

Зображення і когомології груп і напівгруп

А. І. Плакош

Abstract. This article surveys results related to the cohomology of lattices over group rings, particularly over the group ring of the Klein four-group. It is shown that in this setting, syzygies coincide with the Auslander–Reiten translation, enabling the full computation of Tate cohomology for all lattices and the explicit description of the action of group automorphisms. Special attention is paid to regular lattices and their applications to the classification of multidimensional crystallographic and Chernikov groups. The article also explores the connection between the cohomology and representations of crossed group rings and those of coefficient rings, especially for semidirect product group rings. The approach is illustrated by a new classification of integral representations of the alternating group A_4 , leading to explicit cohomological invariants. The results are of interdisciplinary interest for group theory, homological algebra, crystallography, and coding theory.

Анотація. У статті узагальнено результати, пов’язані з когомологіями решіток над груповими кільцями, зокрема над груповим кільцем четверної групи Кляйна. Показано, що в цьому випадку сизигії збігаються з трансляцією Ауслендера–Райтен, що дозволило повністю обчислити когомології Тейта для всіх решіток та описати дію автоморфізмів групи. Окрему увагу приділено регулярним решіткам і їхнім застосуванням до класифікації багатовимірних кристалографічних і черніківських груп. Також розглянуто зв’язок когомологій і зображень схрещених групових кілець із когомологіями кілець коефіцієнтів, зокрема для групових кілець напівпрямих добутків. Узагальнено підхід до обчислення когомологій на прикладі цілих зображень альтернативної групи A_4 , що дозволило отримати нову класифікацію та повні когомологічні інваріанти. Результати мають міждисциплінарне значення для теорії груп, гомологічної алгебри, кристалографії та теорії кодування.

This work was supported by grants from the Simons Foundation (1290607, A.I.P.)

2020 Mathematics Subject Classification: 55Q05, 57K20, 57M05

Ключові слова: зображення, когомології, група, напівгрупа, решітка, групове кільце, кристалографічна група, черніківська група

DOI: <https://doi.org/10.3842/trim.v21n1.544>

ВСТУП

Теорія когомологій груп була натхненна роботами В. Гуревича про когомології ациклічних просторів і розвинена у 1940-х рр. С. Ейленбергом, С. Маклейном, В. Екманом, Х. Хопфом, Д. К. Фаддєєвим та іншими. Вони також були пов'язані з теорією розширень груп та проєктивними зображеннями, де когомології виникають як набори факторів. Поряд з загальною теорією, багато робіт було присвячено обчисленням когомологій конкретних груп. Тут у багатьох випадках виникає потреба у розробці спеціальних методів. Наприклад, Ш. Такаhashi [20] запропонував нову, спрощену резольвенту для скінченних абелевих груп. Важливий випадок, коли група розкладається у напівпрямий добуток, досліджувався Маккі та іншими авторами, але загальних результатів про зображення та когомології досі не отримано. У цьому випадку природно виникають схрещені групові алгебри, зображення яких вивчалися І. Райтен, К. Рідтман, Ю. Дроздом та іншими. Ці роботи вказують на перспективні напрямки у обчисленні когомологій, особливо, коли порядок групи є оборотним у базовому кільці. Дослідження в цих напрямках і становлять основу дослідження.

Обчислення когомологій заданої групи є важливою та цікавою, але зазвичай громіздкою задачею. Тому відомі лише деякі випадки, коли такі обчислення були здійснені для досить широкого класу модулів. Якщо група є скінченною, особливий інтерес викликають когомології *решіток*, тобто G -модулів, які є скінченно породженими та вільними від кручення як групи. Вони мають значення, наприклад, у теорії кристалографічних груп і груп Чернікова. Очевидно, що якщо ми хочемо знати всі когомології решіток, слід мати класифікацію G -решіток. У випадку скінченних p -груп така класифікація відома лише для циклічних груп порядку p і p^2 для простого числа p [4, §,34B, §,34C], для циклічної групи порядку 8 [21] і для Кляйнівської 4-групи [15, 16]. В інших випадках така класифікація є *дику*, тобто включає опис зображень усіх скінченновимірних алгебр.

У першому згаданому випадку існує лише скінченна кількість незвідних зображень, когомології $\hat{H}^n(G, m)$ є періодичними з періодом 2, тож відповідь можна отримати без особливих труднощів. Це було використано в [22], де було складено повний список p -груп Чернікова з циклічним факторгрупою порядку p або p^2 . Для кляйнівської групи задача стає значно складнішою, оскільки, по-перше, існує нескінченно багато незвідних, попарно неізоморфних решіток, а по-друге, когомології більше не є періодичними. У цій роботі ми використовуємо опис незвідних решіток із [16] та деякі загальні факти про когомології p -груп і даємо повний опис когомологій решіток над кляйнівською групою.

У статті [14] Назарова описує 2-адичні зображення знакозмінної групи $\mathfrak{A}_4$ порядку 4. На жаль, важко використовувати цей опис для інших цілей, таких як обчислення когомологій. У цій роботі пропонується інший підхід, аналогічний вивченню зображень та когомологій групи Кляйна [13]. Зокрема, використовується техніка порядків Бакстрема з [17, 19], і таким чином пов'язується опис 2-адичних зображень $\mathfrak{A}_4$ з зображеннями зваженого графа [5]. Це дозволяє повністю описати сагайдак Ауслендера-Рейтен 2-адичних зображень. Оскільки перетворення Ауслендера-Рейтен в цьому випадку збігається з сизигієм, це майже одразу дає значення всіх когомологій Тейта 2-адичних $\mathfrak{A}_4$ -решіток. Оскільки 3-адичні зображення $\mathfrak{A}_4$ є дуже простими, також описуються всі цілочисельні представлення та їх когомології. Слід зазначити, що знання когомологій є важливим для класифікації кристалографічних та Черніковських груп і т. д.

1. КОГОМОЛОГІЇ ЧЕТВЕРНОЇ ГРУПИ КЛЯЙНА

1.1. Решітки над Кляйнівською 4-групою. Нехай K позначає Кляйнівську 4-групу, $K = \langle a, b \mid a^2 = b^2 = 1, ab = ba \rangle$. Ми вивчаємо когомології цієї групи зі значеннями в K -*решітках*, тобто K -модулях M , для яких адитивна група M є вільною абелевою групою скінченного рангу, а також у їхніх *дуальних* модулях, тобто модулях $\text{Hom}_{\mathbb{Z}}(M, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$. Нехай $R = \mathbb{Z}K$. Ми вбудовуємо його в $R^\# = \mathbb{Z}^4$, ототожнюючи a з четвіркою $(1, 1, -1, -1)$ і b з $(1, -1, 1, -1)$. Зауважимо, що $R^\#$ є цілочисельним замиканням R в $\mathbb{Q} *_{\mathbb{Z}} R$.

Нехай $\mathbb{Z}_p$ – кільце p -адичних цілих чисел, $M_p = M * \mathbb{Z}\mathbb{Z}_p$ для кожної абелевої групи M . Тоді $R_p = \mathbb{Z}_p^4$ для $p \neq 2$, і $R_2 \simeq 4\mathbb{Z}_2^4$. З [7, Th., 3.7] випливає, що дві K -решітки M, N є ізоморфними тоді і тільки тоді, коли вони *одного роду*, тобто $M_p \simeq N_p$ для всіх p . Більше того, якщо $p \neq 2$, то R_p -решітка M_p однозначно визначається раціональною оболонкою $\mathbb{Q} * \mathbb{Z}M$. Тому K -решітка M є однозначно визначеною через її 2-адичне доповнення, яке позначається як $\hat{M}$.

Позначимо $R\text{-lat}$ категорію R -решіток, а $\hat{R}\text{-lat}$ – категорію $\hat{R}$ -*решіток*, тобто $\hat{R}$ -модулів, які є скінченно породженими і модулями без скруту (отже, вільними) як $\mathbb{Z}_2$ -модулі. Функтор $M \mapsto \hat{M}$ є *зображувальною еквівалентністю* між категоріями $R\text{-lat}$ і $\hat{R}\text{-lat}$, тобто він відображає неізоморфні модулі в неізоморфні, нерозкладні в нерозкладні, і кожна $\hat{R}$ -решітка є ізоморфною до $\hat{M}$ для однозначно визначеної R -решітки M .

Оскільки $4\hat{H}^n(K, M) = 0$ для будь-якого K -модуля M [3, Прор., XII.2.5], маємо ізоморфізм $\hat{H}^n(K, M) \simeq \hat{H}^n(K, \hat{M})$. Нехай $\mathbb{D} = \mathbb{Q}_2/\mathbb{Z}_2$, де $\mathbb{Q}_2$ – поле 2-адичних чисел. Ця група є *групою типу* 2^∞ , тобто прямою

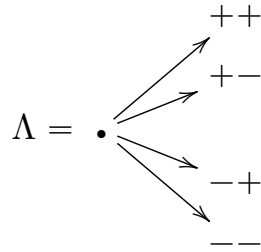
границею $\varinjlim_n \mathbb{Z}/2^n\mathbb{Z}$ скінченних циклічних 2-груп відносно натуральних вкладень $\mathbb{Z}/2^n\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/2^{n+1}\mathbb{Z}$. Ми називаємо K -модулі вигляду

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(M, \mathbb{D}) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}_2}(\hat{M}, \mathbb{D}),$$

де M – K -решітка, K -корешітка.

Кільце R є *Горенштейновим*, тобто $\mathrm{inj.dim}_R R = 1$. Оскільки R_p є максимальним надкілцем для $p \neq 2$, а R_2 є локальним, з [11, Лема 2.9] випливає, що R має єдине мінімальне власне надкілце A , і кожна нерозкладна R -решітка, окрім самого R , є A -решіткою. Насправді, A збігається з підкілцем у $R^\# = \mathbb{Z}^4$, яке складається з усіх четвірок (z_1, z_2, z_3, z_4) таких, що $z_1 \equiv z_2 \equiv z_3 \equiv z_4 \pmod{2}$.

Нехай $\mathfrak{m}$ – ідеал кільця A , що складається з усіх четвірок (z_1, z_2, z_3, z_4) , для яких $z_1 \equiv z_2 \equiv z_3 \equiv z_4 \equiv 0 \pmod{2}$. Тоді $\hat{\mathfrak{m}} = \mathrm{rad} \hat{A} = \mathrm{rad} \hat{R}^\#$. Отже, $\hat{A}$ є *порядком Бакстрема* у сенсі [17]. Тому, згідно з [17], решітки над $\hat{A}$, а отже і над A , класифікуються зображеннями сагайдака



Нагадаємо відповідну конструкцію (на рівні A -решіток). Для будь-якого K -модуля M позначимо через $M_{\alpha\beta}$, де $\alpha, \beta \in +, -$, підмодуль $\{u \in M \mid au = \alpha u, bu = \beta u\}$.

Якщо M є A -решіткою, покладемо $M^\# = R^\# M$ (тобто добуток решіток у $\mathbb{Q} * \mathbb{Z}M$, який збігається з образом природного гомоморфізму $R^\# * AM \rightarrow \mathbb{Q} * \mathbb{Z}M$). Це найменший $R^\#$ -модуль, що містить M . Тоді $M^\# = \bigoplus_{\alpha\beta} M_{\alpha\beta}^\#$. Позначимо $V_\bullet = M/\mathfrak{m}M$ та $V_{\alpha\beta} = M_{\alpha\beta}^\# / 2M_{\alpha\beta}^\#$. Вибираючи як $f_{\alpha\beta}$ природні гомоморфізми $V_\bullet \rightarrow V_{\alpha\beta}$, ми отримуємо зображення сагайдака Λ , яке позначаємо через $\Phi(V)$. Таким чином, ми визначаємо функтор Φ з категорії $A\text{-lat}$ A -решіток у категорію $\mathrm{per} \Lambda$ зображень сагайдака Λ над полем $\mathbb{k} = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Маємо такий результат, аналогічний результату з [17].

Теорема 1.1. *Нехай $\mathcal{R}$ – категорія зображень*

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{ccccc}
 & & & & V_{++} \\
 & & & \nearrow & \\
 & & f_{++}, & & \\
 & & \nearrow & & \\
 & & & & V_{+-} \\
 & & f_{+-}, & & \\
 & & \nearrow & & \\
 V = V_{\bullet} & & & & \\
 & & f_{-+}, & & \\
 & & \nearrow & & \\
 & & & & V_{-+} \\
 & & f_{--}, & & \\
 & & \nearrow & & \\
 & & & & V_{--}
 \end{array}
 \end{array} \quad (1.1)$$

сагайдака Λ над полем $\mathbb{k}$, таких що всі відображення $f_{\alpha\beta}$ є сюр'єктивними, а індуковане відображення $f_+ : V_{\bullet} \rightarrow V_+ = \bigoplus_{\alpha\beta} V_{\alpha\beta}$ є ін'єктивним. Тоді функтор Φ є зображувальною еквівалентністю $\Phi : A\text{-lat} \rightarrow \mathcal{R}$, причому всі індуковані гомоморфізми

$$\Phi_{M,N} : \text{Hom}_A(M, N) \rightarrow \text{Hom}_{\Lambda}(\Phi(M), \Phi(N))$$

є сюр'єктивними, а також виконується рівність:

$$\text{Ker } \Phi_{M,N} = \text{Hom}_A(M, \mathfrak{m}N) = 2 \text{Hom}_{R^{\sharp}}(\tilde{M}, N^{\sharp}). \quad (1.2)$$

Ми називаємо п'ятірку $(d_{\bullet}, d_{\alpha\beta})$ ($\alpha, \beta \in +, -$) розмірністю зображення V або відповідної решітки $M = M(V)$, позначаємо її як $\mathbf{dim} V$ або $\mathbf{dim} M$ і зазвичай записуємо у вигляді

$$\boxed{
 \begin{array}{c}
 d_{++} \\
 d_{+-} \\
 d_{\bullet} \\
 d_{-+} \\
 d_{--}
 \end{array}
 }$$

За потреби також вводимо позначення $d_{\bullet} = d_{\bullet}(M)$, $d_{\alpha\beta} = d_{\alpha\beta}(M)$ і $d_+ = d_+(M) = \sum_{\alpha\beta} d_{\alpha\beta}(M)$.

Зауважимо, що ранг M як $\mathbb{Z}$ -модуля дорівнює $d_+(M)$, тоді як $d_{\bullet} = \dim_{\mathbb{k}} M/\mathfrak{m}M$.

Нам також потрібні аналоги деяких результатів із [19]. З цією метою сформулюємо лему. Для будь-якої $\mathbb{Z}$ -решітки або $R^{\sharp}$ -решітки M покладемо $\bar{M} = M/2M$, а якщо $\alpha : M \rightarrow N$ — гомоморфізм решіток, то через $\bar{\alpha}$ позначатимемо індуковане відображення $\bar{M} \rightarrow \bar{N}$.

Відомо, що для четверної групи Кляйна G кожна $\mathbb{Z}_2 G$ -решітка, де $\mathbb{Z}_2$ — це кільце p -адичних цілих чисел, збігається з 2-адичним завершенням $\hat{M}_2$ деякої $\mathbb{Z}G$ -решітки M , і виконується $\hat{M}_2 \simeq \hat{N}_2$ тоді і тільки тоді, коли $M \simeq N$ (див. [15]). Оскільки $\hat{H}^n(G, M) = \hat{H}^n(G, \hat{M}_2)$, нам достатньо розглядати лише $\mathbb{Z}_2 G$ -решітки.

1.2. Когомології. У цьому розділі ми також встановлюємо деякі результати щодо трансляції Аусленера-Райтен та когомологій p -груп.

Нехай R – локальне повне нетерове кільце, рівновимірне з Крулловою розмірністю 1 і без нільпотентних елементів, а $R\text{-lat}$ – категорія R -решіток, тобто максимальних Коена-Макколея R -модулів або, що те саме, R -модулів, вільних від кручення. Відомо, що R має *канонічний модуль* $\omega_R \in R\text{-lat}$, такий що функтор $D = \text{Hom}_R(, \omega_R)$ є точною дуальністю на категорії $R\text{-lat}$ [2, Corollary 3.3.8].

Зокрема, він індукує бієкцію на множині $R\text{-ind}$ класів ізоморфізму незвідних R -решіток.

Нагадаємо, що *послідовність Ауслендера-Райтен* у $R\text{-lat}$ – це нерозщеплювана точна послідовність

$$0 \rightarrow M' \xrightarrow{\beta} N \xrightarrow{\alpha} M \rightarrow 0, \quad (\text{AR})$$

де M і M' – незвідні R -решітки, і

- для кожного гомоморфізму $\xi : L \rightarrow M$, де L – незвідна R -решітка, і ξ не є ізоморфізмом, існує $\xi' : L \rightarrow N$, таке що $\xi = \alpha\xi'$;
- для кожного гомоморфізму $\eta : M' \rightarrow L$, де L – незвідна R -решітка, і η не є ізоморфізмом, існує $\eta' : N \rightarrow L$, таке що $\eta = \eta'\beta$!

У цьому випадку M і M' визначають одне одного з точністю до ізоморфізму. Вони позначаються: $M' = \tau_R M$ і $M = \tau_R^{-1} M'$. τ_R називається *трансляцією Аусленера-Райтен* для R -решіток. Відомо [1], що для кожної незвідної R -решітки $M \neq R$ (для кожної незвідної R -решітки $M' \neq \omega_R$) існує послідовність Ауслендера-Райтен (AR), тож $\tau_R M$ (відповідно, $\tau_R^{-1} M'$) визначена. Якщо R є Горенштейновим, тобто $\omega_R \simeq R$, τ_R індукує бієкцію на множині $R\text{-ind} = R$.

Нехай у послідовності Ауслендера-Райтен (AR) $N = \bigoplus_{i=1}^m N_i$, де N_i – незвідні зображення, $\alpha_i : N_i \rightarrow M$ та $\beta_i : M' \rightarrow N_i$ є компонентами α та β відносно цього розкладу.

Сагайдак Ауслендера-Райтен категорії $R\text{-lat}$ – це сагайдак, вершинами якого є класи ізоморфізму незвідних R -решіток, а стрілки визначаються за такими правилами:

- Якщо $M \neq R$, стрілки, що завершуються в M , – це просто $\alpha_i : N_i \rightarrow M$.
- Якщо $M' \neq \omega_R$, стрілки, що починаються в M , – це просто $\beta_i : M' \rightarrow N_i$.
- Якщо $\text{rad } R = \bigoplus_{i=1}^k Q_i$, де Q_i – незвідні, стрілки, що завершуються в R , – це просто вкладення $\iota_i : Q_i \rightarrow R$.
- Стрілки, що починаються в ω_R , – це просто $D\iota_i : DQ_i \rightarrow \omega_R$.

Нехай у послідовності Ауслендера-Райтен (AR) $N = \bigoplus_{i=1}^m N_i$, де N_i – незвідні зображення, $\alpha_i : N_i \rightarrow M$ та $\beta_i : M' \rightarrow N_i$ є компонентами α та β відносно цього розкладу.

Сагайдак Ауслендера-Райтен категорії $R\text{-lat}$ – це сагайдак, вершинами якого є класи ізоморфізму незвідних R -решіток, а стрілки визначаються за такими правилами:

- Якщо $M \neq R$, стрілки, що завершуються в M , – це просто $\alpha_i : N_i \rightarrow M$.
- Якщо $M' \neq \omega_R$, стрілки, що починаються в M , – це просто $\beta_i : M' \rightarrow N_i$.
- Якщо $\text{rad } R = \bigoplus_{i=1}^k Q_i$, де Q_i – незвідні, стрілки, що завершуються в R , – це просто вкладення $\iota_i : Q_i \rightarrow R$.
- Стрілки, що починаються в ω_R , – це просто $D\iota_i : DQ_i \rightarrow \omega_R$.

Позначимо через ΩM *сизигій* M , тобто ядро епіморфізму $\varphi : P \rightarrow M$, де P – проєктивний, а $\text{Ker } \varphi \subseteq \text{rad } P$. Знову ж, якщо R є Горенштейновим, то Ω задає бієкцію на множині $R\text{-ind}=R$. Тож у цьому випадку $\Omega^{-1}M$ коректно визначений для будь-якої незвідної решітки $M \neq R$.

Твердження 1.1. *Якщо R є Горенштейновим, то $\tau_R M \simeq \Omega M$ для кожної незвідної R -решітки $M \neq R$.*

Нагадаємо, що якщо R є Горенштейновим, але не регулярним, то існує єдине кільце $A \supset R$ таке, що $A/R \simeq R/\text{rad } R$, $A \in R\text{-lat}$ (тому $A\text{-lat}$ є повною підкатегорією $R\text{-lat}$), і кожна незвідна R -решітка $M \neq R$ є A -решіткою. A називається *мінімальним надкільцем* R (див. [8]). За дуальністю, $DA \simeq \text{rad } R$.

Твердження 1.2. *Нехай кільце R є горенштейновим і не регулярним, а A – мінімальне надкільце R .*

- (1) *Якщо $0 \rightarrow M' \xrightarrow{\beta} N \xrightarrow{\alpha} M \rightarrow 0$ – послідовність Ауслендера-Райтен у $A\text{-lat}$, то вона також послідовністю у $R\text{-lat}$.*
- (2) *Нехай M – незвідна A -решітка. Якщо $M \neq A$, то $\tau_R M = \tau_A M$, а якщо $M \neq \omega_A$, то $\tau_R^{-1} M = \tau_A^{-1} M$.*

Надалі покладемо $R = \mathbb{Z}_p G$, де G – скінченна комутативна p -група. Це локальне, горенштейнове, нерегулярне кільце, і $R/\text{rad } R \simeq \mathbb{F}_p$ (з тривіальною дією). Нехай A – мінімальне надкільце R .

Твердження 1.3. $\tau_R A \simeq \omega_A$.

Твердження 1.4.

$$\hat{H}^n(G, A) \simeq \hat{H}^n(G, \mathbb{F}_p) \simeq \begin{cases} (n+1)\mathbb{F}_p, & \text{якщо } n \geq 0, \\ (-n)\mathbb{F}_p, & \text{якщо } n < 0. \end{cases}$$

Твердження 1.5. Нехай $M \in \text{CM}(R)$, $M \neq R$. Тоді

$$\hat{H}^n(G, M) \simeq \hat{H}^{n+1}(G, \tau_R M) \simeq \hat{H}^{n-1}(G, \tau_R^{-1} M)$$

Тепер G – це кляйнівська четвірна група: $G = \langle a, b, |, a^2 = b^2 = 1, ab = ba \rangle$. Тоді $\mathbb{Z}_2 G$ має 4 незвідні решітки L_{uv} , де $u, v \in +, -$. А саме, $L_{uv} = \mathbb{Z}_2$ як $\mathbb{Z}_2$ -модуль, а діє як $u1$, а b – як $v1$.

Твердження 1.6.

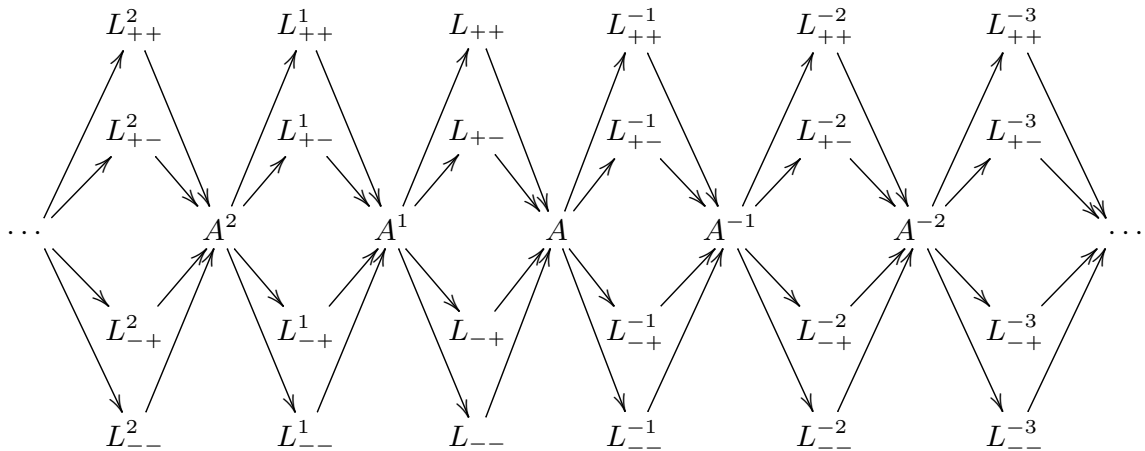
$$\hat{H}^n(G, L_{++}) = \begin{cases} (|n|/2 + 1)\mathbb{F}_2, & \text{якщо } n \neq 0 \text{ парне,} \\ (|n|/2)\mathbb{F}_2, & \text{якщо } n \text{ непарне,} \\ \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}, & \text{якщо } n = 0, \end{cases}$$

а якщо $(u, v) \neq (+, +)$, то

$$\hat{H}^n(G, L_{uv}) = ([(|n| + 1)/2])\mathbb{F}_2$$

Покладемо $R = \mathbb{Z}_2 G$, де G – кляйнівська четвірна група, а A – мінімальне надкільце R . Згадаємо структуру сагайдака Ауслендера-Райтен для $A\text{-lat}$. Із [18] та [16] випливає, що цей сагайдак складається з *препроективно-преін'єктивної* компоненти та *труб*.

Препроективно-преін'єктивна компонента має вигляд



Тут M^k позначає $\tau_R^k M$. Зокрема, $A^1 = \omega_A$. Твердження 1.5 та 1.6 виводять наступні значення когомологій для цих решіток.

Теорема 1.2.

$$\hat{H}^n(G, A^k) = \begin{cases} (n - k + 1)\mathbb{F}_2, & \text{якщо } n \geq k, \\ (k - n)\mathbb{F}_2, & \text{якщо } n < k; \end{cases}$$

$$\hat{H}^n(G, L_{++}^k) = \begin{cases} (|n - k|/2 + 1)\mathbb{F}_2, & \text{якщо } n - k \neq 0 \text{ — парне,} \\ (|n - k|/2)\mathbb{F}_2, & \text{якщо } n - k \text{ — непарне,} \\ \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}, & \text{якщо } n = k; \end{cases}$$

і якщо $(u, v) \neq (+, +)$, тоді

$$\hat{H}^n(G, L_{uv}^k) = [(|n - k| + 1)/2]\mathbb{F}_2. \quad \square$$

Щоб обчислити когомології решіток, що належать трубам, необхідні такі міркування. Нехай $\tilde{A}$ — це ціле замикання A в $A * \mathbb{Q}_p$. Для будь-якої A -решітки M решітка $\tilde{M} = \tilde{A}M$ є прямою сумою $\bigoplus_{u,v \in +, -} M_{uv}$, де $M_{uv} \simeq (r_{uv}M)L_{uv}$ для деяких цілих чисел $r_{uv}M$. Зазначимо, що кожен $\mathbb{Z}_2$ -підмодуль M_{uv} насправді є $\tilde{A}$ -підмодулем.

Лема 1.1. *Якщо $M \not\simeq L_{++}$ є незвідною R -решіткою, то $\hat{H}^0(G, M) = (r_{++}M)\mathbb{F}_2$.*

Тепер нагадаємо структуру труб [16]. *Однорідні труби* параметризуються незвідними однорідними поліномами $f \in \mathbb{F}_2[x]$, де $f \notin x, x - 1$. Труба $\mathcal{T}^f$ має вигляд

$$T_1^f \begin{matrix} \xrightarrow{\quad} \\ \xleftarrow{\quad} \end{matrix} T_2^f \begin{matrix} \xrightarrow{\quad} \\ \xleftarrow{\quad} \end{matrix} T_3^f \begin{matrix} \xrightarrow{\quad} \\ \xleftarrow{\quad} \end{matrix} T_4^f \begin{matrix} \xrightarrow{\quad} \\ \xleftarrow{\quad} \end{matrix} \dots$$

де $r_{++}(T_k^f) = kd$ для $d = \deg f$ та $\tau_R T_k^f = T_k^f$.

Є також 3 спеціальних труб $\mathcal{T}^j$ ($j \in 2, 3, 4$). Вони мають вигляд

$$\begin{array}{ccccccc} T_1^{j1} & \longrightarrow & T_2^{j1} & \longrightarrow & T_3^{j1} & \longrightarrow & T_4^{j1} & \longrightarrow & \dots \\ & \searrow & & \searrow & & \searrow & & \searrow & \\ & T_1^{j2} & \longrightarrow & T_2^{j2} & \longrightarrow & T_3^{j2} & \longrightarrow & T_4^{j2} & \longrightarrow & \dots \end{array}$$

де $r_{++}T_{2k}^{j1} = r_{++}T_{2k}^{j2} = k$, $r_{++}T_{2k-1}^{j1} = k$, $r_{++}T_{2k-1}^{j2} = k - 1$ та $\tau_R T_k^{j1} = T_k^{j2}$, $\tau_R T_k^{j2} = T_k^{j1}$.

Використовуючи Лему 1.1 та Твердження 1.5, ми отримуємо наступний результат, який завершує обчислення когомологій решіток над кляйнівською групою.

Теорема 1.3.

$$\hat{H}^n(G, T_k^f) = kd \mathbb{F}_2, \text{ де } d = \deg f,$$

та для всіх $j \in \{2, 3, 4\}$

$$\hat{H}^n(G, T_{2k}^{ji}) = k \mathbb{F}_2 \text{ для обох } i = 1, 2,$$

$$\hat{H}^n(G, T_{2k-1}^{j1}) = \begin{cases} k \mathbb{F}_2, & \text{якщо } |n| \text{ — парне,} \\ (k-1) \mathbb{F}_2, & \text{якщо } |n| \text{ — непарне,} \end{cases}$$

$$\hat{H}^n(G, T_{2k-1}^{j2}) = \begin{cases} k \mathbb{F}_2, & \text{якщо } |n| \text{ — парне,} \\ (k-1) \mathbb{F}_2, & \text{якщо } |n| \text{ — непарне.} \end{cases}$$

2. КОГОМОЛОГІЇ РЕГУЛЯРНИХ РЕШІТОК НАД КЛЯЙНІВСЬКОЮ 4-ГРУПОЮ

Якщо M, N, L — решітки, то можна сформулювати наступну лему.

Лема 2.1. *Нехай дана точна послідовність $0 \rightarrow \bar{M} \xrightarrow{\bar{\alpha}} \bar{N} \xrightarrow{\bar{\beta}} \bar{L} \rightarrow 0$ $\mathbb{Z}$ -решіток або $R^\sharp$ -решіток. Тоді її можна підняти до точної послідовності $0 \rightarrow M \xrightarrow{\alpha} N \xrightarrow{\beta} L \rightarrow 0$.*

Наслідок 2.1. *Нехай $0 \rightarrow V' \xrightarrow{\bar{\alpha}} V \xrightarrow{\bar{\beta}} V'' \rightarrow 0$ — точна послідовність зображень з категорії $\mathcal{R}$. Тоді її можна підняти до точної послідовності A -решіток $0 \rightarrow M(V') \xrightarrow{\alpha} M(V) \xrightarrow{\beta} M(V'') \rightarrow 0$ ¹*

Ми кажемо, що мономорфізм решіток $\phi : M \rightarrow N$ є *чистим*, якщо $\text{Сокер } \phi$ є вільним від кручення (а отже, також є решіткою).

Наслідок 2.2. *Кожен епіморфізм (мономорфізм, ізоморфізм) $V \rightarrow V'$ зображень з категорії $\mathcal{R}$ можна підняти до епіморфізму (відповідно, чистого мономорфізму, ізоморфізму) A -решіток $\Phi(V) \rightarrow \Phi(V')$.*

Наслідок 2.3. *Нехай задано ланцюг підзображень*

$$V = V_0 \supset V_1 \supset V_2 \supset \dots \supset V_{m-1} \supset V_m = 0,$$

тоді існує ланцюг підрешіток у $M = M(V)$

$$M = M_0 \supset M_1 \supset M_2 \supset \dots \supset M_{m-1} \supset M_m = 0$$

¹Цей результат не впливає безпосередньо з [19, Лема 4], де розглядається випадок алгебр над повними кільцями дискретного нормування. Крім того, він суттєво залежить від Леми 2.1, а отже — від «маломірності» залишкового поля $\mathbb{k}$.

такий, що $M_k \simeq M(V_k)$ і $M_k/M_{k+l} \simeq M(V_k/V_{k+l})$ для всіх допустимих значень k, l .

2.1. Регулярні решітки. Нагадаємо структуру сагайдака Ауслендера–Райтен $\mathcal{Q}$ категорії $\hat{A}\text{-lat}$ [16]. Згідно з [19], він отримується з сагайдака Ауслендера–Райтен категорії $\text{per } \Lambda$ шляхом склеювання препроективної та преін'єктивної компонент в одну. Отримана *препроективно-преін'єктивна компонента* зображена на Рисунку 1. Усі решітки тут однозначно визначаються своїми розмірностями. Трансляція Ауслендера–Райтен τ у категорії $\hat{R}\text{-lat}$ діє на цій компоненті як зсув ліворуч. Зауважимо, що для кожної A -решітки M маємо $\tau \hat{M} \simeq \Omega \hat{M}$, де $\Omega \hat{M}$ – сизигій $\hat{M}$ як $\hat{R}$ -модуля [13, Prop. 1.1]. Відтак $\Omega M \simeq N$, якщо $\tau \hat{M} = \hat{N}$.

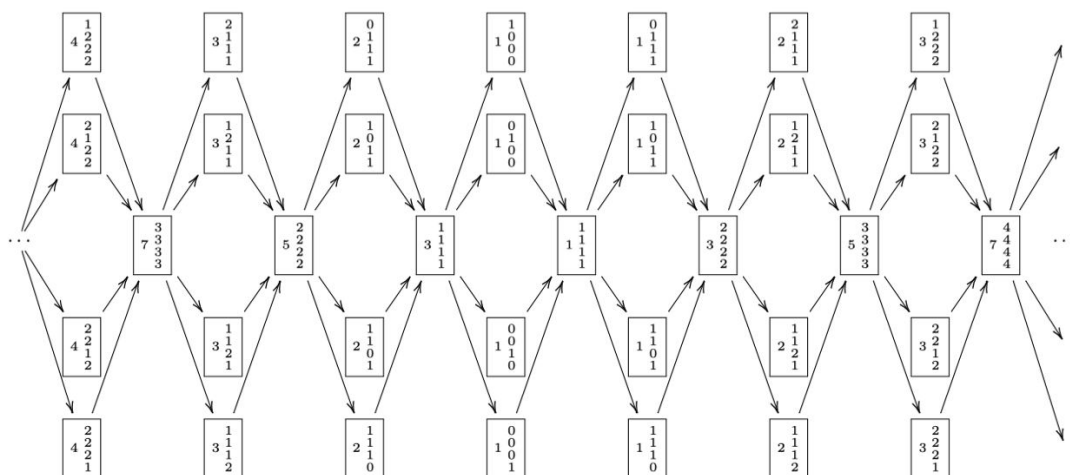


Рис. 2.1. Препроективно-преін'єктивна компонента

Інші компоненти, які називаються *регулярними*, – це *труби*. Вони параметризуються замкненими точками проективної прямої $\mathbb{P}^1_{\mathbb{k}}$ (розглянутої як схема), тобто однічними незвідними многочленами з $\mathbb{k}[t]$ та символом ∞ . Трубу, що відповідає многочлену $f(t)$, позначаємо через $\mathcal{T}^f$, а трубу, що відповідає ∞ , – через $\mathcal{T}^\infty$. Також пишемо $\mathcal{T}^0$ замість $\mathcal{T}^t$ і $\mathcal{T}^1$ замість $\mathcal{T}^{t-1}$. Описуючи труби, ми підставляємо A -решітки замість їхніх завершень і кажемо, що T належить трубі $\mathcal{T}^f$, якщо $\hat{T}$ належить цій трубі. Тоді ми називаємо T *регулярною K -решіткою*. Ми називаємо K -решітку M *регулярною*, якщо всі її незвідні прямі доданки є регулярними. Усі труби, окрім $\mathcal{T}^\lambda$ (де $\lambda \in 0, 1, \infty$), є *однорідними*, тобто для кожного M з цієї труби виконується $\tau M \simeq M$. Вони мають вигляд

$$T_1^f \rightleftarrows T_2^f \rightleftarrows T_3^f \rightleftarrows \dots \quad (2.1)$$

$\dim T_m^f = \begin{bmatrix} dm \\ 2dm \\ dm \\ dm \end{bmatrix}$, де $d = \deg f(t)$. Насправді, $T_m^f = M(\bar{T}_m^f)$, де $\bar{T}_m^f$ — це таке зображення сагайдака Λ :

$$\begin{array}{ccc} & & \mathbb{k}^{dm} \\ & \nearrow^{(I \ 0)} & \\ \mathbb{k}^{2dm} & & \mathbb{k}^{dm} \\ & \searrow_{(0 \ I)} & \\ & & \mathbb{k}^{dm} \\ & \nearrow^{(I \ I)} & \\ & \searrow_{(I \ F)} & \\ & & \mathbb{k}^{dm} \end{array} \quad (2.2)$$

Тут I — одинична матриця розміру $dm \times dm$, а F — матриця Фробеніуса з характеристичним многочленом $f(t)^m$.

Труба $\mathcal{T}^\lambda$ для $\lambda \in 0, 1, \infty$ має вигляд

$$\begin{array}{ccccccc} T_1^{\lambda 1} & \longrightarrow & T_2^{\lambda 1} & \longrightarrow & T_3^{\lambda 1} & \longrightarrow & T_4^{\lambda 1} & \longrightarrow & \dots \\ & \nwarrow & \nearrow & \nwarrow & \nearrow & \nwarrow & \nearrow & \nwarrow & \\ T_1^{\lambda 2} & \longrightarrow & T_2^{\lambda 2} & \longrightarrow & T_3^{\lambda 2} & \longrightarrow & T_4^{\lambda 2} & \longrightarrow & \dots \end{array} \quad (2.3)$$

Тут $\tau T_n^{\lambda 1} \simeq T^{\lambda 2} n$ та $\tau T^{\lambda 2} n \simeq T^{\lambda 1} n$. Для $\lambda = 1$ маємо:

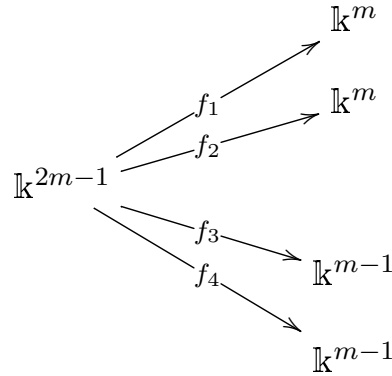
$$\dim T^{1j} 2m = \begin{bmatrix} m \\ 2m \\ m \\ m \end{bmatrix} \text{ для обох } j = 1 \text{ і } j = 2,$$

$$\dim T^{11} 2m - 1 = \begin{bmatrix} m \\ 2m-1 \\ m-1 \\ m-1 \end{bmatrix},$$

$$\dim T^{12} 2m - 1 = \begin{bmatrix} m-1 \\ 2m-1 \\ m-1 \\ m \end{bmatrix}.$$

Насправді, $T^{11} 2m = M(\bar{T}^{11} 2m)$, де $\bar{T}^{11} 2m$ має вигляд (2.2) з $d = 1$ та $F = J_1$ — жорданова матриця розміру $m \times m$ з власним значенням 1.

$T^{11}2m - 1 = M(\bar{T}^{11}2m - 1)$, де $\bar{T}^{11}2m - 1$ має вигляд



Тут

$$f_1 = \begin{pmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$f_2 = \begin{pmatrix} 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$f_3 = (I \quad I \quad 0),$$

$$f_4 = (I \quad J_1 \quad e), \text{ де } e = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

де матриці I та J_1 мають розмір $(m-1) \times (m-1)$. Решітки T_n^{12} отримуються з T_n^{11} шляхом перестановки f_1 з f_3 та f_2 з f_4 відповідно.

Труба $\mathcal{T}^0$ (відповідно, $\mathcal{T}^\infty$) отримується з труби $\mathcal{T}^1$ перестановкою f_2 з f_4 (відповідно, f_2 з f_3).

Зауважимо, що незвідна решітка M належить трубі тоді і тільки тоді, коли

$$2d_\bullet(M) = \sum_{\alpha\beta} d_{\alpha\beta}(M). \quad (2.4)$$

В цьому випадку

$$d_\bullet(\Omega M) = d_\bullet(M) \quad \text{та} \quad d_{\alpha\beta}(\Omega M) = d_\bullet(M) - d_{\alpha\beta}(M). \quad (2.5)$$

Структура зображень сагайдаків, що належать трубам, описана у [5, 6] (див. також [9, Thm. 31 and 36]). У поєднанні з Твердженням 2.3 це дає наступний результат для решіток. Відтепер, пишучи T_m^f , ми завжди припускаємо, що $f \notin t, t-1$, а при позначенні $T_m^{\lambda_j}$ завжди маємо на увазі, що $\lambda \in 0, 1, \infty$ і $j \in 1, 2$.

Теорема 2.1. *Кожен модуль T_m^f або $T^{\lambda_j}m$ має ланцюг підмодулів*

$$M = M_0 \supset M_1 \supset M_2 \supset \dots \supset M_{m-1} \supset M_m = 0 \quad (2.6)$$

такий, що

- (1) $M_k/M_{k+l} \simeq \begin{cases} T_l^f & \text{якщо } M = T_m^f, \\ T_l^{\lambda j} & \text{якщо } M = T_m^{\lambda j} \text{ і } k \text{ парне,} \\ T_l^{\lambda i}, & \text{де } i \neq j, \text{ якщо } M = T_m^{\lambda j} \text{ і } k \text{ непарне.} \end{cases}$
- (2) Відображення $T_m^f \rightarrow T_{m+1}^f$ та $T_m^{\lambda j} \rightarrow T_{m+1}^{\lambda j}$ у діаграмах (2.1) та (2.3) відповідно можна вибрати ін'єктивними, з відповідними факторами T_1^f та $T_1^{\lambda j}$.
- (3) Відображення $T_{m+1}^f \rightarrow T_m^f$ та $T_{m+1}^{\lambda i} \rightarrow T_m^{\lambda j}$ ($i \neq j$) у діаграмах (2.1) та (2.3) відповідно можна вибрати сюр'єктивними, з відповідними ядрами T_1^f та $T_1^{\lambda i}$.
- (4) Якщо M і M' належать до різних труб, то для кожного гомоморфізму $\varphi : M \rightarrow N$ виконується $\text{Im } \varphi \subseteq 2N$.

Можна також отримати опис ендоморфізмів незвідних решіток, що належать трубам.

Для будь-якого комутативного кільця K та будь-якого однічного многочлена $f(t)$ степеня d існує природне вкладення $\varepsilon_m^f : K[t]/(f(t)^m) \rightarrow \text{Mat}(dm, K)$, яке виникає з регулярного зображення цього фактор-кільця над K . Позначимо через K_m^f образ цього вкладення $K[t]/(f(t)^m) \rightarrow \text{Mat}(dm, K)^4$, де всі його компоненти — це ε_m^f . Також позначимо через K_{m*}^t образ вкладення $K[t]/(t^m) \rightarrow \text{Mat}(m, K)^2 \times \text{Mat}(m-1, K)^2$, де перші дві компоненти — це ε_m^t , а дві інші — композиції $\varepsilon_{m-1}^t \pi_m$, де π_m — сюр'єкція $K[t]/(t^m) \rightarrow K[t]/(t^{m-1})$. Звісно, якщо $m = 1$, то це просто діагональне вкладення $K \rightarrow K \times K$.

Якщо M — A -решітка з $\mathbf{dim} M = \begin{bmatrix} d_{++} \\ d_{+-} \\ d_{-+} \\ d_{--} \end{bmatrix}$, то кільце ендоморфізмів

$\text{End}_A M$ природно вкладене у $\text{End}_{R\sharp} \tilde{M} = \prod_{\alpha\beta} \text{Mat}(d_{\alpha\beta}, \mathbb{Z})$, і ми ототожнюємо його з образом цього вкладення.

Теорема 2.2. Нехай $f(t) \in \mathbb{k}[t]$ — незвідний однічний многочлен. Виберемо однічний многочлен $\tilde{f}(t) \in \mathbb{Z}[t]$ такий, що $f(t) = \tilde{f}(t) \pmod{2}$.

- (1) $\text{End}_A T_m^f = \mathbb{Z}_m^{\tilde{f}} + 2\text{Mat}(dm, \mathbb{Z})^4$, де $d = \deg f(t)$.
- (2) $\text{End}_A T_{2m}^{\lambda j} = \mathbb{Z}_m^t + 2\text{Mat}(m, \mathbb{Z})^4$ та $\text{End}_A T_{2m-1}^{\lambda j} = \mathbb{Z}_{m*}^t + 2(\text{Mat}(m, \mathbb{Z})^2 \times \text{Mat}(m-1, \mathbb{Z})^2)$.

Очевидно, що це не залежить від вибору многочлена $\tilde{f}(t)$.

2.2. Когомології. Ми надамо явний опис когомологій $H^n(K, M)$ та $H^n(K, DM)$ для $n > 0$ і регулярних K -решіток M . Очевидно, що достатньо обчислити їх лише для незвідних решіток.

Із [12] випливає, що вільну резольвенту $\mathbf{P}$ для тривіального K -модуля $\mathbb{Z}$ можна вибрати так: $\mathbf{P}_n$ — це простір однорідних многочленів степеня n з $R[x, y]$, і

$$d(x^k y^l) = (a + (-1)^k) x^{k-1} y^l + (-1)^k (b + (-1)^l) x^k y^{l-1}.$$

Отже, n -коцикл γ задається значеннями $\gamma(x^m y^{n-m})$ для $0 \leq m \leq n$.

Нехай M — незвідна регулярна решітка. Покладемо

$$M(n) = \begin{cases} M_{++}, & \text{якщо } n \text{ — парне,} \\ M_{-+}, & \text{якщо } n \text{ — непарне } M \notin \mathcal{T}^\infty, \\ M_{+-}, & \text{якщо } n \text{ — непарне } M \in \mathcal{T}^\infty, \end{cases}$$

Ми визначаємо гомоморфізм $\xi : M(n) \rightarrow H^n(K, M)$ ($n > 0$). Він відображає елемент $v \in M(n)$ у клас коцикла ξ_v , який задається наступним чином.

- Якщо n — парне, то $M \notin \mathcal{T}^\infty$ та $v \in M_{++}$,

$$\xi_v(x^m y^{n-m}) = \begin{cases} v, & \text{якщо } m = n, \\ 0, & \text{інакше.} \end{cases}$$

- Якщо n — парне, то $M \in \mathcal{T}^\infty$ та $v \in M_{++}$,

$$\xi_v(x^m y^{n-m}) = \begin{cases} v, & \text{якщо } m = 0, \\ 0, & \text{інакше.} \end{cases}$$

- Якщо n — парне, то $M \notin \mathcal{T}^\infty$ та $v \in M_{-+}$,

$$\xi_v(x^m y^{n-m}) = \begin{cases} v, & \text{якщо } m = n, \\ 0, & \text{інакше.} \end{cases}$$

- Якщо n — парне, то $M \in \mathcal{T}^\infty$ та $v \in M_{+-}$,

$$\xi_v(x^m y^{n-m}) = \begin{cases} v, & \text{якщо } m = 0, \\ 0, & \text{інакше.} \end{cases}$$

Легко перевірити, що ξ_v справді є коциклом.

Теорема 2.3. Для кожної незвідної регулярної K -решітки M і кожного $n > 0$ відображення ξ індукує ізоморфізм $\bar{\xi} : M(n)/2M(n) \xrightarrow{\sim} H^n(K, M)$.

Для доведення ми використовуємо такі результати.

Лема 2.2. Якщо $0 \rightarrow M' \rightarrow M \rightarrow M'' \rightarrow 0$ — точна послідовність регулярних K -решіток, то індуковані послідовності

$$0 \rightarrow \Omega M' \rightarrow \Omega M \rightarrow \Omega M'' \rightarrow 0, \quad (2.7)$$

$$0 \rightarrow \Omega^{-1}M' \rightarrow \Omega^{-1}M \rightarrow \Omega^{-1}M'' \rightarrow 0 \quad (2.8)$$

також є точними.

Наслідок 2.4. Якщо $0 \rightarrow M' \rightarrow M \rightarrow M'' \rightarrow 0$ — точна послідовність регулярних K -решіток, то індукована послідовність когомологій

$$0 \rightarrow \hat{H}^n(K, M') \rightarrow \hat{H}^n(K, M) \rightarrow \hat{H}^n(K, M'') \rightarrow 0$$

також є точною для кожного $n \in \mathbb{Z}$.

Аналогічні міркування дають явний опис когомологій для *регулярних модулів корешіток*, тобто дуальних модулів до регулярних решіток. Для незвідного регулярного модуля корешітки $N = DM$ покладемо $\bar{N} = \{u \in N \mid 2u = 0\}$.

$$N(n) = \begin{cases} \bar{N}_{++}, & \text{якщо } n \text{ — парне} \\ \bar{N}_{-+}, & \text{якщо } n \text{ — непарне } M \notin T^\infty, \\ \bar{N}_{+-}, & \text{якщо } n \text{ — непарне та } M \in T^\infty. \end{cases}$$

Ми визначаємо гомоморфізм $\eta : N(n) \rightarrow H^n(K, N)$ ($n > 0$). Він відображає елемент $u \in N(n)$ у клас коцикла η_u , який задається наступним чином.

- Якщо n — непарне, то $M \notin T^\infty$ та $u \in \bar{N}_{-+}$,

$$\eta_u(x^m y^{n-m}) = \begin{cases} u, & \text{якщо } m = n, \\ 0, & \text{інакше.} \end{cases}$$

- Якщо n — непарне, то $M \in T^\infty$ та $u \in \bar{N}_{+-}$,

$$\eta_u(x^m y^{n-m}) = \begin{cases} u, & \text{якщо } m = 0, \\ 0, & \text{інакше.} \end{cases}$$

- Якщо n — парне, то $u \in \bar{N}_{++}$,

$$\eta_u(x^m y^{n-m}) = \begin{cases} u, & \text{якщо } m = n, \\ 0, & \text{інакше.} \end{cases}$$

Легко перевірити, що η_u справді є коциклом.

Теорема 2.4. Для кожного незвідного регулярного модуля корешітки N і кожного $n > 0$ відображення η індукує ізоморфізм $N(n) \xrightarrow{\sim} H^n(K, N)$.

2.3. Дія автоморфізмів.

2.3.1. *Решітки.* Нам також потрібно знати, як автоморфізми решіток і групи діють на когомології. Нехай $M = T_m^f$ або $M = T^{\lambda j} m$. Розглянемо ланцюг підмодулів $M_k \subset M$ з Теорема 2.1. Позначимо через $E^f k, t, n$ або, відповідно, через $E^{\lambda j} k, t, n$ (де $0 \leq k < t$) множини

$$M_k(n) \setminus (2M_k(n) + Mk + 1(n)).$$

Зауважимо, що $E_{k,m,n}^{\lambda j} \neq \emptyset$ тоді і тільки тоді, коли $k < t$ і

$$k \equiv \begin{cases} j, & \text{якщо } n \text{ парне} \\ j+1, & \text{якщо } n \text{ непарне} \end{cases} \pmod{2} \quad (2.9)$$

Із Теорем 2.1 та 2.2 легко випливає наступний результат.

Теорема 2.5. *Нехай $e \in E_{k,m,n}^f$ або $e \in E_{k,m,n}^{\lambda j}$, а $e' \in E_{k',m',n}^f$ або, відповідно, $e' \in E_{k',m',n}^{\lambda j'}$. Тоді існує гомоморфізм $\theta : T_m^f \rightarrow T^{f'} m'$ або, відповідно, $\theta : T^{\lambda j} m \rightarrow T^{\lambda j'} m'$ такий, що $\theta(e) = e'$ тоді і тільки тоді, коли або $t \geq t'$ і $k \leq k'$, або $t \leq t'$ і $k \leq k' - t' + t$. Якщо $t = t'$ і $k = k'$, то θ можна вибрати ізоморфізмом.*

Означення 2.1. 1) Для кожної четвірки (f, t, k, n) , де $k < t$, фіксуємо елемент $e_{t,k,n}^f \in E_{t,k,n}^f$, а для кожної п'ятірки (λ, j, t, k, n) , де $k < t$ і k, j задовольняють умову (2.9), – елемент $e_{t,k,n}^{\lambda j} \in E_{t,k,n}^{\lambda j}$.

2) Для однорідної труби $\mathcal{T}^f$ наведемо стандартною послідовністю послідовність $\sigma = (m_i, k_i)$ ($1 \leq i \leq s$), де $m_1 > m_2 > \dots > m_s$, $1 \leq k_i < m_i$ і $k_{i'} < k_i < k_{i'} + m_i - m_{i'}$ для $i < i'$. Позначимо $M_\sigma^f = \bigoplus_{i=1}^s T_{m_i}^f$ і $e_{\sigma,n}^f = \sum_{i=1}^s e_{m_i,k_i,n}^f$.

3) Для спеціальної труби $\mathcal{T}^\lambda$ наведемо стандартною послідовністю послідовність $\sigma = (j_i, m_i, k_i)$ ($1 \leq i \leq s$), де $j_i \in \{1, 2\}$, $m_1 > m_2 > \dots > m_s$, $1 \leq k_i < m_i$ і $k_{i'} < k_i < k_{i'} + m_i - m_{i'}$ для $i < i'$. Позначимо $M_\sigma^\lambda = \bigoplus_{i=1}^s T_{m_i}^{\lambda j_i}$. Таку послідовність називаємо

- парною, якщо $k_i \equiv j_i \pmod{2}$ для всіх i ,
- непарною, якщо $k_i \equiv j_i + 1 \pmod{2}$ для всіх i .

Для парної (непарної) стандартної послідовності й парного (відповідно, непарного) n покладаємо $e_{\sigma,n}^\lambda = \sum_{i=1}^s e_{m_i,k_i,n}^{\lambda j_i}$.

4) Ми називаємо стандартними даними пару $\Delta = (\Sigma, S)$, де $\Sigma = \mathcal{T}^{f_q}$, $1 \leq q \leq r$, – це набір різних труб, а $S = \sigma_q$, $1 \leq q \leq r$, – набір

стандартних послідовностей σ_q для кожної труби $\mathcal{T}^{f_q}$. Такі дані називаються спеціальними, якщо принаймні одна з труб $\mathcal{T}^{f_q}$ є спеціальною. Спеціальні стандартні дані називаються парними або непарними, якщо всі стандартні послідовності σ_q для спеціальних труб $\mathcal{T}^{f_q}$ є відповідно парними або непарними. Позначимо $M_\Delta = \bigoplus_{q=1}^r M^{f_q} \sigma_q$ та $e_{\Delta,n} = \sum_{q=1}^s e^{f_q} \sigma_q, n$. У цьому означенні припускаємо, що якщо Δ є спеціальними даними, то вони є парними, якщо n парне, і непарними, якщо n непарне (інакше елемент $e_{\Delta,n}$ не визначений).

Якщо в Σ трапляється труба $\mathcal{T}^\infty$, наприклад, $f_k = \infty$, то позначимо $e_{\Delta,n}^\infty = e_{\sigma_k,n}^\infty$, а $e_{\Delta,n}^0$ — як решту суми, що визначає $e_{\Delta,n}$. Звісно, можливо, що $e_{\Delta,n}^\infty = 0$ або $e_{\Delta,n}^0 = 0$.

З Теорема 2.5 випливає наступний результат.

Теорема 2.6. Нехай M — регулярна R -решітка, а $\varepsilon \in H^n(K, M)$ ($n > 0$). Тоді існують стандартні дані Δ та розклад $\theta : M \xrightarrow{\sim} M_0 + M_\Delta$ такий, що проєкція $\theta(\varepsilon)$ на $H^n(K, M_0)$ дорівнює нулю, а проєкція $\theta(\varepsilon)$ на $H^n(K, M_\Delta)$ дорівнює $\bar{\xi}(e_{\Delta,n})$ (див. сторінку 135 для означення $\bar{\xi}$).

Якщо $\varepsilon = 0$, то $M_\Delta = 0$.

Зокрема, ми отримуємо опис орбіт автоморфізмів незвідних регулярних решіток на когомологіях.

Наслідок 2.5. Нехай M — незвідна регулярна решітка. Розглянемо ланцюг (2.6) її підрешіток і позначимо через $H_k^n(K, M)$ образ у $H^n(K, M)$ множини $H^n(K, M_k)$. Тоді орбіти $\text{Aut}_K M$ на $H^n(K, M)$ ($n > 0$) мають вигляд $H_k^n(K, M) \setminus H_{k+1}^n(K, M)$ для $0 \leq k < t$ та 0.

Група автоморфізмів групи K — це симетрична група S_3 : вона просто переставляє елементи a, b та $c = ab$. Її породжують транспозиції $\tau_2 : a \leftrightarrow b$ та $\tau_3 : a \leftrightarrow c$. Вони переставляють $+-$ -компоненту діаграми (1.1), відповідно, з $-+$ -компонентою та з $--$ -компонентою. Таким чином, τ_2 переставляє труби $\mathcal{T}^1$ та $\mathcal{T}^0$, а τ_3 — труби $\mathcal{T}^1$ та $\mathcal{T}^\infty$. Досить прості матричні обчислення показують, що τ_2 переставляє $\mathcal{T}^f$ з $\mathcal{T}^{f^{(2)}}$, а τ_3 — з $\mathcal{T}^{f^{(3)}}$, де

$$f^{(2)}(t) = f(1)^{-1}(t-1)^d f\left(\frac{t}{t-1}\right), \quad f^{(3)}(t) = (-1)^d f(1-t),$$

де $d = \deg f$. Це визначає дію S_3 на множині стандартних даних. Зауважимо, що якщо $\psi \in \text{Aut } K$, то існує автоморфізм $\varphi \in \text{Aut } M_{\tau\Delta}$ такий, що $\psi\xi(e_{\Delta,n}) = \varphi\xi(e_{\psi\Delta,n})$.

2.3.2. Корешітки. Нехай тепер $N = DM$, де M — K -решітка. Якщо M є регулярною, то N також називається регулярною. Якщо $N = DM$, де $M = T_m^f$ або $M = T_m^{\lambda j}$, тоді існує ланцюг підмодулів, дуальний до ланцюга (2.6) з Теорема 2.1:

$$0 = N_0 \subset N_1 \subset N_2 \subset \dots \subset Nm - 1 \subset N_m = N, \quad (2.10)$$

де $N_k = M_k^\perp$ і

$$N_{k+l}/N_k \simeq \begin{cases} DT_l^f & \text{якщо } N = DT_m^f, \\ DT_l^{\lambda j} & \text{якщо } N = DT_m^{\lambda j} \text{ і } k \text{ — непарне,} \\ DT_l^{\lambda i}, & \text{де } i \neq j, \text{ якщо } N = DT_m^{\lambda j} \text{ і } k \text{ — парне.} \end{cases}$$

Позначимо через $Z_{k,m,n}^f$ або, відповідно, $Z^{\lambda j}k, m, n$ множини $Nk + 1(n) \setminus N_k$. Знову ж таки, $Z_{k,m,n}^{\lambda j} \neq \emptyset$ тоді і тільки тоді, коли $k < m$ та виконується умова (2.9).

Дуальність дає аналоги Теорем 2.5 і 2.6.

Теорема 2.7. Нехай $z \in Z_{k,m,n}^f$ або $z \in Z^{\lambda j}k, m, n$, а $z' \in Z^fk', m', n$ або, відповідно, $z' \in Z^{\lambda j'}k', m', n$. Тоді існує гомоморфізм $\theta : DT_m^f \rightarrow DT_{m'}^f$ або, відповідно, $\theta : DT_m^{\lambda j} \rightarrow DT_{m'}^{\lambda j'}$, такий, що $\theta(z) = z'$ тоді і тільки тоді, коли $m \leq m'$ і $k \geq k'$, або $m \geq m'$ і $k \geq k' - m' + m$. Якщо $m = m'$ і $k = k'$, θ можна вибрати ізоморфізмом.

Означення 2.2. 1) Для кожної четвірки (f, m, k, n) , де $k < m$, фіксуємо елемент $z_{m,k,n}^f \in Z_{m,k,n}^f$, а для кожної п'ятірки (λ, j, m, k, n) , де $k < m$ і k, j задовольняють умову (2.9), — елемент $z^{\lambda j}m, k, n \in Z^{\lambda j}m, k, n$.

2) Для однорідної труби $\mathcal{T}^f$ назовемо костандартною послідовністю послідовність $\sigma = (m_i, k_i)$ ($1 \leq i \leq s$), де $m_1 < m_2 < \dots < m_s$, $1 \leq k_i < m_i$, і $k_{i'} > k_i > k_{i'} + m_i - m_{i'}$ для $i < i'$. Позначимо $N_\sigma^f = \bigoplus_{i=1}^s P_{m_i}^f$ та $z_{\sigma,n}^f = \sum_{i=1}^s z_{m_i,k_i,n}^f$.

3) Для спеціальної труби $\mathcal{T}^\lambda$ назовемо костандартною послідовністю послідовність $\sigma = (j_i, m_i, k_i)$ ($1 \leq i \leq s$), де $j_i \in \{1, 2\}$, $m_1 < m_2 < \dots < m_s$, $1 \leq k_i < m_i$, $1 \leq k_i \leq m_i$ і $k_i < k_{i'} < k_i + m_{i'} - m_i$ для $i' < i$. Позначимо $N_\sigma^\lambda = \bigoplus_{i=1}^s T_{m_i}^{\lambda j_i}$. Таку послідовність називаємо

- парною, якщо $k_i \equiv j_i \pmod{2}$ для всіх i ,
- непарною, якщо $k_i \equiv j_i + 1 \pmod{2}$ для всіх i .

Для парної (непарної) костандартної послідовності й парного (відповідно, непарного) n покладаємо $z_{\sigma,n}^\lambda = \sum_{i=1}^s z_{m_i,k_i,n}^{\lambda j_i}$.

4) Ми називаємо костандартними даними пару $\Delta = (\Sigma, S)$, де $\Sigma = \{\mathcal{T}^{f_q}\}$, $1 \leq q \leq r$, — набір різних труб, а $S = \{\sigma_q\}$, $1 \leq q \leq r$, — набір костандартних послідовностей σ_q для кожної труби $\mathcal{T}^{f_q}$. Такі дані називаються спеціальними, якщо принаймні одна з труб $\mathcal{T}^{f_q}$ є спеціальною. Спеціальні костандартні дані називаються парними або непарними, якщо всі костандартні послідовності σ_q для спеціальних труб $\mathcal{T}^{f_q}$ є відповідно парними або непарними. Позначимо $N_\Delta = \bigoplus_{q=1}^r M_{\sigma_q}^{f_q}$ і $z_{\Delta,n} = \sum_{q=1}^s z_{\sigma_q,n}^{f_q}$. У цьому означенні припускаємо, що якщо Δ є спеціальними даними, то вони є парними, якщо n парне, і непарними, якщо n непарне (інакше елементи $z_{\sigma_q,n}^{f_q}$, а отже, й $z_{\Delta,n}$ не визначені).

Якщо в Σ трапляється труба $\mathcal{T}^\infty$, наприклад, $f_k = \infty$, то позначимо $z_{\Delta,n}^\infty = z_{\sigma_k,n}^\infty$, а $z_{\Delta,n}^0$ — як решту суми, що визначає $z_{\Delta,n}$. Звісно, можливо, що $z_{\Delta,n}^\infty = 0$ або $z_{\Delta,n}^0 = 0$.

Теорема 2.8. Нехай $N = DM$, де M — регулярна R -решітка, $\varepsilon \in H^n(K, N)$, $n > 0$. Тоді існують костандартні дані Δ та розклад $\theta : N \xrightarrow{\sim} N_0 + N_\Delta$ такий, що проєкція $\theta(\varepsilon)$ на $H^n(K, N_0)$ дорівнює нулю, а проєкція $\theta(\varepsilon)$ на $H^n(K, N_\Delta)$ дорівнює $\eta(z_{\Delta,n})$ (див. сторінку 136 для означення η).

Якщо $\varepsilon = 0$, то $M_\Delta = 0$.

Наслідок 2.6. Нехай N — незвідна регулярна корешітка. Розглянемо ланцюг (2.10) її підмодулів і позначимо через $H_k^n(K, N)$ образ у $H^n(K, N)$ множини $H^n(K, N_k)$. Тоді орбіти $\text{Aut}_K N$ на $H^n(K, N)$ при $n > 0$ мають вигляд $H_k^n(K, N) \setminus H_{k-1}^n(K, N)$ при $0 < k \leq t$ та 0.

3. ЗОБРАЖЕННЯ І КОГОМОЛОГІЇ ЗНАКОЗМІННОЇ ГРУПИ СТЕПЕНЯ 4

3.1. Зображення. Нехай $G = \mathfrak{A}_4$ знакозмінна група степеня 4, N — її кляйнівська підгрупа, $N \simeq \{1, a, b, c \mid a^2 = b^1, ab = ba = c\}$, $H = G/K \simeq \langle \sigma \mid \sigma^3 = 1 \rangle$. Позначаємо через $A = \mathbb{Z}G$ групове кільце G і покладемо $A_p = A \otimes \mathbb{Z}_p$, p -адичне доповнення A , і $QA = A \otimes \mathbb{Q}$ раціональну оболонку A . Через $A\text{-lat}$ (відповідно $A_p\text{-lat}$) позначимо категорію A -решіток, тобто A -модулів M , таких, що як група M вільна абелева скінченного рангу (відповідно, вільний $\mathbb{Z}_p$ -модуль скінченного рангу). Для A -решітки M також позначимо $QM = M \otimes \mathbb{Q}$ та $M_p = M \otimes \mathbb{Z}_p$. Відмітимо, що $QM_p \simeq M \otimes \mathbb{Q}_p$.

Кільце A можна розглядати як схрещений добуток $K * H$, де $K = \mathbb{Z}N$ і H природньо діє на K через спряження. Тут $QK \simeq \mathbb{Q}^4$ з базисом $\{e_1, e_a, e_b, e_c\}$, де

$$\begin{aligned}
e_1 &= \frac{1 + a + b + c}{4}, \\
e_a &= \frac{1 + a - b - c}{4}, \\
e_b &= \frac{1 - a + b - c}{4}, \\
e_c &= \frac{1 - a - b + c}{4}.
\end{aligned}$$

При таких визначеннях, $K_p = \mathbb{Z}_p^4$, якщо $p \neq 2$ та K_2 вкладається в $\mathbb{Z}_2^4$, так, що a, b, c визначаються, відповідно, елементами $(1, 1, -1, -1)$, $(1, -1, 1, -1)$ та $(1, -1, -1, 1)$. Дія H тривіальна на першій компоненті QK та циклічно переставляє три інші. Таким чином,

$$QA \simeq QK * H \simeq \mathbb{Q}H \times \text{Mat}(3, \mathbb{Q}) \simeq \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}[\theta] \times \text{Mat}(3, \mathbb{Q}),$$

де θ — первісний кубічний корінь з 1. Якщо $p \notin \{2, 3\}$, то

$$A_p \simeq \mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p[\theta] \times \text{Mat}(3, \mathbb{Z}_3) \text{ (максимальний порядок в } QA_p),$$

та

$$A_3 \simeq \mathbb{Z}_3 H \times \text{Mat}(3, \mathbb{Z}_3).$$

Отже, всі нерозкладні A_p -решітки для $p \notin \{2, 3\}$ є нерозкладними решітками $\mathbb{Z}_p$, $\mathbb{Z}_p[\theta]$ та $I_p = \mathbb{Z}_p^3$, і для A_3 є ще одна нерозкладна решітка $\mathbb{Z}_3 H$.

Випадок, коли $p = 2$ дуже відрізняється, так як $\mathbb{Z}_2 K$ більше не максимальний порядок. Нагадаємо, що кожне групове кільце є Горенштейновим, тобто $\text{inj.dim}_R R = 1$. Отже, всі непроективні R_p -решітки фактично є решітками над надкільцем $R^+ = \text{End}_R(\text{rad } R_p)$. Оскільки $\#(H)$ оборотний в $\mathbb{Z}_2$, то для схрещеного добутку $A_2 = K_2 * H$ ми маємо, що $\text{rad } A_2 = (\text{rad } K) * H$ та $A^+ = K^+ * H$. Зауважимо, що K^+ є порядком Бакстрема у розумінні [17]. Це означає, що існує спадковий порядок $\tilde{K}$ такий, що $\tilde{K} \supset K^+ \supset \text{rad } \tilde{K} = \text{rad } K^+$. У нашому випадку $\tilde{K} = \mathbb{Z}_2^4$ та $K^+ = \{(x_1, x_2, x_4, x_4) \mid x_1 \equiv x_2 \equiv x_3 \equiv x_4 \pmod{2}\}$. Оскільки $\tilde{A} = \tilde{K} * H$ також спадковий, то A^+ також порядок Бакстрема. А саме,

$$\tilde{A} \simeq \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2[\theta] \times \text{Mat}(3, \mathbb{Z}_2).$$

Можна легко побачити, що A^+ вкладається в $\tilde{A}$ як підкільце трійок (x_1, x_2, x_3) , де $x_1 \in \mathbb{Z}$, $x_2 \in \mathbb{Z}[\theta]$ та $x_3 = (\xi_{ij}) \in \text{Mat}(3, \mathbb{Z}_2)$, такі, що $x_1 \equiv \xi_{11} \pmod{2}$, $\xi_{12} \equiv \xi_{13} \equiv \xi_{21} \equiv \xi_{31} \equiv 0 \pmod{2}$ та $\rho(x_2) \equiv \begin{pmatrix} \xi_{22} & \xi_{23} \\ \xi_{32} & \xi_{33} \end{pmatrix} \pmod{2}$, де ρ позначає регулярне зображення $\mathbb{Z}_2[\theta]$: $\rho(u + v\theta) = \begin{pmatrix} u & -v \\ v & u-v \end{pmatrix}$.

Ми позначаємо через L_1, L_2, L_3 незвідні $\tilde{A}$ -решітки, що переважно належать, компонентам $\mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_2[\theta]$ та $\text{Mat}(3, \mathbb{Z}_2)$, також через P_1 та P_2 ми позначаємо нерозкладні проєктивні A^+ -решітки $P_i = A^+ e_i$, де $e_1 = \frac{1+\sigma+\sigma^2}{3}$ та $e_2 = 1 - e_1$. Зауважимо, що єдині нерозкладні A_2 -решітки, які не є A^+ -решітками є $B_i = A_2 e_i$. Вони бієктивні, тобто і проєктивні, і ін'єктивні в точній категорії $A_2\text{-lat}$.

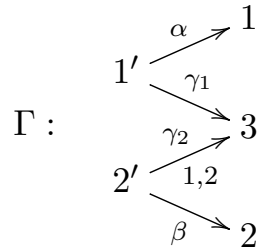
Нагадаємо [17], що зображення порядків Бакстрема класифікуються за допомогою зображень зваженого графа Γ у розумінні [5]. Зокрема, вершини Γ знаходяться у взаємнооднозначній відповідності з простими компонентами напівпростих алгебр $\bar{A} = A^+ / \text{rad } A^+$ and $\bar{A}' = \tilde{A} / \text{rad } \tilde{A}$. У нашому випадку

$$\bar{A} = (K^+ / \text{rad } K^+) * H \simeq \mathbb{F}_2 H \simeq \mathbb{F}_2 \times \mathbb{F}_4$$

та

$$\bar{A}' \simeq (\tilde{K} / \text{rad } \tilde{K}) * H \simeq \mathbb{F}_2 * H \times \text{Mat}(3, \mathbb{F}_2) \simeq \mathbb{F}_2 \times \mathbb{F}_4 \times \text{Mat}(3, \mathbb{F}_2).$$

Отже, відповідний граф Γ (орієнтований) є графом типу $\tilde{F}_{41}$:



Тут 1, 2, 3 відповідають, відповідно, компонентам $\mathbb{F}_2, \mathbb{F}_4$ та $\text{Mat}(3, \mathbb{F}_2)$ з $\bar{A}'$, тоді як $1'$ та $2'$ відповідають, відповідно, компонентам $\mathbb{F}_2$ та $\mathbb{F}_4$ з $\bar{A}$. Ваги усіх стрілок, окрім γ_2 – це $(1, 1)$, тому ми їх не записуємо. У зображеннях Γ стрілки α, γ_1 відповідають матрицям з елементами із $\mathbb{F}_2$, стрілки γ_2, β відповідають матрицям з елементами із $\mathbb{F}_4$. Вектор розмірностей зображення M графа Γ ми позначимо наступним чином

$$\begin{bmatrix} d_{1'} & d_1 \\ d_{2'} & d_2 \end{bmatrix}.$$

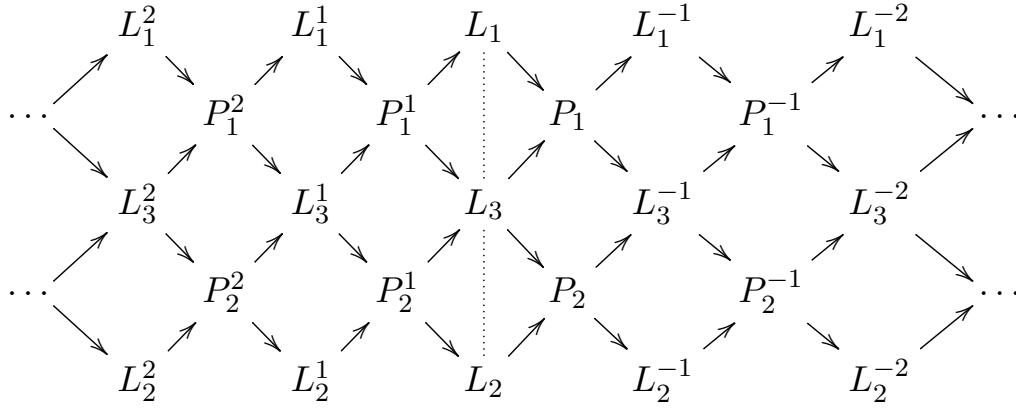
Нагадаємо, що A^+ -решітка M відповідає зображенню V цього графа і є прообразом в $\tilde{M} = L_1^{d_1} \oplus L_3^{d_3} \oplus L_2^{d_2}$ of $\text{Im } \varphi(V)$, де $\varphi(V) : V(1') \oplus V(2') \rightarrow$

$V(1) \oplus V(3) \oplus V(2)$ задано матрицею $\begin{pmatrix} V(\alpha) & 0 \\ V(\gamma_1) & V(\gamma_2) \\ 0 & V(\beta) \end{pmatrix}$. також ми визна-

чаємо $V(1) \oplus V(2) \oplus V(3)$ через $\tilde{M}/2\tilde{M}$.

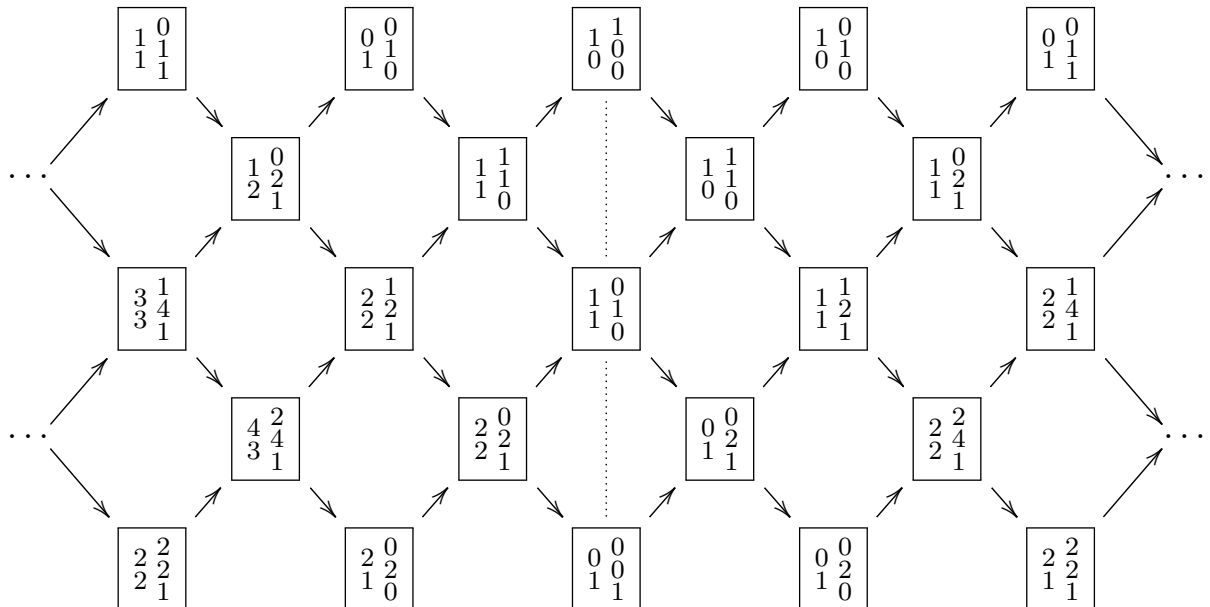
Сагйдак Ауслендера–Райтен категорії зображень графа Γ складається з препроєктивної, преін'єктивної та регулярної компоненти. Коли ми переходимо до зображень порядку Бакстрема, нам потрібно склеїти препроєктивну та преін'єктивну компоненти в одну компоненту(ми

називатимемо її основною) [19]. А саме, ми опустимо прості ін'єктивні та прості проективні модулі, а тоді додамо стрілки з тих ін'єктивних модулів, що залишилися в ті проективні модулі, що залишилися. У результаті, основна компонента для порядку A^+ матиме вигляд:



Через M^k ми позначаємо k -те перетворення Ауслендера-Райтен $\tau^k M$ решітки M над кільцем A_2 . Як показано в [10], $M^k \simeq \Omega^k M$, k -ий сизигій M як A_2 -модуль, а P_i^1 – це просто ін'єктивна A^+ -решітка, тобто дуальна до проективних, або, що те саме, ін'єктивна в точній категорії A^+ -lat. Насправді, P_i – єдиний мінімальний надмодуль, а P_i^1 – єдиний максимальний підмодуль $B_i = A_2 e_i$. Нагадаємо, що B_i – єдині нерозкладні A_2 -решітки, які не є A^+ -решітками. Вони бієктивні, тобто одночасно і проективні, і ін'єктивні в A_2 -lat. Зазначимо також, що інші незвідні A^+ -решітки – це $L_1^{\pm 1}$ (так само, як і L_3 вони належать компоненті $\text{Mat}(3, \mathbb{Z})$).

Розмірності відповідних зображень Γ задані на наступній діаграмі.



Зауважимо, що симетрія відносно центрального (пунктирного) стовпчика відповідає дуальності $M \mapsto M^* = \text{Hom}_{\mathbb{Z}_2}(M, \mathbb{Z}_2)$ в категорії A_2 -решіток.

Регулярна компонента для A^+ -решітки така ж, як і регулярна компонента для графа Γ . Вони складаються з однорідних труб $\mathcal{T}^f$, що відповідають однорідним незвідним многочленам з $\mathbb{F}_2[t]$, окрім $t - 1$ та $t^2 + t + 1$, а також двох спеціальних труб $\mathcal{T}^1$ та $\mathcal{T}^\theta$. Однорідні труби мають наступний вигляд:

$$T_1^f \rightrightarrows T_2^f \rightrightarrows T_3^f \rightrightarrows \dots$$

В цій компоненті перетворення Ауслендера-Райтен (або, що те саме, сизигій) діє тривіально. Розмірність зображення Γ , що відповідає T_k^f ,

дорівнює $\begin{bmatrix} 2kd & kd \\ 2kd & kd \end{bmatrix}$, де $d = \deg f$.

Спеціальні труби мають наступний вигляд:

$$\begin{array}{ccccccc} T_{11}^1 & \longrightarrow & T_{12}^1 & \longrightarrow & T_{13}^1 & \longrightarrow & \dots \\ & \searrow & \swarrow & & \searrow & \swarrow & \\ T_{21}^1 & \longrightarrow & T_{22}^1 & \longrightarrow & T_{23}^1 & \longrightarrow & \dots \end{array}$$

та

$$\begin{array}{ccccccc} T_{11}^\theta & \longrightarrow & T_{12}^\theta & \longrightarrow & T_{13}^\theta & \longrightarrow & \dots \\ & \searrow & \swarrow & & \searrow & \swarrow & \\ T_{21}^\theta & \longrightarrow & T_{22}^\theta & \longrightarrow & T_{23}^\theta & \longrightarrow & \dots \\ & \searrow & \swarrow & & \searrow & \swarrow & \\ T_{31}^\theta & \longrightarrow & T_{32}^\theta & \longrightarrow & T_{33}^\theta & \longrightarrow & \dots \end{array}$$

Розмірності відповідних зображень Γ визначаються наступним чином:

$$\begin{array}{ll} \begin{bmatrix} 2k & k \\ 2k & 3k \\ 2k & k \end{bmatrix} & \text{for } T_{i,2k}^1 \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2k & k \\ 2k & 3k \\ 2k & k \end{bmatrix} & \text{for } T_{1,2k+1}^1 \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2k & k \\ 2k & 3k \\ 2k & k \end{bmatrix} & \text{for } T_{2,2k+1}^1 \\ \begin{bmatrix} 4k & 2k \\ 4k & 6k \\ 4k & 2k \end{bmatrix} & \text{for } T_{i,3k}^\theta \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4k & 2k \\ 4k & 6k \\ 4k & 2k \end{bmatrix} & \text{for } T_{1,3k+1}^\theta \end{array}$$

$$\begin{array}{lcl}
\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4k & 2k \\ 4k & 6k \\ 4k & 2k \end{bmatrix} & \text{for } T_{2,3k+1}^\theta & \\
\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4k & 2k \\ 4k & 6k \\ 4k & 2k \end{bmatrix} & \text{for } T_{3,3k+1}^\theta & \\
\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 4 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4k & 2k \\ 4k & 6k \\ 4k & 2k \end{bmatrix} & \text{for } T_{1,3k+2}^\theta & \\
\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 4 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4k & 2k \\ 4k & 6k \\ 4k & 2k \end{bmatrix} & \text{for } T_{2,3k+2}^\theta & \\
\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4k & 2k \\ 4k & 6k \\ 4k & 2k \end{bmatrix} & \text{for } T_{3,3k+2}^\theta & .
\end{array}$$

Перетворення Аусленера-Райтен (або, що те саме, сизигій) діє наступним чином:

$$\begin{array}{ccccc}
T_{1k}^1 & \xleftrightarrow{\quad} & T_{2k}^1 & & \\
T_{1k}^\theta & \xleftrightarrow{\quad} & T_{2k}^\theta & \xrightarrow{\quad} & T_{3k}^\theta
\end{array}$$

3.2. Когомології. Ми хочемо обчислити когомології Тейта для G -решіток. Оскільки $\#(G) = 12$, для кожного G -модуля M групи $\hat{H}^n(G, M)$ розкладаються 2-компонентні $\hat{H}^n(G, M)_2$ та 3-компонентні $\hat{H}^n(G, M)_3$. Крім того, якщо M – решітка, то $\hat{H}^n(G, M)_p \simeq \hat{H}^n(G, M_p)$. Отже, ми можемо окремо розглядати 2-адичний та 3-адичний випадки.

Для групи $G = \mathfrak{A}_4$ спектральна послідовність

$$E_2^{pq} = H^p(H, H^q(N, M)) \Rightarrow H^n(G, M)$$

вироджується в обох випадках, і в 2-адичному, і в 3-адичному. Зокрема, для 2-адичних решіток $E_2^{pq} = 0$, якщо $p \neq 0$. Таким чином, ми отримуємо ізоморфізм:

$$H^n(G, M) \simeq H^n(N, M)^H.$$

Для 3-адичних решіток $E_2^{pq} = 0$, якщо $q \neq 0$, а отже

$$H^n(G, M) \simeq H^n(C, M^K).$$

У 3-адичному випадку у нас є нерозкладні решітки $\mathbb{Z}, \mathbb{Z}[\varepsilon], \mathbb{Z}H$ та I_3 . Зазначимо, що K тривіально діє на $\mathbb{Z}_3, \mathbb{Z}_3[\varepsilon]$ та $\mathbb{Z}_3H$ і не має нерухомих точок на I_3 . Множник H – циклічний, тому його когомології періодичні з періодом 2. Прості розрахунки дають:

$$\hat{H}^n(G, \mathbb{Z}) = \begin{cases} \mathbb{F}_3, & \text{якщо } n \text{ – парне,} \\ 0, & \text{якщо } n \text{ – непарне;} \end{cases}$$

$$\hat{H}^n(G, \mathbb{Z}[\varepsilon]) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } n - \text{парне,} \\ \mathbb{F}_3, & \text{якщо } n - \text{непарне.} \end{cases}$$

Інші нерозкладні решітки є проєктивними, отже мають тривіальні ко-гомології Тейта.

Для 2-адичних решіток ми використовуємо наступний результат, аналогічний до результату в [13, Lem. 2.2] та аналогічне доведення.

Лема 3.1. *Нехай M – нерозкладна A^+ -решітка, що відповідає зображенню V сагайдака Γ розмірності $\begin{bmatrix} d_1' & d_1 \\ d_2' & d_2 \end{bmatrix}$. Якщо $M \neq L_1$, тоді*

$$\hat{H}^0(G, M) \simeq \mathbb{F}_2^{d_1}.$$

Зазначимо, що маючи сагайдак Ауслендера-Райтен, лише потрібно дізнатися $\hat{H}^0(G, M)$ для всіх нерозкладних M , оскільки

$$\hat{H}^n(G, M) \simeq \hat{H}^0(G, \tau^n M), \quad \text{та} \quad \tau M = \Omega M.$$

Насправді, для кожного зображення V з преін'єктивної компоненти сагайдака Ауслендера-Райтен існує число $m|6$ таке, що $\dim \tau^k M = \dim M + q\omega$, де $\omega = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ та $q \in \{1, 2\}$. Таким чином, значення d_1 просто змінюється на q . Це дає простий шлях для обчислення когомологій решіток головної компоненти. Нижче наведений результат обчислень.

Теорема 3.1. *Нехай M – нерозкладна A^+ -решітка з основної компоненти, а саме, $M = M_0^{n+mk+i}$, де $M_0 \in \{L_1, L_2, L_3, P_1, P_2\}$. Тоді*

$$\hat{H}^{qk+i-n}(G, M) \simeq \mathbb{F}^{qk+r_i}.$$

Величини m, k та r_i залежать від M_0 . А саме:

Якщо $M_0 = L_1$, тоді $m = 6$, $q = 1$ та

i	0	1	2	3	4	5
r_i	1	0	0	1	1	0

Якщо $M_0 = L_2$, тоді $m = 6$, $q = 2$ та

i	0	1	2	3	4	5
r_i	0	0	2	0	2	2

Якщо $M_0 = L_3$, тоді $m = 2$, $q = 1$ та $r = i$.

Якщо $M_0 = P_1$, тоді $m = 3$, $q = 1$ та

i	1	2	3
r	1	0	1

Якщо $M_0 = P_2$, тоді $m = 3$, $q = 2$ та

i	1	2	3
r	0	2	2

Для зображень із труб ситуація навіть простіша, так як значення d_1 , а отже і значення $\hat{H}^0$, задані на сторінці 144 після опису труб, і ми знаємо дію τ . Таким чином, ми можемо сформулювати наступні результати.

Теорема 3.2.

$$\hat{H}^n(G, T_{ij}^f) \simeq \hat{H}^0(G, T_{ij}^f).$$

$$\hat{H}^{2k+r}(G, T_{ij}^1) \simeq \hat{H}^0(G, T_{i',j}^1), \text{ де } i' \text{ залишок за модулем 2 від } i + r;$$

$$\hat{H}^{3k+r}(G, T_{ij}^\theta) \simeq \hat{H}^0(G, T_{i',j}^\theta), \text{ де } i' \text{ залишок за модулем 3 від } i + r.$$

ЛІТЕРАТУРА

- [1] M. Auslander, I. Reiten. Almost split sequences for cohen–macaulay modules. *Math. Ann.*, 277:345–349, 1987.
- [2] W. Bruns, J. Herzog. *Cohen–Macaulay Rings*. Cambridge University Press, 1993.
- [3] H. Cartan, S. Eilenberg. *Homological Algebra*. Princeton University Press, 1956.
- [4] Ch. W. Curtis, I. Reiner. Methods of representation theory with applications to finite groups and orders, vol. 1. *Wiley Interscience Publications*, 1981.
- [5] V. Dlab, C. M. Ringel. Indecomposable representations of graphs and algebras. *Mem. Am. Math. Soc.*, 173:1–57, 1976.
- [6] P. Donovan, M. R. Freislich. The representation theory of finite graphs and associated algebras. *Carleton Mathematical Lecture Notes*, 5, 1973.
- [7] Y. A. Drozd. Adèles and integral representations. *Izv. Akad. Nauk SSSR, Ser. Mat.*, 33:1080–1088, 1969.
- [8] Y. A. Drozd. Ideals of commutative rings. *Mat. Sbornik*, 101:334–348, 1976.
- [9] Y. A. Drozd. Representations of quivers, 2020. URL: <https://www.imath.kiev.ua/~drozd/Qui-⊂beam.pdf>.
- [10] Y. A. Drozd. Rejection lemma and almost split sequences. *Ukr. Math. J.*, 73:908–929, 2021.
- [11] Y. A. Drozd, V. V. Kirichenko. On quasi-bass orders. *Izv. Akad. Nauk SSSR, Ser. Mat.*, 36:328–370, 1972.
- [12] Y. A. Drozd, A. I. Plakosh. Cohomologies of finite abelian groups. *Algebra Discrete Math.*, 24(1):144–157, 2017.
- [13] Y. A. Drozd, A. I. Plakosh. Cohomologies of the kleinian 4-group. *Arch. Math.*, 115(2):139–145, 2020.

- [14] L. A. Nazarova. Unimodular representations of the alternating group of degree four. *Ukrain. Mat. Z.*, 15:437–444, 1963.
- [15] L. A. Nazarova. Representations of a tetrad. *Izv. Akad. Nauk SSSR. Ser. Mat.*, 31:1361–1378, 1967.
- [16] A. I. Plakosh. On weak equivalence of representations of kleinian 4-group. *Algebra Discrete Math.*, 25(1):130–136, 2018.
- [17] C. M. Ringel, K. W. Roggenkamp. Diagrammatic methods in the representation theory of orders. *J. Algebra*, 60:11–42, 1979.
- [18] K. W. Roggenkamp. Auslander–reiten species of bäckström orders. *J. Algebra*, 85:440–476, 1983.
- [19] K. W. Roggenkamp. Auslander-reiten species of bäckström orders. *J. Algebra*, 85:449–476, 1983.
- [20] Sh. Takahashi. Cohomology groups of finite abelian groups. *Tohoku Math. J.*, 4(3):294–302, 1952.
- [21] A. V. Yakovlev. Classification of 2-adic representations of an eighth-order cyclic group. *Zap. Nauchn. Semin. LOMI*, 28:93–129, 1972. *J. Sov. Math.* 3 (1975), 654–680.
- [22] П. М. Гудивок, И. В. Шапочка. О p -группах Черникова. *Укр. мат. журн.*, 51(3):291–304, 1999.

А. І. Плакош

ІНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ НАН УКРАЇНИ, М. КИЇВ

Email: andrianaplakoshmail@gmail.com

ORCID: 0000-0002-4269-5416