

Оцінки характеристик нелінійної апроксимації класів періодичних функцій

К. В. Пожарська

Abstract. In the paper we make an overview of results concerning order estimates of the best m -term (sparse) trigonometric approximation and the best orthogonal trigonometric approximation of the Stepanets classes of multi- and univariate functions with bounded generalized derivatives in the Lebesgue space. In addition, we formulate exact-order estimates for these approximation characteristics for the isotropic Nikol'skii-Besov classes with bounded differences in a certain Lebesgue subspace. In particular, the case of small smoothness is considered of functions from the respective classes.

Анотація. У роботі зроблено огляд результатів щодо порядкових оцінок величин найкращого m -членного (розрідженого) тригонометричного наближення і найкращого ортогонального тригонометричного наближення класів Степанця функцій однієї і багатьох змінних з обмеженими узагальненими похідними у метриці просторів Лебега. Крім цього, наведено точні за порядком оцінки зазначених апроксимативних характеристик для ізотропних класів Нікольського-Бесова з обмеженими різницями у метриці деякого підпростору Лебега. Розглянуто, зокрема, випадок малої гладкості функцій з відповідних класів.

1. ВСТУП

У роботі зроблено огляд наших результатів щодо порядкових оцінок деяких величин нелінійної апроксимації. А саме, у розділі 4.2 наведено і прокоментовано оцінки найкращого m -членного тригонометричного наближення та найкращого ортогонального тригонометричного наближення класів функцій з обмеженими узагальненими похідними, які в частковому випадку збігаються з класами Соболева (Вейля-Надя), у метриці просторів Лебега. Ці результати встановлено для багатовимірного випадку, але у низці ситуацій вони є новими і для функцій однієї змінної. Далі, у розділі 4.3 наведено оцінки зазначених апроксимативних характеристик для ізотропних класів Нікольського-Бесова функцій

2020 Mathematics Subject Classification: 42A10, 41A46, 41A63

Ключові слова: найкраще m -членне тригонометричне наближення, найкраще ортогональне тригонометричне наближення, нелінійна апроксимація, узагальнена похідна

DOI: <https://doi.org/10.3842/trim.v21n1.545>

з обмеженими різницями у метриці деякого важливого підпростору Лебега.

Зауважимо, що апроксимативні характеристики, пов'язані з нелінійною апроксимацією, активно досліджуються вже понад пів століття. Невичерпний інтерес до таких наближень викликаний насамперед тим, що в багатьох ситуаціях виявлено переваги нелінійних методів наближення порівняно з лінійними.

При розгляді задач на класах періодичних функцій багатьох змінних $f := f(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$, $d \geq 1$, все більшого розповсюдження набуває метод m -членного (розрідженого) тригонометричного наближення, тобто наближення f поліномами вигляду

$$P(\Theta_m, \mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{k} \in \Theta_m} c_{\mathbf{k}} e^{i(\mathbf{k}, \mathbf{x})}, \quad c_{\mathbf{k}} \in \mathbb{C}, \quad (1.1)$$

де Θ_m — набір m довільних векторів $\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^d$, $(\mathbf{k}, \mathbf{x}) = k_1 x_1 + \dots + k_d x_d$.

Відповідна апроксимативна характеристика у більш загальній ситуації була введена в 1955 році С. Б. Стечкіним [1] при формулюванні критерію абсолютної збіжності ортогональних рядів у просторі L_2 . У роботі Р. С. Ісмагілова [2], при дослідженні поперечників класів Соболева, було отримано першу нетривіальну оцінку величини найкращого m -членного тригонометричного наближення для індивідуальної функції. Результат [2, Наслідок до Теорема 6] показав, що зазначена величина нелінійного наближення для функції $|x|$ спадає до нуля швидше у степеневій шкалі, ніж величина відповідного найкращого наближення лінійними методами. Згодом дослідження найкращих m -членних тригонометричних наближень індивідуальних функцій і, в більшій мірі, функціональних класів проводились у роботах Г. А. Акішева, Д. Б. Базарханова, Е. С. Белінського, Р. А. ДеВора, Д. Зунга, Р. С. Ісмагілова, Б. С. Кашина, В. Є. Майорова, К. І. Осколкова, А. С. Романюка, В. С. Романюка, А. С. Сердюка, В. Сіккеля, С. А. Стасюка, О. І. Степанця, Т. А. Степанюк, В. М. Темлякова, Т. Урліха, Г. Хансена, С. О. Чайченка, А. Л. Шидліча, С. Я. Янченка та інших. Одержані у цьому напрямі результати, з одного боку, мають самостійний інтерес, а з іншого — вони знаходять практичні застосування, зокрема, у питаннях кодування, передачі і відтворення зображень.

Відмітимо, що в літературі розглядають різні узагальнення величини найкращого тригонометричного наближення, де оптимізація проводиться відносно m -вимірних підпросторів, породжених елементами деякої визначеної ортонормованої системи функцій (так званого “словника”).

Було показано, що на класах Соболева і Нікольського-Бесова періодичних функцій багатьох змінних у багатьох випадках саме тригонометрична система є оптимальним словником у сенсі відповідних порядкових оцінок у метриці просторів Лебега. У ряді ситуацій, проте, величина найкращого m -членного наближення за іншими системами, зокрема системою вейвлетів, швидше спадає до нуля при $m \rightarrow \infty$. На даний час низка питань щодо точних порядків величини найкращого m -членного наближення на зазначених класах для граничних значень параметрів класу і метрики залишаються відкритими [18, Розділи 7.5, 7.7]. У даній роботі мова буде йти саме про оцінки найкращих m -членних тригонометричних наближень.

Оскільки при встановленні оцінок найкращих m -членних тригонометричних наближень тих або інших класів функцій не завжди вдається явно пред'явити поліном $P^*(\Theta_m, \mathbf{x})$, який реалізує відповідний порядок наближення, розглядають також близьку апроксимативну характеристику – найкраще ортогональне тригонометричне наближення. Особливістю найкращих ортогональних тригонометричних наближень порівняно з найкращими m -членними тригонометричними наближеннями є те, що коефіцієнти c_k у поліномах $P(\Theta_m, \mathbf{x})$ (1.1) є відповідними коефіцієнтами Фур'є $\hat{f}(\mathbf{k})$ функцій f . Дослідження цієї апроксимативної характеристики на класах функцій однієї і багатьох змінних отримали розвиток у роботах Е. С. Белінського, А. С. Романюка, В. С. Романюка, О. І. Степанця, Д. Б. Базарханова, С. А. Стасюка, А. С. Сердюка, Т. А. Степанюк, А. Л. Шидліча, С. Я. Янченка та інших.

Детальний огляд відомих оцінок величин найкращого m -членного тригонометричного і найкращого ортогонального тригонометричного наближень у метриці простору Лебега та відповідна бібліографія міститься у монографіях [11, 18, 31]. Безпосередньо пов'язані з нашими дослідженнями результати прокоментовано після відповідних тверджень у розділі 4.

Зазначимо, що згадані вище апроксимативні характеристики на теперішній час добре вивчені стосовно класів періодичних функцій багатьох змінних Соболева $\mathbf{W}_{\beta,p}^r$, Нікольського $\mathbf{H}_p^r$ і Бесова $\mathbf{B}_{p,\theta}^r$ у метриці простору Лебега L_q . У той же час, досі залишається низка відкритих питань щодо точних порядків досліджуваних характеристик. Так, при дослідженні питання про оцінки найкращих тригонометричних наближень відповідних класів суттєву роль відіграють особливості розташування параметрів p та q на області їхніх допустимих значень. Особливої уваги заслуговують випадки, коли принаймні один з параметрів $p, q \in \{1, \infty\}$, які є найбільш складними з точки зору методів отримання оцінок відповідних величин.

Саме для граничних випадків залишається низка відкритих питань щодо точних за порядком оцінок апроксимативних характеристик різних функціональних класів. Зокрема, для класів $\mathbf{W}_{\beta,p}^r$ багатьох змінних досі залишаються нерозв'язаними у загальному випадку задачі про порядкові оцінки величин найкращого m -членного тригонометричного наближення $e_m(\mathbf{W}_{\beta,1}^r)_1$ та $e_m(\mathbf{W}_{\beta,\infty}^r)_\infty$ (див. означення (2.1)).

Це викликало значний інтерес до дослідження відповідних характеристик у метриці підпросторів Лебега $B_{q,1}$, $1 \leq q \leq \infty$, де вдалося отримати точні за порядком оцінки, зокрема, для тих співвідношень між параметрами, де вони не були відомі для відповідних просторів L_q .

Постановка задачі щодо встановлення оцінок найкращих m -членних і ортогональних тригонометричних наближень класів функцій саме у метриці просторів $B_{q,1}$ (див. розділ 4.3) не є випадковою. Похибки різних методів апроксимації, зокрема, і у метриці цих так званих “нульових” просторів Бесова неодноразово досліджувалися у літературі. Так, у роботі [17] було показано, що оцінки апроксимаційних чисел періодичних функцій як ізотропної, так і домінуючої мішаної гладкості, з гільбертових класів Соболева у метриках просторів L_∞ та $B_{\infty,1}$ однакові за порядком. Оцінки ентропійних чисел на класах Трібеля-Лізоркіна, зокрема, у нормі нульових просторів Бесова були встановлені у [32]. Щодо оцінок величин найкращого наближення, наближення сумами Фур'є, лінійних, тригонометричних, колмогоровських поперечників, ентропійних чисел класів Соболева і Нікольського-Бесова у метриці простору $B_{\infty,1}$, тут варто виділити роботи [24, 25, 27].

Однією з важливих і складних задач є розгляд випадку так званої “малої гладкості” досліджуваних з точки зору апроксимації функцій. Цей термін бере початок з роботи Б. С. Кашина 1981 року, де, досліджуючи колмогоровські поперечники класів $\mathbf{W}_{\beta,1}^r$ періодичних функцій однієї змінної у просторі L_q , він виявив, що при $2 < q < \infty$ поведінка цих поперечників для $1 - 1/q < r < 1$ суттєво відрізняється від випадку $r > 1$. Згодом подібна особливість була виявлена у низки апроксимативних характеристик різних класів функцій. При дослідженні найкращих m -членних тригонометричних наближень, нами було розглянуто (теореми 4.7, 4.11) випадок малої гладкості функцій з відповідних класів та виявлено відмінності у порядках спадання до нуля цих величин.

Крім цього, нами було встановлено порядкові оцінки вище зазначених характеристик нелінійної апроксимації на класах типу Соболева, а саме, на класах $\mathbf{L}_{\beta,p}^\psi$, які в одновимірному випадку були введені у 1983 році О. І. Степанцем, і які є узагальненням за гладкісним параметром класів $\mathbf{W}_{\beta,p}^r$. Зауважимо, що ці класи є досі значно менш дослідженими і в той же час актуальними з точки зору сучасної теорії апроксимації.

Одержані результати будемо формулювати у термінах порядкових співвідношень. Для двох невід'ємних послідовностей $\{a(n)\}$ і $\{b(n)\}$ порядкова нерівність $a(n) \ll b(n)$ означає, що існує $C_1 > 0$, таке що $a(n) \leq C_1 b(n)$. Порядкова рівність $a(n) \asymp b(n)$ рівносильна тому, що $a(n) \ll b(n)$ і $b(n) \ll a(n)$. Зазначимо, що C_i у порядкових співвідношеннях, можуть залежати від деяких (окрім n) параметрів.

2. ОЗНАЧЕННЯ АПРОКСИМАТИВНИХ ХАРАКТЕРИСТИК

Нехай $\mathbb{R}^d$, $d \geq 1$, – евклідов простір із елементами $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_d)$. Через $L_q := L_q(\mathbb{T}^d)$, $1 \leq q \leq \infty$, $\mathbb{T}^d = [0, 2\pi)^d$, позначимо простір функцій f , які є 2π -періодичними за кожною змінною і такі, що

$$\|f\|_q := \|f\|_{L_q} = \left((2\pi)^{-d} \int_{\mathbb{T}^d} |f(\mathbf{x})|^q d\mathbf{x} \right)^{1/q} < \infty, \quad 1 \leq q < \infty,$$

$$\|f\|_\infty := \|f\|_{L_\infty} = \text{ess sup}_{\mathbf{x} \in \mathbb{T}^d} |f(\mathbf{x})| < \infty, \quad q = \infty.$$

Далі, нехай X – нормований d -вимірний простір із нормою $\|\cdot\|_X$. Для функції $f \in X$ розглянемо величину її *найкращого m -членного тригонометричного наближення*

$$e_m(f)_X := \inf_{c_{\mathbf{k}}} \inf_{\Theta_m} \left\| f - \sum_{\mathbf{k} \in \Theta_m} c_{\mathbf{k}} e^{i(\mathbf{k}, \mathbf{x})} \right\|_X = \inf_{c_{\mathbf{k}}} \inf_{\Theta_m} \|f - P(\Theta_m)\|_X, \quad (2.1)$$

тобто наближення поліномами (1.1) із гармоніками з множини Θ_m потужності не більше m .

У тому випадку, коли в означенні (2.1) довільні коефіцієнти $c_{\mathbf{k}}$ замінити на коефіцієнти Фур'є $\hat{f}(\mathbf{k})$ функції $f \in L_1$, тобто покласти

$$c_{\mathbf{k}} = \hat{f}(\mathbf{k}) = (2\pi)^{-d} \int_{\mathbb{T}^d} f(\mathbf{t}) e^{-i(\mathbf{k}, \mathbf{t})} d\mathbf{t}, \quad \mathbf{k} \in \Theta_m,$$

отримаємо величину

$$e_M^\perp(f)_X := \inf_{\Theta_m} \left\| f - \sum_{\mathbf{k} \in \Theta_m} \hat{f}(\mathbf{k}) e^{i(\mathbf{k}, \mathbf{x})} \right\|_X, \quad (2.2)$$

яку називають *найкращим ортогональним тригонометричним наближенням* функції f .

Якщо $F \subset X$ – деякий клас функцій, то покладемо, відповідно,

$$e_m(F)_X := \sup_{f \in F} e_m(f)_X, \quad e_m^\perp(F)_X := \sup_{f \in F} e_m^\perp(f)_X.$$

Величини $e_m(F)_X$ і $e_m^\perp(F)_X$ називають *найкращим m -членним тригонометричним і найкращим ортогональним тригонометричним наближеннями* класу F у просторі X . Одразу з означень бачимо, що

$$e_m(F)_X \leq e_m^\perp(F)_X.$$

Нами було встановлено порядкові оцінки величин (2.1) і (2.2) у випадках, коли похибка наближення вимірюється у метриці простору Лебега L_q , а також у метриці підпростору $B_{q,1}$, $1 \leq q \leq \infty$.

Означимо норму $\|\cdot\|_{B_{q,1}}$ у підпросторах функцій $f \in L_q$. Така норма схожа на декомпозиційну норму функцій із просторів Бесова (див. розділ 3).

Отже, нехай $V_l(\mathbf{x})$ – багатовимірне ядро Валле-Пуссена вигляду

$$V_l(\mathbf{x}) := \prod_{j=1}^d V_l(x_j), \quad l \in \mathbb{N}, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d,$$

де для $t \in \mathbb{R}$ покладемо $V_l(t) := l^{-1} \sum_{k=l}^{2l-1} D_k(t)$, а $D_k(t) := \sum_{m=-k}^k e^{imt}$ – ядро Діріхле. Розглянемо згортку функції $f \in L_1$ з ядром $V_l(\mathbf{x})$, тобто $V_l(f, \mathbf{x}) := (f * V_l)(\mathbf{x})$, та введемо такі позначення:

$$\sigma_0(f) := \sigma_0(f, \mathbf{x}) = V_1(f, \mathbf{x}),$$

$$\sigma_s(f) := \sigma_s(f, \mathbf{x}) = V_{2^s}(f, \mathbf{x}) - V_{2^{s-1}}(f, \mathbf{x}), \quad s \in \mathbb{N}.$$

Для поліномів t за кратною тригонометричною системою $\{e^{i(\mathbf{k}, \mathbf{x})}\}_{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^d}$ норму $\|t\|_{B_{q,1}}$, $1 \leq q \leq \infty$, задано згідно з формулою

$$\|t\|_{B_{q,1}} := \sum_{s \in \mathbb{Z}_+} \|\sigma_s(t)\|_q,$$

де $\mathbb{Z}_+ = \mathbb{N} \cup \{0\}$. Аналогічно означено норму $\|f\|_{B_{q,1}}$ і для будь-якої функції $f \in L_q$ такої, що ряд $\sum_{s \in \mathbb{Z}_+} \|\sigma_s(f)\|_q$ збігається. Зазначимо, що для $f \in B_{q,1}$, $1 \leq q \leq \infty$, виконуються співвідношення:

$$\|f\|_q \ll \|f\|_{B_{q,1}}; \quad \|f\|_{B_{1,1}} \ll \|f\|_{B_{q,1}} \ll \|f\|_{B_{\infty,1}}.$$

3. Класи функцій

У цій частині означимо простори 2π -періодичних функцій багатьох змінних мішаної гладкості: Соболева (Вейля–Надя) $W_{p,\alpha}^r$ і Степанця $L_{\beta,p}^\psi$, а також ізотропної гладкості Нікольського–Бесова $B_{p,\theta}^r$.

Під класами функцій будемо розуміти одиничні кулі відповідних просторів. Задля спрощення викладу, будемо використовувати для них спільне позначення.

Іноді для зручності ми будемо розглядати лише ті функції $f \in L_1$, для яких виконана умова

$$\int_0^{2\pi} f(\mathbf{x}) dx_j = 0 \quad \text{майже скрізь, } j = 1, \dots, d.$$

Множину таких функцій позначимо L_p^0 .

Ця умова не зменшує загальності постановки задачі завдяки еквівалентності відповідних класів функцій (див. [18, Зауваження 3.2.4]). Зауважимо проте, що такі відмінності в означенні класів суттєво впливатимуть на преасимптотичні оцінки апроксимативних характеристик, де важливою є залежність сталих у порядкових співвідношеннях від розмірності d (ця тема не розглядається у даній статті).

3.1. Простори Соболева (Вейля–Надя) функцій з обмеженою похідною. Наведемо означення класів функцій з обмеженою мішаною похідною через інтегральне представлення цих функцій у термінах згортки із ядром Бернуллі. Такий підхід дозволяє природнім чином поширити класи Вейля–Надя функцій з обмеженими дробовими похідними на багатовимірний випадок.

Нехай $F_{\alpha}^r(\mathbf{x})$, де $\mathbf{r}, \alpha \in \mathbb{R}^d$, $r_j > 0$, $j = 1, \dots, d$, – багатовимірні аналоги ядер Бернуллі, тобто

$$F_{\alpha}^r(\mathbf{x}) := 2^d \sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{N}^d} \prod_{j=1}^d k_j^{-r_j} \cos\left(k_j x_j - \frac{\alpha_j \pi}{2}\right).$$

Через $W_{p,\alpha}^r$ позначимо клас функцій $f \in L_p^0$ вигляду

$$f(\mathbf{x}) = \varphi(\mathbf{x}) * F_{\alpha}^r(\mathbf{x}) = (2\pi)^{-d} \int_{\mathbb{T}^d} \varphi(\mathbf{y}) F_{\alpha}^r(\mathbf{x} - \mathbf{y}) d\mathbf{y},$$

де $\varphi \in L_p^0$, $\|\varphi\|_p \leq 1$, а $*$ – операція згортки, з нормою $\|f\|_{W_{p,\alpha}^r} := \|\varphi\|_p$.

При $1 < \alpha_j < \infty$, $j = 1, \dots, d$, відповідні класи функцій є еквівалентними між собою. Будемо вважати, що координати вектора $\mathbf{r} \in \mathbb{R}^d$ впорядковані у порядку зростання.

Застосовуючи теорему Літтлвуда–Пелі, при $1 < p < \infty$ можна записати еквівалентні представлення норми просторів $W_{p,\alpha}^r$ у термінах двійкових блоків ряду Фур'є відповідних функцій. Такі еквівалентні представлення є зручними, зокрема, при аналізі величин наближення функцій поліномами з гармоніками, що належать так званим східчато-гіперболічним хрестам, які, як було показано у 60-х роках минулого століття, у багатьох ситуаціях реалізують точні порядки колмогоровських поперечників класів функцій з домінуючою мішаною гладкістю. Детальнішу інформацію можна знайти у [18, Розділ 3.1].

3.2. Простори Степанця функцій з обмеженою узагальненою похідною. Означимо класи функцій з обмеженою узагальненою (ψ, β) -похідною. В одновимірному випадку, вони були введені у 1983 році О. І. Степанцем (див. [10]) та згодом були поширені на випадок функцій багатьох змінних А. С. Романюком.

Отже, для $f \in L_1^0$ розглянемо її ряд Фур'є $\sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^d} \hat{f}(\mathbf{k}) e^{i(\mathbf{k}, \mathbf{x})}$, де $\hat{f}(\mathbf{k})$ – коефіцієнти Фур'є функції f .

Нехай $\psi := (\psi_1, \dots, \psi_d)$, де $\psi_j \neq 0$, $j = 1, \dots, d$, – деякі довільні послідовності, $\beta \in \mathbb{R}^d$, $\mathbb{Z}^d = (\mathbb{Z} \setminus \{0\})^d$. Припустимо, що ряд

$$\sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^d} \prod_{j=1}^d \frac{e^{i \frac{\pi \beta_j}{2} \operatorname{sgn} k_j}}{\psi_j(|k_j|)} \hat{f}(\mathbf{k}) e^{i(\mathbf{k}, \mathbf{x})}$$

є рядом Фур'є деякої сумовної функції. Цю функцію називають (ψ, β) -похідною функції f і позначають f_β^ψ .

Через $L_{\beta, p}^\psi$, $1 \leq p \leq \infty$, позначимо клас функцій f , для яких існують (ψ, β) -похідні і виконується умова $\|f_\beta^\psi\|_p \leq 1$.

Окрім класів, нами було досліджено також функції D_β^ψ , ряди Фур'є яких мають вигляд

$$\sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^d} \prod_{j=1}^d \psi_j(|k_j|) e^{i \frac{\pi \beta_j}{2} \operatorname{sgn} k_j} e^{i(\mathbf{k}, \mathbf{x})}.$$

З одного боку, функції D_β^ψ є цікавими з точки зору їх апроксимаційних властивостей, а з іншого – вони відіграють важливу роль при дослідженні апроксимативних характеристик класів $L_{\beta, p}^\psi$, зокрема, для граничного випадку $p = 1$. Так, кожену функцію f з класу $L_{\beta, p}^\psi$ можна зобразити у вигляді згортки

$$f(\mathbf{x}) = \varphi(\mathbf{x}) * D_\beta^\psi(\mathbf{x}) = (2\pi)^{-d} \int_{\mathbb{T}^d} \varphi(\mathbf{y}) D_\beta^\psi(\mathbf{x} - \mathbf{y}) d\mathbf{y},$$

де $\|\varphi\|_p \leq 1$ і функція φ майже скрізь співпадає з f_β^ψ .

При $\psi_j(|\tau|) = |\tau|^{-r_j}$, $\tau \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, $r_j > 0$, $\beta_j \in \mathbb{R}$, $j = 1, \dots, d$, відповідні класи $L_{\beta, p}^\psi$ є класами Соболева (Вейля–Надя) $W_{\beta, p}^r$, а функції D_β^ψ є ядрами Бернуллі, див. розділ 3.1

На послідовності ψ_j , $j = 1, \dots, d$, які визначають класи $L_{\beta, p}^\psi$ та функції D_β^ψ , будемо накладати деякі додаткові умови.

Означення 3.1. *Послідовність ϕ належить до множини D , якщо*

- ϕ – додатня та незростаюча;
- $\exists M > 0$ таке, що $\forall l \in \mathbb{N}$ виконується умова $\frac{\phi(l)}{\phi(2l)} \leq M$.

Елементами множини D є, зокрема, послідовності $\phi(|\tau|) = |\tau|^{-r}$, $r > 0$, $\tau \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$; $\phi(|\tau|) = \ln^\alpha(|\tau|+1)$, $\tau \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, $\alpha < 0$; $\phi(|\tau|) = |\tau|^{-r} \ln^\alpha(|\tau|+1)$, $r > 0$, $\tau \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

Результати будемо формулювати у термінах деяких функцій натурального аргументу $\Phi(n)$ та $\Psi(n)$ спеціального вигляду.

Означення 3.2. Для ψ_j , $j = 1, \dots, d$, $\mathbf{s}, \mathbf{1} \in \mathbb{N}^d$ і $n \in \mathbb{N}$ покладемо

$$\Phi(n) := \min_{(\mathbf{s}, \mathbf{1})=n} \prod_{j=1}^d \psi_j(2^{s_j}), \quad \Psi(n) := \max_{(\mathbf{s}, \mathbf{1})=n} \prod_{j=1}^d \psi_j(2^{s_j}).$$

Величини $\Phi(n)$ та $\Psi(n)$, залежно від вигляду відповідних послідовностей, можуть бути однакові чи різні за порядком. Так, наприклад, якщо покласти $\psi_j(|\tau|) = |\tau|^{-r}$, $\tau \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, $j = 1, \dots, d$, $r > 0$, то отримаємо

$$\Phi(n) = \Psi(n) = 2^{-nr}.$$

Якщо ж (для $d = 2$) $\psi_j(|\tau|) = |\tau|^{-r} \ln(|\tau|)$, $\tau \in \mathbb{Z} \setminus \{0, \pm 1\}$, $j = 1, 2$, $r > 0$, то

$$\Psi(n) = 2^{-nr-2}n^2, \quad \Phi(n) = 2^{-nr}(n-1),$$

а у випадку $\psi_j(|\tau|) = |\tau|^{-r}(\ln(|\tau|))^{-1}$, $\tau \in \mathbb{Z} \setminus \{0, \pm 1\}$, $j = 1, 2$, $r > 0$,

$$\Psi(n) = 2^{-nr}(n-1)^{-1}, \quad \Phi(n) = 4 \cdot 2^{-nr}n^{-2}.$$

Крім цього слід зазначити, що при $d = 1$ функції $\Phi(n)$ і $\Psi(n)$ збігаються і набувають вигляду $\psi_1(2^n)$.

3.3. Ізотропні простори Нікольського-Бєсова функцій з обмеженими різницями. Означимо простори функцій Нікольського-Бєсова через їхні модулі гладкості.

Нехай $\mathbf{h} \in \mathbb{R}^d$. Для $f \in L_p$ позначимо $\Delta_{\mathbf{h}}f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x} + \mathbf{h}) - f(\mathbf{x})$ та означимо різниці порядку $k \in \mathbb{Z}_+$ з кроком $\mathbf{h}$ таким чином:

$$\Delta_{\mathbf{h}}^0 f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}), \quad \Delta_{\mathbf{h}}^k f(\mathbf{x}) = \Delta_{\mathbf{h}} \Delta_{\mathbf{h}}^{k-1} f(\mathbf{x}), \quad k \in \mathbb{N}.$$

Модуль гладкості порядку k функції $f \in L_p$ задається згідно з формулою $w_k(f, t)_p := \sup_{|\mathbf{h}| \leq t} \|\Delta_{\mathbf{h}}^k f\|_p$, де $|\mathbf{h}| = \sqrt{h_1^2 + \dots + h_d^2}$, $t \in \mathbb{R}$, $t > 0$.

Будемо говорити, що функція $f \in L_p$ належить класу $\mathbf{B}_{p, \theta}^r$, $1 \leq p$, $\theta \leq \infty$, $r > 0$, якщо відповідна норма

$$\|f\|_{\mathbf{B}_{p, \theta}^r} := \|f\|_p + \left(\int_0^\infty (t^{-r} w_k(f, t)_p)^\theta \frac{dt}{t} \right)^{1/\theta} \leq 1, \quad 1 \leq \theta < \infty,$$

$$\|f\|_{\mathbf{B}_{p, \infty}^r} \equiv \|f\|_{H_p^r} := \|f\|_p + \sup_{t>0} t^{-r} w_k(f, t)_p \leq 1, \quad \theta = \infty,$$

для деякого $k > r$.

Простори $\mathbf{H}_p^r \equiv \mathbf{B}_{p,\infty}^r$ та $\mathbf{B}_{p,\theta}^r$, $1 \leq \theta < \infty$, були введені С. М. Нікольським та О. В. Бесовим, відповідно. Для них справедливі такі вкладення:

$$\mathbf{B}_{p,1}^r \subset \mathbf{B}_{p,\theta_1}^r \subset \mathbf{B}_{p,\theta_2}^r \subset \mathbf{B}_{p,\infty}^r \equiv \mathbf{H}_p^r, \quad 1 \leq \theta_1 \leq \theta_2 \leq \infty.$$

При встановленні порядкових оцінок апроксимативних характеристик класів Нікольського-Бесова, нами було використано еквівалентні представлення норми функцій f з просторів $\mathbf{B}_{p,\theta}^r$ у термінах величин $\sigma_s(f)$, $s \in \mathbb{Z}_+$, побудованих на основі ядер Валле-Пуссена. Ці блоки були означені раніше у розділі 2.

Отже, для $f \in \mathbf{B}_{p,\theta}^r$, $1 \leq p, \theta \leq \infty$, $r > 0$, виконується порядкові рівності [20]

$$\|f\|_{\mathbf{B}_{p,\theta}^r} \asymp \left(\sum_{s \in \mathbb{Z}_+} 2^{sr\theta} \|\sigma_s(f)\|_p^\theta \right)^{1/\theta}, \quad 1 \leq \theta < \infty,$$

$$\|f\|_{\mathbf{B}_{p,\infty}^r} \asymp \sup_{s \in \mathbb{Z}_+} 2^{sr} \|\sigma_s(f)\|_p, \quad \theta = \infty.$$

Зауважимо, що у випадку $1 < p < \infty$ можна записати аналогічні еквівалентні представлення норми у термінах блоків ряду Фур'є, але, на відміну від просторів функцій із домінуючою мішаною гладкістю, для ізотропного випадку відповідні гармоніки належатимуть так званім “двійковим коридорам”, а не східчасто-гіперболічним хрестам.

4. НАЙКРАЩІ ОРТОГОНАЛЬНІ ТА m -ЧЛЕННІ ТРИГОНОМЕТРИЧНІ НАБЛИЖЕННЯ

4.1. Оцінки величин апроксимації індивідуальних функцій у метриці простору Лебега. Спершу наведемо результати щодо порядкових оцінок найкращих ортогональних тригонометричних наближень та найкращих m -членних тригонометричних наближень аналогів ядер Бернуллі D_β^ψ у просторі L_q , $1 < q < \infty$.

Всі оцінки у цій частині роботи будемо формулювати у термінах означень 3.1, 3.2.

Теорема 4.1 ([14]). *Нехай $1 < q < \infty$, $\psi_j \in D$, $\beta_j \in \mathbb{R}$, $j = 1, \dots, d$, і, крім того, існує $\varepsilon > 0$ таке, що послідовності $\psi_j(|\tau|)|\tau|^{1-1/q+\varepsilon}$, $j = 1, \dots, d$, не зростають. Тоді для будь-яких натуральних m і n , що задовольняють умову $m = m(n) \asymp 2^n n^{d-1}$, мають місце співвідношення*

$$\Phi(n) m^{1-\frac{1}{q}} (\log m)^{2(d-1)(\frac{1}{q}-\frac{1}{2})} \ll e_m^\perp(D_\beta^\psi)_q \ll \Psi(n) m^{1-\frac{1}{q}} (\log m)^{2(d-1)(\frac{1}{q}-\frac{1}{2})}.$$

Зауваження 4.1. У випадку $d = 1$ з теореми 4.1 випливає точна за порядком оцінка

$$e_m^\perp(D_\beta^{\psi_1})_q \asymp \psi_1(m)m^{1-\frac{1}{q}},$$

яка при додаткових умовах на послідовність ψ_1 встановлена В. В. Шаполю [12].

Зауваження 4.2. При $\psi_j(|\tau|) = |\tau|^{-r_j}$, $\tau \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, $r_j > 1 - 1/q$, $\beta_j \in \mathbb{R}$, $j = 1, \dots, d$, для функцій $D_\beta^\psi \equiv F_\beta^r$ точні за порядком оцінки величини $e_M^\perp(F_\beta^r)_q$, $1 < q < \infty$, знайдено А. С. Романюком:

$$e_m^\perp(F_\beta^r)_q \asymp m^{-(r_1-1+\frac{1}{q})}(\log m)^{(d-1)(r_1-1+\frac{2}{q})}.$$

У випадку, коли $r = (r_1, \dots, r_1) \in \mathbb{R}^d$, $r_1 > 1 - 1/q$, $\beta \in \mathbb{R}^d$, цю оцінку можна отримати із результату теореми 4.1.

На відміну від найкращих ортогональних тригонометричних наближень, при дослідженні найкращих m -членних тригонометричних наближень функцій D_β^ψ у просторі L_q , $1 < q < \infty$, виникла необхідність окремо розглянути два суттєво різні випадки $1 < q \leq 2$ та $2 < q < \infty$.

Теорема 4.2 ([28]). *Нехай $1 < q \leq 2$, $\psi_j \in D$, $\beta_j \in \mathbb{R}$, $j = 1, \dots, d$, і, крім того, існує $\varepsilon > 0$ таке, що послідовності $\psi_j(|\tau|)|\tau|^{1-1/q+\varepsilon}$, $j = 1, \dots, d$, не зростають. Тоді для будь-яких натуральних m і n , що задовольняють умову $m = m(n) \asymp 2^n n^{d-1}$, мають місце співвідношення*

$$\Phi(n)m^{1-\frac{1}{q}}(\log m)^{2(d-1)(\frac{1}{q}-\frac{1}{2})} \ll e_m(D_\beta^\psi)_q \ll \Psi(n)m^{1-\frac{1}{q}}(\log m)^{2(d-1)(\frac{1}{q}-\frac{1}{2})}.$$

Теорема 4.3 ([29]). *Нехай $2 < q < \infty$, $\psi_j \in D$, $\beta_j \in \mathbb{R}$, $j = 1, \dots, d$, і, крім того, існує $\varepsilon > 0$ таке, що послідовності $\psi_j(|\tau|)|\tau|^{1+\varepsilon}$, $j = 1, \dots, d$, не зростають. Тоді для будь-яких натуральних m і n , що задовольняють умову $m = m(n) \asymp 2^n n^{d-1}$, справедливі співвідношення*

$$\Phi(n)m^{\frac{1}{2}} \ll e_m(D_\beta^\psi)_q \ll \Psi(n)m^{\frac{1}{2}}.$$

Результати теорем 4.2, 4.3 є новими і в одновимірному випадку. Сформулюємо відповідні твердження.

Наслідок 4.1 ([28]). *Нехай $d = 1$, $1 < q \leq 2$, $\psi_1 \in D$, $\beta \in \mathbb{R}$, і, крім того, існує $\varepsilon > 0$ таке, що послідовність $\psi_1(|\tau|)|\tau|^{1-1/q+\varepsilon}$ не зростає. Тоді справедлива оцінка*

$$e_m(D_\beta^{\psi_1})_q \asymp \psi_1(m)m^{1-\frac{1}{q}}.$$

Наслідок 4.2 ([29]). Нехай $d = 1$, $2 < q < \infty$, $\psi_1 \in D$, $\beta \in \mathbb{R}$, і, крім того, існує $\varepsilon > 0$ таке, що послідовність $\psi_1(|\tau|)|\tau|^{1+\varepsilon}$ не зростає. Тоді справедлива оцінка

$$e_m(D_{\beta}^{\psi_1})_q \asymp \psi_1(m)m^{\frac{1}{2}}.$$

Зауваження 4.3. Що стосується оцінки величини $e_m(F_{\beta}^r)_q$, то:

- при $1 < q \leq 2$, $r_j > 1 - 1/q$, $\beta_j \in \mathbb{R}$, $j = 1, \dots, d$, її порядок

$$e_m(F_{\beta}^r)_q \asymp m^{-r_1+1-\frac{1}{q}}(\log m)^{(d-1)(r_1-1+\frac{2}{q})}$$

було встановлено Е. С. Белінським [3];

- при $2 < q < \infty$, $r_j > 1$, $\beta_j \in \mathbb{R}$, $j = 1, \dots, d$, оцінка

$$e_m(F_{\beta}^r)_q \asymp m^{-r_1+\frac{1}{2}}(\log m)^{r_1(d-1)}$$

була анонсована Е. С. Белінським [4].

У випадку $r = (r_1, \dots, r_1) \in \mathbb{R}^d$, $\beta \in \mathbb{R}^d$ і відповідних обмеженнях на параметр r_1 ці оцінки випливають із результатів теорем 4.2, 4.3.

Зауваження 4.4. Порівнявши результати для найкращих ортогональних тригонометричних наближень, отримані у теоремі 4.1, з результатами для найкращих m -членних тригонометричних наближень, отриманих у теоремах 4.2, 4.3, бачимо, що при $1 < q \leq 2$ оцінки зверху величин $e_m(D_{\beta}^{\psi})_q$ та $e_m^{\perp}(D_{\beta}^{\psi})_q$ однакові за порядком. У випадку $2 < q < \infty$ оцінки відповідних апроксимативних характеристик відрізняються.

4.2. Оцінки величин апроксимації класів (ψ, β) -диференційовних функцій у метриці простору Лебега. Наведені у розділі 4.1 результати дали змогу одержати порядкові оцінки найкращих ортогональних та m -членних тригонометричних наближень класів (ψ, β) -диференційовних функцій у граничному випадку, коли параметр $p = 1$, тобто класів $L_{\beta,1}^{\psi}$ у просторі L_q , $1 < q < \infty$.

Теорема 4.4 ([14]). Нехай $1 < q < \infty$, $\psi_j \in D$, $\beta_j \in \mathbb{R}$, $j = 1, \dots, d$, і, крім того, існує $\varepsilon > 0$ таке, що послідовності $\psi_j(|\tau|)|\tau|^{1-1/q+\varepsilon}$, $j = 1, \dots, d$, не зростають. Тоді для будь-яких натуральних m і n , що задовольняють умову $m = m(n) \asymp 2^n n^{d-1}$, мають місце співвідношення

$$\Phi(n)m^{1-\frac{1}{q}}(\log m)^{2(d-1)(\frac{1}{q}-\frac{1}{2})} \ll e_m^{\perp}(L_{\beta,1}^{\psi})_q \ll \Psi(n)m^{1-\frac{1}{q}}(\log m)^{2(d-1)(\frac{1}{q}-\frac{1}{2})}.$$

Зауваження 4.5. В одновимірному випадку з теореми 4.4 випливає точна за порядком оцінка

$$e_m^{\perp}(L_{\beta,1}^{\psi_1})_q \asymp \psi_1(m)m^{1-\frac{1}{q}},$$

яка при додаткових умовах на послідовність ψ_1 була встановлена В. В. Шкапою [12].

Зауваження 4.6. У випадку $\psi_j(|\tau|) = |\tau|^{-r_j}$, $\tau \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, $r_j > 1 - 1/q$, $\beta_j \in \mathbb{R}$, $j = 1, \dots, d$, для класів $L_{\beta,1}^\psi \equiv W_{\beta,1}^r$ порядок величини $e_m^\perp(W_{\beta,1}^r)_q$, $1 < q < \infty$, отримано А. С. Романюком:

$$e_m^\perp(W_{\beta,1}^r)_q \asymp m^{-(r_1-1+\frac{1}{q})}(\log m)^{(d-1)(r_1-1+\frac{2}{q})}.$$

Для $\mathbf{r} = (r_1, \dots, r_1) \in \mathbb{R}^d$, $r_1 > 1 - 1/q$, $\beta \in \mathbb{R}^d$, цю оцінку можна отримати із результату теореми 4.4.

Зауваження 4.7. Відмітимо, що порядки найкращих m -членних ортогональних тригонометричних наближень у теоремі 4.4 реалізовані наближенням функцій $f \in L_{\beta,1}^\psi$ їхніми східчасто-гіперболічними сумами Фур'є $S_{Q_n}(f)$ (при $m = |Q_n| \asymp 2^n n^{d-1}$) вигляду

$$S_{Q_n}(f) := S_{Q_n}(f, \mathbf{x}) = \sum_{(\mathbf{s}, \mathbf{1}) < n} \sum_{\mathbf{k} \in \rho(\mathbf{s})} \hat{f}(\mathbf{k}) e^{i(\mathbf{k}, \mathbf{x})},$$

де $Q_n = \cup_{(\mathbf{s}, \mathbf{1}) < n} \rho(\mathbf{s})$ – східчасто-гіперболічний хрест,

$$\rho(\mathbf{s}) := \left\{ \mathbf{k} \in \mathbb{Z}^d : 2^{s_j-1} \leq |k_j| < 2^{s_j}, j = 1, \dots, d \right\}.$$

Теорема 4.5 ([28]). Нехай $1 < q \leq 2$, $\psi_j \in D$, $\beta_j \in \mathbb{R}$, $j = 1, \dots, d$, i , крім того, існує $\varepsilon > 0$ таке, що послідовності $\psi_j(|\tau|)|\tau|^{1-1/q+\varepsilon}$, $j = 1, \dots, d$, не зростають. Тоді для будь-яких натуральних m і n , що задовольняють умову $m = m(n) \asymp 2^n n^{d-1}$, мають місце співвідношення $\Phi(n)m^{1-\frac{1}{q}}(\log m)^{2(d-1)(\frac{1}{q}-\frac{1}{2})} \ll e_m(L_{\beta,1}^\psi)_q \ll \Psi(n)m^{1-\frac{1}{q}}(\log m)^{2(d-1)(\frac{1}{q}-\frac{1}{2})}$.

Теорема 4.6 ([29]). Нехай $2 < q < \infty$, $\psi_j \in D$, $\beta_j \in \mathbb{R}$, $j = 1, \dots, d$, i , крім того, існує $\varepsilon > 0$ таке, що послідовності $\psi_j(|\tau|)|\tau|^{1+\varepsilon}$, $j = 1, \dots, d$, не зростають. Тоді для будь-яких натуральних m і n , що задовольняють умову $m = m(n) \asymp 2^n n^{d-1}$, справедливі співвідношення

$$\Phi(n)m^{\frac{1}{2}} \ll e_m(L_{\beta,1}^\psi)_q \ll \Psi(n)m^{\frac{1}{2}}.$$

Оцінки теореми 4.5 є новими і в одновимірному випадку.

Наслідок 4.3 ([28]). Нехай $d = 1$, $1 < q \leq 2$, $\psi_1 \in D$, $\beta \in \mathbb{R}$, i , крім того, існує $\varepsilon > 0$ таке, що послідовність $\psi_1(|\tau|)|\tau|^{1-1/q+\varepsilon}$ не зростає. Тоді справедливе співвідношення

$$e_m(L_{\beta,1}^{\psi_1})_q \asymp \psi_1(m)m^{1-\frac{1}{q}}.$$

Оцінки теореми 4.6 у випадку $d = 1$ при деяких додаткових умовах на послідовність ψ_1 встановлено В. В. Шкапою [13]. А саме, справедливе наступне твердження.

Наслідок 4.4 ([29]). *Нехай $d = 1$, $2 < q < \infty$, $\psi_1 \in D$, $\beta \in \mathbb{R}$, і, крім того, існує $\varepsilon > 0$ таке, що послідовність $\psi_1(|\tau|)|\tau|^{1+\varepsilon}$ не зростає. Тоді має місце співвідношення*

$$e_m(L_{\beta,1}^{\psi_1})_q \asymp \psi_1(m)m^{\frac{1}{2}}.$$

Зауваження 4.8. Що стосується оцінки величини $e_m(W_{\beta,1}^{\mathbf{r}})_q$, то:

- при $1 < q \leq 2$, $r_j > 1 - 1/q$, $\beta_j \in \mathbb{R}$, $j = 1, \dots, d$, її порядок

$$e_m(W_{\beta,1}^{\mathbf{r}})_q \asymp m^{-r_1+1-\frac{1}{q}}(\log m)^{(d-1)(r_1-1+\frac{2}{q})}$$

було встановлено А. С. Романюком [6];

- при $2 < q < \infty$, $r_j > 1$, $\beta_j \in \mathbb{R}$, $j = 1, \dots, d$, оцінка

$$e_m(W_{\beta,1}^{\mathbf{r}})_q \asymp m^{-r_1+\frac{1}{2}}(\log^{d-1} m)^{r_1}$$

була анонсована Е. С. Белінським [4].

У випадку $\mathbf{r} = (r_1, \dots, r_1) \in \mathbb{R}^d$, $\beta \in \mathbb{R}^d$ і відповідних обмеженнях на параметр r_1 ці оцінки випливають із результатів теорем 4.5, 4.6.

Зауваження 4.9. Порівнявши результати теорем 4.4, 4.5 та 4.6 бачимо, що при $2 < q < \infty$ оцінки зверху величин $e_m(L_{\beta,1}^{\psi})_q$ та $e_m^{\perp}(L_{\beta,1}^{\psi})_q$ відрізняється за порядком.

Крім цього, нами було розглянуто випадок так званої “малої гладкості”, де вдалося знайти порядкові оцінки найкращих m -членних тригонометричних наближень класів $L_{\beta,p}^{\psi}$ періодичних функцій багатьох змінних у просторі L_q , $1 < p \leq 2 < q < \infty$.

Теорема 4.7 ([15]). *Нехай $1 < p \leq 2 < q < \infty$, $\psi_j \in D$, $\beta_j \in \mathbb{R}$, $j = 1, \dots, d$, і, крім того, існує $\varepsilon > 0$ таке, що послідовності $\psi_j(|\tau|)|\tau|^{1/p-\varepsilon}$, $j = 1, \dots, d$, не спадають, а $\psi_j(|\tau|)|\tau|^{q'(1/p-1/q)}$, $j = 1, \dots, d$, $1/q + 1/q' = 1$, не зростають. Тоді для будь-яких натуральних m і n , що задовольняють умову $m = m(n) \asymp 2^n n^{d-1}$, та числа $n_1 = qn/2 - (q/2 - 1)(d - 1) \log n$, справедливі оцінки*

$$\begin{aligned} \Phi([n_1])m^{\frac{q}{2}(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})}(\log m)^{(d-1)(1-\frac{q}{p})} &\ll e_m(L_{\beta,p}^{\psi})_q \ll \\ &\ll \Psi([n_1])m^{\frac{q}{2}(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})}(\log m)^{(d-1)(1-\frac{q}{p})}, \end{aligned}$$

де $[a]$ — ціла частина числа a .

Зауваження 4.10. В одновимірному випадку точні за порядком оцінки, які відповідають одержаним у теоремі 4.7 результатам, встановлені А. С. Федоренком [8].

Зауваження 4.11. Порядок величини $e_m(W_{\beta,p}^r)_q$, $1 < p \leq 2 < q < \infty$, $q'(1/p - 1/q) < r_j < 1/p$, $\beta_j \in \mathbb{R}$, $j = 1, \dots, d$, встановлено Е. С. Белінським [5]:

$$e_m(W_{\beta,p}^r)_q \asymp m^{-\frac{q}{2}(r_1 - \frac{1}{p} + \frac{1}{q})} (\log m)^{(d-1)(q-1)(r_1 - q'(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}))}.$$

У випадку $\mathbf{r} = (r_1, \dots, r_1) \in \mathbb{R}^d$, цю оцінку можна отримати із результату теореми 4.7.

Зауваження 4.12. Порівнюючи результат теореми 4.7 з оцінками найкращих ортогональних тригонометричних наближень $e_m^\perp(L_{\beta,p}^\psi)_q$, $1 < p \leq 2 < q < \infty$, $\beta \in \mathbb{R}^d$ [9], бачимо, що при відповідних умовах на послідовності ψ_j , $j = 1, \dots, d$, ці величини при $m \rightarrow \infty$ ведуть себе по різному.

Зауваження 4.13. За інших умов на послідовності ψ_j , $j = 1, \dots, d$ (велика гладкість) оцінки величини $e_m(L_{\beta,p}^\psi)_q$, $1 < p \leq 2 < q < \infty$, $\beta \in \mathbb{R}^d$, встановлено Н. М. Консевич [7].

4.3. Оцінки величин апроксимації класів функцій у метриці підпростору Лебега. Перейдемо до результатів, що стосуються оцінок найкращих ортогональних тригонометричних наближень та найкращих m -членних тригонометричних наближень у метриці підпросторів Лебега.

У низці робіт вивчалися питання наближення класів типу Нікольського-Бесова і Соболева періодичних функцій багатьох змінних з мішаною гладкістю у метриці просторів $B_{q,1}$. При цьому було виявлено, що в багатьох ситуаціях оцінки розглянутих там апроксимаційних характеристик відрізняються за порядком від оцінок відповідних характеристик у просторах L_q . Слід зазначити, що оптимальними (з точки зору порядкових значень) апаратами наближення згаданих класів функцій у просторах $B_{q,1}$, як і у просторах L_q , виявилися тригонометричні поліноми з “номерами” гармонік із східчастих гіперболічних хрестів.

Принципово інша ситуація спостерігається при дослідженні апроксимаційних характеристик ізотропних класів. Усі відомі оцінки характеристик як лінійної так і нелінійної апроксимації ізотропних класів Нікольського-Бесова $\mathbf{B}_{p,\theta}^r$ у метриках просторів $B_{q,1}$, співпадають за порядком з відповідними оцінками у просторах L_q . Крім цього, відповідні

оцінки реалізуються за допомогою наближення функцій з класів $\mathbf{B}_{p,\theta}^r$ тригонометричними поліномами зі спектром у кубічних областях.

Сформулюємо відповідні твердження. При цьому відмітимо, що, як і у розглянутих у розділах 4.1, 4.2 випадках, порядки найкращих ортогональних тригонометричних наближень є однаковими для всіх розглянутих співвідношень між параметрами досліджуваного класу і метрики, в якій вимірюється відповідне наближення. Щодо оцінок величини найкращого m -членного тригонометричного наближення, то тут виникає необхідність виділити низку різних випадків.

Теорема 4.8 ([26]). *Нехай $1 \leq p, q, \theta \leq \infty$, $(p, q) \notin \{(1, 1), (\infty, \infty)\}$. Тоді для $r > d(1/p - 1/q)_+$ справедлива оцінка*

$$e_m^\perp(\mathbf{B}_{p,\theta}^r)_{B_{q,1}} \asymp m^{-\frac{r}{d} + (\frac{1}{p} - \frac{1}{q})_+},$$

де $a_+ = \max\{a; 0\}$.

Зауваження 4.14. При $d = 1$ оцінку теореми 4.8 було одержано раніше у роботах [25] і [27] при $1 < p < \infty$ і $p = 1$ відповідно.

Зауваження 4.15. Порівнюючи результат теореми 4.8 з відповідною оцінкою у метриці простору L_q [23], бачимо, що для $1 \leq p, q, \theta \leq \infty$, $(p, q) \notin \{(1, 1), (\infty, \infty)\}$, $r > d(1/p - 1/q)_+$ виконується співвідношення

$$e_m^\perp(\mathbf{B}_{p,\theta}^r)_{B_{q,1}} \asymp e_m^\perp(\mathbf{B}_{p,\theta}^r)_q.$$

Зауваження 4.16. Порядки найкращих ортогональних тригонометричних наближень у теоремі 4.8 реалізовані наближенням функцій $f \in \mathbf{B}_{p,\theta}^r$ їхніми кубічними сумами Фур'є $S_n(f)$ вигляду

$$S_n(f) := S_n(f, \mathbf{x}) = f(0) + \sum_{s=1}^{n-1} \sum_{\mathbf{k} \in \mu(s)} \hat{f}(\mathbf{k}) e^{i(\mathbf{k}, \mathbf{x})},$$

де $\mu(s) := \{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^d: 2^{s-1} \leq \max_{j=1,\dots,d} |k_j| < 2^s\}$, за умови $m \asymp 2^{dn}$.

Нагадаємо, що для розглянутих у розділі 4.2 класів функцій узагальненої мішаної гладкості, порядкові оцінки відповідних найкращих ортогональних тригонометричних наближень у метриці простору Лебега були реалізовані наближенням функцій $f \in L_{\beta,1}^\psi$ їхніми східчато-гіперболічними сумами Фур'є $S_{Q_n}(f)$ при $m = |Q_n| \asymp 2^n n^{d-1}$ (див. зауваження 4.7).

Такі відмінності викликані особливостями класів функцій ізотропної та мішаної гладкості.

Перейдемо до оцінок найкращих m -членних тригонометричних наближень. Як уже було зазначено, порядки відповідної величини наближення класів $\mathbf{B}_{p,\theta}^r$ у метриці простору $B_{q,1}$ відрізняються залежно від розташування параметрів p і q на області їхнього визначення.

Теорема 4.9 ([26]). *Нехай $d \geq 1$ і $1 \leq p \leq q \leq 2$ або $1 \leq q \leq p \leq \infty$. Тоді для $r > d(1/p - 1/q)_+$, $1 \leq \theta \leq \infty$ справедлива оцінка*

$$e_m(\mathbf{B}_{p,\theta}^r)_{B_{q,1}} \asymp m^{-\frac{r}{d} + (\frac{1}{p} - \frac{1}{q})_+}.$$

Теорема 4.10 ([21]). *Нехай $d \geq 1$, $2 < p < q < \infty$. Тоді для $r > d/2$, $1 \leq \theta \leq \infty$, справедлива оцінка*

$$e_m(\mathbf{B}_{p,\theta}^r)_{B_{q,1}} \asymp m^{-\frac{r}{d}}.$$

Теорема 4.11 ([21]). *Нехай $d \geq 1$, $1 < p \leq 2 < q < \infty$, $1 \leq \theta \leq \infty$. Тоді справедливі співвідношення*

$$e_m(\mathbf{B}_{p,\theta}^r)_{B_{q,1}} \asymp \begin{cases} m^{-\frac{q}{2}(\frac{r}{d} - \frac{1}{p} + \frac{1}{q})}, & d(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}) < r < \frac{d}{p}, \\ m^{-\frac{r}{d} + \frac{1}{p} - \frac{1}{2}}, & r > \frac{d}{p}. \end{cases}$$

Зауваження 4.17. У теоремі 4.11 виникає ефект “малої гладкості”: при переході гладкішим параметром r граничного значення $r = d/p$ спостерігається “стрибок” у оцінці величини $e_m(\mathbf{B}_{p,\theta}^r)_{B_{q,1}}$. Іншими словами, показано, що для $1 < p \leq 2 < q < \infty$, у випадках $d(1/p - 1/q) < r < d/p$ та $r > d/p$ величини $e_m(\mathbf{B}_{p,\theta}^r)_{B_{q,1}}$ мають різні порядки.

Зауваження 4.18. Зауважимо, що у випадку $1 < p \leq 2 < q < p/(p-1)$, $r > d$, точний порядок величини $e_m(\mathbf{B}_{p,\theta}^r)_{B_{q,1}}$ було отримано у [26].

Зауваження 4.19. Порівнюючи результати теорем 4.10 і 4.11 із оцінкою теореми 4.8 для відповідних значень параметрів r, p, q бачимо, що порядки величин $e_m(\mathbf{B}_{p,\theta}^r)_{B_{q,1}}$ і $e_m^\perp(\mathbf{B}_{p,\theta}^r)_{B_{q,1}}$ різні.

Щодо випадків $1 \leq p \leq q \leq 2$ і $1 \leq q \leq p \leq \infty$, $(p, q) \notin \{(1, 1), (\infty, \infty)\}$, які були розглянуті у теоремі 4.9, виконується порядкова рівність

$$e_m^\perp(\mathbf{B}_{p,\theta}^r)_{B_{q,1}} \asymp e_m(\mathbf{B}_{p,\theta}^r)_{B_{q,1}}.$$

Зауваження 4.20. Питання порядків величини $e_m^\perp(\mathbf{B}_{p,\theta}^r)_{B_{q,1}}$ у випадку критичного значення $r = d/p$ параметра гладкості, який не був розглянутий у теоремі 4.11, залишається відкритим.

Зауваження 4.21. Оцінки найкращих m -членних тригонометричних наближень ізотропних класів Нікольського-Бесова у метриці простору L_q встановлено у роботах [16, 19, 30].

У одновимірному випадку нам вдалося встановити також точні за порядком оцінки величин $e_m(\mathbf{B}_{p,\theta}^r)_{B_{\infty,1}}$.

Теорема 4.12 ([21]). *Нехай $d = 1$, $1 \leq p, \theta \leq \infty$. Тоді для $r > \max\{1/p, 1/2\}$ справедливі співвідношення*

$$e_m(\mathbf{B}_{p,\theta}^r)_{B_{\infty,1}} \asymp m^{-r+(\frac{1}{p}-\frac{1}{2})_+}.$$

Зауваження 4.22. Порівнюючи результат теореми 4.12 з оцінкою відповідного найкращого m -членного наближення класу $\mathbf{B}_{p,\theta}^r$, у метриці простору L_{∞} [22], отримуємо, що

$$e_m(\mathbf{B}_{p,\theta}^r)_{B_{\infty,1}} \asymp e_m(\mathbf{B}_{p,\theta}^r)_{\infty} \asymp m^{-r+(\frac{1}{p}-\frac{1}{2})_+}.$$

З іншого боку, оцінки величини $e_m(\mathbf{B}_{p,\theta}^r)_{B_{\infty,1}}$, знайдені у теоремі 4.12, і величини $e_m^{\perp}(\mathbf{B}_{p,\theta}^r)_{B_{\infty,1}}$ (випадок $d = 1$ теореми 4.8) відрізняються за порядком.

Подяки. Автор висловлює щирі подяку доктору фіз.-мат. наук, професору Романуку Анатолію Сергійовичу за підтримку та цінні зауваження і поради. Роботу виконано за фінансування фонду Гумбольдта (Philipp Schwartz Fellowship of the Alexander von Humboldt Foundation).

ЛІТЕРАТУРА

- [1] С. Б. Стечкин. Об абсолютной сходимости ортогональных рядов. *Докл. АН СССР*, 102(1):37–40, 1955.
- [2] Р. С. Исагиллов. Поперечники множеств в линейных нормированных пространствах и приближение функций тригонометрическими многочленами. *Успехи мат. наук.*, 29(3):161–178, 1974.
- [3] Э. С. Белинский. Приближение периодических функций “плавающей” системой экспонент и тригонометрические поперечники. *Исследование по теории функций многих вещественных переменных*. — Ярославль: Яросл. ун-т., pages 10–24, 1984.
- [4] Э. С. Белинский. Приближение периодических функций многих переменных “плавающей” системой экспонент и тригонометрические поперечники. *Докл. АН СССР*, 284:1294–1297, 1985.
- [5] Э. С. Белинский. Приближение “плавающей” системой экспонент на классах периодических функций с ограниченной смешанной производной. *Исследование по теории функций многих вещественных переменных*. — Ярославль: Яросл. ун-т., pages 16–33, 1988.
- [6] А. С. Романюк. О наилучшей тригонометрической и билинейной аппроксимации классов Бесова функций многих переменных. *Укр. мат. журн.*, 47(8):1097–1111, 1995.
- [7] Н. М. Консевич. Найкращі m -членні тригонометричні наближення класів $L_{\beta,p}^{\psi}$ у просторі L_q . *Крайові задачі для диференціальних рівнянь: Зб. праць Ін-ту математики НАН України*, 3:204–219, 1998.

- [8] А. С. Федоренко. Наилучшие m -членные тригонометрические приближения классов (ψ, β) -дифференцируемых функций одной переменной. *Укр. мат. журн.*, 52(6):850–856, 2000.
- [9] Н. М. Консевич. Найкращі ортогональні тригонометричні наближення класів функцій багатьох змінних $L_{\beta,p}^{\psi}$. *Укр. мат. журн.*, 53(1):23–29, 2001.
- [10] А. И. Степанец. *Методы теории приближений*. Праці Ін-ту математики НАН України. 2012.
- [11] А. С. Романюк. *Аппроксимативные характеристики классов периодических функций многих переменных*. Праці Ін-ту математики НАН України. 2012.
- [12] В. В. Шкапа. Найкращі ортогональні тригонометричні наближення функцій із класів $L_{\beta,1}^{\psi}$. *Теорія наближення функцій та суміжні питання: Зб. праць Ін-ту математики НАН України*, 11(3):315–329, 2014.
- [13] В. В. Шкапа. Апроксимативні характеристики класів $L_{\beta,p}^{\psi}$ періодичних функцій у просторі L_q . *Укр. мат. журн.*, 67(8):1139–1150, 2015.
- [14] К. В. Швай. Оцінки найкращих ортогональних тригонометричних наближень узагальнених багатовимірних аналогів ядер Бернуллі та класів $L_{\beta,1}^{\psi}$ у просторі L_q . *Диференціальні рівняння і суміжні питання аналізу: Зб. праць Ін-ту математики НАН України*, 13(1):300–320, 2016.
- [15] К. В. Пожарська. Оцінки найкращих m -членних тригонометричних наближень класів $L_{\beta,p}^{\psi}$ періодичних функцій багатьох змінних малої гладкості у просторі L_q . *Диференціальні рівняння і суміжні питання аналізу: Зб. праць Ін-ту математики НАН України*, 14(3):293–318, 2017.
- [16] E. S. Belinsky. Approximation by a “floating” system of exponentials on classes of smooth periodic functions. *Math. Sb.*, 60:19–27, 1988.
- [17] F. Cobos, T. Kühn, W. Sickel. On optimal approximation in periodic Besov spaces. *J. Math. Anal. Appl.*, 474(2):1441–1462, 2019.
- [18] D. Dũng, V. Temlyakov, T. Ullrich. *Hyperbolic cross approximation*. Adv. Courses Math. Birkhäuser, CRM Barselona. 2018.
- [19] R. A. DeVore, V. N. Temlyakov. Nonlinear approximation by trigonometric sums. *J. Fourier Anal. Appl.*, 2(1):29–48, 1995.
- [20] P. I. Lizorkin. Generalized Holder spaces $B_{p,\theta}^{(r)}$ and their correlations with the Sobolev spaces $L_p^{(r)}$. *Sibirsk. Math. Zh.*, 9(5):1127–1152, 1968.
- [21] K. V. Pozharska, A. S. Romanyuk. The best m -term trigonometric approximations of the classes of periodic functions of one and many variables in the space $B_{q,1}$. *Res. Math.*, 32(2), 2024.
- [22] A. S. Romanyuk. Best trigonometric approximations for some classes of periodic functions of several variables in the uniform metric. *Math. Notes*, 82(2):216–228, 2007.
- [23] A. S. Romanyuk. Approximative characteristics of the isotropic classes of periodic functions of many variables. *Ukr. Math. J.*, 61:613–626, 2009.
- [24] A. S. Romanyuk, V. S. Romanyuk. Approximating characteristics of the classes of periodic multivariate functions in the space $B_{\infty,1}$. *Ukr. Math. J.*, 71(2):308–321, 2019.
- [25] A. S. Romanyuk, V. S. Romanyuk. Estimation of some approximating characteristics of the classes of periodic functions of one and many variables. *Ukr. Math. J.*, 71(8):1257–1272, 2020.

- [26] A. S. Romanyuk, V. S. Romanyuk, K. V. Pozharska, S. B. Hembars'ka. Characteristics of linear and nonlinear approximation of isotropic classes of periodic multivariate functions. *Carpathian Math. Publ.*, 15(1):78–94, 2023.
- [27] A. S. Romanyuk, S. Ya. Yanchenko. Approximation of the classes of periodic functions of one and many variables from the Nikol'skii-Besov and Sobolev spaces. *Ukr. Math. J.*, 74(6):967–980, 2022.
- [28] K. V. Shvai. The best m -term trigonometric approximations of classes of (ψ, β) -differentiable periodic multivariate functions in the space L_q . *J. Comput. Appl. Math.*, 122(2):83–91, 2016.
- [29] K. V. Shvai. The best m -term trigonometric approximations of the classes of periodic multivariate functions with bounded generalized derivative in the space L_q . *J. Math. Sci.*, 222(6):750–761, 2017.
- [30] S. A. Stasyuk. Best m -term trigonometric approximation of periodic functions of several variables from Nikol'skii-Besov classes for small smoothness. *J. Approx. Theory*, 177:1–16, 2014.
- [31] R. M. Trigub, E. S. Belinsky. *Fourier analysis and approximation of functions*. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 2004.
- [32] J. Vybiral. Function spaces with dominating mixed smoothness. *Dissertationes Mathematicae*, pages 1–73, 2006.

К. В. Пожарська

ІНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ НАН УКРАЇНИ, М. КИЇВ, УКРАЇНА; ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ М. ХЕМНІЦ, НІМЕЧЧИНА

Email: pozharska.k@gmail.com

ORCID: 0000-0001-7599-8117