(\mu_1 - \mu_2)}{\mu_1}x'_{23})\right\} -
\end{aligned}$$

$$-4\sqrt{3}y_{12} + \frac{\sqrt{3}}{\mu_1\mu_2\mu_3}\{\mu_3(4-3\mu_2)z_1 - [\mu_3(4-3\mu_2)+\mu_2(1+3\mu_2)]z_2\} +$$

$$+\frac{\sqrt{3}}{\mu_1}[\mu_2(1+3\mu_2)+2\mu_1(-2+3\mu_2)]x_{23} + O(\mathbf{w}^2+\mathbf{w}'^2+\mathbf{y}^2+z_3^2+\delta^2).$$

Тут $\mathbf{w} = (z_1, z_2, x_{23})^T, \mathbf{y} = (y_{12}, h, y_{23})^T$.

Не можна не звернути увагу на той факт, що змінна z_3 входить лише в останнє рівняння лінійного наближення системи (26), що дає змогу зразу ж визначити один з коренів відповідного характеристичного рівняння. А саме на підставі останнього рівняння системи (26) маємо

$$\lambda_1 = 2\sqrt{3}.$$

Згідно з теоремою Ляпунова [10] (див. також [11]) звідси випливає, що існує фазова траєкторія системи (26), яка входить в точку $\mathbf{w} = \mathbf{w}' = \mathbf{y} = \mathbf{0}, z_3 = 0$ при $\tau \to -\infty$. Отже, положення рівноваги $\mathbf{w} = \mathbf{w}' = \mathbf{y} = \mathbf{0}, z_3 = 0$ системи (26) нестійке за Ляпуновим.

Таким чином, за допомогою інтеграла руху (21) нам вдалося спростити підхід до дослідження стійкості, використовуючи рівняння збуреного руху у формі (26). Беручи до уваги визначення змінних $\mathbf{w}$ і $\mathbf{y}$, робимо висновок про орбітальну нестійкість кругових орбіт, які відповідають стаціонарним трикутним лагранжевим рухам. □

Наслідок. *Оскільки вихідна система (2) зворотна, то існування фазової траєкторії, що притягується до лагранжевої кругової орбіти при $\tau \to -\infty$, зумовлює існування траєкторії, яка притягується до цієї орбіти і при $\tau \to \infty$.*

4 Висновок

Підводячи підсумок викладеному вище, можемо зазначити, що дослідження орбітальної стійкості стаціонарних трикутних лагранжевых розв'язків ми звели за допомогою інтеграла моменту кількостей руху до розгляду квазілінійної системи, лінійне наближення якої дало нам змогу зробити висновок про орбітальну нестійкість лагранжевых розв'язків. Зауважимо, що сама ідея застосування інтегралів руху системи для дослідження стійкості не нова. Згадаймо метод зв'язки перших інтегралів, запропонований Н.Г. Четаєвим при дослідженні обертального руху артилерійського снаряда [12]. В подальшому цей метод був розвинений В.В. Румянцевим при дослідженні стійкості рухів твердого тіла [13]. Користь від застосування інтегралів руху в першу чергу полягає в тому, що вони дають можливість розкривати якісні властивості розв'язків системи, не оперуючи самими розв'язками. В цьому сенсі можливість за допомогою інтегралів руху понизити розмірність системи є далеко не першорядною.

[1] Routh E.J. On Laplace's three particles, with a supplement on the stability of steady motion // Proc. Lond. Math. Soc. — 1874. — vol. 6. — P. 86–97.

[2] Ляпунов А.М. Об устойчивости движения в одном частном случае задачи о трех телах // Собр. соч.,М.–Л: Изд-во АН СССР.— 1954. — Т. 1. — С. 7–263.

[3] Маркеев А.П. Точки либрации в небесной механике и космодинамике.— М.: Наука, 1978.— 312 с. —

[4] Дубошин Г.Н. Небесная механика. Аналитические и качественные методы.— М.: Наука, 1964.— 560 с. —

[5] Парс Л.А. Аналитическая динамика.— М.: Наука, 1971. — 635 с. —

[6] Sosnitskii S.P. On the orbital stability of triangular Lagrangian motions in the three-body problem // Astron. J. — 2008. — **136**, No 6. — P. 2533–2540.

[7] Рой А.Е. Движение по орбитам.— М.: Наука, 1981.— 544 с. —

[8] Арнольд В.И., Козлов В.В., Нейштадт А.И. Математические аспекты классической и небесной механики.— М.: УРСС, 2002. — 414 с. —

[9] Сосницький С.П. Про стійкість руху за Лагранжем у задачі трьох тіл // Укр. мат. журн. — 2005. — **57**, № 8. — С. 1137–1143.

[10] Ляпунов А.М. Общая задача об устойчивости движения.— М.; Л, 1935. — 386 с. —

[11] Немыцкий В.В., Степанов В.В. Качественная теория дифференциальных уравнений.— М.; Л.: Гостехтеоретиздат, 1949.— 550 с. —

[12] Четаев Н.Г. Устойчивость движения.— М.: Наука, 1965.— 207 с. —

[13] Румянцев В.В. Устойчивость перманентных движений тяжелого твердого тела // Прикл. математика и механика.— 1956. — **20**, вып. 1.— С. 51–66.