

Фрактальний аналіз функцій зі складною локальною структурою

С. П. Ратушняк

Abstract. We consider class of fractal functions whose argument and value are written in the same (or different) number representation systems with zero redundancy (Q_2 -representation, Q_2^* -representation, A -continued fraction representation of numbers). For the given examples of function constructions, their topological, metric, fractal and differential properties are described.

Анотація. У статті розглядається клас фрактальних функцій, аргумент і значення яких записані в одній і тій же (або різних) системах зображення чисел з нульовою надлишковістю (Q_2 -зображення, Q_2^* -зображення, ланцюгове A -зображення чисел). Для наведених прикладів конструкцій функцій описано їх тополого-метричні, фрактальні та диференціальні властивості.

1. ПОЧАТКИ

Фрактальний аналіз бере свій початок з робіт Ф. Гаусдорфа [9] і А. С. Безиковича [6] (відносно повний перелік яких можна знайти в роботі [30]). Введенні в роботи даних авторів поняття мір дробових порядків (далі α -вимірної міри Гаусдорфа) і метричної (фрактальної = дробової) розмірності Гаусдорфа-Безиковича в майбутньому ляже в основу "критерію"фрактальності множин в широкому (в сенсі Б. Мандельброта) чи вузькому розумінні. Таким чином фрактальний аналіз зводився до аналізу розмірності множин.

Напевно (на думку автора), діалектика кристалізації h -міри Гаусдорфа пролягала через поняття α -міри Каратеодорі (1914 р.) і стала основою центрального поняття теорії – розмірності Гаусдорфа-Безиковича, яке формувалось на "багаточисельних"на той момент яскравих прикладах множин, графіків функцій, що не вписувались в загальну картину науки того часу. Адже на момент виходу статті Гаусдорфа вже як понад 35 років була відома множина Кантора, що є найпростішим прикладом

This work was supported by grants from the Simons Foundation (1290607, S.P.R.)

2020 Mathematics Subject Classification: 26A21, 26A30

Ключові слова: system of encoding, fractal function, digit projectors, fractal sets, invensor

DOI: <https://doi.org/10.3842/trim.v21n1.548>

самоподібної множини, вже більше як 15 років був відомий приклад фігури, яка пізніше називатиметься фракталом, – Сніжинкою Коха. До цього переліку можна додати трикутний килим Серпінського (1915 р.), неперервну ніде недиференційовну функцію Вейерштрасса (1872 р.), сингулярну функцію Мінковського (1904 р.) тощо.

Наступним поштовхом до стрімкого злету теорії фракталів була робота Б. Мандельброта [11], яка акцентувала увагу на автомоделних (самоподібних, самоафінних) фігурах дробової розмірності, що виникали як геометричні об'єкти, об'єкти метричної теорії чисел, теорії ймовірностей та теорії динамічних систем.

1.1. Що таке фрактальний аналіз? Фрактальний аналіз, основним об'єктом дослідження якого на початковому етапі була фігура метричного простору з локально складною тополого-метричною структурою, сьогодні активно вивчає функції, перетворення простору, динамічні системи, сингулярні ймовірнісні міри тощо. Наданий момент доцільно розмежовувати структурну і метричну фрактальність. Зауважимо, що більшість моделей, які розглядаються в суміжних науках, є саме структурно фрактальними, а не метрично фрактальними (мова йде про фізику, хімію, біологію, економіку тощо). До метричного фрактального аналізу відносять задачі на обчислення фрактальних розмірностей, зокрема розмірності Гаусдорфа-Безиковича, клітинкової, ентропійної розмірності тощо. До структурного фрактального аналізу відносяться задачі на встановлення самоподібної, самоафінної або автомоделної структури фрактальної множини.

1.2. Фрактальний аналіз в іменах. Ключовими постаттями у розвитку фрактального аналізу безсумнівно можна вважати Ф. Гаусдорфа, А. С. Безиковича та Б. Мандельброта. Тоді, коли Гаусдорф і Безиковича були фундаторами поняття теорії фракталів – міри Гаусдорфа і розмірності Гаусдорфа-Безиковича, Б. Мандельброт був геніальним популяризатором ідей фрактального аналізу, зокрема тих, що ґрунтувалися на принципах самоподібності. Значний внесок у теорію фракталів зробили П. Біллінгслей, Дж. Хатчинсон [10], М. Барнслі [4, 5] та ін.

Не переслідуючи мету здійснити повний історичний зріст розвитку фрактального аналізу, хотілось би зазначити, що на сьогоднішній день теорія фракталів успішно розвивається в Україні. Першопрохідцем серед українських математиків у цій галузі є професор М. В. Працьовитий, який разом з учнями розвиває кілька напрямів фрактального аналізу:

- 1) перетворення, що зберігають фрактальну розмірність [1];
- 2) фрактальний аналіз ніде не монотонних функцій [19];

- 3) фрактальний аналіз сингулярних ймовірнісних мір [2, 24];
- 4) нормальні властивості чисел і фрактальні властивості множин ненормальних чисел [3];
- 5) системи кодування дійсних чисел і фрактали [21, 25];
- 6) фрактальні функції [20];
- 7) фрактальний аналіз множин неповних сум абсолютно збіжних рядів та їх узагальнень [12, 22];
- 8) фрактальний аналіз нескінченних згорток Бернуллі [8];
- 9) узагальнення класичних лінійних фракталів [30];
- 10) узагальнення та поглиблення ряду фундаментальних класичних результатів метричної та ймовірнісної теорії чисел у різних системах зображення чисел [24];
- 11) алгебраїчні структури у теорії фракталів [17] та ін.

2. ФРАКТАЛЬНІ ФУНКЦІЇ

Ми кажемо, що функція має фрактальні властивості, якщо виконується принаймні одна з умов: функція має

- (1) хоча би одну фрактальну множину рівня,
- (2) самоподібний, самоафінний, автомодельний або фрактальний графік (як множину в R^2),
- (3) фрактальну множину точок несталості (росту, спадання),
- (4) фрактальну множину особливостей (диференціального або іншого характеру),
- (5) розподіл значень при рівномірному розподілі аргумента, зосереджений на фракталі;
- (6) трансформує фрактальну розмірність принаймні однієї борелівської підмножини $[0; 1]$.

Ми цікавимося класом функцій, визначених рівністю

$$f(x = \Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n \dots}^g) = \Delta_{\beta_1 \beta_2 \dots \beta_n \dots}^g, \quad (2.1)$$

де $\Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n \dots}^g$ і $\Delta_{\beta_1 \beta_2 \dots \beta_n \dots}^g$ – зображення дійсних чисел (узгоджені за алфавітом або за геометрією зображення).

Приклад 2.1. Нехай $\Delta_{\alpha_1 \dots \alpha_n \dots}^2 = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\alpha_i}{2^i}$ – класичне двійкове зображення чисел, $\alpha_i \in \{0, 1\}$. Тоді функція

$$f(x = \Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n \dots}^2) = \Delta_{[1-\alpha_1][1-\alpha_2] \dots [1-\alpha_n] \dots}^2 = 1 - x.$$

2.1. Система зображення дійсних чисел. Нехай задано A – алфавіт (набір елементів), $L \equiv A \times A \times \dots$ – простір послідовностей елементів алфавіту, $D = < a; b >$ – деякий проміжок.

Означення 2.1. Кодуванням чисел множини D засобами алфавіту A називається сюр'єктивне відображення $g(L) = D$.

При цьому множина

$$\Delta_{c_1 c_2 \dots c_m}^L = \{(a_1, a_2, \dots, a_n, \dots) : a_i = c_i, i = m\}$$

називається *циліндром рангу m з основою $c_1 c_2 \dots c_m$* у просторі L послідовностей алфавіту.

Образ циліндра $\Delta_{c_1 c_2 \dots c_m}^L$ при відображенні g

$$\Delta_{c_1 c_2 \dots c_m}^g = \varphi(\Delta_{c_1 c_2 \dots c_m}^L)$$

називається *циліндром рангу m з основою $c_1 c_2 \dots c_m$ в D* .

Сама послідовність $(\alpha_n) = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, \dots) \in L$, яка відповідає числу x , називається його *g -зображенням (або g -кодом)*, а α_n – *n -ою цифрою (або символом)* цього зображення.

Якщо кожен циліндр є проміжком, то кодування називається *неперервним*.

Кажуть, що зображення має *нульову надлишковість*, якщо кожне число має не більше, ніж два зображення, причому множина чисел, що мають два зображення є не більш ніж зліченна, та *екстранульову надлишковість*, якщо кожне число має єдине зображення.

У випадку нульової надлишковості системи зображення, числа, що мають два формально різні зображення називаються *g -бінарними*. Решта чисел – *g -унарними*.

Наведемо деякі системи зображення чисел, що використовуються в дослідженнях.

Теорема 2.1 ([29]). Нехай $A = \{0, 1, \dots, s-1\}$, $\|q_{in}\|$ – стохастична матриця, така що $0 < q_{in} < 1$, $\sum_{i=0}^{s-1} q_{in} = 1$, $n \in N$ і $\prod_{n=1}^{\infty} \max_{i \in A} \{q_{in}\} = 0$. Тоді для довільного числа $x \in [0; 1]$ існує послідовність $(\alpha_n) \in L$, така що

$$x = \beta_{\alpha_1 1} + \sum_{n=2}^{\infty} (\beta_{\alpha_n n} \prod_{j=1}^{n-1} q_{\alpha_j j}) \equiv \Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n \dots}^{Q_s^*}, \quad \beta_{\alpha_n n} \equiv \sum_{i=0}^{\alpha_n-1} q_{in}. \quad (2.2)$$

Розклад числа x в ряд (2.2) називається Q_s^* -представленням, а скорочений запис $\Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n \dots}^{Q_s^*}$ – його Q_s^* -зображенням.

Дане зображення є узагальненням серії поліосновних так званих Q -зображень, які беруть свій початок з робіт [23, 29] Працьовитого М.В., зокрема, якщо $q_{in} = q_i = \frac{1}{s} \forall i \in A, n \in N$, то Q_s^* -зображення збігається з класичним s -ковим зображенням.

Геометрію цього зображення розкривають властивості циліндрів:

- 1) $\Delta_{c_1 c_2 \dots c_m}^{Q_s^*} = [a; b]$, де $a = \sum_{k=1}^m (\beta_{c_k k} \prod_{j=1}^{k-1} q_{c_j j})$, $a + \prod_{j=1}^m q_{c_j j}$;
- 2) $|\Delta_{c_1 c_2 \dots c_m}^{Q_s^*}| = \prod_{i=1}^m q_{c_i i} = q_{c_m m} |\Delta_{c_1 c_2 \dots c_{m-1}}^{Q_s^*}|$;
- 3) $\max \Delta_{c_1 c_2 \dots c_m i}^{Q_s^*} = \min \Delta_{c_1 c_2 \dots c_m [i+1]}^{Q_s^*}$.

Зауваження 2.1. Зліченна множина Q_s^* -бінарних чисел вичерпується числами виду $\Delta_{\alpha_1 \dots \alpha_{n-1} \alpha_n}^{Q_s^*}(0) = \Delta_{\alpha_1 \dots \alpha_{n-1} [\alpha_n - 1] (s-1)}^{Q_s^*}$.

Теорема 2.2. Нехай $A_s = \{e_0, e_1, \dots, e_{s-1}\}$, $(0 < e_0 < e_1 < \dots < e_{s-1})$. Якщо $e_i = e_{i-1} + d$, $i = \overline{1, s-1}$, де $d = d_1 - d_0$, то $\forall x \in [d_0; d_1] \exists (a_n) \in L$, така що

$$x = 1/a_1 + 1/a_2 + \dots + 1/a_n + \dots \equiv \Delta_{a_1 a_2 \dots a_n \dots}^{A_s}, \quad (2.3)$$

$$\text{де } d_0 = \min_{a_n \in A} \{\Delta_{a_1 a_2 \dots a_n \dots}^{A_s}\}, \quad d_1 = \max_{a_n \in A_s} \{\Delta_{a_1 a_2 \dots a_n \dots}^{A_s}\}.$$

Запис $\Delta_{a_1 a_2 \dots a_n \dots}^{A_s}$ називається ланцюговим A_s -зображенням числа x .

Зауваження 2.2. Зліченна множина A_s -бінарних чисел вичерпується числами виду $\Delta_{a_1 \dots a_{n-1} e_0 (e_0 e_{s-1})}^{A_s} = \Delta_{a_1 \dots a_{n-1} e_{s-1} (e_{s-1} e_0)}^{A_s}$.

Циліндр $\Delta_{c_1 \dots c_n}^{A_s}$ є відрізком з кінцями $\Delta_{c_1 \dots c_n (e_0 e_{s-1})}^{A_s}$ і $\Delta_{c_1 c_2 \dots c_n (e_{s-1} e_0)}^{A_s}$ (де лівий, а де правий кінець, залежить від парності і непарності n).

Зазначимо, що якщо $s = 2$, а $d = \frac{1}{2}$, то A_s -зображення співпадає з ланцюговим A_2 -зображенням, для якого $e_0 \cdot e_1 = \frac{1}{2}$. Останнє зображення розглядалося в багатьох роботах [7, 13, 16, 18, 25, 26], а отримані результати тополого-метричного аналізу знайшли свої застосування в різних галузях математики, зокрема у теорії сингулярно неперервних випадкових величин типу Джессена-Вінтнера.

A_s -зображення легко перекодовується засобами алфавіту A , а саме:

$$x = [0; a_1, a_2, \dots, a_k, \dots] \equiv \Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_k \dots}^A,$$

де $a_k \equiv a_{\alpha_k}$, $k \in \mathbb{N}$. Останнє називається A -зображенням числа x .

3. ОТРИМАНІ РЕЗУЛЬТАТИ

Приклад 3.1. Нехай $A = \{0, 1\}$. Розглядається функція, означена рівністю

$$f_{\overline{\varphi}}(x = \Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n \dots}^{Q_2^*}) = \Delta_{\varphi_1(\alpha_1, \alpha_2) \varphi_2(\alpha_2, \alpha_3) \dots \varphi_n(\alpha_n, \alpha_{n+1}) \dots}^{G_2^*}, \quad (3.1)$$

де $\Delta_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}^{Q_2^*}$ і $\Delta_{\varphi_1(\alpha_1,\alpha_2)\varphi_2(\alpha_2,\alpha_3)\ldots\varphi_n(\alpha_n,\alpha_{n+1})\ldots}^{G_2^*}$ – Q_2^* - і G_2^* -зображення відповідно, породженні стохастичними матрицями $\|q_{in}\|$ і $\|g_{in}\|$, що задовольняють умови теореми 2.1; $\bar{\varphi} = (\varphi_n)$ – послідовність фінітних відображень $\varphi_n(A^2) = A \ \forall n \in N$.

Лема 3.1. *Якщо в послідовності (φ_n) функція φ_m є константою і, то множина значень функції $f_{\bar{\varphi}}$ є підмножиною об'єднання циліндрів m -го рангу, а саме:*

$$E_{f_{\bar{\varphi}}} \subset \bigcup_{c_1 \in A} \bigcup_{c_2 \in A} \ldots \bigcup_{c_{m-1} \in A} \Delta_{c_1 c_2 \ldots c_{m-1} i}^{G_2^*}. \quad (3.2)$$

Наслідок 3.1. *Якщо серед функцій послідовності (φ_n) існує нескінченна підпослідовність констант, то множина значень функції $f_{\bar{\varphi}}$ є підмножиною множини канторівського типу $C[G_2^*, V_k]$, де*

$$V_k = \begin{cases} A, & \text{якщо } \varphi_k - \text{ не константа;} \\ \{j_k\}, & \text{якщо } \varphi(a, b) = j_k. \end{cases}$$

Теорема 3.1. *Кожна функція $f_{\bar{\varphi}}$ класу S є неперервною на множині Q_2^* -унарних чисел. Для того щоб функція $y = f_{\bar{\varphi}}(x)$ була неперервною, необхідно і достатньо, щоб її значення від двох різних зображень Q_2^* -бінарних чисел збігалися, тобто $f_{\bar{\varphi}}(\Delta_{c_1 \ldots c_m 0(1)}^{Q_2^*}) = f_{\bar{\varphi}}(\Delta_{c_1 \ldots c_m 1(0)}^{Q_2^*})$ для будь-якого набору $(c_1, \ldots, c_m)$ нулів та одиниць.*

Теорема 3.2. *Якщо функція $f_{\bar{\varphi}}$ неперервна в кожній точці відрізка $[0; 1]$, то вона є або сингулярною функцією салемівського типу, якщо $q_i \neq g_i$, або сингулярною строго спадною функцією (інверсором цифр), якщо $q_{in} \neq \frac{1}{2} \wedge g_{in} \neq \frac{1}{2}$, або тотожним перетворенням або $y = 1 - x$, якщо $q_{in} = g_{in} = \frac{1}{2}$, або константою, причому констант континуальна кількість.*

Теорема 3.3. *Множина рівня функції $f_{\bar{\varphi}}$, де $\varphi_n = \varphi$ для $n \in N$ є або скінченною, або континуальною, причому:*

- 1) якщо $E_{f_{\bar{\varphi}}} = \{i\}, i \in A$, то $f_{\bar{\varphi}}^{-1}(y_0)$ є континуальною множиною;
- 2) якщо $E_{f_{\bar{\varphi}}} = [0; 1]$, то $f_{\bar{\varphi}}^{-1}(y_0)$ є або одноеlementною множиною, або складається з двох точок x_0 і $I(x_0)$, де $I(\Delta_{\alpha_1 \ldots \alpha_n \ldots}^{Q_2^*}) = \Delta_{[1-\alpha_1] \ldots [1-\alpha_n] \ldots}^{G_2^*}$;
- 3) якщо $E_{f_{\bar{\varphi}}} = [G_2^*, V]$, то $f_{\bar{\varphi}}^{-1}(y_0)$ є або скінченною, або континуальною множиною.

Теорема 3.4. Якщо $\varphi(\alpha_n, \alpha_{n+1}) = 1 - \alpha_n \ \forall n \in N$ і $q_{in} = g_{in}$, а послідовність $\frac{q_{1-\alpha_n(x)n}}{q_{\alpha_n(x)n}}$ є або розбіжною, або має границю, відмінну від 1, то $f_{\overline{\varphi}}$ є неперервною строго спадною сингулярною функцією.

Якщо ж матриця $\|q_{ik}\|$ має асимптотичну властивість, причому $q_0 = \lim_{n \rightarrow \infty} q_{0n} \neq \frac{1}{2}$, то функція $f_{\overline{\varphi}}$ в кожній Q_2 -бінарній точці не має похідної (ні скінченної, ні нескінченної).

Приклад 3.2. Нехай $A = \{0, 1\}$. Розглядається функція, означена рівністю

$$r(x = \Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n \dots}^{Q_2}) = \Delta_{r_1 r_2 \dots r_k \dots}^{Q_2}, \quad (3.3)$$

де

$$r_1 = \begin{cases} 0, & \text{якщо } (\alpha_1, \alpha_2) = (0, 0), \\ 1, & \text{якщо } (\alpha_1, \alpha_2) \neq (0, 0), \end{cases}$$

$$r_{k+1} = \begin{cases} r_k, & \text{якщо } (\alpha_{2k+1}, \alpha_{2k+2}) = (\alpha_{2k-1}, \alpha_{2k}), \\ 1 - r_k, & \text{якщо } (\alpha_{2k+1}, \alpha_{2k+2}) \neq (\alpha_{2k-1}, \alpha_{2k}). \end{cases}$$

Теорема 3.5. Функція r є неперервною і ніде не монотонною функцією необмеженої варіації. Її множиною значень є відрізок $[0; 1]$.

Теорема 3.6. Множина Q_2 -бінарного рівня є скінченною, а кожна множина Q_2 -унарного рівня функції r є континуальною, ніде не щільною множиною нульової міри Лебега.

Теорема 3.7. Функція r не має скінченної похідної в жодній Q_2 -бінарній точці, причому якщо Q_2 -бінарна точка є точкою екстремуму функції, то в ній функція немає ні скінченної, ні нескінченної похідної.

Теорема 3.8. Якщо $q_0 \geq q_1^2$ і $q_1 \geq q_0^2$, то функція r є ніде не диференційовною (не має скінченної похідної у жодній точці).

Приклад 3.3. Розглядається функція, означена рівністю

$$f(x = \Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n \dots}^g) = a^{\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i u_i} = \prod_{n=1}^{\infty} \lambda_n^{\alpha_n(x)}, \alpha_n \in A \quad (3.4)$$

де $u_1 + u_2 + \dots$ – абсолютно збіжний ряд і сумою r_0 , $1 \neq a$ – додатний параметр, $1 < s$ – фіксоване натуральне число, (λ_n) – послідовність додатних чисел, така що нескінченний добуток $P \equiv \prod_{n=1}^{\infty} \lambda_n$ абсолютно збіжний.

Якщо g -зображення є Q_s^* -зображенням, то функція, означена рівністю (3.4), може бути записана у вигляді

$$f\left(x = \Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_n \dots}^{Q_s^*}\right) = a^{\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i u_i}, \quad (3.5)$$

Теорема 3.9 ([15]). *Функція f є неперервною в кожній Q_s^* -унарній точці, а в Q_s^* -бінарній точці вона неперервна якщо $u_n = (s-1)s^{-n}r_0$. Якщо $g_{ik} = q_i \forall k \in N$, то графік функції є автомодельною множиною. В класі неперервних функцій f , якщо $g_{ik} = q_i$ при $k > m$ і $u_{m+n} = \frac{\lambda}{s^n}$, то*

$$\int_0^1 f(x) = \prod_{i=1}^{\infty} \sum_{j=0}^{s-1} a^{ju_i} q_{ji}.$$

Теорема 3.10 ([15]). *Нехай матриця $\|q_{ik}\|$ має асимптотичну властивість і при цьому виконується умова $\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{i=0}^{s-1} \left(1 - \frac{q_{ik}}{q_i}\right)^2 < \infty$. Якщо існує $q_i \neq \frac{1}{s}$, $i \in A$, то функція f є сингулярною. Якщо $q_i = \frac{1}{s}$ для всіх i , то f є абсолютно неперервною функцією.*

Зауваження 3.1. Клас функцій, які задовольняють умови (крайні), містить класичну сингулярну функцію Салема.

Нехай $A_2 = \{\frac{1}{2}, 1\}$, а g -зображення є A -зображенням чисел. Розглядається клас функцій (3.4), тобто функції означені рівністю

$$f(x = \Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_k \dots}^A) = a^{\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i u_i} = a^{\varphi(x)}, \quad (3.6)$$

$$\varphi(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i u_i.$$

За для коректності означення функції f домовимося використовувати лише одне зображень те, що має період (10).

Теорема 3.11 ([14]). *Функція $f(x)$ неперервна в кожній A -унарній точці, а в A -бінарній точці $x^* = \Delta_{c_1 \dots c_m 0(01)}^A = \Delta_{c_1 \dots c_m 1(10)}^A$ неперервна тоді і тільки тоді, коли виконується рівність*

$$u_m + \sum_{k=1}^{\infty} u_{m+2k-1} = \sum_{k=1}^{\infty} u_{m+2k}.$$

Теорема 3.12 ([14]). *Кожна неперервна функція f , означена рівністю (3.6), є строго спадною при $u_1 > 0$, строго зростаючою при $u_1 < 0$ і константою при $u_1 = 0$.*

Лема 3.2 ([14]). *Якщо існує скінченна похідна функції φ у точці $x_0 = \Delta_{\alpha_1 \dots \alpha_n}^A$, то вона може бути обчислена за кожною з формул*

$$\varphi'(x_0) = - \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{2^{2k} |\Delta_{\alpha_1 \dots \alpha_{2k}}^A|} = -2 \lim_{k \rightarrow \infty} \prod_{n=1}^{2k} \frac{|\Delta_{\alpha_1 \dots \alpha_{n-1}}^A|}{2 |\Delta_{\alpha_1 \dots \alpha_{n-1} \alpha_n}^A|}. \quad (3.7)$$

Теорема 3.13 ([14]). *Якщо f неперервна функція, означена рівністю (3.6), то для майже всіх (у розумінні міри Лебега) чисел $x \in [\frac{1}{2}; 1]$ має місце $f'(x) = 0$.*

Приклад 3.4. Розглядається функція, означена рівністю

$$f(x = \Delta_{a_1 a_2 \dots a_n}^{A_2}) = \Delta_{\frac{1}{2a_1} \frac{1}{2a_2} \dots \frac{1}{2a_n}}^{A_2}. \quad (3.8)$$

Оскільки необхідна і достатня умова нульової надлишковості A_2 -зображення $e_0 e_1 = \frac{1}{2}$ має місце, то $\frac{1}{2e_i} = e_{1-i} \in (0; \frac{1}{\sqrt{2}})$, $i \in \{0, 1\}$. А тому рівність (3.8) задає континуальну сім'ю функцій f .

Функція f , означена рівністю (3.8) є коректно означеною на множині A_2 -бінарних чисел, оскільки

$$\begin{aligned} f\left(\Delta_{a_1 \dots a_n e_0(e_0 e_1)}^{A_2}\right) &= \Delta_{\frac{1}{2a_1} \dots \frac{1}{2a_n} e_1(e_1 e_0)}^{A_2} = \\ &= \Delta_{\frac{1}{2a_1} \dots \frac{1}{2a_n} e_0(e_0 e_1)}^{A_2} = f\left(\Delta_{a_1 \dots a_n e_1(e_1 e_0)}^{A_2}\right). \end{aligned}$$

Теорема 3.14 ([27]). *Функція f є сингулярною строго спадною на всій області визначення функцією. Графік Γ_f функції f є автотельною множиною R^2 зі структурою $\Gamma_f = \Gamma_0 \cup \Gamma_1$, де Γ_i образ Γ при перетворенні*

$$\gamma_i : \begin{cases} x' = \delta_{e_i}(x) = \frac{1}{e_i + x}, \\ y' = \delta_{\frac{1}{2e_i}}(y) = \frac{2}{\frac{1}{e_i} + 2y}, \end{cases} \quad i \in \{0, 1\},$$

де $\delta_{e_i}(x = \Delta_{a_1 a_2 \dots a_n}^{A_2}) = \Delta_{e_i a_1 a_2 \dots a_n}^{A_2}$ – оператор правостороннього зсуву цифр зображення з параметром e_i , $e_i \in A_2$.

Приклад 3.5. Нехай $A_2 = \{\tau_0, \tau_1\}$ ($\tau_0 \tau_1 = \frac{1}{2}$), $A_3 = \{e_0, e_1, e_2\}$ ($e_0 e_2 = \frac{4}{3}$); $A'_2 = \{0, 1\}$, $A'_3 = \{0, 1, 2\}$, $L_i = A'_i \times A'_i \times \dots$, $i = 2, 3$.

Розглядається функція f , означена рівностями

$$f\left(x = \Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n}^{A'_3}\right) = \Delta_{\beta_1 \beta_2 \dots \beta_n}^{A'_2}, \quad \text{де} \quad (3.9)$$

$$\beta_1 = \begin{cases} 1 & \text{при } \alpha_1 = 2, \\ 0 & \text{при } \alpha_1 \neq 2, \end{cases} \quad \beta_{n+1} = \begin{cases} \beta_n & \text{при } \alpha_n + \alpha_{n+1} \neq 2, \\ 1 - \beta_n & \text{при } \alpha_n + \alpha_{n+1} = 2, \end{cases} \quad n \in N.$$

Теорема 3.15 ([28]). *Функція f є неперервною ніде не монотонною функцією необмеженої варіації.*

Лема 3.3 ([28]). *Образом A'_3 -циліндра рангу k при відображенні $f \in A'_2$ -циліндр того ж рангу, причому кількість прообразів циліндра $\Delta_{\beta_1 \dots \beta_k}^{A'_2}$ дорівнює*

$$N_k \equiv N \left(\Delta_{\beta_1 \dots \beta_k}^{A'_2} \right) = 2^{k - \beta_1 - \sum_{i=1}^{k-1} |\beta_{i+1} - \beta_i|}.$$

ЛІТЕРАТУРА

- [1] S. Albeverio, M. Pratsiovytyi, G. Torbin. Fractal probability distributions and transformations preserving the hausdorff-besicovitch dimension. *Compositio Math.*, 24:1–16, 2004.
- [2] S. Albeverio, N. Pratsiovytyi, G. Torbin. Singular probability distributions and fractal properties of sets of real numbers defined by the asymptotic frequencies of their s-adic digits. *Ukrainian Mathematical Journal*, 57(9):1163–1170, 2005.
- [3] S. Albeverio, N. Pratsiovytyi, G. Torbin. Topological and fractal properties of real numbers which are not normal. *Bull. Sci. Math.*, 129:615–630, 2005.
- [4] M. Barnsley. Fractal sunctions and interpolation. *Constr. Approx.*, 2(4):303–329, 1986.
- [5] M. Barnsley. Superfractals. *Cambridge University Press 2006*, page 453, 2008.
- [6] A. Besicovith. On fundamental geometric properties of lineary measurable plane sets of points. 1. *Math. Ann*, 98 (4):422–464, 1927.
- [7] S. Dmytrenko, D. Kyurchev, M. Pratsiovytyi. A_2 -continued fraction representation of real numbers and its geometry. *Ukrainian Mathematical Journal*, 4:541–555, 2009. doi:10.1007/s11253-009-0236-7.
- [8] Ya. Goncharenko, M. Pratsiovytyi, G. Torbin. Fractal properties of some bernoulli convolutions. *Theor. Probability and Math Statist.*, 79:39–55, 2009.
- [9] F. Hausdorff. Dimension und äußeres maß. *Math. Ann*, 36 (5):137–264, 1919.
- [10] J. Hutchinson. Fractals and self-similarity. *Indiana Univ. Math. J.*, 30(5):713–747, 1981.
- [11] B. Mandelbrot. Fractals: Form, Chance, and Dimension. *Translated from the French. Revised edition. San Francisco, W.H. Freeman and Co.*, page 365, 1977.
- [12] V. Markitan, M. Pratsiovytyi, I. Savchenko. Superfractality of the set of incomplete sums of one positive series. *Ukr. Mat. Zh.*, 70(10):1403–1416, 2018.
- [13] M. Pratsiovytyi, A. Chuikov. Continuous distributions whose functions preserve tails of an A_2 -continued fraction representation of numbers. *Random Oper. Stochastic Equations*, 27 (3):199–206, 2019.
- [14] M. Pratsiovytyi, Y. Goncharenko, I. Lysenko, S. Ratushnyak. Continued A_2 -fractions and singular functions. *Matematychni Studii*, 58(1):3–12, 2022.
- [15] M. Pratsiovytyi, Ya. Goncharenko, I. Lysenko, S. Ratushnyak. Fractal functions of exponential type that is generated by the Q_2^* -representation of argument. *Matematychni Studii*, 57(2):133–143, 2021.
- [16] M. Pratsiovytyi, D. Kyurchev. Properties of the distribution of the random variable defined by A_2 -continued fraction with independent elements. *Random Oper. Stochastic Equations*, 17 (1):91–101, 2009.

- [17] M. Pratsiovytyi, I. Lysenko, Yu. Maslova. Group of continuous transformations of real interval preserving tails of G_2 -representation of numbers. *Algebra and Discrete Mathematics*, 29(1):99–108, 2020.
- [18] M. Pratsiovytyi, O. Makarchuk, A. Chuikov. Approximation and estimates in the periodic representation of real numbers of the closed interval $[0; 1]$ by A_2 -continued fractions. *Journal of Numerical & Applied Mathematics*, 130 (1):71–83, 2019.
- [19] M. Pratsiovytyi, O. Svynchuk. Spread of values of a cantor-type fractal continuous nonmonotone function. *Journal of Mathematical Sciences*, 240(3):342–357, 2019.
- [20] M. Pratsiovytyi, Y. Vovk, I. Lysenko, S. Ratushnyak. Superpositions of functions with fractal properties. *Journal of Mathematical Sciences (United States)*, 273(2):248–270, 2023.
- [21] О. Барановський, М. Працьовитий, Г. Торбін. Ряди Остроградського-Серпінського-Пірса та їх застосування. Київ: Наукова думка, page 288, 2013.
- [22] Я. Виннишин, В. Маркітан, М. Працьовитий, І. Савченко. Додатні ряди, множини підсум яких є канторвалами. *Proceedings of the International Geometry Center*, 12(2):26–42, 2019.
- [23] Н. В. Працевитый. Случайные величины с независимыми Q_2 -символами. *Асимптотические методы в исследовании стохастических моделей*, pages 92–102, 1987.
- [24] М. Працьовитий. Фрактальний підхід у дослідженнях сингулярних розподілів. Київ: НПУ імені М.П.Драгоманова, page 296, 1998.
- [25] М. Працьовитий. Двосимвольні системи кодування дійсних чисел та їх застосування. Наукова думка, Київ, 2019.
- [26] М. Працьовитий, Д. Кюрчев. Сингулярність розподілу випадкової величини, зображеної ланцюговим A_2 -дробом з незалежними елементами. *Теорія ймовірностей та математична статистика*, 81:139–154, 2009.
- [27] С. Ратушняк. Неперервна ніде не монотонна функція, означена в термінах ланцюгового A_2 -зображення чисел. *Буковинський математичний журнал*, 11(1):126–133, 2023.
- [28] С. Ратушняк. Неперервна ніде не монотонна функція, означена в термінах ланцюгового A -зображення чисел. *Буковинський математичний журнал*, 11(2):236–245, 2023.
- [29] Г. Торбин, Н. Працевитый. Случайные величины с независимыми Q^* -знаками. *Случайные эволюции: теоретические и прикладные задачи*, pages 95–104, 1992.
- [30] А. Турбин, Н. Працевитый. Фрактальные множества, функции, распределения. Киев: Наук.думка, page 208, 1992.

С. П. Ратушняк

ІНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ НАН УКРАЇНИ, м. Київ

Email: ratush404@gmail.com

ORCID: 0009-0005-2849-6233