

Алгебраїчна структура фундаментальної групи орбіт гладких функцій на 2-торі

Б. Г. Фещенко

Abstract. This review paper is devoted to the description of the algebraic structure of the fundamental group of orbits of functions with isolated singularities on 2-torus with respect to the action of the group of diffeomorphisms of the 2-torus.

Анотація. Дана оглядова стаття присвячена опису алгебраїчної структури фундаментальної групи орбіт функцій з ізольованими особливостями на 2-торі відносно дії групи дифеоморфізмів 2-тора.

Вступ

Групи автоморфізмів математичних об'єктів досліджуються давно. Наприклад, А. Келі встановив, що довільна скінченна група порядку n є підгрупою групи перестановок з n елементів [3] (цей результат був узагальнений на топологічні групи [22]), а К. Жордан описав структуру групи автоморфізмів скінченних дерев [10].

Дослідження груп “автоморфізмів” і, більш загально, просторів відображень між многовидами є основною задачею геометричної топології. Лише у деяких частинних випадках вдається описати структуру таких просторів. Наприклад, для випадку компактних поверхонь відомий гомотопічний тип групи гомеоморфізмі (дифеоморфізмів) ізотопних тождному відображенню, див §3.1. Ці результати дали можливість вивчати групи класів відображень поверхонь (MCG) – певний аналог групи “автоморфізмів” поверхні, а також знайшли численні застосування у топології многовидів малої розмірності та теорії динамічних систем, див. детальний огляд у [1, Розділ 4].

Систематичне вивчення гомотопічних властивостей стабілізаторів та орбіт гладких функцій з ізольованими особливостями на компактних поверхнях відносно дії груп дифеоморфізмів було започатковано у роботі С. І. Максименка [11]. Ним було встановлено, що зв'язна компонента

2020 Mathematics Subject Classification: 55Q05, 57K20, 57M05

Ключові слова: Фундаментальна група, гомотопічний тип, орбіта, стабілізатор

DOI: <https://doi.org/10.3842/trim.v21n1.550>

тотожного відображення стабілізатору є або стягуваною або гомотопічно еквівалентною колу. Також він описав гомотопічний тип і алгебраїчну структуру фундаментальної групи орбіт таких функцій для майже всіх компактних поверхонь, див [11]. У нашому спільному циклі робіт ми описали алгебраїчну структуру фундаментальної групи орбіт таких функцій на 2-торі [16–18], а у подальших статтях ці результати були узагальнені на випадок відображень тора у коло [2, 6–8]. Огляду результатів цього циклу “про 2-тор” присвячена дана стаття. Зацікавленому читачу ми радимо ознайомитись з роботою [15], а також з загальним оглядом отриманих результатів С. Максименка та його учнів [14].

Структура роботи. Текст складається з 5 розділів. У розділі 1 ми приводимо загальні відомості про функції Морса та граfi гладких функцій. Розділ 2 містить означення класу функцій який буде досліджуватись. Розділ 3 присвячений орбітам і стабілізаторам гладких функцій на поверхнях, їх гомотопічним властивостям, а також автоморфізмам графів гладких функцій, що індуковані дифеоморфізмами поверхонь, які зберігають задану функцію. У розділі 4 ми наводимо означення вінце-вих добутків груп з циклічними групами, а у останньому, розділі 5, ми формулюємо результати про алгебраїчну структуру фундаментальної групи орбіт гладких функцій на 2-торі.

1. ЗАГАЛЬНІ ВІДОМОСТІ

1.1. Функції Морса. У цьому параграфі ми наведено стандартні відомості про функції Морса, див. наприклад [21]. Нехай M – гладкий многовид розмірності n і $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ – гладка функція на M . Точка $p \in M$ називається *критичною точкою* f , якщо диференціал $d_p f : T_p M \rightarrow \mathbb{R}$ зануляється в p . В іншому випадку p називають *регулярною*. Значення $f(p)$ називається *критичним*, якщо p – критична точка, інакше – *регулярним*.

Нехай $(U, x_1, \dots, x_n)$ – карта навколо p . Якщо p – критична точка, тоді $\frac{\partial f}{\partial x_i} \Big|_p = 0$ для всіх $i = 1, \dots, n$. Матриця Гессе $H_p(f)$ функції f в критичній точці p – це квадратна матриця складена з других частинних похідних функції f в p у карті U :

$$H_p(f) = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \Big|_p \right)_{i,j=1}^n.$$

Критична точка $p \in M$ функції f називається *невиродженою*, якщо матриця $H_p(f)$ є невивродженою.

Теорема 1.1 (Лема Морса). *Нехай p – невироджена критична точка функції $f : M \rightarrow \mathbb{R}$. Тоді існує карта $(U, x_1, \dots, x_n)$ навколо p , що*

$$f(x_1, \dots, x_n) = f(p) - x_1^2 - \dots - x_\lambda^2 + x_{\lambda+1}^2 + \dots + x_n^2. \quad (1.1)$$

Число λ від'ємних членів у (1.1) називається *індексом критичної точки* p .

Гладка функція усі критичні точки якої є невиродженими називається *функцією Морса*. Простір усіх функцій Морса на M позначимо через $\mathcal{M}(M, \mathbb{R})$. Відомо, що $\mathcal{M}(M, \mathbb{R})$ є відкритим і щільним підпростором у $C^\infty(M, \mathbb{R})$.

Також відомо, що функція Морса f на гладкому компактному многовиді M задає його клітинне розбиття (структуру CW комплексу) – по одній n -клітині, що відповідає критичній точці індексу n . Це дає змогу довести нерівності Морса, які дають оцінку на числа Бетті многовиду M . Якщо M є компактною поверхнею, то ці нерівності приймають такий вигляд

Теорема 1.2 (Рівності Морса). *Нехай M – компактна поверхня і f – функція Морса на M . Тоді мають місце рівності Морса:*

$$\chi(M) = c_0(f) - c_1(f) + c_2(f),$$

де $c_0(f)$, $c_1(f)$ та $c_2(f)$ – числа мінімумів, сідел та максимумів функції f .

Зауважимо, що Е. Witten [25] у 1982 розробив аналітичний підхід до нерівностей Морса досліджуючи комплекс де Рама деякого диференціального оператора.

1.2. Граф Γ_f функції. Нехай X – топологічний простір, $P \in$ або $\mathbb{R}$ або S^1 , і $f : X \rightarrow P$ – неперервна функція. Визначимо на X відношення еквівалентності $\sim$ за такі правилом: точки x і y з X є еквівалентними ($x \sim y$) тоді і лише тоді, коли вони належать до однієї зв'язної компоненти прообразу $f^{-1}(c)$ для деякого $c \in P$. Нехай $\Gamma_f = X/\sim$ – факторпростір X по цьому відношенню еквівалентності $\sim$ наділений фактортопологією. Простір Γ_f називають *простором Кронрода-Ріба функції f* . Зауважимо, що f розкладається у таку композицію:

$$f = \hat{f} \circ p_f : X \xrightarrow{p_f} \Gamma_f \xrightarrow{\hat{f}} P, \quad (1.2)$$

де $p_f : X \rightarrow \Gamma_f$ – канонічна проекція, а $\hat{f} : \Gamma_f \rightarrow P$ – функція індукована f .

Якщо X – компактний гладкий многовид і $f : X \rightarrow P$ – гладка функція з ізолюваними особливостями, то Γ_f має структуру 1-вимірного

клітинного (CW) комплексу (топологічного графу), див. [23]. Для простоти ми будемо називати Γ_f *графом функції* f .

Зазвичай граф функції не є повним топологічним інваріантом, але він є корисним інструментом для вивчення властивостей функцій.

2. Клас $\mathcal{F}$

У цьому розділі ми наведемо означення класу функцій з яким ми будемо мати справу, див §2.2. Перед цим ми нагадаємо деякі властивості однорідних многочленів.

2.1. Однорідні многочлени на площині. Нехай $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ – дійсний однорідний многочлен. Відомо, що f розкладається над $\mathbb{R}$ у добуток скінченного числа лінійних $L_i = a_i x + b_i y$ і незвідних над $\mathbb{R}$ квадратичних множників $Q_i(x, y) = c_j x^2 + 2d_j xy + e_j y^2$, тобто

$$f(x, y) = \prod_{i=1}^p L_i(x, y) \cdot \prod_{j=1}^q Q_j(x, y). \quad (2.1)$$

Точка $0 \in \mathbb{R}^2$ є єдиною критичною точкою (2.1) тоді і тільки тоді, коли $\deg f \geq 2$ і f не має кратних множників. Для такого многочлену $0 \in \mathbb{R}^2$ буде називатись

- *екстремумом* якщо $f = Q_1$ (невироджений), або $f = Q_1 Q_2 \dots Q_q$ (вироджений),
- *сідлом* якщо $f = L_1 Q_1 Q_2 \dots Q_q$ (квазі-сідло), або $f = L_1 L_2$ (невироджене або 2-сідло), або якщо $\deg f = p + 2q \geq 3$ для $p \geq 2$ то узагальнений сідлом (p -сідлом).

2.2. Клас $\mathcal{F}$. Нехай M – гладка і компактна поверхня. Позначимо через P дійсну пряму $\mathbb{R}$ або коло S^1 . Функція $f : M \rightarrow P$ належить до класу $\mathcal{F}(M, P)$ якщо виконані такі умови:

- (1) f є локально-постійною на ∂M ,
- (2) множина критичних точок Σ_f функції f належить до $\text{Int}(M)$,
- (3) для критичної точки $z \in \Sigma_f$ функції f існують така карта $(U, \phi : U \rightarrow \mathbb{R}^2)$ навколо z з $\phi(z) = 0$ і карта $(V, \psi : V \rightarrow \mathbb{R})$ навколо $f(z)$, що $f(U) \subset V$ і локальне зображення $f_z = \psi \circ f \circ \phi^{-1} : \phi(U) \rightarrow \psi(V)$ функції f є однорідним поліномом без кратних множників.

Легко побачити, що клас функцій Морса $\mathcal{M}_\partial(M, P)$, які задовольняють (1) міститься у $\mathcal{F}(M, P)$.

Відомо, якщо функція f має лише ізольовані особливості, тоді локальна топологічна структура множин рівня навколо будь-якої її критичної точки може бути реалізована множинами рівня однорідного поліному без кратних множників, див. [14, Розділ 3.4]. Це показує, що клас $\mathcal{F}(M, P)$ містить гладкі функції з “типовими” особливостями.

Зауважимо, що для функцій з класу $\mathcal{F}(M, P)$ мають місце рівності Морса, див. теорему 1.2.

3. ОРБИТИ І СТАБІЛІЗАТОРИ ГЛАДКИХ ФУНКЦІЙ

Нехай M – гладка і компактна поверхня (можливо з межею ∂M) і X – підмножина M (можливо порожня). Група дифеоморфізмів $\mathcal{D}(M, X)$ нерухомих на X діє справа на на просторі гладких P -значних функцій $C^\infty(M, P)$ за таким правилом:

$$\gamma : C^\infty(M, P) \times \mathcal{D}(M, X) \rightarrow C^\infty(M, P), \quad \gamma(f, h) = f \circ h. \quad (3.1)$$

Для гладкої функції $f \in C^\infty(M, P)$ визначимо

$$\begin{aligned} \mathcal{S}(f, X) &= \{h \in \mathcal{D}(M, X) \mid f \circ h = f\}, \\ \mathcal{O}(f, X) &= \{f \circ h \in C^\infty(M, P) \mid h \in \mathcal{D}(M, X)\} \end{aligned}$$

стабілізатор і орбіту f . Наділимо простори $\mathcal{D}(M, X)$ та $C^\infty(M, P)$ сильними C^∞ -топологіями Уїтні. Ці топології індукують деякі топології на $\mathcal{S}(f, X)$ and $\mathcal{O}(f, X)$.

Нехай $\mathcal{S}_{\text{id}}(f, X)$ і $\mathcal{D}_{\text{id}}(M, X)$ – зв’язні компоненти тотожного відображення у $\mathcal{S}(f, X)$ та $\mathcal{D}(M, X)$ відповідно, а також позначимо через $\mathcal{O}_f(f, X)$ зв’язну компоненту орбіти $\mathcal{O}(f, X)$, що містить f і покладемо

$$\mathcal{S}'(f, X) = \mathcal{S}(f, X) \cap \mathcal{D}_{\text{id}}(f, X).$$

Якщо $X = \emptyset$, ми не будемо вживати символ “ $\emptyset$ ” у наших позначеннях, наприклад, ми будемо писати $\mathcal{D}(M)$ замість $\mathcal{D}(M, \emptyset)$ і $\mathcal{S}(f)$ замість $\mathcal{S}(f, \emptyset)$, і так далі.

3.1. Гомотопічний тип $\mathcal{D}_{\text{id}}(M, X)$. Нехай M – компактна поверхня і $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\} \subset \text{Int}(M)$ – підмножина M , що складається з різних точок. Ми позначимо через $\mathcal{D}_{\text{id}}(M, n)$ групу $\mathcal{D}_{\text{id}}(M, X)$. Якщо $X = \emptyset$ ми будемо писати $\mathcal{D}_{\text{id}}(M)$ замість $\mathcal{D}_{\text{id}}(M, 0)$.

Гомотопічний тип групи $\mathcal{D}_{\text{id}}(M, n)$ вивчали С. J. Earle and J. Eells [4], С. J. Earle, A. Schatz [5], а також А. Gramain [9]. Наступна теорема описує отримані ними результати.

Теорема 3.1. *Нехай M – зв’язна і компактна поверхня.*

- (1) Нехай M_b – поверхня, отримана з M стягуванням b зв’язних компонент межі ∂M . Тоді $\mathcal{D}_{\text{id}}(M_b, n + b)$ гомотопічно еквівалентна до $\mathcal{D}_{\text{id}}(M, n)$. Тобто кожен “прокол” можна замінити на “дірку”.
- (2) Група $\mathcal{D}_{\text{id}}(M)$ є гомотопічно еквівалентною до
- $\text{SO}(3)$, якщо $M = S^2$ або $\mathbb{R}P^2$,
 - S^1 , якщо $M = D^2$, $S^1 \times [0, 1]$, або стрічка Мебіуса, або пляшка Клейна,
 - T^2 , якщо $M = T^2$,
 - точці, в інших випадках.

Результат (1) дає можливість проводити обчислення гомотопічного типу $\mathcal{D}_{\text{id}}(M, n)$, зводячи задачу до випадків описаних у (2). Наприклад,

$$\mathcal{D}_{\text{id}}(T^2, 1) \sim \mathcal{D}_{\text{id}}(\overline{T^2 \setminus D^2}, 0) \sim \text{pt},$$

$$\mathcal{D}_{\text{id}}(S^2, 2) \sim \mathcal{D}_{\text{id}}(D^2, 1) \sim \mathcal{D}_{\text{id}}(S^1 \times [0, 1], 0) = \mathcal{D}_{\text{id}}(S^1 \times [0, 1]) \sim S^1.$$

Узагальнюючи, маємо таке твердження: якщо $\chi(M) \leq |X|$, де $|X|$ – потужність X , то $\mathcal{D}_{\text{id}}(M, X)$ є стягуваною.

3.2. Гомотопічний тип $\mathcal{S}_{\text{id}}(f)$. Наступна теорема описує гомотопічний тип $\mathcal{S}_{\text{id}}(f)$ для функцій з класу $\mathcal{F}(M, P)$.

Теорема 3.2 ([11, Theorem 1.3], [12, Theorem 3.5]). *Нехай f – функція з класу $\mathcal{F}(M, P)$. Тоді $\mathcal{S}_{\text{id}}(f)$ є стягуваним якщо або M є неорієнтованою, або f має вироджений екстремум, або f має щонайменше одне сідло. В інших випадках $\mathcal{S}_{\text{id}}(f)$ є гомотопічно еквівалентною до S^1 .*

3.3. Розшарування Серра і гомотопічні властивості орбіт. Для того, щоб встановити гомотопічні “зв’язки” між властивостями орбіт та стабілізаторів гладких функцій ми нагадаємо означення розшарування Серра, див. [19, Chapter 7].

Нехай $p : E \rightarrow B$ – відображення між топологічними просторами E та B . Кажуть, що відображення p задовольняє умову *підняття гомотопії* (homotopy lifting property або HLP) для простору X якщо виконані такі умови: для довільної гомотопії $h : X \times I \rightarrow B$ з $h|_{X \times \{0\}} = h_0$ і такого довільного відображення $\tilde{h}_0 : X \rightarrow E$, що “піднімає” h_0 , тобто $h_0 = p \circ \tilde{h}_0$ існує гомотопія $\tilde{h} : X \times I \rightarrow E$, яка є підняттям гомотопії h , тобто, $h_t = p \circ \tilde{h}_t$ з $\tilde{h}_0 = \tilde{h}|_{X \times \{0\}}$:

$$\begin{array}{ccc} X \times \{0\} & \xrightarrow{\tilde{h}_0} & E \\ \downarrow \iota & \nearrow \tilde{h} & \downarrow p \\ X \times I & \xrightarrow{h} & B \end{array}$$

де $\iota : X \times \{0\} \rightarrow X \times I$ – вкладення $\iota(x, 0) = (x, 0)$.

Відображення $p : E \rightarrow B$ називається *розширенням Серра*, якщо воно задовольняє HLP для усіх клітинних (CW) комплексів. Для розширення Серра p існує довга точна послідовність гомотопічних груп, див. [19, Chapter 9], тобто, для $b \in B$ і $x \in F = p^{-1}(b)$ наступна послідовність груп є точною:

$$\begin{aligned} \dots \longrightarrow \pi_n(F, x) \xrightarrow{i_n^*} \pi_n(E, x) \xrightarrow{p_n^*} \pi_n(B, b) \xrightarrow{\partial_n} \pi_{n-1}(F, x) \longrightarrow \dots \\ \dots \xrightarrow{p_1^*} \pi_0(B, b) \longrightarrow 0. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Відмітимо, що для довільних просторів E , B та F множини $\pi_0(E, x)$, $\pi_0(B, b)$ та $\pi_0(F, x)$ не є групами, але точність такої послідовності у кожному такому члені її “хвоста” розуміється у стандартному сенсі – рівність ядра і образу послідовних відображень. Відомо, якщо E , B та F є топологічними групами, то $\pi_0 E$, $\pi_0 B$ і $\pi_0 F$ є групами.

Повертаючись до питання про стабілізатори і орбіти ми приведемо основний факт, який пов’язує їх гомотопічні властивості.

Теорема 3.3 ([11–13, 24]). *Нехай f – функція з класу $\mathcal{F}(M, P)$ на гладкій компактній поверхні M і X – замкнена (можливо пуста) підмножина M , що складається з скінченного числа зв’язних компонент деяких множин рівня і деякого числа критичних точок f . Тоді відображення*

$$p : \mathcal{D}(M, X) \rightarrow \mathcal{O}(f, X)$$

визначене формулою $p(h) = f \circ h$ є розширенням Серра з шаром $\mathcal{S}(f, X)$.

Тоді $p(\mathcal{D}_{\text{id}}(M)) = \mathcal{O}_f(f)$, і обмеження $p|_{\mathcal{D}_{\text{id}}(M)} : \mathcal{D}_{\text{id}}(M) \rightarrow \mathcal{O}_f(f, X)$ є також розширенням Серра з шаром $\mathcal{S}'(f, X) = \mathcal{S}(f) \cap \mathcal{D}_{\text{id}}(M, X)$.

Теорема 3.4 ([11–13]). *Нехай $f : M \rightarrow P$ – функція з класу $\mathcal{F}(M, P)$ і X – підмножина така як в теоремі 3.3. Тоді*

(1) $\mathcal{O}_f(f, X) = \mathcal{O}_f(f, X \cup \partial M)$ і, як наслідок,

$$\pi_k(\mathcal{O}_f(f, X)) = \pi_k(\mathcal{O}_f(f, X \cup \partial M))$$

для усіх $k \geq 1$.

(2) *Припустимо, що f має або сідлову точку, або вироджене сідло, або M є неорієнтованою поверхнею. Тоді оскільки $\mathcal{S}_{\text{id}}(f)$ є стягуваним, то $\pi_k \mathcal{O}_f(f) = \pi_k M$, $k \geq 3$, $\pi_2 \mathcal{O}_f(f) = 0$, а для $\pi_1 \mathcal{O}_f(f)$ маємо*

коротку точну послідовність:

$$\pi_1 \mathcal{D}_{\text{id}}(M) \xrightarrow{p_1} \pi_1 \mathcal{O}_f(f) \xrightarrow{\partial_1} \pi_0 \mathcal{S}'(f). \quad (3.3)$$

Зокрема група $p_1(\pi_1 \mathcal{D}_{\text{id}}(M))$ міститься у центрі $\pi_1 \mathcal{O}_f(f)$.

- (3) Якщо $\chi(M) < |X|$, тоді $\mathcal{D}_{\text{id}}(M, X)$ є стягнутою, $\pi_k \mathcal{O}_f(f, X) = 0$ для $k \geq 2$, а граничний гомоморфізм

$$\partial_1 : \pi_1 \mathcal{O}_f(f, X) \longrightarrow \pi_0 \mathcal{S}'(f, X)$$

є ізоморфізмом.

Зауважимо, що коротка точна послідовність (3.3) є ненульовою частиною довгої точної послідовності гомотопічних груп розшарування Серра p , див. теорему 3.3. Ясно, що гомоморфізм p_1 індукований p є мономорфізмом.

У випадку коли $\mathcal{D}_{\text{id}}(M)$ є стягнутою групою, то з послідовності (3.3) маємо ізоморфізм $\pi_1 \mathcal{O}_f(f) \cong \pi_0 \mathcal{S}'(f)$. Якщо $M = T^2$, тоді група $\pi_1 \mathcal{D}_{\text{id}}(M)$ є ізоморфною до $\mathbb{Z}^2$, а значить описання алгебраїчної структури $\pi_1 \mathcal{O}_f(f)$ вимагає додаткових досліджень.

Для повноти викладу наведемо означення граничного гомоморфізму ∂_1 . Нехай $\omega : [0, 1] \rightarrow \mathcal{O}_f(f)$, $\omega_0 = \omega_1$ – петля в $\mathcal{O}_f(f)$ у точці f . Оскільки p – розшарування Серра, то існує така ізотопія $h : M \times [0, 1] \rightarrow M$, що $\omega_t = f \circ h_t$, $h_0 = \text{id}$ і $h_1 \in \mathcal{S}'(f)$, тобто, h_1 задовольняє $f \circ h_1 = f$. Тоді ∂_1 визначається так: $\partial([\omega]) = [h_1] \in \pi_0 \mathcal{S}'(f)$.

3.4. Автоморфізми графів функцій з $\mathcal{F}$. Нехай $f : M \rightarrow P$ – функція з $\mathcal{F}$. Позначимо через Γ_f її граф, через $p_f : M \rightarrow \Gamma_f$ – канонічну проєкцію, а також через $\text{Aut}(\Gamma_f)$ групу гомеоморфізмів Γ_f . Кожен дифеоморфізм h з $\mathcal{S}(f, X)$ зберігає функцію f , тобто зберігає множини рівня f :

$$h(f^{-1}(c)) \subset f^{-1}(c)$$

для всіх $c \in \text{Im}(f)$. Але h може переставляти їхні зв'язні компоненти. Тоді h індукує гомеоморфізм $\rho(h)$ графу Γ_f , що така діаграма комутує

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{p_f} & \Gamma_f \\ h \downarrow & & \downarrow \rho(h) \\ M & \xrightarrow{p_f} & \Gamma_f \end{array}$$

а відповідність $\rho : \mathcal{S}(f, X) \rightarrow \text{Aut}(\Gamma_f)$ задана $h \mapsto \rho(h)$ є гомоморфізмом. Відомо, що образ $G'(f, X) = \rho(\mathcal{S}'(f, X))$ є скінченною підгрупою $\text{Aut}(\Gamma_f)$.

4. ВІНЦЕВІ ДОБУТКИ

Для формулювання результатів нам необхідно означити поняття вінцевого добутку з циклічними групами. Нехай G – група і $n, m \geq 1$ – цілі числа. Ми розглядаємо такі вінцеві добутки груп:

- $G \wr_n \mathbb{Z} := G^n \rtimes_{\alpha} \mathbb{Z}$,
- $G \wr_{n,m} \mathbb{Z}^2 := G^{nm} \rtimes_{\gamma} \mathbb{Z}^2$,

де $\alpha : G^n \times \mathbb{Z} \rightarrow G^n$ відповідає неефективній $\mathbb{Z}$ -дії на G^n циклічними зсувами координат за формулою

$$((g_i)_{i=0}^{n-1}, a) \xrightarrow{\alpha} (g_{i+a})_{i=0}^{n-1},$$

де всі індекси беруться за модулем n , $g_i \in G$, $a \in \mathbb{Z}$, і аналогічно $\gamma : G^{nm} \times \mathbb{Z}^2 \rightarrow G^{nm}$ відповідає неефективній $\mathbb{Z}^2$ -дії на G^{nm} циклічними зсувами, що задаються формулою:

$$((g_{ij})_{i,j=0}^{n-1,m-1}, (a, b)) \xrightarrow{\gamma} (g_{i+a,j+b})_{i,j=0}^{n-1,m-1},$$

де індекси i та j беруться за модулем n та m відповідно, $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$.

Тоді $G \wr_n \mathbb{Z}$ – прямий добуток множин $G^n \times \mathbb{Z}$ з множенням, яке задане формулою

$$(g, a) \cdot (g', a') = (\alpha(g, a')g', a + a'),$$

де $g, g' \in G^n$, $a, a' \in \mathbb{Z}$. Аналогічно $G \wr_{n,m} \mathbb{Z}^2$ є прямим добутком множин $G^{nm} \times \mathbb{Z}^2$ з такою операцією

$$(g, (a, b)) \cdot (g', (a', b')) = (\gamma(g, a', b')g', (a + a', b + b')),$$

де $g, g' \in G^{nm}$, $a, a', b, b' \in \mathbb{Z}$.

Загальне означення вінцевого добутку груп а також їхні властивості читач може знайти у [20].

5. АЛГЕБРАЇЧНА СТРУКТУРА $\pi_1 \mathcal{O}_f(f)$ ДЛЯ ФУНКЦІЙ НА 2-ТОРІ

5.1. Функції на 2-торі. Відомо, що функції з $\mathcal{F}(T^2, P)$ можуть як бути так і не бути нуль-гомотопними. Нехай $f : T^2 \rightarrow P$ – функція з класу $\mathcal{F}$ на 2-торі і Γ_f – її граф. Всі функції з класу $\mathcal{F}$ на T^2 можна “грубо” класифікувати їхніми графами. А саме, має місце така лема.

Лема 5.1 ([7, Lemma 3.1]). *Нехай $f : T^2 \rightarrow P$ – функція з $\mathcal{F}(T^2, P)$.*

- (1) *Відображення $(p_f)_* : \pi_1 T^2 \rightarrow \pi_1 \Gamma_f$ індуковане проекцією $p_f : T^2 \rightarrow \Gamma_f$, див (1.2), є епіморфізмом з ненульовим ядром. Тоді $b_1(\Gamma_f) \leq 1$. Іншими словами Γ_f є або деревом, або має єдиний цикл.*
- (2) *Якщо f – не нуль-гомотопна, тоді Γ_f не є деревом.*

Природно, ми розглянемо ці два випадки окремо.

5.2. Випадок 1. Γ_f – дерево. Має місце наступний результат

Лема 5.2 ([16, Proposition 1]). *Нехай f – така функція з $\mathcal{F}(T^2, P)$, що її граф Γ_f є деревом. Тоді існує єдина вершина v графу Γ_f , що кожна зв'язна компонента доповнення до $T^2 \setminus p_f^{-1}(v)$ є відкритим диском.*

Таку вершину v ми називаємо *спеціальною*. Позначимо через $\text{st}(v)$ зірку вершини v , а через G_v – стабілізатор v , тобто $G_v = \{g \in G \mid g(v) = v\}$. Групу

$$G_v^{\text{loc}} = \{g|_{\text{st}(v)} \mid g \in G_v\}$$

називають *локальним стабілізатором вершини v* .

Наступна теорема описує алгебраїчну структуру групи $\pi_1 \mathcal{O}_f(f)$ для функцій з $\mathcal{F}(T^2, \mathbb{R})$, графи яких є деревами.

Теорема 5.1 (Теорема 1 [16], Theorem 2.5 [2]). *Нехай $f \in \mathcal{F}(T^2, P)$ – така функція, що її граф Γ_f – дерево, і v – спеціальна вершина Γ_f . Тоді*

- (1) $G_v^{\text{loc}} \cong \mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_{nm}$ для деяких $n, m \in \mathbb{N}$,
- (2) існують такі замкнені диски $D_1, D_2, \dots, D_r \subset T^2$, що $f|_{D_i} \in \mathcal{F}(D_i)$, $i = 1, 2, \dots, r$ і має місце ізоморфізм

$$\pi_1 \mathcal{O}_f(f) \cong \prod_{i=1}^r \pi_1 \mathcal{S}'(f|_{D_i}, \partial D_i) \wr_{n, nm} \mathbb{Z}^2.$$

Зокрема, якщо $G_v^{\text{loc}} = 1$, тоді $\pi_1 \mathcal{O}_f(f) \cong \pi_1 \mathcal{S}'(f) \times \mathbb{Z}^2$.

5.3. Випадок 2: Γ_f має цикл. Нехай f – така функція з $\mathcal{F}(T^2, P)$, що її граф Γ_f має єдиний цикл Λ . Нехай також C – зв'язна компонента $f^{-1}(c)$ і $z = p_f(C)$ – відповідна точка на графі Γ_f . Легко побачити, що z належить до циклу Λ тоді і лише тоді, коли C не розбиває T^2 . Зауважимо, що прообраз $f^{-1}(c)$ складається зі скінченного числа зв'язних компонент і він є інваріантний відносно дії $h \in \mathcal{S}'(f)$.

Нехай $\mathcal{C} = \{h(C) \mid h \in \mathcal{S}'(f)\}$ – множина образів C під дією групи $\mathcal{S}'(f)$. Тоді $\mathcal{C}$ складається зі скінченної кількості зв'язних компонент $\mathcal{C} = \{C_0 = C, C_1, \dots, C_{n-1}\}$, $n \geq 1$ прообразу $f^{-1}(c)$. Число $n = |\mathcal{C}|$ таких кривих називається *циклічним індексом f* . Має місце такий результат:

Теорема 5.2 ([18, Theorem 2.6], [17, Theorem 1.6], [8, Theorem 4.1]). *Нехай $f \in \mathcal{F}(T^2, P)$ – така функція, що її граф Γ_f містить цикл, C – зв'язна компонента деякого прообразу $f^{-1}(c)$, що не розбиває тор T^2 , $\mathcal{C} = \{h(C) \mid h \in \mathcal{S}'(f)\} = \{C_0, C_1, \dots, C_{n-1}\}$ і $n = |\mathcal{C}|$ – циклічний індекс f . Позначимо через Q_0 циліндр, обмежений кривими C_0 і C_1 . Тоді існує*

ізоморфізм

$$\pi_1 \mathcal{O}_f(f) \cong \pi_1 \mathcal{O}_{f|_{Q_0}}(f|_{Q_0}, \partial Q_0) \wr_n \mathbb{Z} \cong \pi_0 \mathcal{S}'(f|_{Q_0}, \partial Q_0) \wr_n \mathbb{Z}.$$

Якщо $n = 1$, тоді

$$\pi_1 \mathcal{O}_f(f) \cong \pi_1 \mathcal{O}_f(f, C) \times \mathbb{Z} \cong \pi_0 \mathcal{S}'(f, C) \times \mathbb{Z}.$$

Наостанок відомо, що алгебраїчна структура $\pi_0 \mathcal{S}'(f|_{Q_0}, \partial Q_0)$ описується через стабілізатори обмежень f на 2-диски, що лежать у Q у певний “ітеративний спосіб”, див. Section 5 [15].

ЛІТЕРАТУРА

- [1] І. Ю. Власенко, С. І. Максименко, Е. А. Полулях. *Топологические методы в изучении групп преобразований многообразий*. Праці Інституту математики НАН України. Ін-т математики НАН України, Київ, 2006.
- [2] Богдан Феценко. Деформації гладких функцій на 2-торі, граф Кронрода-Ріба яких є деревом. *Праці Інституту математики НАН України*, 12(6):22–40, 2015.
- [3] Walther Dyck. Gruppentheoretische Studien. *Math. Ann.*, 20(1):1–44, 1882. doi:10.1007/BF01443322.
- [4] C. J. Earle, J. Eells. The diffeomorphism group of a compact Riemann surface. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 73:557–559, 1967.
- [5] C. J. Earle, A. Schatz. Teichmüller theory for surfaces with boundary. *J. Differential Geometry*, 4:169–185, 1970.
- [6] B. Feshchenko. Actions of finite groups and smooth functions on surfaces. *Methods of Functional Analysis and Topology*, 22(3):210–219, 2016.
- [7] B. Feshchenko. Deformations of functions on 2-torus. *Proceedings of the International Geometry Center*, 12(3):30–50, 2020.
- [8] B. Feshchenko. Deformations of circle-valued functions on 2-torus. *Proc. Int. Geom. Cent.*, 14(2):117–136, 2021. doi:10.15673/tmgc.v14i2.2008.
- [9] André Gramain. Le type d’homotopie du groupe des difféomorphismes d’une surface compacte. *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)*, 6:53–66, 1973.
- [10] Camille Jordan. Sur les assemblages de lignes. *J. Reine Angew. Math.*, 70:185–190, 1869. doi:10.1515/crll.1869.70.185.
- [11] S. Maksymenko. Homotopy types of stabilizers and orbits of Morse functions on surfaces. *Ann. Global Anal. Geom.*, 29(3):241–285, 2006. doi:10.1007/s10455-005-9012-6.
- [12] S. Maksymenko. Local inverses of shift maps along orbits of flows. *Osaka Journal of Mathematics*, 48(2):415–455, 2011. URL: <https://projecteuclid.org/euclid.ojm/1315318347>.
- [13] S. Maksymenko. Homotopy types of right stabilizers and orbits of smooth functions on surfaces. *Ukrainian Math. Journal*, 64(9):1186–1203, 2012. doi:10.1007/s11253-013-0721-x.
- [14] S. Maksymenko. Deformations of functions on surfaces. *Proceedings of Institute of Mathematics of NAS of Ukraine*, 17(2):150–199, 2020.
- [15] S. Maksymenko. Deformations of functions on surfaces by isotopic to the identity diffeomorphisms. *Topology and its Applications*, 282(2):107312, 2020. doi:10.1016/j.topol.2020.107312.

- [16] S. Maksymenko, B. Feshchenko. Homotopy properties of spaces of smooth functions on 2-torus. *Ukrainian Mathematical Journal*, 66(9):1205–1212, 2014.
- [17] S. Maksymenko, B. Feshchenko. Functions on 2-torus whose Kronrod-Reeb graph contains a cycle. *Methods of Functional Analysis and Topology*, 21(1):22–40, 2015.
- [18] S. Maksymenko, B. Feshchenko. Orbits of smooth functions on 2-torus and their homotopy types. *Matematychni Studii*, 44(1):67–83, 2015.
- [19] J. P. May. *A concise course in algebraic topology*. Chicago Lectures in Mathematics. University of Chicago Press, Chicago, IL, 1999.
- [20] J. D. P. Meldrum. *Wreath products of groups and semigroups*, volume 74 of *Pitman Monographs and Surveys in Pure and Applied Mathematics*. Longman, Harlow, 1995.
- [21] J. Milnor. *Morse Theory. (AM-51), Volume 51*. Princeton University Press, 1969. URL: <http://www.jstor.org/stable/j.ctv3f8rb6>.
- [22] Eric C. Nummela. Cayley’s theorem for topological groups. *Amer. Math. Monthly*, 87(3):202–203, 1980. doi:10.2307/2321608.
- [23] Georges Reeb. *Sur certaines propriétés topologiques des variétés feuilletées*. Actualités Sci. Ind., no. 1183. Hermann & Cie., Paris, 1952. Publ. Inst. Math. Univ. Strasbourg 11, pp. 5–89, 155–156.
- [24] Francis Sergeraert. Un théorème de fonctions implicites sur certains espaces de Fréchet et quelques applications. *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)*, 5:599–660, 1972.
- [25] Edward Witten. Supersymmetry and Morse theory. *J. Differential Geometry*, 17(4):661–692, 1982. URL: <http://projecteuclid.org/euclid.jdg/1214437492>.

Б. Г. Фещенко

ІНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ НАН УКРАЇНИ, м. Київ

Email: fb@imath.kiev.ua

ORCID: 0000-0002-4113-5046