Збірник праць Ін-ту математики НАН України (2024) т. 21, №1, 191–204

# Нелінійні властивості траєкторій в моделях динамічних систем конфлікту

О. Р. Сатур

**Abstract.** This article focuses on the study of trajectory properties of conflict dynamical systems. Both attractive and repulsive interactions between system components are considered. The results reveal a wide range of behavioral scenarios, including stable, cyclic, quasi-periodic, and chaotic regimes. Special attention is given to the role of interaction parameters and initial conditions in determining the long-term dynamics of the system. The findings provide a foundation for modeling conflict systems in various applied domains, such as economics, ecology, and social sciences.

**Анотація.** Ця стаття присвячена дослідженню властивостей траєкторій динамічних систем конфлікту. Розглядаються як притягальні, так і відштовхувальні взаємодії між компонентами системи. Результати демонструють широкий спектр поведінкових сценаріїв, включаючи стабільні, циклічні, квазіперіодичні та хаотичні режими. Особлива увага приділяється ролі параметрів взаємодії та початкових умов у визначенні довгострокової динаміки системи. Отримані результати є основою для моделювання конфліктних систем у різних прикладних сферах, таких як економіка, екологія та соціальні науки.

## 1. Вступ

Витоки теорії динамічних систем сягають XVIII століття, коли Ісаак Ньютон та Готфрід Лейбніц розробили основи математичного аналізу, зокрема диференціальні рівняння, які згодом стали основою для опису фізичних явищ. У XIX столітті Анрі Пуанкаре заклав основи сучасної теорії динамічних систем. Він розробив концепції траєкторій і фазового простору, що дозволило описувати складні системи через їхні загальні властивості, а не через точні рішення. У XX столітті теорія динамічних систем продовжила активно розвиватися завдяки роботам таких учених, як Стефан Смейл та Едвард Лоренц. Вони досліджували складні системи, зокрема хаотичну поведінку, яка спостерігається в багатьох природних процесах.

*2020 Mathematics Subject Classification*: 01A72, 16G50, 18G80
*Ключові слова*: dynamical conflict system, fixed point
*DOI*: https://doi.org/10.3842/trim.v21n1.549

Динамічні системи — це один із найстаріших і водночас найсучасніших розділів математики, який займається вивченням еволюції систем у часі. Сьогодні динамічні системи є невід'ємною частиною сучасної математики і мають численні застосування в різних наукових дисциплінах, зокрема у вивченні хаосу та нелінійних явищ. Розвиток теорії динамічних систем є критично важливим через кілька причин: універсальність, нелінійні явища, інтердисциплінарність. Динамічні системи охоплюють широкий спектр процесів — від природних до техногенних. З їх допомогою можна описувати й аналізувати будь-які системи, які еволюціонують у часі. У багатьох системах присутні нелінійні елементи, що викликають складну й непередбачувану поведінку. Теорія динамічних систем допомагає аналізувати ці явища, включаючи біфуркації та хаос, що мають велике значення в прикладних науках. Динамічні системи застосовуються у фізиці, біології, інформатиці, економіці та соціальних науках, забезпечуючи єдиний математичний підхід до вирішення різноманітних проблем.

Динамічні системи з дискретним часом є важливою частиною теорії динамічних систем у математиці. Вони моделюють процеси, які змінюються в дискретні моменти часу, тобто між подіями існує фіксований крок у часі. Основним інструментом для їхнього опису є відображення, що описують як стан системи змінюється з одного моменту часу до іншого.

Динамічна система з дискретним часом задається як пара $(X, f)$, де $X$ – це фазовий простір, $f : X \to X$ — відображення, яке описує еволюцію системи з кроком часу. Елементи простору $X$ називаються станами системи, а відображення $f$ задає правило переходу від одного стану до іншого. Для даної початкової умови $x_0 \in X$, траєкторія системи визначається послідовністю станів $x_{n+1} = f(x_n)$, $n = 1, 2, 3, \ldots$. Основною задачею при дослідженні таких систем є вивчення довгострокової поведінки траєкторій.

Один із найпростіших прикладів — лінійна динамічна система з дискретним часом, що задана рівнянням:

$$x_{n+1} = Ax_n,$$

де $x_n \in \mathbb{R}^k$ – вектор стану системи на $n$-тому кроці, а $A$ — фіксована матриця розмірності $k \times k$. Розв'язок цієї системи для початкового стану $x_0$ може бути записаний у вигляді:

$$x_n = A^n x_0.$$

Аналізуючи власні значення матриці $A$, можна передбачити поведінку системи в довгостроковій перспективі: якщо всі власні значення за

модулем менші за 1, то система сходиться до рівноважного стану (стійкість); якщо хоча б одне власне значення за модулем більше за 1, траєкторії системи можуть демонструвати експоненційне зростання (нестійкість).

Більшість реальних систем, що моделюються динамічними системами з дискретним часом, є нелінійними. Одна з класичних нелінійних систем — це логістичне відображення, яке описує ріст популяції:

$$x^{t+1} = rx^t(1 - x^t), \tag{1.1}$$

де $r$ — параметр, що характеризує швидкість росту, а $x_t$ — розмір популяції на $t$-тому кроці, нормований так, щоб $x_t \in [0; 1]$ Логістичне відображення демонструє різноманітну поведінку залежно від значення параметра $r$.

Модифікуємо відображення (1.1) у для випадку двох популяцій, коли між ними існує певна взаємодія, наприклад конкуренте протистояння чи навпаки взаємопідтримка еволюціонування. Кожну з взаємодій можна характеризувати відповідним терміном притягальної чи відштовхувальної взаємодії. Припустимо, що $\mathbf{p}^t$, $\mathbf{r}^t \in \mathbb{R}^n_+$ — стохастичні вектори розмірності $n$, що характеризують щільність розподілу кожної з популяції на $t$-тому кроці часу еволюції популяцій на спільному просторі існування $\Omega$. Динаміка зміни популяцій $\{\mathbf{p}^t, \mathbf{r}^t\} \xrightarrow{*,t} \{\mathbf{p}^{t+1}, \mathbf{r}^{t+1}\}$, $t = 0, 1, 2, \ldots$, задається відображенням $*$, що визначається системою різницевих рівнянь:

$$\mathbf{p}^{t+1} = \frac{\alpha}{z^t}\mathbf{p}^t(1 - \gamma\mathbf{r}^t), \qquad \mathbf{r}^{t+1} = \frac{\beta}{z^t}\mathbf{r}^t(1 - \gamma\mathbf{p}^t) \tag{1.2}$$

де $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ – параметри, $z^t = 1 - \gamma(\mathbf{p}^t, \mathbf{r}^t)$ – нормувальний знаменник, що забезпечує стохастичність векторів $\mathbf{p}^{t+1}$, $\mathbf{r}^{t+1}$.

У 2003 році В. Д. Кошманенко запропонував найпростішу модель динамічної системи конфлікту, яка була представлена різницевими рівняннями типу (1.2) при $\alpha, \beta, \gamma = 1$ (див. [6]). Ця модель описувала процес конфліктного перерозподілу абстрактного ресурсного простору між двома сторонами, що вступають в альтернативну взаємодію. Вона отримала назву — динамічна система конфлікту з взаємодією відштовхування. З часом під керівництвом В. Д. Кошманенка була розроблена значуща теорія динамічних систем конфлікту. Вона охоплює широкий спектр сучасних проблем, включаючи моделі конфліктних суспільств, виборчих процесів, формування думок, екологічних систем, міграційних процесів та перерозподілу ресурсів. Головним завданням цієї теорії є розробка математичних перетворень, які точно відображають конфліктну взаємодію, та виведення відповідних еволюційних рівнянь. Для

цього використовуються методи з теорії динамічних систем, функціонального аналізу, теорії міри, ймовірностей та фрактальної геометрії.

Динамічні системи конфлікту відіграють важливу роль у багатьох прикладних задачах, включаючи моделювання економічних, соціальних і екологічних процесів. Наприклад, в екології ці моделі застосовуються для прогнозування стабільності екосистем, зокрема взаємодії між видами, яка може бути періодичною через сезонність. У соціальних науках – для аналізу поведінки людей у групах, що взаємодіють у конфліктних умовах (наприклад, конкуренція за ресурси). В економіці – для прогнозування змін на ринках із конкуренцією та ресурсними обмеженнями. Це підкреслює важливість вивчення поведінки таких систем для розуміння їх стабільності та довгострокових властивостей.

Розглянемо фізичну систему, яка складається з двох (можна і декількох) протидіючих сторін, які позначимо через $A$ та $B$ і назвемо *опонентами*. Вважаємо, що опоненти існують на спільному ресурсному просторі $\Omega$ і незнищенні. Стани такої системи природно задавати випадковими розподілами у термінах ймовірнісних мір $\mu$, $\nu$ визначених на деякій $\sigma$-алгебрі підмножин з простору $\Omega$. Фіксований клас цих мір позначимо $\mathcal{M}(\Omega)$. Конфліктну взаємодію (композицію конфлікту) між опонентами $A$ та $B$, як відображення (перетворення) в просторі пар мір з $\mathcal{M}(\Omega)$, позначаємо символом $\divideontimes$. Це відображення задає еволюцію фізичної системи у вигляді траєкторій:

$$\left\{ \begin{array}{c} \mu^{t=0} \\ \nu^{t=0} \end{array} \right\} \xrightarrow{\divideontimes,t} \left\{ \begin{array}{c} \mu^{t} \\ \nu^{t} \end{array} \right\}, \quad t \geqslant 0,$$

де $\divideontimes, t$ позначає конфліктне перетворення на момент часу $t$. Динамічна система такого типу позначається як $\{\Omega, \mathcal{M}(\Omega), \divideontimes\}$ і називається *динамічною системою конфлікту*. Звичайно, простір $\Omega$, клас мір $\mathcal{M}(\Omega)$ та відображення $\divideontimes$ треба визначати додатково у кожному конкретному випадку.

У ряді важливих випадків, які близькі до застосувань, припускається, що ресурсний простір $\Omega$, на якому співіснують опоненти $A$ та $B$, природним чином розкладено на скінчену кількість регіонів:

$$\Omega = \bigcup_{i=1}^{n} \Omega_i, \quad 2 \leqslant n < \infty.$$

Кожен окремий регіон $\Omega_i$ називається *позицією конфлікту*. Розподіл опонентів $A$, $B$ на $\Omega$ зводиться до задання дискретних мір: $\mu(\Omega_i) = p_i$ та $\nu(\Omega_i) = r_i$. Числа $p_i$, $r_i$ є координатами стохастичних векторів $\mathbf{p} = (p_1, p_2, \ldots, p_n)$, $\mathbf{r} = (r_1, r_2, \ldots, r_n) \in \mathbb{R}^n_+$ ($\|\mathbf{p}\|_1 = \|\mathbf{r}\|_1 = 1$). Ці числа є ймовірностями присутності опонентів $A$, $B$ в різних позиціях конфлікту.

Конфлікту взаємодію між опонентами $A$, $B$ можна записати в термінах еволюції векторів $\mathbf{p}$, $\mathbf{r}$ під дією перетворення $\divideontimes$ в прямому добутку просторів $\mathbb{R}^n_+$. Відзначимо, що у роботах [2, 7, 8] цей підхід узагальнено для трійки опонентів, а у роботі [9] для довільної скінченної кількості опонентів на $\Omega$.

В роботах [1, 3] досліджувались різні задачі, повязані з динамічними системами конфлікту у дискретному часі в термінах стохастичних векторів заданих траєкторіями:

$$\{\mathbf{p}^t, \mathbf{r}^t\} \xrightarrow{\divideontimes, t} \{\mathbf{p}^{t+1}, \mathbf{r}^{t+1}\}, \quad t = 0, 1, 2, \ldots,$$

де координати векторів $\mathbf{p}^{t+1}$, $\mathbf{r}^{t+1}$ визначалися системою різницевих рівнянь. Найпростіший варіант таких рівнянь має вигляд

$$p_i^{t+1} = \frac{1}{z^t} p_i^t (1 - \alpha r_i^t), \quad r_i^{t+1} = \frac{1}{z^t} r_i^t (1 - \alpha q_i^t), \quad -1 \leqslant \alpha \leqslant 1,$$

де $z = 1 - \alpha(\mathbf{p}, \mathbf{r})$ – нормувальний знаменник, $(\cdot, \cdot)$ – скалярний добуток в $\mathbb{R}^n$.

У подальших працях В.Д. Кошманенка і його учнів було одержано серію результатів, як теоретичного значення так і в побудові та дослідженні конкретних моделей з різним способом задання відображення $\divideontimes$. Основна задача – це вивчення поведінки траєкторій системи при $t \to \infty$, встановлення існування і знаходження граничних асимптотичних станів, пошук атракторів та їхніх басейнів, доведення існування нерухомих точок (рівноважних станів) та існування циклічних орбіт.

## 2. Побудова динамічної системи конфлікту

Нехай $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n\}$, $n > 1$, є деякою скінченна множиною з дискретною топологією. Позначимо $\mathcal{M}_1^+(\Omega)$ як множину дискретних ймовірнісних мір на $\Omega$. Нехай $\mu_i \in M_1^+(\Omega)$, $i = 1, \ldots, m$, $m \geqslant 2$ – довільна фіксована підмножина мір. Кожну міру $\mu_i$ можна зіставити зі стохастичним вектором $\mathbf{p}_i = (p_{ij})_{j=1}^n$, якщо визначити

$$p_{ij} = \mu_i(\omega_j), \quad i = 1, \ldots, m, \quad j = 1, \ldots, n.$$

Для побудови динамічної системи задамо відображення $\divideontimes$ у просторі стохастичних векторів (перетворення конфлікту). Кожному вектору $\mathbf{p}_i = (p_{ij})_{j=1}^n$ поставимо у відповідність вектор $\mathbf{p}_i^1 = (p_{ij}^1)_{j=1}^n$ за правилом, визначеним у термінах координат

$$p_{ij}^1 = \frac{1}{z}\big(p_{ij}(\theta + 1) + \alpha\tau_j\big),$$

де $\theta = \theta\big(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \ldots, \mathbf{p}_m\big)$ – довільна обмежена додатна функція, $\boldsymbol{\tau} = \big(\tau_j\big)_{j=1}^n$ – фіксований вектор з невід'ємними координатами, які залежать

від $\mathbf{p}_1, \ldots, \mathbf{p}_m$, а $z$ – нормувальний знаменник, що забезпечує стохастичність вектора $\mathbf{p}_i^1$.

Ітерація цього відображення генерує багатокомпонентну динамічну систему з траєкторіями

$$\{\mathbf{p}_1^t, \mathbf{p}_2^t, \ldots, \mathbf{p}_m^t\} \xrightarrow{*,t} \{\mathbf{p}_1^{t+1}, \mathbf{p}_2^{t+1}, \ldots, \mathbf{p}_m^{t+1}\}, \quad t = 0, 1, \ldots, \tag{2.1}$$

де $\mathbf{p}_i^{t=0} = \mathbf{p}_i$, а координати кожного вектора $\mathbf{p}_i^t = (p_{ij}^t)_{j=1}^n$ змінюються відповідно до рівнянь

$$p_{ij}^{t+1} = \frac{1}{z^t}\big(p_{ij}^t\big(\theta^t + 1\big) + \alpha\tau_j^t\big), \quad t = 0, 1, \ldots, \tag{2.2}$$

$$z^t = 1 + \theta^t + W^t, \quad W^t = \sum_{j=1}^n \tau_j^t > 0, \tag{2.3}$$

де $\theta^t = \theta\big(\mathbf{p}_1^t, \mathbf{p}_2^t, \ldots, \mathbf{p}_m^t\big)$ – деяка обмежена додатна функція, яка визначає вільну еволюцію системи. Нормувальний знаменник $z^t$ забезпечує стохастичність векторів $\mathbf{p}_i^{t+1}$. Набір додатних функцій $\tau_j^t$ (певним чином залежних від координат векторів $\mathbf{p}_i^t$) відповідає закону взаємодії. Значення цих функцій при кожному фіксованому $t$ утворюють деякий нестохастичний вектор з невід'ємними координатами, який позначено символом $\boldsymbol{\mathcal{T}}^t = \big(\tau_j^t\big)_{j=1}^n$ і називаємо вектором взаємодії. Вектор $\mathbf{w}^t = (w_j^t)_{j=1}^n$, де $w_j^t := \frac{\tau_j^t}{W^t}$, є стохастичним аналогом вектора $\boldsymbol{\mathcal{T}}^t$. Далі буде досліджено ряд моделей динамічних систем конфлікту, траєкторії яких залежать від вигляду вектора $\boldsymbol{\mathcal{T}}^t$, а також вивчено залежність поведінки системи від поведінки $\boldsymbol{\mathcal{T}}^t$ при $t \to \infty$.

В рівняннях (2.2) стала $\alpha$ може набувати довільного значення, але при досить великих $\alpha$ швидкість збіжності (чи розбіжності) системи буде досить великою при малих значення часу $t$. Така динаміка не відповідатиме динаміці реальних процесів, тому при побудові моделі було вибрано значення сталої $\alpha$ з проміжку $[-1; 1]$. Згідно з наведеними рівняннями, у випадку $\alpha \in (0; 1]$ відстань між векторами $\mathbf{p}_i^t$ в $l_1$-нормі збігається до нуля,

$$\|\mathbf{p}_i^t - \mathbf{p}_k^t\|_1 = \sum_{j=1}^n |p_{ij}^t - p_{kj}^t| \to 0, \quad i \neq k, \quad i, k = 1, \ldots, m,$$

тому відображення $*$, задане цими рівняннями, описує взаємодію притягання. При $\alpha \in [-1; 0)$ будемо говорити про динамічну систему з взаємодією відштовхування. Зауважимо, що при $\alpha = 0$ початковий стан $\big\{\mathbf{p}_i^{t=0}\big\}_{i=1}^m$ є нерухомим.

## 3. Дослідження властивостей траєкторій динамічних систем конфлікту

Динамічні системи конфлікту можуть мати різні поведінкові сценарії залежно від вектора взаємодії, що визначає їхню динаміку та довготривалі стани. Комп'ютерне моделювання підтверджує, що зміна параметрів впливає на тип граничного стану – стабільний, циклічний або хаотичний, що розкриває можливості для розуміння розвитку конфліктних систем.

При певних умовах траєкторії системи конфлікту збігаються до нерухомих точок – граничних станів, у яких динаміка стабілізується. Для притягувальної взаємодії траєкторії системи зближаються до спільних позицій, тоді як відштовхувальна взаємодія може приводити до розподілу ресурсів між опонентами. Така поведінка продемонстрована на рис. 3.1 для відштовхування (рис. 3.1.2) та притягання (рис. 3.1.3)

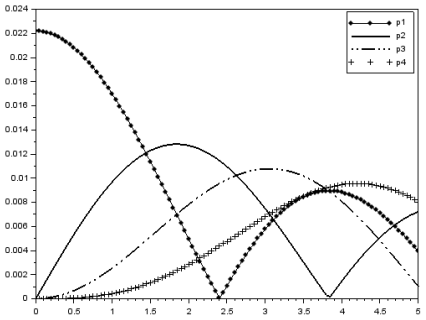
**Теорема 3.1** ([9,10]). *Якщо всі координати стохастичного вектора* $\mathbf{w}^t$ *є монотонними (зростають або спадають незалежно одна від одної) при* $\alpha = (0;1]$ *або спадають при* $\alpha = [-1;0)$*, то існує граничний вектор* $\mathbf{w}^\infty$ *і кожна траєкторія динамічної системи* (2.1) *з початковим станом* $\left\{\mathbf{p}_i^{t=0}\right\}_{i=1}^m$ *збігається до нерухомого граничного стану* $\left\{\mathbf{p}_i^\infty\right\}_{i=1}^m$

$$\mathbf{p}_i^\infty = \lim_{t\to\infty} \mathbf{p}_i^t, \quad \forall\ i = 1,\dots,m.$$

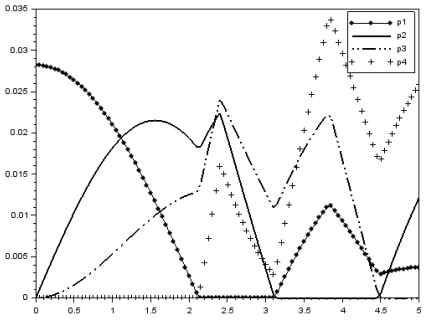
*При цьому, у випадку* $\alpha = (0;1]$ *всі граничні вектори* $\mathbf{p}_i^\infty$ *мають однакові координати* $p_{ij}^\infty = w_j^\infty$ *для всіх* $i = 1,\dots,m$, $j = 1,\dots,n$, *які співпадають з координатами вектора* $\mathbf{w}^\infty$*. У випадку* $\alpha = [-1;0)$*, якщо* $w_j^\infty < 0$ *для всіх* $j = 1,\dots,n$, *то* $p_{ij}^\infty = w_j^\infty$ *для всіх* $i = 1,\dots,m$, $j = 1,\dots,n$.

Деякі системи досягають циклічних орбіт, коли координати вектора взаємодії є періодичними значеннями. У такому випадку траєкторії повторюються з постійною періодичністю, що формує циклічну динаміку. Цей факт демонструє наступна теорема.

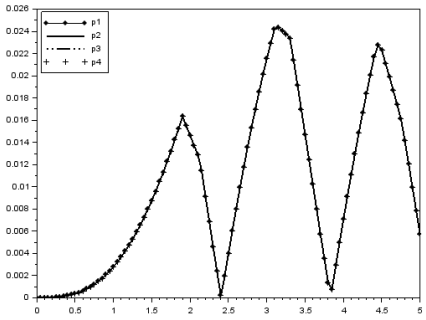
**Теорема 3.2** ([9, 10]). *Нехай координати* $\tau_j^t = \tau_j(t)$, $j = 1,\dots,n$, *де* $\tau_j(t)$ *– довільні додатні періодичні функції з сумірними періодами. Припустимо, що головний період функцій* $w_j(t)$ *є додатнім цілим числом* $T > 1$*, а координати вектора* $\mathbf{w}^t$ *не є константами. Тоді кожна траєкторія динамічної системи* (2.1)*, заданої системою різницевих рівнянь* (2.2)*, збігається до* $\omega$*-граничної множини* $\mathbf{\Gamma}^\infty$*, яка є циклічною*




1) $\{\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3, \mathbf{p}_4\}$, $t = 0$




2)$\{\mathbf{p}_1^\infty, \mathbf{p}_2^\infty, \mathbf{p}_3^\infty, \mathbf{p}_4^\infty\}$, $\alpha = -1$




3) $\{\mathbf{p}_1^\infty, \mathbf{p}_2^\infty, \mathbf{p}_3^\infty, \mathbf{p}_4^\infty\}$, $\alpha = 1$

Рис. 3.1. $m = 4, n = 100$, 1) початковий стан $\{\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3, \mathbf{p}_4\}$ заданий модулем функції Бесселя першого роду, тобто $f_i(x) = |J_\beta(x)|$, де $J_\beta(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!\Gamma(m+\beta+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2m+\beta}$ для $\beta = 0, 1, 2, 3$, $x \in [0; 6]$, а координати векторів $\mathbf{p}_i^{t=0}$ задано за допомогою значень функцій $f_i(x)$ на відрізку $[0, 6]$ згідно формули $p_{ik} = \frac{f_i(x_k)}{D}$, де $D = \sum\limits_{k=1}^{n} f_i(x_k)$, а $x_k$ належить розбиттю відрізка $[0, 6]$; 2)–3) граничні стани $\{\mathbf{p}_1^\infty, \mathbf{p}_2^\infty, \mathbf{p}_3^\infty, \mathbf{p}_4^\infty\}$ з $\tau_j^t$ визначеним як мінімальне значення $j$-тих координат векторів $\mathbf{p}_i^t$, тобто $\tau_j^t = \min\limits_i \{p_{ij}^t\}$.

*орбітою. Тобто, множина* $\mathbf{\Gamma}^{\infty}$ *є інваріантною відносно перетворення* $*$ *та складається з* $T$ *впорядкованих векторів* $\Gamma_l$, $l = 1, \ldots, T$

$$\Gamma_1 \xrightarrow{*} \Gamma_2 \xrightarrow{*} \Gamma_3 \xrightarrow{*} \cdots \xrightarrow{*} \Gamma_T \xrightarrow{*} \Gamma_1.$$

*Гранична множина* $\mathbf{\Gamma}^{\infty}$ *залежить від початкового вектора* $\mathbf{w}^{t=0}$.

**Теорема 3.3.** *Нехай координати* $\tau_j^t = \tau_j(t)$, $j = 1, \ldots, n$, *де* $\tau_j(t)$ – *довільні додатні періодичні функції з несумірними періодами. Припустимо, що координати вектора* $\mathbf{w}^t$ *не є константами. Тоді кожна траєкторія динамічної системи* (2.1), *заданої системою різницевих рівнянь* (2.2) *є квазіперіодичною при* $t \to \infty$. *Типові (або, як правило) траєкторії на границі заповнюють деяку компактну множину.*

Розглянемо систему (2.1), задану рівняннями: $\mathbf{p}^{t+1} = f(\mathbf{p}^t, \tau^t)$, де $\tau^t = (\tau_1^t, \tau_2^t, \ldots, \tau_n^t)$ — набір параметрів, які залежать від часу $t$, і кожна $\tau_j(t)$ є періодичною функцією з несумірними періодами. Функція $f$ є неперервною і обмеженою, тому траєкторії $\mathbf{p}^t$ залишаються в обмеженій області фазового простору, тобто траєкторії належать деякій компактній множині.

Несумірність періодів функцій $\tau_j(t)$ означає, що для будь-якого набору цілих чисел $k_1, k_2, \ldots, k_n$ рівність $k_1T_1 + k_2T_2 + \cdots + k_nT_n = 0$ виконується лише для тривіального випадку $k_1 = k_2 = \cdots = k_n = 0$. Таким чином, функції $\tau_j(t)$ ніколи не синхронізуються, і значення $\tau^t$ не повторюються періодично. Це виключає можливість періодичної поведінки траєкторій. Несумірність періодів $\tau_j(t)$ призводить до того, що траєкторії рівномірно заповнюють деяку компактну множину в фазовому просторі. Це відбувається завдяки властивості квазіперіодичних функцій, які рівномірно покривають тороподібну поверхню. Таким чином, траєкторії системи демонструють квазіперіодичну поведінку.

Траєкторії системи залежать від початкового стану $\mathbf{w}^{t=0}$, який визначає фазу функцій $\tau_j(t)$ та початкові координати $\mathbf{p}^0$. Тому для різних початкових умов траєкторії можуть покривати різні частини компактної множини, проте всі вони залишаються квазіперіодичними.

Таким чином, типові траєкторії системи є квазіперіодичними і заповнюють деяку компактну множину в фазовому просторі.

Розглянемо конкретний приклад для випадку $n = 3$, $m = 3$. Нехай початковий стан задано наступними векторами: $\mathbf{p}_1^{t=0} = (0.08; 0.02; 0.9)$, $\mathbf{p}_2^{t=0} = (0.1; 0.55; 0.35)$, $\mathbf{p}_3^{t=0} = (0.8; 0.15; 0.05)$. На Рис. 3.2, 3.3 за умови сумірності періодів функцій $\tau_j(t)$, система демонструє цикл із фіксованим періодом $T$. Цей період залежить від основного періоду функцій $\tau_j^t$ і описується набором впорядкованих векторів $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_T$. Траєкторії системи підтверджують циклічність і стабільність у фазовому просторі

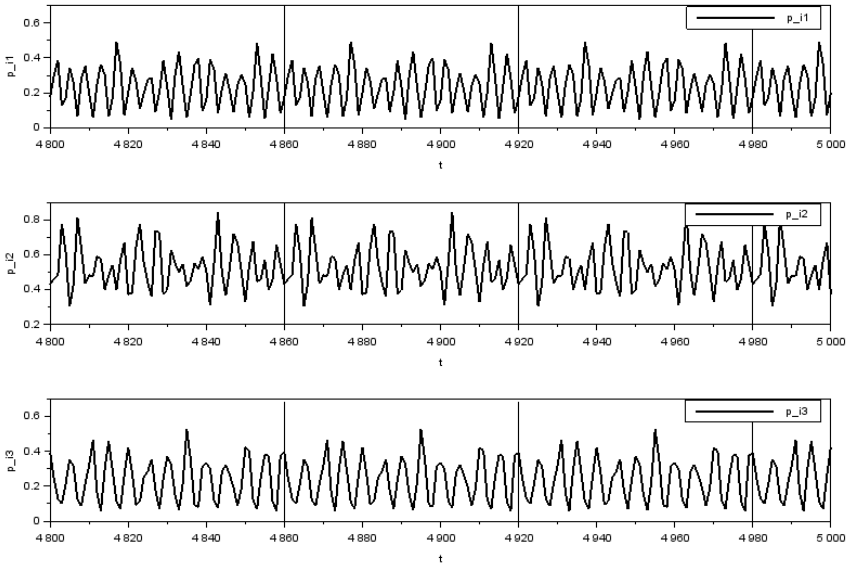



Рис. 3.2. Зміна координат векторів $\mathbf{p}_i^t$ при $\tau_1(t) = \sin(\frac{\pi t}{2}) + 1$, $\tau_2(t) = \sin(\frac{2\pi t}{3}) + 2$, $\tau_3(t) = \cos(\frac{2\pi t}{5}) + 1$, де $T = 60$ – головний період координат вектора $\mathbf{w}^t$.

відповідно до теореми 3.3. На Рис. 3.4, 3.5 зображена динаміка з використанням функцій $\tau_j^t$ із несумірними періодами. Несумірність періодів функцій $\tau_j^t$ призводить до квазіперіодичної поведінки. Система не збігається до циклічної орбіти, але її траєкторії заповнюють компактну множину в фазовому просторі. Квазіперіодичність траєкторій підтверджується тим, що система заповнює тороподібну компактну множину, зберігаючи квазіперіодичну динаміку.

Цікавою для розгляду є динамічна система конфлікту, де лише одна з координат вектора взаємодії $\tau_j^t = \tau_j(t)$ є періодичною функцією з періодом $T > 1$. Такий вибір параметра $\tau_j^t$ може суттєво впливати на поведінку системи. Виходячи з цього, можливі наступні сценарії динаміки:

1. *Періодична стабільність.* Якщо інші параметри системи не змінюються хаотично і є стабільними або поступово адаптуються до циклічного впливу $\tau_j^t$, система може збігатися до періодичної орбіти з тим самим періодом $T$. Для такої стабільності необхідно, щоб амплітуди коливань $\tau_j^t$ та інші параметри не приводили до суттєвих збурень. Це часто можливо у випадках, коли система має сильні стабілізуючі механізми (наприклад, притягувальну взаємодію або згладжування коливань). У

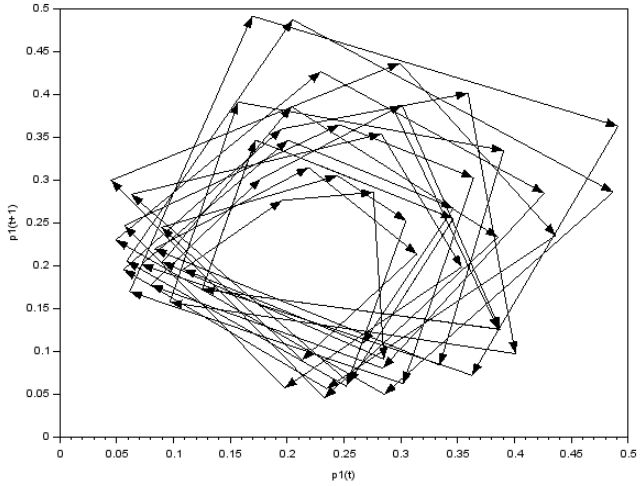



Рис. 3.3. Фазовий портрет системи у просторі відображень $(p_1^t, p_1^{t+1})$, побудований при $\tau_1(t) = \sin(\frac{\pi t}{2}) + 1$, $\tau_2(t) = \sin(\frac{2\pi t}{3}) + 2$, $\tau_3(t) = \cos(\frac{2\pi t}{5}) + 1$, $T = 60$.

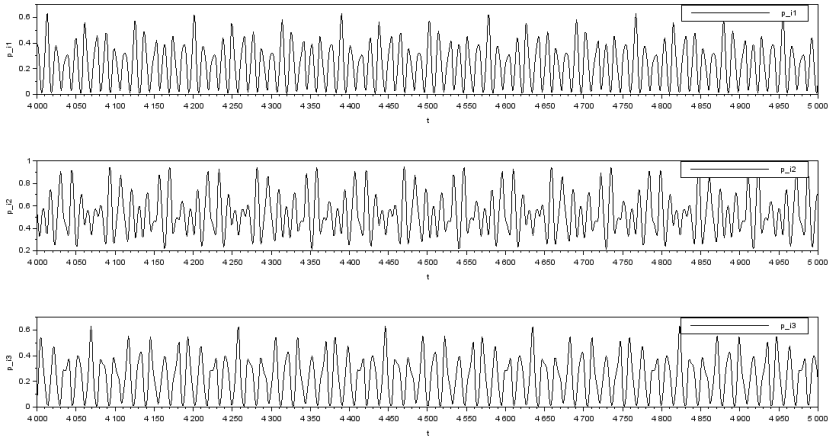
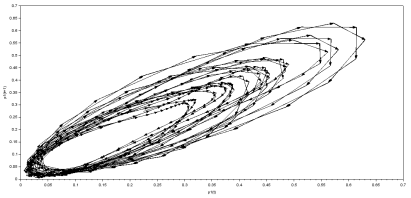
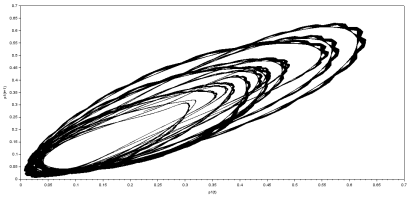


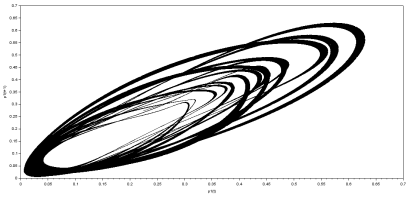

Рис. 3.4. Зміна координат векторів $\mathbf{p}_i^t$ при $\tau_1(t) = \sin(\frac{\pi t}{2}) + 1$, $\tau_2(t) = \sin(\frac{2\pi t}{3}) + 2$, $\tau_3(t) = \cos(\frac{2\pi t}{5}) + 1$, де $T = 60\pi$ – головний період координат вектора $\mathbf{w}^t$.



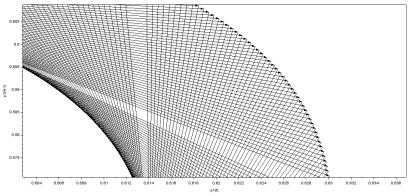
1) $t = 1000$



2) $t = 5000$



3) $t = 10000$



4) $t = 10000$, приближено

Рис. 3.5. Фазовий портрет системи у просторі відображень $(p_1^t, p_1^{t+1})$, побудований при $\tau_1(t) = \sin(\frac{t}{2}) + 1$, $\tau_2(t) = \sin(\frac{2t}{3}) + 2$, $\tau_3(t) = \cos(\frac{2t}{5}) + 1$, $T = 60\pi$. Як видно на рисунках, для несумірних траєкторії заповнюють тороподібну структуру.

результаті система демонструє передбачувану динаміку, що повторюється через кожні $T$ кроків.

2. *Квазірегулярна динаміка.* У разі, якщо інші компоненти вектора взаємодії або параметри системи мають свої внутрішні періоди, але не синхронізуються з $\tau_j^t$, може виникнути квазірегулярна поведінка. Це явище спостерігається за наявності декількох взаємодіючих періодичних процесів із близькими, але несумірними періодами. Система може демонструвати складні ритми, з появою повторюваних візерунків або переходів між різними фазами, але без чіткої циклічності.

3. *Хаотична динаміка.* Якщо $\tau_j^t$ вступає у взаємодію з іншими компонентами системи, що демонструють нестабільність або високу чутливість до збурень, система може перейти до хаотичної поведінки. Хаотична динаміка можлива за наявності нелінійної взаємодії, коли навіть невеликі зміни у $\tau_j^t$ здатні спричиняти значні зміни в траєкторіях системи. Система може виявляти хаотичну поведінку, коли одна з координат вектора взаємодії підпорядкована хаотичності, наприклад логістичному закону. Це призводить до чутливості траєкторій до початкових умов і може зумовлювати непередбачувані коливання. Важливою умовою є

також відсутність механізмів, які стабілізують поведінку. Система стає чутливою до початкових умов, і навіть малі зміни на вході можуть призводити до суттєво різних траєкторій. Така поведінка ускладнює прогнозування і може мати значні наслідки у реальних прикладних сценаріях.

4. *Комбінована динаміка* У деяких випадках система може демонструвати перехід від періодичної стабільності до хаотичної динаміки або поєднання періодичної та хаотичної поведінки у різних фазах. Це можливо при наявності різних впливів або змінах параметрів $\tau_j^t$ у процесі еволюції системи. Така динаміка є нестабільною або складною для моделювання та контролю.

## 4. Висновки

Вивчення динамічних систем конфлікту показало, що їх траєкторії можуть демонструвати широкий спектр поведінкових сценаріїв, від стабільності до хаотичності, залежно від параметрів взаємодії та початкових умов. Зокрема, результати досліджень підтвердили можливість існування нерухомих точок, циклічних орбіт та квазіперіодичної поведінки, що є важливими для аналізу реальних соціально-економічних та екологічних процесів.

Для систем із притягальною взаємодією характерна конвергенція траєкторій до спільних граничних станів, тоді як відштовхувальна взаємодія призводить до розподілу ресурсів між опонентами. Динаміка систем з періодичними параметрами може досягати стабільних циклічних орбіт. Це підтверджено моделями, що враховують періодичність вектора взаємодії. У разі несумірних періодів параметрів система може демонструвати квазіперіодичну поведінку або переходити до хаотичної динаміки, що особливо актуально для аналізу складних соціальних і екологічних систем. Таким чином, запропоновані моделі дозволяють описувати складну поведінку конфліктних систем та є основою для подальших досліджень, спрямованих на розробку ефективних стратегій управління конфліктами.

Порівняння з дослідженнями [4, 5] показало схожість у використанні нелінійних моделей, мультифакторного аналізу та принципів стабільності й нестабільності систем. В роботі [4] підкреслено важливість мультиплексних взаємодій, таких як політичні й культурні, що відповідає концепції розподілу ресурсів у даній роботі. В [5] досліджено роль затримок і просторової нелокальності, які також можуть бути адаптовані до розглянутих вище моделей динамічних систем конфлікту. Розглянуті властивості моделей динамічних систем підтверджують їх універсальність для аналізу складних соціальних, екологічних і економічних

процесів. Це дозволяє зробити висновок, що розглянуті в цій роботі моделі є ефективним інструментом для дослідження реальних конфліктних систем і можуть бути розширені з урахуванням більш складних факторів і структур.

## Література


[1] М. В. Боднарчук, В. Д. Кошманенко,, Н. В. Харченко. Властивості граничних станів динамічної системи конфлікту. *Нелінійні коливання*, 7(4):446–461, 2004.

[2] О. Р. Сатур. Динамічна система конфлікту з притяганням для трійки взаємодіючих сторін. *Наукові записки НаУКМА. Фізико-математичні науки*, 201:34–37, 2017.

[3] S. Albeverio, M. Bodnarchyk,, V. Koshmanenko. Dynamics of discrete conflict interactions between non-annihilating opponents. *Methods of Functional Analysis and Topology*, 11(4):309–319, 2005.

[4] Gerardo Aquino, Weisi Guo,, Alan Wilson. Nonlinear dynamic models of conflict via multiplexed interaction networks. 09 2019. doi:10.48550/arXiv.1909.12457.

[5] A. Bayliss, A. Nepomnyashchy,, V. Volpert. Mathematical modeling of cyclic population dynamics. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 394, 02 2019. doi:10.1016/j.physd.2019.01.010.

[6] V. D. Koshmanenko. *Spectral Theory for Conflict Dynamical Systems*. Naukova Dumka, Kyiv, 2016.

[7] V. D. Koshmanenko, I. V. Samoilenko. A dynamical system model for a conflict triad. *Nonlinear Oscillations*, 14(1):55–75, 2011. doi:10.1007/s11072-011-0141-5.

[8] K. M. M. Salam, K. I. Takahashi. Mathematical model of conflict and cooperation with non-annihilating multi-opponent. pages 299–306, 2010. doi:10.1007/978-3-540-85081-6_38.

[9] O. R. Satur. Limit states of multicomponent discrete dynamical systems. *Journal of Mathematical Sciences*, 256:648–662, 2021. doi:10.1007/s10958-021-05451-x.

[10] O. R. Satur. Dependence of the behaviors of trajectories of dynamic conflict systems on the interaction vector. *Journal of Mathematical Sciences*, 274:76–93, 2023. doi:10.1007/s10958-023-06572-1.



О. Р. Сатур
Інститут математики НАН України, м. Київ
*Email:* orlassat@gmail.com
*ORCID:* 0000-0001-6318-2145