Збірник праць Інституту математики НАН України 2016, т. 13, № 3, 230–242

УДК 517.983.27

Нерівномірна Sinc—апроксимація

Д.О. Ситник

Інститут математики НАН України, Київ; sytnikd@gmail.com

The paper proposes an interpolatory–type approximation method based on the use of Sinc basis and arbitrary irregular grid. We obtained admissibility conditions for the nodes of irregular grid and proved an apriori error estimate of the method which depends on the relative position of irregular grid and the nodes of uniform grid associated with classical Sinc–interpolant. We further study an error of the approximation provided by a given irregular grid lying in the neighobourhood of the classical uniform grid.

В работе предлагается аппроксимаций метод интерполяционного типа, основанный на использовании Sinc базиса и произвольной неравномерной сетки. Получены условия допустимости узлов, а также априорную оценку погрешности метода, которая зависит от взаиморасположения узлов неравномерной сетки и классической для Sinc методов равномерной сетки. Исследован порядок аппроксимации при условии малого отклонения заданной неравномерной сетки от классической.

1 Вступ

Задача наближення функції за її значеннями заданими на деякій сітці відмінній від тієї, що асоційована з інтерполянтом часто виникає у цифровій обробці сигналів та у прикладних сферах, що пов'язані з обробкою та розпізнаванням зображень.

Перші згадки стосуються проблеми відновлення функції з обмеженим частотним спектром за її значеннями на нерівномірній сітці, використовуючи для цього нерівномірний аналог розкладу в ряд Фур'є [10]. Більшість наступних робіт присвячених даній тематиці стосується точного відновлення функції $f \in V_j \subset \mathbb{L}^p$ по її значеннях, що задані на деякій нерівномірній сітці (див., наприклад, [2, 7, 14, 17] та бібліографію в цих джерелах).

Велика кількість більш сучасних робіт присвячена задачам неточного (чисельного) відновлення функції $[1, 8, 11, 12, 18, 21, 22]$. Об'єднуючою рисою згаданих робіт є те, що всі вони базуються на ідеології сформульованій у [10]. Ця ідеологія полягає у побудові та дослідженні нових апроксимаційних операторів пов'язаних із заданою нерівномірною сіткою Λ'. Подальше чисельне відновлення $f(x)$ здійснюється використовуючи ітераційне рівняння пов'язане з побудованим інтерполянтом. Альтернативна техніка відновлення невідомих значень функції $f \in L^2$ за відомими значеннями деяких заданих лінійних функціоналів від цієї функції була запропонована у роботі [17]. Подібно до інших робіт тут автор розглядає задачу точного відновлення функції f (умови точного відновлення для більш широкого класу функцій досліджуються у [7]), використовуючи для цього підхід подібний до колокації. Загальна схема наближення функції інтерполяційними поліномами з використанням колокації її невідомих значень на асоційованій з інтерполянтом сітці по відомим значенням цієї функції на сітці, що відмінна від асоційованої (класичної для інтерполянта), був запропонований в [25].

Дана робота присвячена реалізації запропонованих в [25] ідей до Sinc–інтерполяції. Більш детальні відомості з теорії Sinc–методів та, зокрема, теорії Sinc–інтерполяції представлені у пункті 2. Основні результати роботи сформульовані у пункті 3, де нами отримано умови допустимості нерівномірної сітки, а також доведена апріорна оцінка похибки побудованого нерівномірного Sinc–апроксиманту. Як наслідок з цієї оцінки, ми отримуємо порядок апроксимації у випадку невеликого відхилення заданої нерівномірної сітки від класичної.

2 Sinc–апроксимація

Методи що обговорюються у даній главі завдячують своєю назвою Sinc–функції:

$$\operatorname{sinc}(x) = \frac{\sin \pi x}{\pi x}$$

яка вперше була використана у теорії інформації (див. наприклад доведення Теореми Віттакера–Котельнікова–Шенона [6]). Ця функція математично описує ідеальний низькочастотний фільтр і тому широко застосовуються у цифровій обробці сигналів. Для спрощення подальшого викладу теорії ми також введемо до розгляду наступне позначення

$$S\{k,h\}(x) \equiv \operatorname{sinc}\left(\frac{x}{h} - k\right), \quad h > 0,\ k \in \mathbb{Z} \tag{1}$$

для функції, що є зсунутою та про-масштабованою версією $\operatorname{sinc}(x)$. Таке позначення є більш зручним для описання основаних на Sinc–функції апроксимаційних та квадратурних формул. Послідовність

$$\left\{\frac{1}{\sqrt{h}} S(k,h)\right\}_{k=-\infty}^{\infty} \tag{2}$$

утворює повний ортонормований базис у просторі $\mathbf{W}(\pi/h)$ інтегровних з квадратом функцій $f(x) \in \mathbb{R}$, таких, що $\forall z \in \mathbb{C}$ функція $f(z)$ аналітична, причому $|f(z)| \le C e^{\pi|z/h|}$, з деякою додатною константою C [19]. Вирізняючою властивістю Sinc–базису (1) з поміж інших неполіноміальних базисів є те що проекція $\forall f \in \mathbf{W}(\pi/h)$ на k-й елемент базису $S\{k,h\}(x)$ дорівнює $f(kh)$. Звідки, позначивши

$$C_\infty\{f,h\}(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(kh) S\{k,h\}(x),$$

матимемо

$$f(x) = C_\infty\{f,h\}(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Простір $\mathbf{W}(\pi/h)$ є завузьким з точки зору застосувань оскільки вимагає аналітичності функції у всій комплексній площині. Виявилось [19], що обмеження області аналітичності функції до смуги D_d

$$D_d = \{z = x + iy \quad x \in (-\infty, \infty),\ |y| \le d\} \tag{3}$$

не призводить до втрати якісних апроксимаційних властивостей базису (2). Множина функцій $f(z)$ аналітичних у смузі $z \in D_d$, для деякого $d < \pi/2$ і таких, що величина

$$N_1(f, D_d) \equiv \int_{\partial D_d} |f(z)| dz < \infty,$$

утворює простір, який називається простором Харді $H^1(D_d)$ з нормою $\|f\| = N_1(f, D_d)$ (аналогічно можна визначити простір $H^x(D_d)$ для $x = 2, 3, \ldots$ [19]). У цьому просторі розклад $f(x)$ по послідовності функцій $S\{k,h\}$ (2) вже не є точним. Тим не менше, $\forall f \in H^1(D_d)$ справедлива наступна оцінка точності такого розкладу [20, с. 383]

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x) - C_\infty\{f,h\}(x)| \le c\mathrm{e}^{-\pi d/h}, \tag{4}$$

константа $c > 0$ не залежить від h. Тобто, заміна функції $f \in H^1(D_d)$ рядом який побудований з використанням значень $f(x)$ на дискретній множині точок призводить до виникнення експоненціально малої похибки, при $h \to 0$. Похибку такого роду у літературі прийнято називати похибкою дискретизації [23]. Згідно підходу, запропонованому в [9] для аналізу точності чисельних методів з використанням теорії функцій комплексної змінної, похибка дискретизації є однією з двох складових загальної похибки апроксимаційного методу. Інша складова загальної похибки виникає при заміні $C_\infty\{f,h\}(x)$ рядом скінченної довжини $C_N\{f,h\}(x)$:

$$C_N\{f,h\}(x) = \sum_{k=-N}^{N} f(kh)S\{k,h\}(x), \tag{5}$$

де $N > 0$ – цілий параметр, який визначає кількість точок Sinc–апроксимаційної формули рівну $2N+1$. Таку похибку називають похибкою округлення (відкидання). Має місце наступна теорема [19, с. 137]:

Теорема 2.1. *Якщо функція $f \in H^1(D_d)$ є такою, що $\forall x \in \mathbb{R}$ виконується умова*

$$|f(x)| \le L\mathrm{e}^{-\alpha|x|}, \quad \text{з деякими} \;\; \alpha, L > 0. \tag{6}$$

Тоді, вибравши

$$h = \sqrt{\frac{\pi d}{\alpha N}} \tag{7}$$

для похибки Sinc–апроксимації функції $f(x)$ рядом $C_N\{f,h\}(x)$ справедлива оцінка

$$\begin{gathered}\sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x) - C_N\{f,h\}(x)| \le c\mathcal{E}_N, \\ \mathcal{E}_N = N^{1/2}\mathrm{e}^{-\sqrt{\pi d\alpha N}},\end{gathered} \tag{8}$$

з константою c залежною від f, d, α та незалежною від N.

При доведені теореми, загальну похибку Sinc–апроксимації представляють у вигляді суми двох згаданих складових. Умова (6) накладена для того, щоб оцінити залишок ряду $|C_\infty\{f,h\}(x)-C_N\{f,h\}(x)| \le \mathrm{e}^{-\sqrt{\pi d \alpha N}}$ і таким чином узгодити похибку округлення з похибкою дискретизації (4). Подібні міркування можуть бути застосованими до ситуації коли область аналітичності не змінюється, а швидкість спадання $f(x)$ на $\mathbb{R}$ повільніша ніж експоненціальна. Похибка округлення, в такій ситуації, домінуватиме над похибкою дискретизації і буде вносити основний вклад до загальної похибки методу.

У переважній більшості застосувань параметри d, α не доступні апріорно, тому наступний вигляд похибки є більш зручним на практиці

$$\mathcal{E}(N) = C_1 \sqrt{N} \mathrm{e}^{-C_2\sqrt{N}}. \tag{9}$$

Цю формулу, насправді застосовують для зворотньої задачі оцінки N, як функції від $\mathcal{E}$:

$$N(\mathcal{E}) = \left[\frac{1}{C_2}\mathbf{W}^2\left(-\frac{C_2}{C_1}\mathcal{E}\right)+1\right], \tag{10}$$

де $\mathbf{W}(z)$ означає нижню гілку функції Ламберта $\texttt{LambertW}(-1, z)$, [16], а $[\cdot]$ – ціла частина від числа. Для цього спочатку за допомогою (9) наближено знаходяться сталі C_1, C_2, а потім за формулою (10) обчислюється значення N. Оцінки на C_1, C_2 можна отримати використовуючи апостеріорну схему, що базується на визначенні невідомих сталих з системи рівнянь складених на основі значення функції $f(x)$ та двох її наближень $C_N\{f,h\}(x)$ при $N = N_0, 2N_0$. Або трьох наближень $N = N_0, 2N_0, 4N_0$, якщо точне значення функції не доступно для жодного x. Строго кажучи, для формування системи рівнянь з невідомими C_1, C_2 потрібно чотири наближення до $f(x)$. Три наближених значення дозволяють тільки оцінити константи C_1 та C_2 знизу. У більшості випадків (для достатньо великих N_0) така оцінка є досить точною.

Окрім згаданих вище результатів, що стосуються Sinc–апроксимації, міркування викладені у пункті 3 спираються на поняття колокації. Наступний результат дозволяє оцінити точність наближення деякої $f(x)$ Sinc–апроксимантом за умови, що відомі тільки наближенні значення $f(x)$ у відповідних точках апроксимації.

Теорема 2.2 (Stenger, [20, Теорема 3.3])**.** *Нехай для функції $f \in H^1(D_d)$ виконуються всі умови Теореми 2.1. Якщо для набору чисел*

$c_k \in \mathbb{C}$, $k = \overline{-N, N}$ *виконується умова*

$$\left(\sum_{k=-N}^{N} |f(kh) - c_k|^2 \right)^{1/2} < \delta, \tag{11}$$

з деяким додатнім $\delta \in \mathbb{R}$, *то*

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} \left| f(x) - \frac{1}{h} \sum_{k=-N}^{N} c_k S\{k,h\}(x) \right| \leq c\mathcal{E}_N + \delta, \tag{12}$$

з c, $\mathcal{E}_N$ *визначеними в* (8).

3 Sinc-апроксимація функції за її значеннями поза інтерполяційною сіткою

У цій главі ми запропонуємо метод наближення функції $f(x)$ за її значеннями на нерівномірній сітці та знайдемо оцінку похибки отриманого наближення. Цей чисельний метод є адаптацією техніки розробленої в [25] до використання Sinc–базису (2). Він полягає у колокації $f(x)$ на заданій нерівномірний сітці з використанням Sinc–інтерполянту (5). Процедура колокації, як відомо, приводить системи лінійних рівнянь (колокаційної системи) де невідомими є значення інтерполянта у вузлах асоційованої з ним сітки $\{kh\}_{k=-N}^{N}$ (див. формулу (5)). Ці значення очевидно будуть відрізнятися від послідовності $f(kh)$, $k = \overline{-N, N}$ потрібної для побудови $C_N\{f,h\}(x)$. Не зважаючи на це, виконання зазначених далі умов гарантує "близькість" обчислених, розв'язуючи колокаційну систему рівнянь, значень до значень функції $f(kh)$, а також те, що інтерполянт, побудований на основі обчислених значень, буде наближенням (апроксимантом) до функції $f(x)$ $\forall x \in \mathbb{R}$ (див. [25, Теорема 2.2]).

Символами Λ_S та Λ позначимо сітки:

$$\Lambda_S = \{kh\}_{k=-N}^{N}, \quad \Lambda = \{x_k\}_{k=-N}^{N}, \quad N \in \mathbb{N}, \tag{13}$$

де а $x_k \in R$ — задані вузли, а $h > 0$ — фіксований крок залежний від N. Сітку Λ називатимемо нерівномірною, припускаючи таким чином, що Λ не співпадає з Sinc-інтерполяційною сіткою Λ_S. Введемо до розгляду лінійний оператор $D(\Lambda) : X^n \to X^n$, який ставить у відповідність впорядкованому набору елементів $\mathbf{z} = (z_{-N}, z_{-N+1}, \dots z_N)^T$,

$z_i \in \mathbb{C}, i = \overline{-N, N}$ відповідний набір значень інтерполянта

$$C_N\{\mathbf{z}, h\}(x) = \frac{1}{h} \sum_{k=-N}^{N} z_k S\{k, h\}(x),$$

на сітці Λ за правилом $D\left(\Lambda\right)\mathbf{z} = \Phi\mathbf{z}$,

$$\Phi = \left[S_k\left(x_n\right)\right]_{n,k=-N}^{N} \equiv \begin{pmatrix} S_{-N}(x_{-N}) & \cdots & S_N(x_{-N}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ S_{-N}(x_N) & \cdots & S_N(x_N) \end{pmatrix},$$

де $S_k(x) = S\{k, h\}(x)$.

Зауважимо, що $D\left(\Lambda\right)\mathbf{f}$, $\mathbf{f} = \left(f(-Nh), \ldots, f(Nh)\right)^T$ це проекція інтерполяційного оператора $f \to C_N\{f, h\}$ на сітку Λ.

Лема 3.1. *Припустимо, що, для фіксованих h та N, задано сітку Λ (13). Якщо*

$$\Delta \cap \{\pm kh\}_{k=N}^{\infty} = \emptyset, \tag{14}$$

то існує обмежена обернена $\Phi^{-1} \equiv \left[d_{nk}\right]_{n,k=-N}^{N}$,

$$d_{nk} = \frac{\pi(-1)^n \prod\limits_{r=-N}^{N}\left(x_r - nh\right)\left(x_k - rh\right)}{h\left(x_k - nh\right)\sin \pi x_k \prod\limits_{\substack{r=-N \\ r\neq n}}^{N}\left(nh - rh\right) \prod\limits_{\substack{r=-N \\ r\neq k}}^{N}\left(x_r - x_k\right)}, \tag{15}$$

яка визначає обернений оператор $D^{-1}\left(\Lambda\right)\mathbf{f} = \Phi^{-1}\mathbf{f}$.

Доведення. Перепишемо матрицю Φ у вигляді

$$\Phi = \frac{h}{\pi} PAR$$

де $P = \operatorname{diag}\left[\sin\left(\pi\frac{x_{-N}}{h}\right), \ldots, \sin\left(\pi\frac{x_N}{h}\right)\right]$, $R = \operatorname{diag}\left[\left\{(-1)^k\right\}_{k=-N}^{N}\right]$, $A = \left[\frac{1}{x_n - kh}\right]_{n,k=-N}^{N}$. В роботі [24, Лема 2.1] показано, що матриця A має обернену $A^{-1} = \left[a_{nk}\right]_{n,k=-N}^{N}$ за умови $x_n \neq kh$, $k = \overline{-N, N}$, причому

$$a_{nk} = \frac{\prod\limits_{r=-N}^{N} (x_r - nh)\,(x_k - rh)}{(x_k - nh) \prod\limits_{\substack{r=-N \\ r\neq n}}^{N} (nh - rh) \prod\limits_{\substack{r=-N \\ r\neq k}}^{N} (x_r - x_k)}.$$

Враховуючи вигляд a_{nk}, для елементів $\Phi^{-1} = \frac{\pi}{h} R^{-1} A^{-1} P^{-1}$ отримуємо представлення (15). □

Нехай $\mathbf{b} = \left(f(x_{-N}), \ldots, f(x_N)\right)^T \in \mathbb{C}^{2N+1}$ вектор відомих значень функції $f(x)$ на сітці Λ. Припустивши виконання умови (14), означимо $\mathbf{g} \in \mathbb{C}^{2N+1}$, як вектор $\mathbf{g} = \left(g_{-N}, \ldots, g_N\right)^T$, що задовольняє рівняння

$$D\,(\Lambda)\,\mathbf{g} = \mathbf{b}. \tag{16}$$

В якості векторної норми $\|\cdot\|_{2N+1}$ простору $\mathbb{C}^{2N+1}$ використовуватимемо

$$\|\mathbf{x}\|_{2N+1} = \max_{-N\leq k\leq N} |x_k|, \quad \forall \mathbf{x} \equiv \left(x_{-N}, \ldots, x_N\right)^T \in \mathbb{C}^{2N+1}.$$

Наступна лема характеризує похибку наближення невідомих значень функції $f(x)$ на сітці Λ_S елементами вектору $\mathbf{g}$.

Лема 3.2. *Нехай $f \in H^1(D_d)$ задовольняє умову* (6)*.Якщо для заданої стіки Δ виконується умова* (14)*, де h визначена формулою* (7)*, то похибка наближення $\mathbf{f} = \left(f(-Nh), \ldots, f(Nh)\right)^T$ вектором $\mathbf{g}$, обчисленим з* (16)*, задовольняє нерівність*

$$\|\mathbf{f} - \mathbf{g}\|_{2N+1} \leq c\left\|D^{-1}(\Lambda)\right\|\mathcal{E}_N, \tag{17}$$

де $\|\cdot\|$ — матрична норма узгоджена з $\|\cdot\|_{2N+1}$, а величини c, $\mathcal{E}_N$ визначені у формулі (8)*.*

Доведення. Символом $\mathbf{v}$ позначимо вектор значень інтерполяційного полінома $C_N\{f,h\}(x)$ на сітці Λ, тобто

$$D(\Lambda)\mathbf{f} = \mathbf{v}.$$

Віднявши почленно рівність (16) від попередньої рівності, отримаємо

$$D(\Lambda)\,(\mathbf{f} - \mathbf{g}) = \mathbf{v} - \mathbf{b}.$$

Умова (14) гарантує існування $D^{-1}(\Lambda)$, тому

$$\|\mathbf{f}-\mathbf{g}\|_{2N+1} = \left\|D^{-1}(\Lambda)\,(\mathbf{v}-\mathbf{b})\right\|_{2N+1} \leq \left\|D^{-1}(\Lambda)\right\| \|\mathbf{v}-\mathbf{b}\|_{2N+1}.$$

Норму $\|\mathbf{v}-\mathbf{b}\|_{2N+1}$ з попередньої нерівності оцінимо використовуючи формулу (8), теореми 2.1, справедливість якої забезпечується обмеженнями накладеними на $f(x)$ в умові леми. Маємо

$$\|\mathbf{v}-\mathbf{b}\|_{2N+1} \leq \sup_{x\in\mathbb{R}} \left|f(x) - C_N\left\{f,h\right\}(x)\right| \leq c\mathcal{E}_N,$$

що й доводить (17). □

Зауваження 3.1. *Явний вигляд* $\left\|D^{-1}(\Lambda)\right\|$ *наступний*

$$\begin{aligned}\left\|D^{-1}(\Lambda)\right\| = & \frac{\pi}{h} \max_{-N\leq n\leq N} \frac{\prod\limits_{r=-N}^{N} |x_r - nh|}{h^{2N}\,|n-N|!\,|n+N|!} \\ & \times \sum_{k=-N}^{N} \left|\frac{x_k - kh}{\sin\pi x_k\,(x_k - nh)}\right| \prod_{\substack{r=-N\\ r\neq k}}^{N} \left|\frac{x_k - rh}{x_r - x_k}\right|.\end{aligned} \tag{18}$$

Матриці виду $D(\Lambda)$ в літературі носять назву узагальнених матриць типу Коші. Не зважаючи на те, що норма оберненої матриці $D^{-1}(\Lambda)$ зростає коли сітка Λ конденсується, це не обов'язково погіршує стійкість алгоритмів обчислення цієї матриці. Справедливо наступне

Зауваження 3.2. *Для фіксованих* $f(x)$ *та* Λ *лінійна система* (16) *може бути розв'язана з використанням обчислювально стійких алгоритмів [3, 4], алгоритмічна складність яких —* $7(2N+1)^2$.

Сформулюємо основний результат роботи.

Теорема 3.1. *Нехай* $f \in H^1(D_d)$ *задовольняє умову* (6) *з параметрами* α, L, *а для заданої стіки* Δ *виконується умова* (14), *де крок* h *визначений формулою* (7). *Тоді існує апроксимант* $C_N'\left\{f,h\right\}(x)$, *залежний виключно від значень* $f(x)$ *на* Δ*:*

$$C_N'\left\{f,h\right\}(x) = \frac{1}{h} \sum_{k=-N}^{N} g_k S\{k,h\}(x), \tag{19}$$

де g_k *отримані з* (16) *або за допомогою явного обчислення* Φ^{-1} (15).

Похибка наближення функції $f(x)$ *апроксимантом* $C'_N\left\{f,h\right\}(x)$ *задовольняє нерівність*

$$\sup_{x\in\mathbb{R}}\left|f(x)-C'_N\left\{f,h\right\}(x)\right|\leq c\left(1+\left\|D^{-1}(\Lambda)\right\|\right)\sqrt{N}\mathrm{e}^{-\sqrt{\pi d\alpha N}}, \qquad (20)$$

причому стала c не залежить від N *та* Δ.

Доведення. Для доведення достатньо послідовно застосувати Лему 3.2 та Теорему 2.2. $\square$

Наслідок 3.1. *Припустимо, що для функції* $f(x)$ *та сітки* Δ *виконуються умови Теореми 3.1. Якщо, для будь-яких* $k,p\in\{-N,\ldots,N\}$

$$\exists\lambda<1,\delta>0:\ |x_k-kh|\leq\lambda h,\quad |x_k-x_p|\geq\delta, \qquad (21)$$

то похибка наближення $f(x)$ *апроксимантом* $C'_N\left\{f,h\right\}(x)$ *задовольняє нерівність* (20), *причому*

$$\left\|D^{-1}(\Lambda)\right\|\leq\frac{c}{h}\left(\frac{h}{\delta}\right)^{2N}\frac{(2N+1)^{1+2\lambda}}{(1-\lambda)^{2\lambda}}, \qquad (22)$$

де стала c не залежить від N *cv.*

Доведення. Для оцінки $\left\|D^{-1}(\Lambda)\right\|$ розглянемо складові явної формули (18) по–черзі.

$$\begin{aligned}\prod_{\substack{r=-N\\r\neq k}}^{N}\left|\frac{x_k-rh}{x_r-x_k}\right| &= \prod_{r=-N}^{k-1}\left|\frac{x_k-rh}{x_r-x_k}\right|\prod_{r=k+1}^{N}\left|\frac{x_k-rh}{x_r-x_k}\right|\\ &\leq\left(\frac{h}{\delta}\right)^{2N}\prod_{r=-N}^{k-1}\left|\frac{k-r+\lambda}{k-r}\right|\prod_{r=k+1}^{N}\left|\frac{r-k-\lambda}{r-k}\right|\\ &\leq\left(\frac{h}{\delta}\right)^{2N}\frac{\Gamma(N+k+\lambda+1)\Gamma(N-k-\lambda+1)}{\Gamma(N-k+1)\Gamma(N-k+1)},\end{aligned}$$

Функція в правій частині останньої оцінки — парна, тому, не втрачаючи загальності далі припускатимемо $k\geq 0$. Застосувавши відомі властивості Гамма функції $\Gamma(\cdot)$, отримаємо

$$\prod_{\substack{r=-N\\ r\neq k}}^{N}\left|\frac{x_k-rh}{x_r-x_k}\right| \le \left(\frac{h}{\delta}\right)^{2N}\frac{(N+k+1)^{\lambda}}{(N-k-\lambda+1)^{\lambda}}. \tag{23}$$

Використаємо (23) для оцінки інших складових (18). Матимемо

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=-N}^{N}\left|\frac{x_k-kh}{\sin\pi x_k\,(x_k-nh)}\right|\prod_{\substack{r=-N\\ r\neq k}}^{N}\left|\frac{x_k-rh}{x_r-x_k}\right| \\
&\le c_2\left(\frac{h}{\delta}\right)^{2N}\sum_{k=-N}^{N}\frac{\delta h}{|\sin\pi x_k\,(x_k-nh)|}\frac{(N+k+1)^{\lambda}}{(N-k-\lambda+1)^{\lambda}} \\
&\le \frac{c_2c_3}{\pi}\left(\frac{h}{\delta}\right)^{2N}\frac{(2N+\lambda)^{1+\lambda}}{h\lambda(1-\lambda)^{\lambda}}.
\end{aligned}$$

Аналогічно

$$\frac{\prod\limits_{r=-N}^{N}|x_r-nh|}{h^{2N}\,|n-N|!\,|n+N|!} \le c_4\frac{\lambda h(2N+1)^{\lambda}}{(1-\lambda)^{\lambda}}. \tag{24}$$

Застосувавши (23) та (24) до (18) та позначивши $c_2c_3c_4=c$, отримаємо (22). □

Основною перевагою методу наближення функції апроксимантом $C'\{f,h\}$ за значеннями цієї функції на нерівномірній сітці є те, що, застосування колокації дозволяє відносно прозоро отримати апріорну оцінку похибки, а також виокремити клас сіток де ця оцінка еквівалентна за порядком до класичної оцінки похибки (8). Це вигідно відрізняє запропонований в роботі метод від інших [5,13,15]. В майбутніх роботах планується застосування розробленого методу до Sinc–квадратур та інших чисельних методів, які базуються на використанні Sinc базису.

[1] Adcock B., Gataric M., Hansen A. On stable reconstructions from nonuniform fourier measurements // SIAM Journal on Imaging Sciences. — 2014. — Vol. 7, no. 3. — P. 1690–1723. — http://dx.doi.org/10.1137/130943431.

[2] Benedetto J. J. Irregular sampling and frames // Wavelets: A Tutorial in Theory and Applications / Ed. by Charles K. Chui. — San Diego, CA, USA : Academic Press Professional, Inc., 1992. — P. 445–507. — Access mode: http://dl.acm.org/citation.cfm?id=160964.159455.

[3] Boros T., Kailath T., Olshevsky V. A fast parallel björck–pereyra-type algorithm for solving cauchy linear equations // Linear Algebra and Its Applications. — 1999. — Vol. 302. — P. 265–293.

[4] Boros T., Kailath T., Olshevsky V. Pivoting and backward stability of fast algorithms for solving cauchy linear equations // Linear algebra and its applications. — 2002. — Vol. 343. — P. 63–99.

[5] Boyd J. P. A fast algorithm for chebyshev, fourier, and sinc interpolation onto an irregular grid // Journal of Computational Physics. — 1992. — Vol. 103, no. 2. — P. 243 – 257. — Access mode: http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/002199919290399J.

[6] Brigham E. The Fast Fourier Transform and Its Applications. — Prentice Hall, 1988. — P. 463.

[7] Clark J., Palmer M., Lawrence P. A transformation method for the reconstruction of functions from nonuniformly spaced samples // Acoustics, Speech and Signal Processing, IEEE Transactions on. — 1985. — Oct. — Vol. 33, no. 5. — P. 1151–1165.

[8] Condat L. Reconstruction from non-uniform samples: A direct, variational approach in shift-invariant spaces // Digital Signal Processing. — 2013. — Vol. 23, no. 4. — P. 1277 – 1287.

[9] Davis P. Errors of numerical approximation for analytic functions // Journal of Rational Mechanics and Analysis. — 1953. — Vol. 2, no. 3. — P. 303–313.

[10] Duffin R. J., Schaeffer A. C. A class of nonharmonic fourier series // Transactions of the American Mathematical Society. — 1952. — Vol. 72, no. 2. — P. 341–366.

[11] Feichtinger H. G., Gröchenig K. Theory and practice of irregular sampling // Wavelets, Mathematics and Applications / Ed. by J. J. Benedetto, M. W. Frazier. — CRC Press, 1994. — P. 305–363.

[12] Feichtinger H. G., Gröchenig K., Strohmer T. Efficient numerical methods in non-uniform sampling theory // Numer. Math. — 1995. — Feb. — Vol. 69, no. 4. — P. 423–440.

[13] Greengard L., Lee J.-Y., Inati S. The fast sinc transform and image reconstruction from nonuniform samples in k-space // Communications in Applied Mathematics and Computational Science. — 2007. — Vol. 1, no. 1. — P. 121–131.

[14] Marks R. J. Advanced topics in Shannon sampling and interpolation theory. — 1993. — Vol. 1. — P. 360.

[15] Maymon S., Oppenheim A. Sinc interpolation of nonuniform samples // Signal Processing, IEEE Transactions on. — 2011. — Oct. — Vol. 59, no. 10. — P. 4745–4758.

[16] On the LambertW function / R.M. Corless, G.H. Gonnet, D.E.G. Hare et al. // Advances in Computational Mathematics. — 1996. — Vol. 5, no. 1. — P. 329–359.

[17] Papoulis A. Generalized sampling expansion // Circuits and Systems, IEEE Transactions on. — 1977. — Nov. — Vol. 24, no. 11. — P. 652–654.

[18] Scherzer O., Strohmer T. A multi-level algorithm for the solution of moment problems // Numerical Functional Analysis and Optimization. — 1998. — Vol. 19, no. 3-4. — P. 353–375.

[19] Stenger F. Numerical methods based on Sinc and analytic functions. — Springer, New York, 1993. — P. 580.

[20] Stenger F. Summary of sinc numerical methods // J. Comput. Appl. Math. — 2000. — Vol. 121. — P. 379–420.

[21] Strohmer T. A levinson–galerkin algorithm for regularized trigonometric approximation // SIAM Journal on Scientific Computing. — 2000. — Vol. 22, no. 4. — P. 1160–1183.

[22] Strohmer T. Numerical analysis of the non-uniform sampling problem // Journal of Computational and Applied Mathematics. — 2000. — Vol. 122, no. 1–2. — P. 297 – 316. — Numerical Analysis in the 20th Century Vol. II: Interpolation and Extrapolation. Access mode: http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0377042700003617.

[23] Trefethen L. N., Weideman J. The exponentially convergent trapezoidal rule // SIAM Review. — 2014. — Vol. 56, no. 3. — P. 385–458.

[24] Trench W. F., Scheinok P. A. On the inversion of a Hilbert type matrix // SIAM Review. — 1966. — jan. — Vol. 8, no. 1. — P. 57–61.

[25] Ситник Д. О. Метод ітеративної апроксимації функцій з використанням інтерполянтів у банахових просторах // Збірник праць Інституту математики НАН України. — 2015. — Т. 12, № 5. — С. 140–159.