

Представлення деяких класів кватерніонних гіперголоморфних функцій

Т. С. Кузьменко, В. С. Шпаківський

Abstract. In the algebra of complex quaternions $\mathbb{H}(\mathbb{C})$ we consider the left- and right- ψ -hyperholomorphic functions, and left- $\Lambda - \psi$ -hyperholomorphic functions. We justify the transition in left- and right- ψ -hyperholomorphic functions to a simpler basis i.e., to the Cartan basis. Using Cartan's basis we find the solution of Cauchy-Fueter equation. By the same method we find representations of left- and right- ψ -hyperholomorphic functions, and representation of left- $\Lambda - \psi$ -hyperholomorphic functions.

Анотація. В алгебрі комплексних кватерніонів $\mathbb{H}(\mathbb{C})$ розглянуто ліво- і право- ψ -гіперголоморфні функції, а також ліво- $\Lambda - \psi$ -гіперголоморфні функції. Обґрунтовано перехід у ліво- і право- ψ -гіперголоморфних функціях до простішого базису, а саме до базису Картана. Використовуючи базис Картана, знайдено розв'язок рівняння Коші-Фуєтера. Таким же методом знайдено представлення ліво- і право- ψ -гіперголоморфних функцій, а також представлення ліво- $\Lambda - \psi$ -гіперголоморфних функцій.

1. ВСТУП

Основним об'єктом дослідження є множина, яку зазвичай називають множиною комплексних кватерніонів і яка традиційно позначається через $\mathbb{H}(\mathbb{C})$. Це асоціативна некомутативна алгебра над полем комплексних чисел, породжена елементами $1, I, J, K$ такими, що виконуються наступні правила множення:

$$I^2 = J^2 = K^2 = IJK = -1, \\ IJ = -JI = K, \quad JK = -KJ = I, \quad KI = -IK = J,$$

і комплексна уявна одиниця i комутує з I, J, K . Для алгебри $\mathbb{H}(\mathbb{C})$ також використовується назва — алгебра бікватерніонів.

This work was supported by grants from the Simons Foundation (1290607, V.S.S.)
2020 Mathematics Subject Classification: 30G35; 32A10

Ключові слова: комплексні кватерніони, базис Картана, ліво- і право- ψ -гіперголоморфна функція, ваговий оператор Дірака, рівняння типу Коші-Фуєтера, ліво- $\Lambda - \psi$ -гіперголоморфна функція

DOI: <https://doi.org/10.3842/trim.v21n1.543>

Розглянемо в $\mathbb{H}(\mathbb{C})$ інший базис $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$, який є базисом Картана [7], розклад елементів якого в базисі Гамільтона має вигляд:

$$e_1 = \frac{1}{2}(1 + iI), \quad e_2 = \frac{1}{2}(1 - iI), \quad (1.1)$$

де i — комплексна уявна одиниця.

Таблиця множення в базисі Картана подається у вигляді

$$\begin{array}{c|cc|cc} \cdot & e_1 & e_2 & e_3 & e_4 \\ \hline e_1 & e_1 & 0 & e_3 & 0 \\ e_2 & 0 & e_2 & 0 & e_4 \\ e_3 & 0 & e_3 & 0 & e_1 \\ e_4 & e_4 & 0 & e_2 & 0 \end{array} . \quad (1.2)$$

При цьому одиниця алгебри має розклад $1 = e_1 + e_2$.

Відмітимо, що підалгебра з базисом $\{e_1, e_2\}$ є алгеброю бікомплексних чисел $\mathbb{BC}$ або алгеброю комутативних кватерніонів Сегре (див., наприклад, [3, 16]).

Справедливі також рівності:

$$1 = e_1 + e_2, \quad I = -ie_1 + ie_2, \quad J = -ie_3 - ie_4, \quad K = e_4 - e_3. \quad (1.3)$$

Очевидно, що формули (1.1) і (1.3) є формулами переходу від базису Гамільтона до базису Картана і навпаки.

Разом з базисом Гамільтона і Картана розглянемо також базис Паулі. Відомо, що комплексні кватерніони можуть бути представлені через матриці Паулі:

$$\sigma_0 := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \sigma_1 := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 := \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

В цьому базисі таблиця множення набуває вигляду:

$$\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma_3^2 = \sigma_0, \quad \sigma_1\sigma_2\sigma_3 = i\sigma_0,$$

$$\sigma_1\sigma_2 = -\sigma_2\sigma_1 = i\sigma_3, \quad \sigma_2\sigma_3 = -\sigma_3\sigma_2 = i\sigma_1, \quad \sigma_1\sigma_3 = -\sigma_3\sigma_1 = i\sigma_2.$$

При цьому формули переходу від базису Картана до базису Паулі мають вигляд:

$$\begin{aligned} e_1 &= -\frac{1}{2}(\sigma_0 - \sigma_3), & e_2 &= \frac{1}{2}(\sigma_0 + \sigma_3), \\ e_3 &= \frac{1}{2}(-\sigma_2 - i\sigma_1), & e_4 &= \frac{1}{2}(-\sigma_2 + i\sigma_1). \end{aligned} \quad (1.4)$$

2. КЛАСИ ГІПЕРГОЛОМОРФНИХ ФУНКЦІЙ

Нехай $\psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_4$ — фіксовані елементи алгебри $\mathbb{H}(\mathbb{C})$ з наступним розкладом в базисі Картана:

$$\psi_1 := \sum_{s=1}^4 \alpha_s e_s, \quad \alpha_s \in \mathbb{C}, \quad \psi_2 := \sum_{s=1}^4 \beta_s e_s, \quad \beta_s \in \mathbb{C}, \quad (2.1)$$

$$\psi_3 := \sum_{s=1}^4 \gamma_s e_s, \quad \gamma_s \in \mathbb{C}, \quad \psi_4 := \sum_{s=1}^4 \delta_s e_s, \quad \delta_s \in \mathbb{C}.$$

Розглянемо змінну $z = z_1 e_1 + z_2 e_2 + z_3 e_3 + z_4 e_4$, $z_s \in \mathbb{C}$, $s = 1, 2, 3, 4$ і функцію

$$f(z) = \sum_{s=1}^4 f_s(z_1, z_2, z_3, z_4) e_s, \quad f_s : \Omega \rightarrow \mathbb{H}(\mathbb{C}),$$

де Ω — область в $\mathbb{C}^4$. Нехай компоненти f_s , $s = 1, 2, 3, 4$, — голоморфні функції чотирьох комплексних змінних z_1, z_2, z_3, z_4 в Ω .

Розглянемо оператори

$$\psi D[f](z) := \psi_1 \frac{\partial f}{\partial z_1} + \psi_2 \frac{\partial f}{\partial z_2} + \psi_3 \frac{\partial f}{\partial z_3} + \psi_4 \frac{\partial f}{\partial z_4}, \quad (2.2)$$

$$D^\psi[f](z) := \frac{\partial f}{\partial z_1} \psi_1 + \frac{\partial f}{\partial z_2} \psi_2 + \frac{\partial f}{\partial z_3} \psi_3 + \frac{\partial f}{\partial z_4} \psi_4. \quad (2.3)$$

Означення 2.1. Функція $f : \Omega \rightarrow \mathbb{H}(\mathbb{C})$, $\Omega \subset \mathbb{C}^4$, називається ліво- ψ -гіперголоморфною (або право- ψ -гіперголоморфною), якщо компоненти f_s є голоморфними функціями чотирьох комплексних змінних z_1, z_2, z_3, z_4 в Ω і f задовольняє рівняння

$$\psi D[f](z) = 0. \quad (2.4)$$

(або $D^\psi[f](z) = 0$.)

Клас ψ -гіперголоморфних функцій в алгебрі дійсних кватерніонів вперше було введено М. Шапіро та Н. Василевським в роботах [21, 22].

Такий клас функцій зацікавив багатьох дослідників. Зокрема, К. Гюрлебек та його учень Х. М. Нгуєн приділяють особливу увагу застосуванню ψ -гіперголоморфних функцій (див., наприклад, статті [5, 11, 12] та дисертацію Г. М. Нгуєна [17]). Зауважимо, що оператори (2.2) і (2.3) також називають ваговими операторами Дірака. Аналіз і застосування таких операторів вивчаються в статтях [23, 24].

Активно досліджуються різні узагальнення ψ -гіперголоморфних функцій. Останнім часом стали цікавими узагальнення на випадок дробових похідних (наприклад, роботи [9, 10]).

Також почали розглядати оператори більш загального вигляду ніж (2.2). А саме, у статті [8] досліджено оператор вигляду

$$\psi_{\Lambda} D[f] := \Lambda f + \psi_1 \frac{\partial f}{\partial z_1} + \psi_2 \frac{\partial f}{\partial z_2} + \psi_3 \frac{\partial f}{\partial z_3} + \psi_4 \frac{\partial f}{\partial z_4}, \quad \Lambda \in \mathbb{H}(\mathbb{C}). \quad (2.5)$$

Означення 2.2. Функція $f : \Omega \rightarrow \mathbb{H}(\mathbb{C})$, $\Omega \subset \mathbb{C}^4$, називається *ліво- Λ - ψ -гіперголоморфною*, якщо компоненти f_s є голоморфними функціями чотирьох комплексних змінних z_1, z_2, z_3, z_4 в Ω і f задовольняє рівняння

$$\psi_{\Lambda} D[f](z) = 0. \quad (2.6)$$

В роботі [2] розвинуто теорію так званих (ϕ, ψ) -гіперголоморфних функцій. Завдяки матричному підходу, для таких функцій узагальнено формулу Бореля–Помпею та встановлено формули Племеля–Сохоцького. Дослідження [2] було продовжено в статтях [1, 18–20].

Разом з тим залишається відкритою проблема представлення (або опису в явному вигляді) ψ -гіперголоморфних і ліво- Λ - ψ -гіперголоморфних функцій. Ця робота присвячена вивченню саме цього питання.

2.1. Приклади. Спочатку розглянемо приклади ліво- і право- ψ -гіперголоморфних функцій.

Приклад 2.1. Розглянемо область $\Omega \subset \mathbb{C}^2 \simeq \mathbb{BC}$, змінну $\zeta = z_1 e_1 + z_2 e_2$ і функцію $f : \Omega \rightarrow \mathbb{H}(\mathbb{C})$ вигляду

$$f = \sum_{s=1}^4 f_s(z_1, z_2) e_s, \quad f_s : \Omega \rightarrow \mathbb{C}.$$

Це слід розуміти наступним чином. Ми ототожнюємо $\mathbb{C}^2$ з $\mathbb{BC}$. Після цього множина Ω в $\mathbb{BC}$ стає підмножиною в $\mathbb{H}(\mathbb{C})$, а не в $\mathbb{C}^2$. Далі ми розглядаємо деякі об'єкти як такі, що знаходяться в $\mathbb{H}(\mathbb{C})$. Зокрема, множина Ω знаходиться в $\mathbb{H}(\mathbb{C})$. Тому ми працюємо з функціями, які визначені і приймають значення в $\mathbb{H}(\mathbb{C})$. Тобто, ζ міститься в області з $\mathbb{H}(\mathbb{C})$: ми все вкладаємо в $\mathbb{H}(\mathbb{C})$.

Враховуючи такі припущення, введемо наступні означення.

Функція $f : \Omega \rightarrow \mathbb{H}(\mathbb{C})$, $\Omega \subset \mathbb{BC}$, називається *право- $\mathbb{BC}$ -гіперголоморфною*, якщо існує елементи алгебри $\mathbb{H}(\mathbb{C})$ $f'_r(\zeta)$ такий, що

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{f(\zeta + \varepsilon h) - f(\zeta)}{\varepsilon} = h \cdot f'_r(\zeta) \quad \forall h \in \mathbb{BC}. \quad (2.7)$$

Функція $f : \Omega \rightarrow \mathbb{H}(\mathbb{C})$, $\Omega \subset \mathbb{BC}$, називається *ліво- $\mathbb{BC}$ -гіперголоморфною*, якщо існує елемент алгебри $\mathbb{H}(\mathbb{C})$ $f'_l(\zeta)$ такий, що

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{f(\zeta + \varepsilon h) - f(\zeta)}{\varepsilon} = f'_l(\zeta) \cdot h \quad \forall h \in \mathbb{BC}. \quad (2.8)$$

Умова (2.7) означає, що

$$\frac{\partial f}{\partial z_1} = e_1 f'_r(\zeta) \quad \text{при} \quad h = e_1 \quad (2.9)$$

і

$$\frac{\partial f}{\partial z_2} = e_2 f'_r(\zeta) \quad \text{при} \quad h = e_2. \quad (2.10)$$

З рівностей (2.9) і (2.10) випливає аналог умов Коші-Рімана

$$e_2 \frac{\partial f}{\partial z_1} = e_1 \frac{\partial f}{\partial z_2}. \quad (2.11)$$

Аналогічно, з рівності (2.8) випливає

$$\frac{\partial f}{\partial z_1} e_2 = \frac{\partial f}{\partial z_2} e_1. \quad (2.12)$$

Отже, право- і ліво- $\mathbb{BC}$ -гіперголоморфна функція є узагальненням теорії голоморфних функцій в алгебрі $\mathbb{BC}$ (див., наприклад, [3, 16]).

Легко побачити, що множина право- $\mathbb{BC}$ -гіперголоморфних функцій і ліво- $\mathbb{BC}$ -гіперголоморфних функцій є підмножиною ліво- ψ -гіперголоморфних і право- ψ -гіперголоморфних функцій, відповідно. Справді, для $\zeta = z_1 e_1 + z_2 e_2$ рівність (2.11) набуває вигляду (2.4) при $\psi_1 = e_2$, $\psi_2 = -e_1$, $\psi_3 = \psi_4 = 0$. Аналогічно, право- $\mathbb{BC}$ -гіперголоморфні функції є підмножиною право- ψ -гіперголоморфних функцій.

Ще один приклад відображень з області в $\mathbb{R}^3$ в алгебру $\mathbb{H}(\mathbb{C})$, який є частинним випадком ліво- і право- ψ -гіперголоморфних функцій, розглянуто в роботах [13, 14].

В рівності (2.4) покладемо $\psi_1 = 1$, $\psi_2 = I$, $\psi_3 = J$, $\psi_4 = K$. У цьому випадку

$$\alpha_1 = \alpha_2 = 1, \quad \alpha_3 = \alpha_4 = 0, \quad \beta_1 = -i, \quad \beta_2 = i, \quad \beta_3 = \beta_4 = 0,$$

$$\gamma_1 = \gamma_2 = 0, \quad \gamma_3 = -i, \quad \gamma_4 = -i, \quad \delta_1 = \delta_2 = 0, \quad \delta_3 = -1, \quad \delta_4 = 1.$$

Тоді рівність (2.4) набуває вигляду

$$\frac{\partial f}{\partial z_1} + I \frac{\partial f}{\partial z_2} + J \frac{\partial f}{\partial z_3} + K \frac{\partial f}{\partial z_4} = 0$$

— добре відоме рівняння типу Коші-Фуєтера (див., наприклад, [6, 15]).

2.2. Основна властивість ліво- і право- ψ -гіперголоморфних функцій.

Теорема 2.1. *Нехай функція f ліво- ψ -гіперголоморфна (або право- ψ -гіперголоморфна) в деякому базисі алгебри $\mathbb{H}(\mathbb{C})$. Тоді в іншому базисі алгебри $\mathbb{H}(\mathbb{C})$ існує набір функцій $\Psi := (\Psi_1, \Psi_2, \Psi_3, \Psi_4)$, $\Psi_s \in \mathbb{H}(\mathbb{C})$, $s = 1, 2, 3, 4$, таких, що функція f є ліво- Ψ -гіперголоморфною (або право- Ψ -гіперголоморфною).*

Доведення. Доведемо цю теорему у випадку ліво- ψ -гіперголоморфних функцій. Нехай $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ — базис Картана в $\mathbb{H}(\mathbb{C})$ і $\{i_1, i_2, i_3, i_4\}$ — інший базис в $\mathbb{H}(\mathbb{C})$. Це означає, що

$$\begin{aligned} e_1 &= k_1 i_1 + k_2 i_2 + k_3 i_3 + k_4 i_4, \\ e_2 &= m_1 i_1 + m_2 i_2 + m_3 i_3 + m_4 i_4, \\ e_3 &= n_1 i_1 + n_2 i_2 + n_3 i_3 + n_4 i_4, \\ e_4 &= r_1 i_1 + r_2 i_2 + r_3 i_3 + r_4 i_4, \end{aligned}$$

де k_i, m_i, n_i, r_i при $i = 1, 2, 3, 4$, — комплексні числа.

Розглянемо рівність

$${}^\psi D[f](t) := \psi_1 \frac{\partial f}{\partial t_1} + \psi_2 \frac{\partial f}{\partial t_2} + \psi_3 \frac{\partial f}{\partial t_3} + \psi_4 \frac{\partial f}{\partial t_4} = 0, \quad (2.13)$$

де $t := t_1 e_1 + t_2 e_2 + t_3 e_3 + t_4 e_4$, $t_1, t_2, t_3, t_4 \in \mathbb{C}$. У змінній t перейдемо до базису $\{i_1, i_2, i_3, i_4\}$. Тоді

$$\begin{aligned} t &= i_1(t_1 k_1 + t_2 m_1 + t_3 n_1 + t_4 r_1) + i_2(t_1 k_2 + t_2 m_2 + t_3 n_2 + t_4 r_2) \\ &\quad + i_3(t_1 k_3 + t_2 m_3 + t_3 n_3 + t_4 r_3) + i_4(t_1 k_4 + t_2 m_4 + t_3 n_4 + t_4 r_4). \end{aligned}$$

Покладемо

$$\begin{aligned} z_1 &:= t_1 k_1 + t_2 m_1 + t_3 n_1 + t_4 r_1, \\ z_2 &:= t_1 k_2 + t_2 m_2 + t_3 n_2 + t_4 r_2, \\ z_3 &:= t_1 k_3 + t_2 m_3 + t_3 n_3 + t_4 r_3, \\ z_4 &:= t_1 k_4 + t_2 m_4 + t_3 n_4 + t_4 r_4. \end{aligned} \quad (2.14)$$

З рівностей (2.14) отримаємо

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial t_1} &= k_1 \frac{\partial f}{\partial z_1} + k_2 \frac{\partial f}{\partial z_2} + k_3 \frac{\partial f}{\partial z_3} + k_4 \frac{\partial f}{\partial z_4}, \\ \frac{\partial f}{\partial t_2} &= m_1 \frac{\partial f}{\partial z_1} + m_2 \frac{\partial f}{\partial z_2} + m_3 \frac{\partial f}{\partial z_3} + m_4 \frac{\partial f}{\partial z_4}, \\ \frac{\partial f}{\partial t_3} &= n_1 \frac{\partial f}{\partial z_1} + n_2 \frac{\partial f}{\partial z_2} + n_3 \frac{\partial f}{\partial z_3} + n_4 \frac{\partial f}{\partial z_4}, \\ \frac{\partial f}{\partial t_4} &= r_1 \frac{\partial f}{\partial z_1} + r_2 \frac{\partial f}{\partial z_2} + r_3 \frac{\partial f}{\partial z_3} + r_4 \frac{\partial f}{\partial z_4}. \end{aligned}$$

Тоді рівність (2.13) рівносильна наступній рівності:

$$\begin{aligned} {}^\psi D[f](t) = & (\psi_1 k_1 + \psi_2 m_1 + \psi_3 n_1 + \psi_4 r_1) \frac{\partial f}{\partial z_1} + (\psi_1 k_2 + \psi_2 m_2 + \psi_3 n_2 + \psi_4 r_2) \frac{\partial f}{\partial z_2} \\ & + (\psi_1 k_3 + \psi_2 m_3 + \psi_3 n_3 + \psi_4 r_3) \frac{\partial f}{\partial z_3} + (\psi_1 k_4 + \psi_2 m_4 + \psi_3 n_4 + \psi_4 r_4) \frac{\partial f}{\partial z_4}. \end{aligned} \quad (2.15)$$

Використовуючи позначення (2.1), маємо:

$$\begin{aligned} \psi_1 &= \sum_{s=1}^4 \alpha_s e_s = \sum_{s=1}^4 i_s (\alpha_1 k_s + \alpha_2 m_s + \alpha_3 n_s + \alpha_4 r_s), \\ \psi_2 &= \sum_{s=1}^4 \beta_s e_s = \sum_{s=1}^4 i_s (\beta_1 k_s + \beta_2 m_s + \beta_3 n_s + \beta_4 r_s), \\ \psi_3 &= \sum_{s=1}^4 \gamma_s e_s = \sum_{s=1}^4 i_s (\gamma_1 k_s + \gamma_2 m_s + \gamma_3 n_s + \gamma_4 r_s), \\ \psi_4 &= \sum_{s=1}^4 \delta_s e_s = \sum_{s=1}^4 i_s (\delta_1 k_s + \delta_2 m_s + \delta_3 n_s + \delta_4 r_s), \end{aligned}$$

З (2.15) отримаємо

$$\begin{aligned} {}^\psi D[f](t) = & \sum_{s=1}^4 i_s \left[(\alpha_1 k_s + \alpha_2 m_s + \alpha_3 n_s + \alpha_4 r_s) k_1 + (\beta_1 k_s + \beta_2 m_s + \beta_3 n_s + \beta_4 r_s) m_1 \right. \\ & \left. + (\gamma_1 k_s + \gamma_2 m_s + \gamma_3 n_s + \gamma_4 r_s) n_1 + (\delta_1 k_s + \delta_2 m_s + \delta_3 n_s + \delta_4 r_s) r_1 \right] \frac{\partial f}{\partial z_1} \\ & + \sum_{s=1}^4 i_s \left[(\alpha_1 k_s + \alpha_2 m_s + \alpha_3 n_s + \alpha_4 r_s) k_2 + (\beta_1 k_s + \beta_2 m_s + \beta_3 n_s + \beta_4 r_s) m_2 \right. \\ & \left. + (\gamma_1 k_s + \gamma_2 m_s + \gamma_3 n_s + \gamma_4 r_s) n_2 + (\delta_1 k_s + \delta_2 m_s + \delta_3 n_s + \delta_4 r_s) r_2 \right] \frac{\partial f}{\partial z_2} \\ & + \sum_{s=1}^4 i_s \left[(\alpha_1 k_s + \alpha_2 m_s + \alpha_3 n_s + \alpha_4 r_s) k_3 + (\beta_1 k_s + \beta_2 m_s + \beta_3 n_s + \beta_4 r_s) m_3 \right. \\ & \left. + (\gamma_1 k_s + \gamma_2 m_s + \gamma_3 n_s + \gamma_4 r_s) n_3 + (\delta_1 k_s + \delta_2 m_s + \delta_3 n_s + \delta_4 r_s) r_3 \right] \frac{\partial f}{\partial z_3} \\ & + \sum_{s=1}^4 i_s \left[(\alpha_1 k_s + \alpha_2 m_s + \alpha_3 n_s + \alpha_4 r_s) k_4 + (\beta_1 k_s + \beta_2 m_s + \beta_3 n_s + \beta_4 r_s) m_4 \right. \\ & \left. + (\gamma_1 k_s + \gamma_2 m_s + \gamma_3 n_s + \gamma_4 r_s) n_4 + (\delta_1 k_s + \delta_2 m_s + \delta_3 n_s + \delta_4 r_s) r_4 \right] \frac{\partial f}{\partial z_4} \\ & =: \Psi_1 \frac{\partial f}{\partial z_1} + \Psi_2 \frac{\partial f}{\partial z_2} + \Psi_3 \frac{\partial f}{\partial z_3} + \Psi_4 \frac{\partial f}{\partial z_4} = 0. \end{aligned}$$

□

Зауваження 2.1. З цієї теореми випливає, що надалі достатньо розглядати константи ψ і функцію f в найпростішому базисі, тобто в базисі Картана.

Зауваження 2.2. Відомо, що в алгебрах Кліффорда рівності

$$\frac{\partial f}{\partial t_0} + I \frac{\partial f}{\partial t_1} + J \frac{\partial f}{\partial t_2} + K \frac{\partial f}{\partial t_3} = 0$$

і ${}^\psi D[f](t) = 0$ співпадають з точністю до ортогонального перетворення.

Зазначимо, що теорема 2.1 є саме цим твердженням, але сформульоване в інших термінах.

3. ЗАСТОСУВАННЯ ДО РОЗВ'ЯЗАННЯ РІВНЯННЯ ТИПУ КОШІ–ФУЕТЕРА

Тепер встановимо зв'язок між розв'язками рівняння

$$D[f](t) := \frac{\partial f}{\partial t_0} + I \frac{\partial f}{\partial t_1} + J \frac{\partial f}{\partial t_2} + K \frac{\partial f}{\partial t_3} = 0, \quad (3.1)$$

де $t := t_0 + t_1 I + t_2 J + t_3 K$, $t_0, t_1, t_2, t_3 \in \mathbb{C}$, і розв'язками рівняння (2.4). З цією метою в змінній t перейдемо до базису Картана. Тоді

$$\begin{aligned} t &= t_0(e_1 + e_2) + t_1(-ie_1 + ie_2) + t_2(-ie_3 - ie_4) + t_3(e_4 - e_3) \\ &= (t_0 - it_1)e_1 + (t_0 + it_1)e_2 + (-it_2 - t_3)e_3 + (-it_2 + t_3)e_4. \end{aligned}$$

Позначимо через

$$z_1 := t_0 - it_1, \quad z_2 := t_0 + it_1, \quad z_3 := -it_2 - t_3, \quad z_4 := -it_2 + t_3. \quad (3.2)$$

З рівностей (3.2) отримаємо

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial t_0} &= \frac{\partial f}{\partial z_1} + \frac{\partial f}{\partial z_2}, & \frac{\partial f}{\partial t_1} &= -i \frac{\partial f}{\partial z_1} + i \frac{\partial f}{\partial z_2}, \\ \frac{\partial f}{\partial t_2} &= -i \frac{\partial f}{\partial z_3} - i \frac{\partial f}{\partial z_4}, & \frac{\partial f}{\partial t_3} &= -\frac{\partial f}{\partial z_3} + \frac{\partial f}{\partial z_4}. \end{aligned}$$

Тоді рівняння (3.1) рівносильне рівнянню

$$\begin{aligned} D[f] &= \frac{\partial f}{\partial z_1} + \frac{\partial f}{\partial z_2} - iI \frac{\partial f}{\partial z_1} + iI \frac{\partial f}{\partial z_2} - iJ \frac{\partial f}{\partial z_3} - iJ \frac{\partial f}{\partial z_4} - K \frac{\partial f}{\partial z_3} + K \frac{\partial f}{\partial z_4} \\ &= (1 - iI) \frac{\partial f}{\partial z_1} + (1 + iI) \frac{\partial f}{\partial z_2} + (-iJ - K) \frac{\partial f}{\partial z_3} + (-iJ + K) \frac{\partial f}{\partial z_4} \\ &= 2 \left(e_2 \frac{\partial f}{\partial z_1} + e_1 \frac{\partial f}{\partial z_2} - e_4 \frac{\partial f}{\partial z_3} - e_3 \frac{\partial f}{\partial z_4} \right) = 0. \end{aligned}$$

Таким чином доведено теорему.

Теорема 3.1. *Функція f змінної $t = t_0 + t_1I + t_2J + t_3K$ задовольняє рівняння (3.1) тоді і тільки тоді, коли функція f змінної $z = z_1e_1 + z_2e_2 + z_3e_3 + z_4e_4$ задовольняє рівняння*

$$e_2 \frac{\partial f}{\partial z_1} + e_1 \frac{\partial f}{\partial z_2} - e_4 \frac{\partial f}{\partial z_3} - e_3 \frac{\partial f}{\partial z_4} = 0, \quad (3.3)$$

де z і t пов'язані співвідношеннями (3.2).

Тепер розв'яжемо рівняння (3.3).

$$\begin{aligned} e_2 \frac{\partial f}{\partial z_1} &= e_2 \left(\frac{\partial f_1}{\partial z_1} e_1 + \frac{\partial f_2}{\partial z_1} e_2 + \frac{\partial f_3}{\partial z_1} e_3 + \frac{\partial f_4}{\partial z_1} e_4 \right) = \frac{\partial f_2}{\partial z_1} e_2 + \frac{\partial f_4}{\partial z_1} e_4, \\ e_1 \frac{\partial f}{\partial z_2} &= \frac{\partial f_1}{\partial z_2} e_1 + \frac{\partial f_3}{\partial z_2} e_3, \\ e_4 \frac{\partial f}{\partial z_3} &= \frac{\partial f_1}{\partial z_3} e_4 + \frac{\partial f_3}{\partial z_3} e_2, \\ e_3 \frac{\partial f}{\partial z_4} &= \frac{\partial f_2}{\partial z_4} e_3 + \frac{\partial f_4}{\partial z_4} e_1. \end{aligned}$$

Рівняння (3.3) рівносильне системі рівнянь

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_1}{\partial z_2} &= \frac{\partial f_4}{\partial z_4}, & \frac{\partial f_2}{\partial z_1} &= \frac{\partial f_3}{\partial z_3}, \\ \frac{\partial f_3}{\partial z_2} &= \frac{\partial f_2}{\partial z_4}, & \frac{\partial f_4}{\partial z_1} &= \frac{\partial f_1}{\partial z_3}. \end{aligned}$$

Маємо дві незалежні системи

$$\frac{\partial f_1}{\partial z_2} = \frac{\partial f_4}{\partial z_4}, \quad \frac{\partial f_1}{\partial z_3} = \frac{\partial f_4}{\partial z_1} \quad (3.4)$$

і

$$\frac{\partial f_2}{\partial z_1} = \frac{\partial f_3}{\partial z_3}, \quad \frac{\partial f_2}{\partial z_4} = \frac{\partial f_3}{\partial z_2}. \quad (3.5)$$

Розв'язком системи (3.4) в однозв'язній області Ω є довільна голоморфна функція

$$f_1 = f_1(z_2, z_3)$$

і

$$f_4 = z_4 \frac{\partial f_1}{\partial z_2} + z_1 \frac{\partial f_1}{\partial z_3}.$$

Розв'язком системи (3.5) в однозв'язній області Ω є довільна голоморфна функція

$$f_2 = f_2(z_1, z_4)$$

і

$$f_3 = z_3 \frac{\partial f_2}{\partial z_1} + z_2 \frac{\partial f_2}{\partial z_4}.$$

Отже, маємо розв'язок рівняння (3.3):

$$\begin{aligned} f(z) &= f_1(z_2, z_3)e_1 + f_2(z_1, z_4)e_2 \\ &+ \left(z_3 \frac{\partial f_2}{\partial z_1} + z_2 \frac{\partial f_2}{\partial z_4} \right) e_3 + \left(z_4 \frac{\partial f_1}{\partial z_2} + z_1 \frac{\partial f_1}{\partial z_3} \right) e_4. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Таким чином, згідно з теоремою 3.1 ми отримали

Теорема 3.2. *В однозв'язній області функція (3.6), де z_1, z_2, z_3, z_4 задані співвідношеннями (3.2), задовольняє рівність (3.1).*

Твердження 3.1. *В однозв'язній області функція (3.6) задовольняє чотиривимірне комплексне рівняння Лапласа*

$$\Delta_{\mathbb{C}^4} f := \frac{\partial^2 f}{\partial t_1^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial t_2^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial t_3^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial t_4^2} = 0. \quad (3.7)$$

Про рівняння (3.7) та його зв'язок з рівнянням Коші-Фуєтера див. у [15].

4. ПРЕДСТАВЛЕННЯ ЛІВО- ψ -ГІПЕРГОЛОМОРФНИХ ФУНКЦІЙ У СПЕЦІАЛЬНОМУ ВИПАДКУ

Знайдемо загальний розв'язок рівняння (2.4) для спеціального вибору параметрів ψ_1, ψ_2, ψ_3 і ψ_4 . З цією метою, перетворимо рівняння (2.4) в систему чотирьох диференціальних рівнянь в частинних похідних. Тепер маємо

$$\begin{aligned} \psi_1 \frac{\partial f}{\partial z_1} &= (\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3 + \alpha_4 e_4) \left(\frac{\partial f_1}{\partial z_1} e_1 + \frac{\partial f_2}{\partial z_1} e_2 + \frac{\partial f_3}{\partial z_1} e_3 + \frac{\partial f_4}{\partial z_1} e_4 \right) \\ &= \frac{\partial f_1}{\partial z_1} \alpha_1 e_1 + \frac{\partial f_3}{\partial z_1} \alpha_1 e_3 + \frac{\partial f_2}{\partial z_1} \alpha_2 e_2 + \frac{\partial f_4}{\partial z_1} \alpha_2 e_4 \\ &\quad + \frac{\partial f_2}{\partial z_1} \alpha_3 e_3 + \frac{\partial f_4}{\partial z_1} \alpha_3 e_1 + \frac{\partial f_1}{\partial z_1} \alpha_4 e_4 + \frac{\partial f_3}{\partial z_1} \alpha_4 e_2 \\ &= \frac{\partial}{\partial z_1} (\alpha_1 f_1 + \alpha_3 f_4) e_1 + \frac{\partial}{\partial z_1} (\alpha_2 f_2 + \alpha_4 f_3) e_2 \\ &\quad + \frac{\partial}{\partial z_1} (\alpha_1 f_3 + \alpha_3 f_2) e_3 + \frac{\partial}{\partial z_1} (\alpha_2 f_4 + \alpha_4 f_1) e_4. \end{aligned}$$

Аналогічно,

$$\begin{aligned} \psi_2 \frac{\partial f}{\partial z_2} &= \frac{\partial}{\partial z_2} (\beta_1 f_1 + \beta_3 f_4) e_1 + \frac{\partial}{\partial z_2} (\beta_2 f_2 + \beta_4 f_3) e_2 \\ &\quad + \frac{\partial}{\partial z_2} (\beta_1 f_3 + \beta_3 f_2) e_3 + \frac{\partial}{\partial z_2} (\beta_2 f_4 + \beta_4 f_1) e_4, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\psi_3 \frac{\partial f}{\partial z_3} &= \frac{\partial}{\partial z_3} (\gamma_1 f_1 + \gamma_3 f_4) e_1 + \frac{\partial}{\partial z_3} (\gamma_2 f_2 + \gamma_4 f_3) e_2 \\
&+ \frac{\partial}{\partial z_3} (\gamma_1 f_3 + \gamma_3 f_2) e_3 + \frac{\partial}{\partial z_3} (\gamma_2 f_4 + \gamma_4 f_1) e_4, \\
\psi_4 \frac{\partial f}{\partial z_4} &= \frac{\partial}{\partial z_4} (\delta_1 f_1 + \delta_3 f_4) e_1 + \frac{\partial}{\partial z_4} (\delta_2 f_2 + \delta_4 f_3) e_2 \\
&+ \frac{\partial}{\partial z_4} (\delta_1 f_3 + \delta_3 f_2) e_3 + \frac{\partial}{\partial z_4} (\delta_2 f_4 + \delta_4 f_1) e_4.
\end{aligned}$$

Тоді рівняння (2.4) рівносильне системі

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial z_1} (\alpha_1 f_1 + \alpha_3 f_4) + \frac{\partial}{\partial z_2} (\beta_1 f_1 + \beta_3 f_4) + \frac{\partial}{\partial z_3} (\gamma_1 f_1 + \gamma_3 f_4) + \frac{\partial}{\partial z_4} (\delta_1 f_1 + \delta_3 f_4) &= 0, \\
\frac{\partial}{\partial z_1} (\alpha_2 f_2 + \alpha_4 f_3) + \frac{\partial}{\partial z_2} (\beta_2 f_2 + \beta_4 f_3) + \frac{\partial}{\partial z_3} (\gamma_2 f_2 + \gamma_4 f_3) + \frac{\partial}{\partial z_4} (\delta_2 f_2 + \delta_4 f_3) &= 0, \\
\frac{\partial}{\partial z_1} (\alpha_1 f_3 + \alpha_3 f_2) + \frac{\partial}{\partial z_2} (\beta_1 f_3 + \beta_3 f_2) + \frac{\partial}{\partial z_3} (\gamma_1 f_3 + \gamma_3 f_2) + \frac{\partial}{\partial z_4} (\delta_1 f_3 + \delta_3 f_2) &= 0, \\
\frac{\partial}{\partial z_1} (\alpha_2 f_4 + \alpha_4 f_1) + \frac{\partial}{\partial z_2} (\beta_2 f_4 + \beta_4 f_1) + \frac{\partial}{\partial z_3} (\gamma_2 f_4 + \gamma_4 f_1) + \frac{\partial}{\partial z_4} (\delta_2 f_4 + \delta_4 f_1) &= 0.
\end{aligned} \tag{4.1}$$

Теорема 4.1. *Нехай*

$$\begin{aligned}
\psi_1 &= \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3 + \alpha_4 e_4, & \alpha_1 \alpha_2 &\neq \alpha_3 \alpha_4, \\
\psi_2 &= \lambda \alpha_1 e_1 + \mu \alpha_2 e_2 + \mu \alpha_3 e_3 + \lambda \alpha_4 e_4, \\
\psi_3 &= \theta \alpha_1 e_1 + \vartheta \alpha_2 e_2 + \vartheta \alpha_3 e_3 + \theta \alpha_4 e_4, \\
\psi_4 &= \nu \alpha_1 e_1 + \eta \alpha_2 e_2 + \eta \alpha_3 e_3 + \nu \alpha_4 e_4,
\end{aligned} \tag{4.2}$$

де $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \lambda, \mu, \theta, \vartheta, \nu, \eta$ — довільні комплексні числа. Тоді кожна ліво- ψ -гіперголоморфна функція набуває вигляду

$$f(z) = f_1(\tilde{\zeta}_2, \tilde{\zeta}_3, \tilde{\zeta}_4) e_1 + f_2(\zeta_2, \zeta_3, \zeta_4) e_2 + f_3(\tilde{\zeta}_2, \tilde{\zeta}_3, \tilde{\zeta}_4) e_3 + f_4(\zeta_2, \zeta_3, \zeta_4) e_4, \tag{4.3}$$

де

$$\begin{aligned}
\tilde{\zeta}_2 &:= \lambda z_1 - z_2, & \tilde{\zeta}_3 &:= \theta z_1 - z_3, & \tilde{\zeta}_4 &:= \nu z_1 - z_4, \\
\zeta_2 &:= \mu z_1 - z_2, & \zeta_3 &:= \vartheta z_1 - z_3, & \zeta_4 &:= \eta z_1 - z_4,
\end{aligned} \tag{4.4}$$

і f_1, f_2, f_3, f_4 — довільні голоморфні функції своїх трьох аргументів.

Доведення. Для вибраних параметрів (4.2) перше рівняння системи (4.1) набуває вигляду

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial z_1} (\alpha_1 f_1 + \alpha_3 f_4) + \frac{\partial}{\partial z_2} (\lambda \alpha_1 f_1 + \mu \alpha_3 f_4) \\ & + \frac{\partial}{\partial z_3} (\theta \alpha_1 f_1 + \vartheta \alpha_3 f_4) + \frac{\partial}{\partial z_4} (\nu \alpha_1 f_1 + \eta \alpha_3 f_4) = 0. \end{aligned} \quad (4.5)$$

Аналогічно, для вибраних параметрів (4.2) четверте рівняння системи (4.1) набуває вигляду

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial z_1} (\alpha_4 f_1 + \alpha_2 f_4) + \frac{\partial}{\partial z_2} (\lambda \alpha_4 f_1 + \mu \alpha_2 f_4) \\ & + \frac{\partial}{\partial z_3} (\theta \alpha_4 f_1 + \vartheta \alpha_2 f_4) + \frac{\partial}{\partial z_4} (\nu \alpha_4 f_1 + \eta \alpha_2 f_4) = 0. \end{aligned} \quad (4.6)$$

Розглянемо різницю між рівнянням (4.5), домноженим на α_2 , і рівнянням (4.6), домноженим на α_3 . Тоді отримаємо рівність

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial z_1} \left(f_1 (\alpha_1 \alpha_2 - \alpha_3 \alpha_4) + f_4 (\alpha_2 \alpha_3 - \alpha_2 \alpha_3) \right) \\ & + \frac{\partial}{\partial z_2} \left(f_1 (\lambda \alpha_1 \alpha_2 - \lambda \alpha_3 \alpha_4) + f_4 (\mu \alpha_2 \alpha_3 - \mu \alpha_2 \alpha_3) \right) \\ & + \frac{\partial}{\partial z_3} \left(f_1 (\theta \alpha_1 \alpha_2 - \theta \alpha_3 \alpha_4) + f_4 (\vartheta \alpha_2 \alpha_3 - \vartheta \alpha_2 \alpha_3) \right) \\ & + \frac{\partial}{\partial z_4} \left(f_1 (\nu \alpha_1 \alpha_2 - \nu \alpha_3 \alpha_4) + f_4 (\eta \alpha_2 \alpha_3 - \eta \alpha_2 \alpha_3) \right) = 0. \end{aligned}$$

Отже, маємо

$$\frac{\partial f_1}{\partial z_1} + \lambda \frac{\partial f_1}{\partial z_2} + \theta \frac{\partial f_1}{\partial z_3} + \nu \frac{\partial f_1}{\partial z_4} = 0. \quad (4.7)$$

Для рівняння (4.7) розглянемо характеристичне рівняння

$$\frac{dz_1}{1} = \frac{dz_2}{\lambda} = \frac{dz_3}{\theta} = \frac{dz_4}{\nu}. \quad (4.8)$$

Розв'язками системи (4.8) є інтеграли

$$c_2 = \lambda z_1 - z_2, \quad c_3 = \theta z_1 - z_3, \quad c_4 = \nu z_1 - z_4.$$

Отже, загальний розв'язок рівняння (4.7) має вигляд

$$f_1 = f_1(\tilde{\zeta}_2, \tilde{\zeta}_3, \tilde{\zeta}_4),$$

де $\tilde{\zeta}_2, \tilde{\zeta}_3, \tilde{\zeta}_4$ визначені рівностями (4.4).

Відмітимо, що поліноми (4.4) є аналогами добре відомих поліномів Фуєтера [4].

Аналогічно можна отримати представлення для компонент f_2, f_3, f_4 . $\square$

Отже, формула (4.3) дає представлення ліво- ψ -гіперголоморфної функції за умови спеціального вибору ψ .

Зауваження 4.1. Використовуючи формули (1.4), можна записати представлення (4.3) в базисі Паулі:

$$f(z) = \left(f_1(\tilde{\zeta}_2, \tilde{\zeta}_3, \tilde{\zeta}_4) + f_2(\zeta_2, \zeta_3, \zeta_4) \right) \sigma_0 + \left(i f_3(\tilde{\zeta}_2, \tilde{\zeta}_3, \tilde{\zeta}_4) - i f_4(\zeta_2, \zeta_3, \zeta_4) \right) \sigma_1 \\ + \left(-f_3(\tilde{\zeta}_2, \tilde{\zeta}_3, \tilde{\zeta}_4) - f_4(\zeta_2, \zeta_3, \zeta_4) \right) \sigma_2 + \left(f_2(\zeta_2, \zeta_3, \zeta_4) - f_1(\tilde{\zeta}_2, \tilde{\zeta}_3, \tilde{\zeta}_4) \right) \sigma_3.$$

5. ПРЕДСТАВЛЕННЯ ПРАВО- ψ -ГІПЕРГОЛОМОРФНИХ ФУНКЦІЙ У СПЕЦІАЛЬНОМУ ВИПАДКУ

В цьому розділі будемо шукати загальний розв'язок рівняння

$$D^\psi[f](z) = \frac{\partial f}{\partial z_1} \psi_1 + \frac{\partial f}{\partial z_2} \psi_2 + \frac{\partial f}{\partial z_3} \psi_3 + \frac{\partial f}{\partial z_4} \psi_4 = 0 \quad (5.1)$$

при спеціальному виборі параметрів ψ_1, ψ_2, ψ_3 і ψ_4 . З цією метою перетворимо рівняння (5.1) в систему чотирьох диференціальних рівнянь в частинних похідних. Маємо

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial z_1} \psi_1 &= \left(\frac{\partial f_1}{\partial z_1} e_1 + \frac{\partial f_2}{\partial z_1} e_2 + \frac{\partial f_3}{\partial z_1} e_3 + \frac{\partial f_4}{\partial z_1} e_4 \right) (\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3 + \alpha_4 e_4) \\ &= \frac{\partial f_1}{\partial z_1} \alpha_1 e_1 + \frac{\partial f_1}{\partial z_1} \alpha_3 e_3 + \frac{\partial f_2}{\partial z_1} \alpha_2 e_2 + \frac{\partial f_2}{\partial z_1} \alpha_4 e_4 \\ &\quad + \frac{\partial f_3}{\partial z_1} \alpha_2 e_3 + \frac{\partial f_3}{\partial z_1} \alpha_4 e_1 + \frac{\partial f_4}{\partial z_1} \alpha_1 e_4 + \frac{\partial f_4}{\partial z_1} \alpha_3 e_2 \\ &= \frac{\partial}{\partial z_1} (\alpha_1 f_1 + \alpha_4 f_3) e_1 + \frac{\partial}{\partial z_1} (\alpha_2 f_2 + \alpha_3 f_4) e_2 \\ &\quad + \frac{\partial}{\partial z_1} (\alpha_3 f_1 + \alpha_2 f_3) e_3 + \frac{\partial}{\partial z_1} (\alpha_4 f_2 + \alpha_1 f_4) e_4. \end{aligned}$$

Аналогічно,

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial z_2} \psi_2 &= \frac{\partial}{\partial z_2} (\beta_1 f_1 + \beta_4 f_3) e_1 + \frac{\partial}{\partial z_2} (\beta_2 f_2 + \beta_3 f_4) e_2 \\ &\quad + \frac{\partial}{\partial z_2} (\beta_3 f_1 + \beta_2 f_3) e_3 + \frac{\partial}{\partial z_2} (\beta_4 f_2 + \beta_1 f_4) e_4, \\ \frac{\partial f}{\partial z_3} \psi_3 &= \frac{\partial}{\partial z_3} (\gamma_1 f_1 + \gamma_4 f_3) e_1 + \frac{\partial}{\partial z_3} (\gamma_2 f_2 + \gamma_3 f_4) e_2 \\ &\quad + \frac{\partial}{\partial z_3} (\gamma_3 f_1 + \gamma_2 f_3) e_3 + \frac{\partial}{\partial z_3} (\gamma_4 f_2 + \gamma_1 f_4) e_4, \\ \frac{\partial f}{\partial z_4} \psi_4 &= \frac{\partial}{\partial z_4} (\delta_1 f_1 + \delta_4 f_3) e_1 + \frac{\partial}{\partial z_4} (\delta_2 f_2 + \delta_3 f_4) e_2 \end{aligned}$$

$$+ \frac{\partial}{\partial z_4} (\delta_3 f_1 + \delta_2 f_3) e_3 + \frac{\partial}{\partial z_4} (\delta_4 f_2 + \delta_1 f_4) e_4.$$

Тоді рівняння (5.1) рівносильне системі

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial z_1} (\alpha_1 f_1 + \alpha_4 f_3) + \frac{\partial}{\partial z_2} (\beta_1 f_1 + \beta_4 f_3) + \frac{\partial}{\partial z_3} (\gamma_1 f_1 + \gamma_4 f_3) + \frac{\partial}{\partial z_4} (\delta_1 f_1 + \delta_4 f_3) &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial z_1} (\alpha_2 f_2 + \alpha_3 f_4) + \frac{\partial}{\partial z_2} (\beta_2 f_2 + \beta_3 f_4) + \frac{\partial}{\partial z_3} (\gamma_2 f_2 + \gamma_3 f_4) + \frac{\partial}{\partial z_4} (\delta_2 f_2 + \delta_3 f_4) &= 0, \end{aligned} \quad (5.2)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial z_1} (\alpha_3 f_1 + \alpha_2 f_3) + \frac{\partial}{\partial z_2} (\beta_3 f_1 + \beta_2 f_3) + \frac{\partial}{\partial z_3} (\gamma_3 f_1 + \gamma_2 f_3) + \frac{\partial}{\partial z_4} (\delta_3 f_1 + \delta_2 f_3) &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial z_1} (\alpha_4 f_2 + \alpha_1 f_4) + \frac{\partial}{\partial z_2} (\beta_4 f_2 + \beta_1 f_4) + \frac{\partial}{\partial z_3} (\gamma_4 f_2 + \gamma_1 f_4) + \frac{\partial}{\partial z_4} (\delta_4 f_2 + \delta_1 f_4) &= 0. \end{aligned}$$

Теорема 5.1. *Нехай*

$$\begin{aligned} \psi_1 &= \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3 + \alpha_4 e_4, & \alpha_1 \alpha_2 &\neq \alpha_3 \alpha_4, \\ \psi_2 &= \mu \alpha_1 e_1 + \lambda \alpha_2 e_2 + \mu \alpha_3 e_3 + \lambda \alpha_4 e_4, \\ \psi_3 &= \vartheta \alpha_1 e_1 + \theta \alpha_2 e_2 + \vartheta \alpha_3 e_3 + \theta \alpha_4 e_4, \\ \psi_4 &= \eta \alpha_1 e_1 + \nu \alpha_2 e_2 + \eta \alpha_3 e_3 + \nu \alpha_4 e_4, \end{aligned} \quad (5.3)$$

де $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \lambda, \mu, \theta, \vartheta, \nu, \eta$ — довільні комплексні числа. Тоді кожна право- ψ -гіперголоморфна функція набуває вигляду

$$f(z) = f_1(\zeta_2, \zeta_3, \zeta_4) e_1 + f_2(\tilde{\zeta}_2, \tilde{\zeta}_3, \tilde{\zeta}_4) e_2 + f_3(\tilde{\zeta}_2, \tilde{\zeta}_3, \tilde{\zeta}_4) e_3 + f_4(\zeta_2, \zeta_3, \zeta_4) e_4, \quad (5.4)$$

де $\zeta_2, \zeta_3, \zeta_4, \tilde{\zeta}_2, \tilde{\zeta}_3, \tilde{\zeta}_4$ визначені рівностями (4.4) і f_1, f_2, f_3, f_4 — довільні голоморфні функції трьох відповідних аргументів.

Доведення. Для вибраних параметрів (5.3) перше рівняння системи (5.2) набуває вигляду

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial z_1} (\alpha_1 f_1 + \alpha_4 f_3) + \frac{\partial}{\partial z_2} (\mu \alpha_1 f_1 + \lambda \alpha_4 f_3) + \\ + \frac{\partial}{\partial z_3} (\vartheta \alpha_1 f_1 + \theta \alpha_4 f_3) + \frac{\partial}{\partial z_4} (\eta \alpha_1 f_1 + \nu \alpha_4 f_3) &= 0. \end{aligned} \quad (5.5)$$

Аналогічно, для вибраних параметрів (5.3) третє рівняння системи (5.2) має вигляд

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial z_1} (\alpha_3 f_1 + \alpha_2 f_3) + \frac{\partial}{\partial z_2} (\mu \alpha_3 f_1 + \lambda \alpha_2 f_3) + \\ + \frac{\partial}{\partial z_3} (\vartheta \alpha_3 f_1 + \theta \alpha_2 f_3) + \frac{\partial}{\partial z_4} (\eta \alpha_3 f_1 + \nu \alpha_2 f_3) &= 0. \end{aligned} \quad (5.6)$$

Розглянемо різницю між рівнянням (5.5), домноженим на α_2 і рівнянням (5.6), домноженим на α_4 . Тоді отримаємо наступну рівність

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial z_1} \left(f_1(\alpha_1\alpha_2 - \alpha_3\alpha_4) + f_3(\alpha_2\alpha_4 - \alpha_2\alpha_4) \right) \\ & + \frac{\partial}{\partial z_2} \left(\mu f_1(\alpha_1\alpha_2 - \alpha_3\alpha_4) + \lambda f_3(\alpha_2\alpha_4 - \alpha_2\alpha_4) \right) \\ & + \frac{\partial}{\partial z_3} \left(\vartheta f_1(\alpha_1\alpha_2 - \alpha_3\alpha_4) + \theta f_3(\alpha_2\alpha_4 - \alpha_2\alpha_4) \right) \\ & + \frac{\partial}{\partial z_4} \left(\eta f_1(\alpha_1\alpha_2 - \alpha_3\alpha_4) + \nu f_3(\alpha_2\alpha_3 - \alpha_2\alpha_3) \right) = 0. \end{aligned}$$

Отже, маємо рівняння

$$\frac{\partial f_1}{\partial z_1} + \mu \frac{\partial f_1}{\partial z_2} + \vartheta \frac{\partial f_1}{\partial z_3} + \eta \frac{\partial f_1}{\partial z_4} = 0. \quad (5.7)$$

Для рівняння (5.7) розглянемо характеристичне рівняння

$$\frac{dz_1}{1} = \frac{dz_2}{\mu} = \frac{dz_3}{\vartheta} = \frac{dz_4}{\eta}. \quad (5.8)$$

Розв'язками системи (5.8) є інтеграли

$$c_2 = \mu z_1 - z_2, \quad c_3 = \vartheta z_1 - z_3, \quad c_4 = \eta z_1 - z_4.$$

Таким чином, загальний розв'язок рівняння (5.7) набуває вигляду

$$f_1 = f_1(\zeta_2, \zeta_3, \zeta_4),$$

де $\zeta_2, \zeta_3, \zeta_4$ визначені рівностями (4.4).

Аналогічно, отримуємо розклади компонент f_2, f_3, f_4 . $\square$

Отже, формула (5.4) дає представлення право- ψ -гіперголоморфної функції при спеціальному виборі ψ .

Порівнюючи представлення (4.3) і (5.4), отримаємо наступне твердження.

Твердження 5.1. *Нехай виконуються умови теореми 4.1. Тоді функція f є одночасно ліво- і право- ψ -гіперголоморфною, якщо вона приймає значення на множині $\{h_3e_3 + h_4e_4 : h_3, h_4 \in \mathbb{C}\}$.*

Зауваження 5.1. Використовуючи формули (1.4) можемо записати представлення (5.4) в базисі Паулі:

$$\begin{aligned} f(z) = & \left(f_1(\zeta_2, \zeta_3, \zeta_4) + f_2(\tilde{\zeta}_2, \tilde{\zeta}_3, \tilde{\zeta}_4) \right) \sigma_0 + \left(if_3(\tilde{\zeta}_2, \tilde{\zeta}_3, \tilde{\zeta}_4) - if_4(\zeta_2, \zeta_3, \zeta_4) \right) \sigma_1 \\ & + \left(-f_3(\tilde{\zeta}_2, \tilde{\zeta}_3, \tilde{\zeta}_4) - f_4(\zeta_2, \zeta_3, \zeta_4) \right) \sigma_2 + \left(f_2(\tilde{\zeta}_2, \tilde{\zeta}_3, \tilde{\zeta}_4) - f_1(\zeta_2, \zeta_3, \zeta_4) \right) \sigma_3. \end{aligned}$$

6. ПРЕДСТАВЛЕННЯ ЛІВО- Λ - ψ -ГІПЕРГОЛОМОРФНИХ ФУНКЦІЙ У СПЕЦІАЛЬНОМУ ВИПАДКУ

У цьому розділі розглянемо оператор (2.5) і рівняння (2.6). Тепер будемо шукати представлення ліво- Λ - ψ -гіперголоморфних функцій при спеціальному виборі параметрів $\psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_4$ і Λ . З цією метою перетворимо рівняння (2.6) в систему чотирьох диференціальних рівнянь в частинних похідних. Позначимо через

$$\Lambda := \Lambda_1 e_1 + \Lambda_2 e_2 + \Lambda_3 e_3 + \Lambda_4 e_4. \quad (6.1)$$

Використовуючи результати розділу 4, отримаємо рівняння (2.6) рівносильне неоднорідній системи диференціальних рівнянь в частинних похідних

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial z_1}(\alpha_1 f_1 + \alpha_3 f_4) + \frac{\partial}{\partial z_2}(\beta_1 f_1 + \beta_3 f_4) + \frac{\partial}{\partial z_3}(\gamma_1 f_1 + \gamma_3 f_4) + \frac{\partial}{\partial z_4}(\delta_1 f_1 + \delta_3 f_4) \\ = -\Lambda_1 f_1 - \Lambda_3 f_4 \\ \frac{\partial}{\partial z_1}(\alpha_2 f_2 + \alpha_4 f_3) + \frac{\partial}{\partial z_2}(\beta_2 f_2 + \beta_4 f_3) + \frac{\partial}{\partial z_3}(\gamma_2 f_2 + \gamma_4 f_3) + \frac{\partial}{\partial z_4}(\delta_2 f_2 + \delta_4 f_3) \\ = -\Lambda_2 f_2 - \Lambda_4 f_3 \\ \frac{\partial}{\partial z_1}(\alpha_1 f_3 + \alpha_3 f_2) + \frac{\partial}{\partial z_2}(\beta_1 f_3 + \beta_3 f_2) + \frac{\partial}{\partial z_3}(\gamma_1 f_3 + \gamma_3 f_2) + \frac{\partial}{\partial z_4}(\delta_1 f_3 + \delta_3 f_2) \\ = -\Lambda_1 f_3 - \Lambda_3 f_2 \\ \frac{\partial}{\partial z_1}(\alpha_2 f_4 + \alpha_4 f_1) + \frac{\partial}{\partial z_2}(\beta_2 f_4 + \beta_4 f_1) + \frac{\partial}{\partial z_3}(\gamma_2 f_4 + \gamma_4 f_1) + \frac{\partial}{\partial z_4}(\delta_2 f_4 + \delta_4 f_1) \\ = -\Lambda_4 f_1 - \Lambda_2 f_4 \end{aligned} \quad (6.2)$$

Теорема 6.1. *Нехай*

$$\begin{aligned} \psi_1 &= \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3 + \alpha_4 e_4, & \alpha_1 \alpha_2 &\neq \alpha_3 \alpha_4, \\ \psi_2 &= \lambda \alpha_1 e_1 + \mu \alpha_2 e_2 + \mu \alpha_3 e_3 + \lambda \alpha_4 e_4, \\ \psi_3 &= \theta \alpha_1 e_1 + \vartheta \alpha_2 e_2 + \vartheta \alpha_3 e_3 + \theta \alpha_4 e_4, \\ \psi_4 &= \nu \alpha_1 e_1 + \eta \alpha_2 e_2 + \eta \alpha_3 e_3 + \nu \alpha_4 e_4, \end{aligned} \quad (6.3)$$

де $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \lambda, \mu, \theta, \vartheta, \nu, \eta$ — довільні комплексні числа. Крім того, нехай Λ має вигляд (6.1) такий, що

$$\alpha_2 \Lambda_3 = \alpha_3 \Lambda_2, \quad \alpha_1 \Lambda_4 = \alpha_4 \Lambda_1. \quad (6.4)$$

Тоді кожна ліво- Λ - ψ -гіперголоморфна функція набуває вигляду

$$\begin{aligned} f(z) &= e_1 \Phi_1(\tilde{\zeta}_2, \tilde{\zeta}_3, \tilde{\zeta}_4) \cdot \exp\left(\frac{\alpha_3 \Lambda_4 - \alpha_2 \Lambda_1}{\alpha_1 \alpha_2 - \alpha_3 \alpha_4} z_1\right) \\ &+ e_2 \Phi_2(\zeta_2, \zeta_3, \zeta_4) \cdot \exp\left(\frac{\alpha_4 \Lambda_3 - \alpha_1 \Lambda_2}{\alpha_1 \alpha_2 - \alpha_3 \alpha_4} z_1\right) \\ &+ e_3 \Phi_3(\tilde{\zeta}_2, \tilde{\zeta}_3, \tilde{\zeta}_4) \cdot \exp\left(\frac{\alpha_3 \Lambda_4 - \alpha_2 \Lambda_1}{\alpha_1 \alpha_2 - \alpha_3 \alpha_4} z_1\right) \end{aligned} \quad (6.5)$$

$$+e_4 \Phi_4(\zeta_2, \zeta_3, \zeta_4) \cdot \exp\left(\frac{\alpha_4\Lambda_3 - \alpha_1\Lambda_2}{\alpha_1\alpha_2 - \alpha_3\alpha_4} z_1\right),$$

де $\tilde{\zeta}_2, \tilde{\zeta}_3, \tilde{\zeta}_4, \zeta_2, \zeta_3, \zeta_4$ визначені співвідношеннями (4.4), а $\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3, \Phi_4$ — довільні голоморфні функції трьох комплексних змінних.

Доведення. Для заданих параметрів (6.3) перше рівняння системи (6.2) набуває вигляду

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial z_1} (\alpha_1 f_1 + \alpha_3 f_4) + \frac{\partial}{\partial z_2} (\lambda \alpha_1 f_1 + \mu \alpha_3 f_4) + \\ & + \frac{\partial}{\partial z_3} (\theta \alpha_1 f_1 + \vartheta \alpha_3 f_4) + \frac{\partial}{\partial z_4} (\nu \alpha_1 f_1 + \eta \alpha_3 f_4) = -\Lambda_1 f_1 - \Lambda_3 f_4. \end{aligned} \quad (6.6)$$

Аналогічно, для параметрів (6.3) четверте рівняння системи (6.2) набуває вигляду

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial z_1} (\alpha_4 f_1 + \alpha_2 f_4) + \frac{\partial}{\partial z_2} (\lambda \alpha_4 f_1 + \mu \alpha_2 f_4) + \\ & + \frac{\partial}{\partial z_3} (\theta \alpha_4 f_1 + \vartheta \alpha_2 f_4) + \frac{\partial}{\partial z_4} (\nu \alpha_4 f_1 + \eta \alpha_2 f_4) = -\Lambda_4 f_1 - \Lambda_2 f_4. \end{aligned} \quad (6.7)$$

Розглянемо різницю між рівнянням (6.6), домноженим на α_2 , і рівнянням (6.7), домноженим на α_3 . Тоді враховуючи (6.4), отримаємо наступну рівність

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial z_1} \left(f_1(\alpha_1\alpha_2 - \alpha_3\alpha_4) + f_4(\alpha_2\alpha_3 - \alpha_2\alpha_3) \right) + \\ & + \frac{\partial}{\partial z_2} \left(f_1(\lambda\alpha_1\alpha_2 - \lambda\alpha_3\alpha_4) + f_4(\mu\alpha_2\alpha_3 - \mu\alpha_2\alpha_3) \right) + \\ & + \frac{\partial}{\partial z_3} \left(f_1(\theta\alpha_1\alpha_2 - \theta\alpha_3\alpha_4) + f_4(\vartheta\alpha_2\alpha_3 - \vartheta\alpha_2\alpha_3) \right) + \\ & + \frac{\partial}{\partial z_4} \left(f_1(\nu\alpha_1\alpha_2 - \nu\alpha_3\alpha_4) + f_4(\eta\alpha_2\alpha_3 - \eta\alpha_2\alpha_3) \right) = (\Lambda_4\alpha_3 - \Lambda_1\alpha_2) f_1. \end{aligned}$$

Отже, маємо рівняння

$$\frac{\partial f_1}{\partial z_1} + \lambda \frac{\partial f_1}{\partial z_2} + \theta \frac{\partial f_1}{\partial z_3} + \nu \frac{\partial f_1}{\partial z_4} = \frac{\Lambda_4\alpha_3 - \Lambda_1\alpha_2}{\alpha_1\alpha_2 - \alpha_3\alpha_4} f_1. \quad (6.8)$$

Для рівняння (6.8) розглянемо характеристичне рівняння

$$\frac{dz_1}{1} = \frac{dz_2}{\lambda} = \frac{dz_3}{\theta} = \frac{dz_4}{\nu} = \frac{(\alpha_1\alpha_2 - \alpha_3\alpha_4) df_1}{(\Lambda_4\alpha_3 - \Lambda_1\alpha_2) f_1}. \quad (6.9)$$

Розв'язками системи (6.9) є інтеграли

$$\begin{aligned} c_2 &= \lambda z_1 - z_2, \quad c_3 = \theta z_1 - z_3, \quad c_4 = \nu z_1 - z_4, \\ c_5 &= \ln f_1 + \frac{\alpha_2\Lambda_1 - \alpha_3\Lambda_4}{\alpha_1\alpha_2 - \alpha_3\alpha_4} z_1. \end{aligned}$$

Отже, загальний розв'язок рівняння (6.8) має вигляд

$$f_1 = \Phi_1(\tilde{\zeta}_2, \tilde{\zeta}_3, \tilde{\zeta}_4) \cdot \exp\left(\frac{\alpha_3\Lambda_4 - \alpha_2\Lambda_1}{\alpha_1\alpha_2 - \alpha_3\alpha_4} z_1\right),$$

де $\tilde{\zeta}_2, \tilde{\zeta}_3, \tilde{\zeta}_4$ визначені рівностями (4.4), а Φ_1 — довільна голоморфна функція трьох комплексних змінних.

Аналогічно можна отримати представлення для компонент f_2, f_3, f_4 . $\square$

Отже, формула (6.5) дає представлення ліво- Λ - ψ -гіперголоморфної функції при спеціальному виборі Λ і ψ .

Зауваження 6.1. З рівностей (2.2) і (2.5) випливає, що при $\Lambda = 0$ множина ліво- Λ - ψ -гіперголоморфних функцій співпадає з множиною ліво- ψ -гіперголоморфних функцій. Це засвідчують теоремами 4.1 і 6.1, оскільки представлення (6.5) співпадає з представленням (4.3) при $\Lambda = 0$.

ЛІТЕРАТУРА

- [1] R. Abreu Blaya, J. Bory Reyes, A. Guzmán, U. Kähler. On the ϕ -hyperderivative of the ψ -cauchy-type integral in clifford analysis. *Comput. Methods Funct. Theory*, 17(1):101–119, 2017.
- [2] R. Abreu Blaya, J. Bory Reyes, A. Guzmán Adán, U. Kaehler. On some structural sets and a quaternionic (ϕ, ψ) -hyperholomorphic function theory. *Mathematische Nachrichten*, 288(13):1451–1475, 2015.
- [3] D. Alpay, M. E. Luna-Elizarraras, M. Shapiro, D. C. Struppa. Basics of functional analysis with bicomplex scalars, and bicomplex schur analysis. *SpringerBriefs in Mathematics*, 2014.
- [4] D. Alpay, M. Shapiro, D. Vok. Rational hyperholomorphic functions in $\mathbb{R}^4$. *Journal of Functional Analysis*, 221:122–149, 2005.
- [5] S. Bock, K. Gürlebeck, D. Legatiuk, H. Nguyen. ψ -hyperholomorphic functions and a kolosov-muskhelishvili formula. *Math. Meth. Appl. Sci.*, 38(18):5114–5123, 2015.
- [6] J. Bory Reyes, M. Shapiro. Clifford analysis versus its quaternionic counterparts. *Math. Meth. Appl. Sci.*, 33(9):1089–1101, 2010.
- [7] E. Cartan. Les groupes bilinéaires et les systèmes de nombres complexes. *Annales de la faculté des sciences de Toulouse*, 12(1):1–64, 1898.
- [8] J. González-Cervantes. On a left- α - ψ -hyperholomorphic bergman space. *Complex Variables and Elliptic Equations*, 68(2):222–236, 2023.
- [9] J. González-Cervantes, J. Bory-Reyes. A fractional borel-pompeiu type formula and a related fractional ψ -fueter operator with respect to a vectorvalued function. *Math. Meth. Appl. Sci.*, 46(2):2012–2022, 2023.
- [10] J. González-Cervantes, I. Paulino-Basurto, J. Bory-Reyes. The borel-pompieu formula involving proportional fractional ψ -cauchy-riemann operators. *arXiv:2308.14158v1*.
- [11] K. Gürlebeck, H. Nguyen. On ψ -hyperholomorphic functions in $\mathbb{R}^3$. *AIP Conf. Proc.*, 1558:496–501, 2013.

- [12] K. Gürlebeck, H. Nguyen. ψ -hyperholomorphic functions and an application to elasticity problems. *AIP Conference Proceedings*, 1648, 2015.
- [13] T. Kuzmenko, V. Shpakivskyi. Quaternionic g -monogenic mappings in e_m . *Int. J. Adv. Res. Math.*, 12:1–34, 2018.
- [14] T. Kuzmenko, V. Shpakivskyi. A theory of quaternionic g -monogenic mappings in e_3 . *In: Models and Theories in Social Systems (Eds. C. Flaut etc.)*, Springer, 179:451–508, 2019.
- [15] M. Luna-Elizarraras, M. Shapiro, D. Struppa. On Clifford analysis for holomorphic mappings. *Advances in Geometry*, 14(3):413–426, 2014.
- [16] M. E. Luna-Elizarraras, M. Shapiro, D. C. Struppa, A. Vajiac. Bicomplex holomorphic functions: the algebra, geometry and analysis of bicomplex numbers. *Birkhäuser: Frontiers in Mathematics*, 2015.
- [17] H. Nguyen. ψ -hyperholomorphic function theory in $\mathbb{R}^3$: geometric mapping properties and applications. *Dissertation*, 2015.
- [18] D. Santiesteban, R. Abreu Blaya, M. P. Á. Alejandre. On a generalized lamé-navier system in $\mathbb{R}^3$. *Mathematica Slovaca*, 72(6):1527–1540, 2022.
- [19] D. Santiesteban, R. Blaya, M. P. Á. Alejandre. On (ϕ, ψ) -inframongenic functions in clifford analysis. *Bull Braz. Math. Soc.*, 53(2):605–621, 2022.
- [20] J. Serrano, R. Blaya, J. Sánchez-Ortiz. On a riemann-hilbert problem for ϕ -hyperholomorphic functions in $\mathbb{R}^m$. *Analysis and Mathematical Physics*, 13(84), 2023.
- [21] M. Shapiro, N. Vasilevski. Quaternionic ψ -hyperholomorphic functions, singular integral operators and boundary value problems i. ψ -hyperholomorphic function theory. *Complex Variables Theory and Application*, 27(1):17–46, 1995.
- [22] M. Shapiro, N. Vasilevski. Quaternionic ψ -hyperholomorphic functions, singular integral operators and boundary value problems ii. algebras of singular integral operators and riemann type boundary value problems. *Complex Variables Theory and Application*, 27(1):67–96, 1995.
- [23] J. Vanegas, F. Vargas. On weighted dirac operators and their fundamental solutions for anisotropic media. *Adv. Appl. Clifford Algebras*, 28(46), 2018.
- [24] J. Vanegas, F. Vargas. On weighted dirac operators and their fundamental solutions. *Quaestiones Mathematicae*, 43(3):383–393, 2020.

Т. С. Кузьменко

ЖИТОМИРСЬКИЙ ВІЙСЬКОВИЙ ІНСТИТУТ ІМЕНІ С. П. КОРОЛЬОВА, М. ЖИТОМИР

Email: kuzmenko.ts15@gmail.com

ORCID: 0000-0001-9052-6230

В. С. Шпаківський

ІНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ НАН УКРАЇНИ, М. КИЇВ

Email: shpakivskyi86d@gmail.com

ORCID: 0000-0003-4256-8975