

Просторові коливання рідини в циліндричному вертикальному контейнері

І. А. Райновський

Abstract. Using the nonlinear Narimanov–Moiseev modal system with linear damping coefficients corresponding to the logarithmic decrement of the sloshing eigenmodes, steady-state damped resonant sloshing in a cylindrical tank has been investigated. The usage of Miles formula to estimate the damping coefficients shows that these effects can be of significant importance in laboratory conditions. Asymptotic steady-state solutions of the modal system have been obtained for a given motion of a cylindrical tank with four degrees of freedom when the forcing frequency approaches the lowest eigenfrequency of the fluid. This solution turns out to be asymptotically equivalent to a horizontal elliptical trajectory of the container. The response curves, which depend on the ratio of the semiaxes of the elliptical orbit and are related to the amplitudes of the two lowest eigenmodes of the sloshing, have been analyzed.

Анотація. За допомогою нелінійної модальної системи Наріманова–Моїсєєва з лінійними коефіцієнтами демпфування, що відповідають за логарифмічний декремент власних мод коливань рідини, досліджено усталені демпфовані резонансні хлюпання рідини у циліндричному резервуарі. Використання формули Майлза для оцінки коефіцієнтів демпфування показує, що ці ефекти можуть мати суттєве значення у лабораторних умовах. Отримано асимптотичні стійкі розв'язки модальної системи для заданого руху циліндричного резервуара з чотирма ступенями вільності, коли частота збурень наближається до найнижчої власної частоти рідини. Цей розв'язок виявляється є асимптотично еквівалентним горизонтальному еліптичному збуренню контейнера. Проаналізовано амплітудно-частотні характеристики, які залежать від співвідношення півосей еліптичної орбіти, і пов'язані з амплітудами двох найнижчих власних форм коливань рідини.

1. ВСТУП

Коливання рідини в резервуарах мають велике значення в багатьох галузях техніки, включаючи суднобудування, хімічну промисловість та

This work was supported by grants from the Simons Foundation (1290607, I.A.R.)

2020 *Mathematics Subject Classification*: 57R30

Ключові слова: коливання рідини, усталені розв'язки

DOI: <https://doi.org/10.3842/trim.v21n1.547>

біотехнології. Особливо важливим є вивчення резонансних станів і демпфування в лабораторних умовах, де геометрія резервуарів і властивості рідин відрізняються від промислових масштабів. Метою цієї статті є аналіз впливу демпфування на усталені резонансні коливання рідини в циліндричних резервуарах з використанням модальних систем типу Наріманова–Моїсєєва.

Резонансні коливання рідини в резервуарах круглої форми, спричинені гармонійними горизонтальними збуреннями з частотою, близькою до найнижчої власної частоти, активно досліджуються з 1960-х років. Огляд сучасних теоретичних і експериментальних досліджень представлено у роботах [7,8,12]. У промислових масштабах в'язке демпфування зазвичай ігнорується через великі геометричні розміри резервуарів, але для лабораторних баків, таких як біореактори, цей фактор набуває значення [5, 6]. Збільшення в'язкості рідини, динамічний контактний кут та поверхневі явища, такі як забруднення та розрив хвиль, суттєво впливають на коливання [4].

У попередніх роботах [1] досліджувались недемпфовані коливання за допомогою нелінійного мультимодального підходу Наріманова–Моїсєєва, який показав високу точність для резервуарів із відношенням глибини до радіуса $h \gtrsim 1.2$. Однак для менших глибин ці рівняння менш точні через явище вторинного резонансу ([2], глави 8-9). Теоретичні передбачення задовільно узгоджуються з експериментами [12], проте недемпфована теорія не враховує зсуву фаз, виміряного експериментально.

В цій роботі показано доповнення рівнянь Наріманова–Моїсєєва, враховуючи демпфування, і представляються асимптотичні періодичні розв'язки для класифікації демпфованих резонансних хвильових режимів. Демпфування розраховується з урахуванням ефектів на змоченій поверхні баку та об'ємної в'язкості, як запропоновано в [3]. Для води це справедливо за умови радіуса резервуара $r_0 \gtrsim 0.05$ м.

Модальні рівняння з'єднують узагальнені координати з різними асимптотичними порядками ($O(\epsilon^{1/3})$, $O(\epsilon^{2/3})$, $O(\epsilon)$), де $O(\epsilon) \ll 1$ відповідає безрозмірній амплітуді збурення. Демпфування враховується для нижчих форм власних коливань, тоді як для вищих мод воно нехтується. Основна увага приділяється стійкості режимів та залежності фазових зсувів ψ , φ від геометричних параметрів.

Ця робота також аналізує вплив демпфування на стійкість стоячих хвиль і спіральних режимів для різних типів збурень: горизонтальних, еліптичних і кругових.

2. МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ

Розглядається нестислива ідеальна рідина, яка частково заповнює вертикальний жорсткий круговий резервуар радіусом r_0 .

Резервуар виконує малі періодичні рухи в просторі, $\eta_1(t)$, $\eta_2(t)$ і $\eta_4(t)$, $\eta_5(t)$ відповідно, як показано на рисунку 2.1. Рух вільної поверхні $\Sigma(t)$, представлений функцією $z = \zeta(r, \theta, t)$, та динаміка коливання рідини досліджуються в безрозмірному формулюванні, яке базується на характерному розмірі баку r_0 та часі $1/\sigma$, де σ — частота коливань баку. Вводиться малий параметр $0 < \epsilon \ll 1$, який пов'язаний із безрозмірною величиною періодичного збурення, тобто $\eta_i(t) = O(\epsilon)$, $i = 1, 2, 4, 5$.

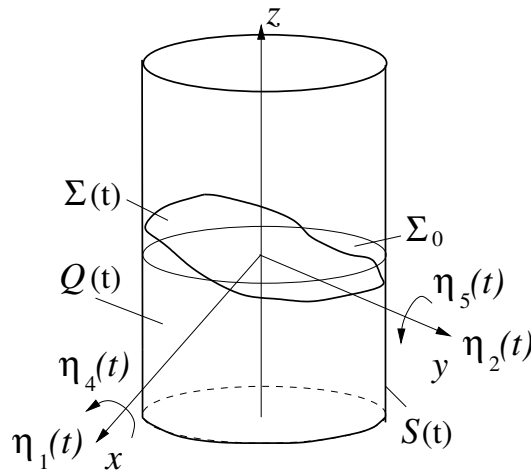


Рис. 2.1. Область рідини $Q(t)$ обмежена вільною поверхнею $\Sigma(t)$ та змоченою поверхнею баку $S(t)$. Коливання рідини розглядаються у системі координат, пов'язаній із самим баком.

На Рис.2.1 зображено область рідини $Q(t)$ з вільною поверхнею $\Sigma(t)$.

Задача базується на мультимодальному методі, суть якого у використанні наближеного розв'язку Фур'є (модального розв'язку) для підйому поверхні $z = \zeta(r, \theta, t)$ та потенціалу швидкості $\Phi(r, \theta, z, t)$ із залежними від часу невідомими коефіцієнтами ζ та Φ , які визначені у фіксованій системі координат $Oxyz$.

$$\zeta(r, \theta, t) = \sum_{M,i} \alpha_{Mi} J_M(k_{Mi}r) \cos(M\theta) p_{Mi}(t) + \sum_{m,i} \alpha_{mi} J_m(k_{mi}r) \sin(m\theta) r_{mi}(t), \quad (2.1)$$

$$\Phi(r, \theta, z, t) = \dot{\eta}_1(t)r \cos \theta + \dot{\eta}_2(t)r \sin \theta + F(r, z)[- \dot{\eta}_4(t) \sin \theta + \dot{\eta}_5(t) \cos \theta]. \quad (2.2)$$

Припустимо, що вторинних резонансів немає, а частота збурення баку є близькою до власної частоти коливання рідини через введення асимптотики Наріманова-Моїсєєва (розділ 8,9 книги [2]).

$$p_{11} \sim r_{11} = O(\epsilon^{1/3}); \quad p_{0j} \sim p_{2j} \sim r_{2j} = O(\epsilon^{2/3}); \quad (2.3)$$

$$r_{1(j+1)} \sim p_{1(j+1)} \sim r_{3j} \sim p_{3j} = O(\epsilon), \quad j \geq 1. \quad (2.4)$$

Через ряд перетворень (нехтуючи величинами порядку $o(\epsilon)$) та додаючи члени лінійної дисипації [9] через формули Хендерсон-Майлза [3] можемо перейти від задачі гідродинаміки до задачі в термінах аналітичних механіки (через узагальнені координати та швидкості). Ми ці формули перевиводимо через наші величини.

Умовою розв'язності отриманих нелінійних модальних рівнянь типу Наріманова-Моїсєєва є наступна секулярна система відносно інтегральних амплітуд (A, B) та зсувів фаз ϕ, ψ .

$$\begin{cases} \boxed{1} : A[\Lambda + m_1 A^2 + (m_3 - \mathcal{F})B^2] = \epsilon_x \cos \psi, & \boxed{3} : A[\mathcal{D}B^2 + \xi] = \epsilon_x \sin \psi, \\ \boxed{2} : B[\Lambda + m_1 B^2 + (m_3 - \mathcal{F})A^2] = \epsilon_y \sin \varphi, & \boxed{4} : B[\mathcal{D}A^2 - \xi] = \epsilon_y \cos \varphi, \end{cases} \quad (2.5a)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{F} &= (m_3 - m_1) \cos^2(\alpha) = (m_3 - m_1)/(1 + C^2), \\ \mathcal{D} &= (m_3 - m_1) \sin(\alpha) \cos(\alpha) = (m_3 - m_1) C/(1 + C^2), \end{aligned} \quad (2.5b)$$

де

$$\Lambda = \bar{\sigma}_{11}^2 - 1, \quad \alpha = \varphi - \psi, \quad C = \tan \alpha, \quad 0 \leq \epsilon_y \leq \epsilon_x \neq 0, \\ (\mathcal{F}(\alpha) \text{ та } \mathcal{D}(\alpha) \text{ є } \pi\text{-періодичними функціями зсувів фаз } \alpha).$$

3. ПОЗДОВЖНІ ПЕРІОДИЧНІ ЗБУРЕННЯ РЕЗЕРВУАРА ВЗДОВЖ ОСІ Ox ($\epsilon_y = 0$)

Стійкі коливання рідини без демпфування ($\xi = 0$) для поздовжніх гармонічних збурень ($\epsilon_y = 0$) досліджені в [1]. Було доведено, що за умов $\epsilon_y = \xi = 0$ існують два фізично різні стійкі розв'язки модальної системи: плоскі стоячі та кругові хвилі.

Для випадку $\xi = 0$, плоскі хвилі мають $A > 0, B = 0, \sin \psi = 0, C = 0$, тоді як кругові визначаються умовами $AB > 0, \sin \psi = \cos \varphi = 0$ ($C = \pm\infty$). Кругові хвилі є двома прогресуючими хвилями з протилежними напрямками.

Для $\xi > 0$ розв'язки залишаються фізично ідентичними, але фазовий зсув ψ більше не є кусково-неперервною функцією:

$$A^2 [(\Lambda + m_1 A^2)^2 + \xi^2] = \epsilon_x^2; \quad 0 < A \leq \frac{\epsilon_x}{\xi}; \quad \psi = \arccos \frac{A(\Lambda + m_1 A^2)}{\epsilon_x}. \quad (3.1)$$

Стійкі кругові хвилі характеризуються $AB > 0$, $C \neq 0$ та описуються рівняннями:

$$\begin{cases} A \left[\Lambda + m_1 A^2 + \frac{m_1 + m_3 C^2}{1 + C^2} B^2 \right] = \epsilon_x \cos \psi; \\ A \left[\frac{(m_3 - m_1)C}{1 + C^2} B^2 + \xi \right] = \epsilon_x \sin \psi; \\ B^2 = -\frac{1}{m_1} \left[\Lambda + \frac{m_1 + m_3 C^2}{1 + C^2} A^2 \right] > 0; \quad A^2 = \frac{\xi(1 + C^2)}{(m_3 - m_1)C} > 0. \end{cases} \quad (3.2)$$

Тут C визначається рівнянням:

$$P_l(C) = q_3 C^3 + q_2 C^2 + q_1 C + q_0 = 0, \quad (3.3)$$

де

$$\begin{aligned} q_3 &= \xi^3 (m_1 + m_3)^2 > 0, \quad q_2 = 2\xi^2 \Lambda (m_3^2 - m_1^2), \\ q_1 &= \xi [4\xi^2 m_1^2 + \Lambda^2 (m_1 - m_3)^2], \quad q_0 = \epsilon_x^2 m_1^2 (m_1 - m_3). \end{aligned}$$

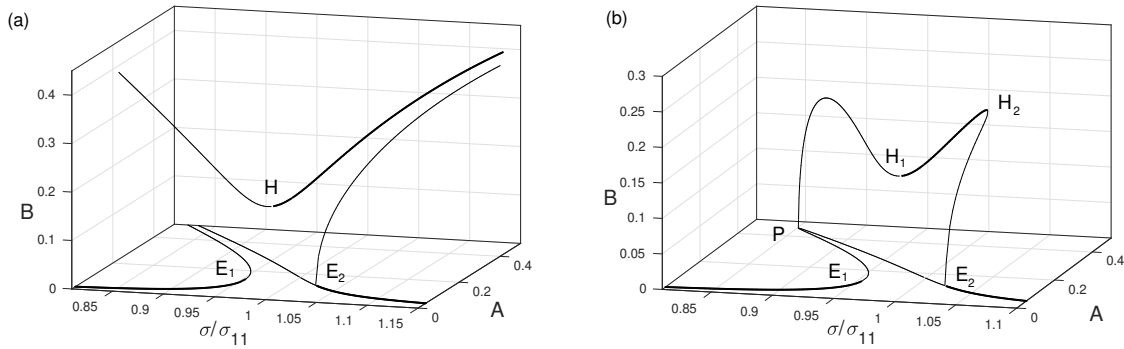


Рис. 3.1. Амплітудно-частотні характеристики у просторі $(\sigma/\sigma_{11}, A, B)$ для поздовжніх горизонтальних збурень у площині Oxz , $h = 1.5$, безрозмірна амплітуда збурень $\eta_{1a} = 0.01$ ($\eta_{2a} = 0$). Гілки для плоских ($B = 0$, (3.1)) та кругових ($B > 0$, (3.2)) хвиль позначені жирними лініями як стійкі розв'язки. (а) - випадок без демпфування ($\xi = 0$), (б) - з демпфуванням $\xi = 0.02$. У діапазоні між точками E_1 (точка перегину) та E_2 (точка біфуркації Пуанкаре) передбачаються хаотичні хвилі.

Експерименти підтвердили, що демпфування суттєво впливає на стійкість хвиль. Для невеликих резервуарів стійкі хвилі існують лише в обмежених діапазонах частот. За межами цих діапазонів спостерігається перехід до хаотичних.

Амплітудно-частотні характеристики для недемпфованого (а) та демпфованого (б) випадку стійких коливань показані на рисунку 3.1. Розрахунки виконані для $h = 1.5$, амплітуди збурення $\eta_{1a} = 0.01$ ($\eta_{2a} = 0$)

і коефіцієнта демпфування $\xi = 0.02$. Це відповідає $0.05 \text{ м} \leq r_0 \leq 0.1 \text{ м}$, що відображає вплив в'язкості та інших дисипативних явищ.

Розгалуження на рисунку 3.1 розраховано за допомогою (3.1) для плоских хвиль ($B = 0$) і (3.2) для кругових ($B > 0$). Стійкі плоскі стоячі хвилі існують ліворуч від точки перегину E_1 і праворуч від точки біфуркації Пуанкаре E_2 . У нестійких зонах біля резонансу $\sigma/\sigma_{11} = 1$ спостерігаються хаотичні або кругові хвилі. Стійке кругове коливання спостерігається праворуч від H_1 , а демпфування обмежує частотний діапазон в точці H_2 .

Амплітудно-частотні характеристики без демпфування обговорено в [1] (рисунок 3.1 (а)). На рисунку 3.1 (b) показано, що ненульове ξ усуває нескінченні точки на розгалуженні, майже не впливаючи на діапазони стійкості. Позиції E_1, E_2 і H_1 (замість H) залишаються майже незмінними, що забезпечує добру узгодженість з експериментами. Нові точки H_2 і P у (b) вказують на виникнення кругових коливань. Стійка підгілка H_1H_2 близька до недемпфованого випадку, що пояснює задовільне передбачення максимальних підйомів [12].

Демпфування суттєво впливає на зсуви фаз. Недемпфовані коливання мають кусково-неперервні значення ψ і φ : $\sin \psi = 0$ (плоскі хвилі) і $\sin \psi = \cos \varphi = 0$ (кругові хвилі). Для $\xi > 0$ фазові зсуви стають неперервними. Плоскі хвилі відповідають ψ з (3.1), а кругові з $C = \tan \alpha \geq 0$, отриманим з (3.2).

4. ЕЛІПТИЧНІ ЗБУРЕННЯ РЕЗЕРВУАРА ($0 < \delta = \epsilon_y/\epsilon_x < 1$)

Рис. 4.1 ілюструє, що введення ненульового додатнього δ призводить до роздвоєння арки $RH_1H_2E_2$ на рисунку 3.1 (b), що відповідає за збурення проти годинникової стрілки вздовж Oy , чії точки відповідають двом ідентичним круговим хвилям (за- і протинаправленої кругових хвиль), на дві окремі гілки. Перша гілка містить точки E_1, H_1H_2, E_2 ; вони знаходяться досить далеко від головної резонансної зони, де співнаправлення із траєкторією збурення кругові хвилі є близькими до стоячої плоскої хвилі. А саме відповідні підгілки по ліву сторону від E_1 та праву від E_2 . Іншою зоною стійкості є частина підгілки з H_1H_2 . Друга петлеподібна гілка з R_1 та R_2 відповідає за кругову хвилю, яка протилежно направлена до напрямку збурення баку. Вона стійка на R_1R_2 . Також є діапазон частоти між E_1 та H_1 , де теорія не передбачає стійкого усталеного коливання рідини та очікуються нерегулярні (хаотичні) хвилі.

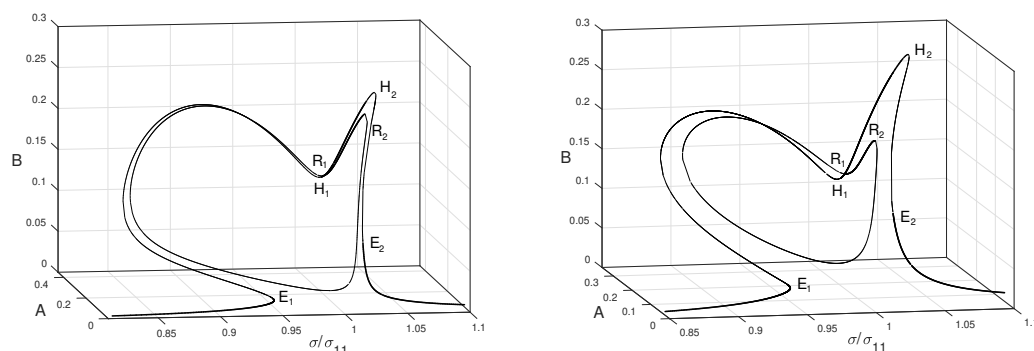


Рис. 4.1. Амплітудно-частотні характеристики для усталеного резонансного коливання через еліптичне проти годинникової стрілки періодичне збурення з $\eta_{1a} = 0.01$, $\eta_{2a} = \delta\eta_{1a}$ і $\delta = 0.05$ зліва та ($\xi = 0.02$) справа. Усі криві відповідають круговим хвилям, але деякі підгілки є досить близькими до площини $(\sigma/\sigma_{11}, A)$, що означає коливання рідини близьке до стоячої плоскої хвилі. Гілка, що містить E_1, H_1, H_2, E_2 відповідає за кругові хвилі, що співнаправлені із еліптичним збуренням баку, але замкнена гілка із R_1 та R_2 відповідає за протилежно направлені кругові хвилі. Товсті лінії відповідають за стійкі розв'язки.

Збільшення співвідношення півосей еліпса δ зменшує колоподібну гілку R , що відповідає за протилежно направлену до збурення баку кругову хвилю. Рис 4.2 ілюструє цей факт для $\delta = 0.3$ та 0.45 . Зменшення гілки R означає, що лінійне демпфування унеможливує існування протилежно направленої кругової хвилі до збурень баку при переході з поздовжніх зовнішніх збурень баку до кругових. Для контрасту, теоретичний аналіз без демпфування у [1] показує, що протилежно направлена кругова хвиля існує завжди та може бути стійкою в частоті для $0 < \delta < 1$.

Ненульове ξ призводить до зникнення гілки R разом із збільшенням δ . При коефіцієнті демпфування $\xi = 0.02$ це відбувається, коли δ є дещо нижчим за 0.5 . Як наслідок, ми не бачимо цієї гілки на рисунку 4.3, де $\delta = 0.5$ та 0.8 .

На рисунках 4.2 та 4.3, ми також бачимо екстра острівці стійких розв'язків H_3H_4 та R_3R_4 . Після зникнення гілки R , острівець із точками H_3H_4 зростає та, врешті рещт, з'єднується з іншими підгілками із стійкими розв'язками (що містять точки E_1 та H_1 відповідно).

Незатухаючі коливання, спричинені еліптичним збуренням, характеризуються $\bar{a} = \bar{b} = 0$ [1], що означає $\sin \psi = \cos \varphi = 0$ і $\cos \alpha = 0$, $\sin \alpha =$

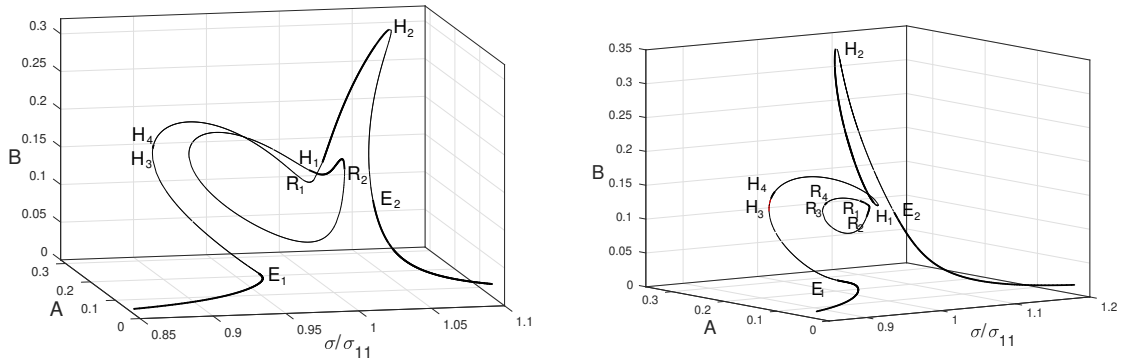


Рис. 4.2. Те саме, що на рисунку 4.1, але для $\delta = \epsilon_y/\epsilon_x = 0.3$ (зліва) та $\delta = 0.45$ (справа). Виявлено додатковий діапазон співнаправлених (до руху баку) кругових хвиль H_3H_4 із збільшенням δ , але стійкі протилежно направлені кругові хвилі (точки R_1R_2, R_3R_4) зникають із збільшенням δ .

± 1 . У цьому випадку вирази для $A = |a|$ і $B = |b|$ визначаються системою рівнянь:

$$A^2[\Lambda + m_1 A^2 + m_3 B^2] = \epsilon_x^2, \quad B^2[\Lambda + m_1 B^2 + m_3 A^2] = \delta^2 \epsilon_x^2. \quad (4.1)$$

Цю систему можна аналітично розв'язати, як описано у [1].

Для затухаючих коливань ($\xi \neq 0$) фазові зсуви φ і ψ стають складними функціями вхідних параметрів. Амплітуди A, B та фазові зсуви φ, ψ визначаються нелінійною системою рівнянь (2.5а).

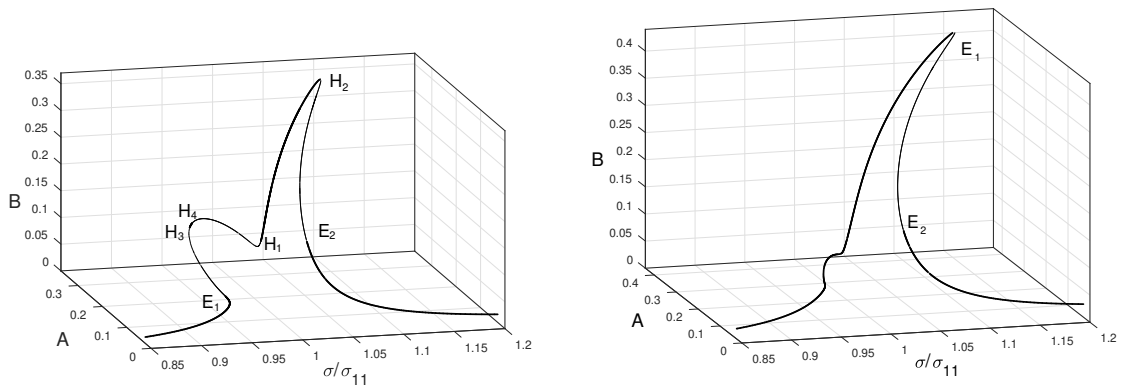


Рис. 4.3. Те саме, що на рисунку 4.1, але для $\delta = \epsilon_y/\epsilon_x = 0.5$ та $\delta = 0.8$ справа та зліва, відповідно. Як можна помітити, кругова хвиля, що протилежно направлена до траєкторії еліптичного збурення баку, взагалі відсутня.

Результати чисельного розрахунку представлені на рисунках 4.1–4.4 для різних значень $0 < \delta < 1$.

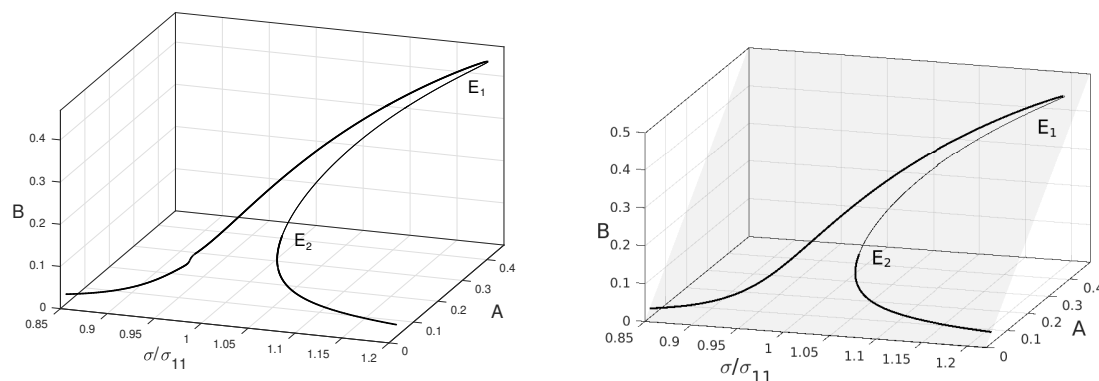


Рис. 4.4. Те саме, що на рисунку 4.3, але для майже кругових $\delta = \epsilon_y/\epsilon_x = 0.95$ (зліва) та кругових збурень баку $\delta = 1.0$ (справа).

На Рис. 4.4 справа проілюстровано амплітудно-частотні характеристики для майже кругових збурень баку $\delta = \epsilon_y/\epsilon_x = 0.95$ та для кругових збурень $\delta = 1.0$.

5. ВИСНОВКИ

Включення демпфування в модальні системи дозволяє точніше моделювати поведінку рідини в резервуарах.

Для лабораторних резервуарів демпфування відіграє критичну роль у формуванні усталених режимів.

Подальші дослідження можуть бути спрямовані на експериментальне підтвердження моделей для інших типів рідин і резервуарів.

Нелінійна мультимодальна теорія [1] модифікована шляхом додавання лінійних демпфуючих членів, які враховують лінійні коефіцієнти затухання (відповідальні за логарифмічні декременти) природних мод коливань. Ці коефіцієнти враховують сукупний ефект різних джерел дисипації, включаючи прикордонний шар на змоченій поверхні резервуара та об'ємну в'язкість. Коефіцієнти затухання можуть суттєво збільшуватися при врахуванні динамічного контакту, забруднення поверхні, руйнування хвиль тощо. Таке збільшення зазвичай спостерігається у лабораторних резервуарах (біореакторах).

Оригінальна мультимодальна теорія нехтує поверхневим натягом (для водопровідної води та радіусом резервуара $r_0 \gtrsim 0.05$ см) і припускає, що контейнер з круглою основою здійснює заданий періодичний рух, частота збурень якого близька до найнижчої власної частоти коливань;

співвідношення середньої глибини рідини до радіуса резервуара $h \gtrsim 1.2$ для уникнення явищ вторинного резонансу.

Асимптотичний стійкий розв'язок модальних рівнянь отримано. Його стійкість проаналізовано за допомогою лінійного методу Ляпунова та техніки аналізу повільного та швидкого часу. Асимптотична процедура вводить дві домінуючі амплітуди хвиль і відповідні фазові зсуви, які керуються чотирма (секулярними) нелінійними алгебраїчними рівняннями. Ці рівняння мають ту саму структуру, як і у випадку еліптичного горизонтального орбітального руху контейнера. Це дозволяє зосередитися на стійких режимах хвиль, які виникають через такі еліптичні збурення з різними співвідношеннями півосей δ . Поздовжні горизонтальні гармонійні збурення резервуара та кругові збурення є двома граничними випадками.

Стійкі коливання рідини, з та без демпфування, через поздовжнє горизонтальне гармонійне збурення призводять до утворення плоских або кругових хвиль. Введення лінійного демпфування призводить до появи додаткових точок біфуркації на кривих амплітудно-частотних характеристик, де кругові хвилі виникають із плоских хвиль. Кожна точка на круговій гілці відповідає двом фізично ідентичним, але протилежно спрямованим прогресивним хвилям. При ненульовому δ відбувається розподілення на дві незв'язані криві: одна з них відповідає співнапрямленим, із рухом баку, круговим хвилям, інша — протилежно напрямленим. Збільшення співвідношення півосей еліпса збурень баку призводить до зменшення другої кривої (протинапрямлених хвиль) аж до її зникнення при певному δ . Це протилежно випадку без демпфування [1], коли протинапрямлені хвилі існували при будь-якому $0 < \delta \leq 1$.

Для еліптичних збурень, із відносно малим співвідношенням півосей еліпса траєкторії руху баку, теорія виявляє частотний діапазон, де не існує стійких усталених розв'язків.

Для кругового орбітального збурення криві амплітудно-частотних характеристик демонструють поведінку жорсткого типу пружини, що якісно узгоджується зі спостереженнями та вимірами із [10] і [11].

ЛІТЕРАТУРА

- [1] O. M. Faltinsen, I. A. Lukovsky, A. N. Timokha. Resonant sloshing in an upright tank. *Journal of Fluid Mechanics*, 804:608–645, 2016.
- [2] O. M. Faltinsen, A. N. Timokha. *Sloshing*. Cambridge University Press, Cambridge, 2009.
- [3] D. M. Heenderson, J. W. Miles. A note on interior vs boundary-layer damping of surface waves in a circular tank. *Journal of Fluid Mechanics*, 364:319–323, 1998.
- [4] D. M. Henderson, J. W. Miles. Surface-wave damping in a circular cylinder with a fixed contact angle. *Journal of Fluid Mechanics*, 275:285–299, 1994.

- [5] T. Ikeda, R. A. Ibrahim, Y. Harata,, T. Kuriyama. Nonlinear liquid sloshing in a square tank subjected to obliquely horizontal excitation. *Journal of Fluid Mechanics*, 700:304–328, 2012.
- [6] H. M. Kim, J. Kizito. Stirring free surface flows due to horizontal circulatory oscillation of a partially filled container. *Chem. Eng. Comm.*, 196:1300–1321, 2009.
- [7] I. A. Lukovsky. *Nonlinear dynamics: mathematical models for rigid bodies with a liquid*. De Gruyter, 2015.
- [8] I. A. Lukovsky, A. N. Timokha. Multimodal method in sloshing. *Journal of Mathematical Sciences*, 220:239–253, 2017.
- [9] I. A. Raynovskyy, A. N. Timokha. *Sloshing in Upright Circular Containers: Theory, Analytical Solutions, and Applications*. CRC Press/Taylor and Francis Group, 2020.
- [10] M. Reclari. *Hydrodynamics of orbital shaken bioreactors*. PhD thesis, Ecole Polytechnique Federale de Lausanne, 2013.
- [11] M. Reclari, M. Dreyer, S. Tissot, D. Obreschkow, F.M. Wurm,, M. Farhat. Surface wave dynamics in orbital shaken cylindrical containers. *Physics of Fluids*, 26:052104–1–11, 2014.
- [12] A. Royon-Lebeaud, E. Hopfinger,, A. Cartellier. Liquid sloshing and wave breaking in circular and square-base cylindrical containers. *Journal of Fluid Mechanics*, 577:467–494, 2007.

І. А. Райновський

ІНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ НАН УКРАЇНИ, М. КИЇВ

Email: ihor.raynovskyy@gmail.com

ORCID: 0000-0003-0767-3227