

Про асимптотичну поведінку на нескінченності кільцевих та нижніх Q -гомеоморфізмів відносно p -модуля

Б. А. Кліщук, Р. Р. Салімов, М. В. Стефанчук

Abstract. In the paper the asymptotic behavior at infinity of ring Q -homeomorphisms with respect to the p -modulus as $p \geq n$ and lower Q -homeomorphisms with respect to the p -modulus as $n - 1 < p \leq n$ in the space $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, has been investigated.

Анотація. У статті досліджується асимптотична поведінка на нескінченності кільцевих Q -гомеоморфізмів відносно p -модуля при $p \geq n$ та нижніх Q -гомеоморфізмів відносно p -модуля при $n - 1 < p \leq n$ у просторі $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$.

1. ВСТУП

Нагадаємо деякі означення, див. [68]. Нехай задано сім'ю Γ кривих γ у просторі $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$. Борелеву функцію $\rho : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, \infty]$ називають *допустимого* для Γ (пишуть $\rho \in \text{adm } \Gamma$), якщо

$$\int_{\gamma} \rho(x) ds \geq 1$$

для кожної (локально спрямлюваної) кривої $\gamma \in \Gamma$.

Нехай $p \in (1, \infty)$. Тоді p -модулем сім'ї Γ називається величина

$$M_p(\Gamma) = \inf_{\rho \in \text{adm } \Gamma} \int_{\mathbb{R}^n} \rho^p(x) dm(x),$$

де $dm(x)$ позначає міру Лебега в $\mathbb{R}^n$.

Нехай D – область в $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, $x_0 \in D$ та $d_0 = \text{dist}(x_0, \partial D)$. Для довільних множин E , F і G простору $\mathbb{R}^n$ позначимо через $\Delta(E, F, G)$

Робота була підтримана грантом Simons Foundation (1290607, Б.А.К., Р.Р.С., М.В.С.).

2020 *Mathematics Subject Classification*: 30C65

Ключові слова: p -модуль сім'ї кривих, p -модуль сім'ї поверхонь, кільцеві Q -гомеоморфізми відносно p -модуля, нижні Q -гомеоморфізми відносно p -модуля

DOI: <https://doi.org/10.3842/trim.v21n1.542>

сім'ю всіх неперервних кривих $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$, які з'єднують E і F у G , тобто $\gamma(a) \in E$, $\gamma(b) \in F$ і $\gamma(t) \in G$ при $a < t < b$. Покладемо

$$\mathbb{A}(x_0, r_1, r_2) = \{x \in \mathbb{R}^n : r_1 < |x - x_0| < r_2\},$$

$$S_i = S(x_0, r_i) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x - x_0| = r_i\}, \quad i = 1, 2.$$

Нехай $Q : D \rightarrow [0, \infty]$ – вимірна функція. Нагадаємо, що гомеоморфізм $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ називається Q -гомеоморфізмом відносно p -модуля, якщо нерівність

$$M_p(f\Gamma) \leq \int_D Q(x) \rho^p(x) \, dm(x) \quad (1.1)$$

виконується для довільної сім'ї Γ кривих в області D та довільної допустимої функції ρ для Γ .

Це означення є природним узагальненням геометричного означення квазіконформного відображення: якщо $Q(x) \leq K < \infty$ м.с. (майже скрізь), то f є квазіконформним для $p = 2$ на комплексній площині $\mathbb{C}$ (див. означення А, с. 21–22 у [19]), для $p = n$ у просторі $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, (див. 13.1 та 34.6 у [68]), має властивість локальної ліпшицевості для $n - 1 < p < n$ та f^{-1} є ліпшицевим для $p > n$, причому межі для p є точними (див. [25]). Зауважимо, що оцінка типу (1.1) вперше була встановлена у класичній квазіконформній теорії (див. [38], с. 221). Далі це було отримано у [20], лема 2.1, для квазіконформних відображень у просторі $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$. Клас Q -гомеоморфізмів відносно n -модуля вперше було розглянуто у роботах [40, 41], див. також монографію [42]. Головною метою теорії Q -гомеоморфізмів є встановлення різноманітних взаємозв'язків між властивостями мажоранти $Q(x)$ та відповідними властивостями самих відображень. Зокрема, задачі про локальну та межу поведінку Q -гомеоморфізмів були досліджені у просторі $\mathbb{R}^n$ спочатку для випадку $Q \in BMO$ (обмеженого середнього коливання) у роботах [40, 41], а потім для випадку $Q \in FMO$ (скінченного середнього коливання) та для інших випадків у роботах [6, 7, 51].

Наступне означення узагальнює та локалізує означення Q -гомеоморфізму. Воно зумовлене кільцевим означенням квазіконформних відображень за Герінгом (див. [24]), спочатку введене В. Рязановим, У. Сребро та Е. Якубовим на площині (див. [45–50]) та пізніше узагальнене В. Рязановим і Є. Севостьяновим у просторі $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, (див. [42], розділи VII, XI).

Нехай $Q : D \rightarrow [0, \infty]$ – вимірна за Лебегом функція. Гомеоморфізм $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ називається *кільцевим Q -гомеоморфізмом відносно*

p -модуля в точці $x_0 \in D$, якщо співвідношення

$$M_p(\Delta(fS_1, fS_2, fD)) \leq \int_{\mathbb{A}} Q(x) \eta^p(|x - x_0|) dm(x) \quad (1.2)$$

виконується для будь-якого кільця $\mathbb{A} = \mathbb{A}(x_0, r_1, r_2)$, $0 < r_1 < r_2 < d_0$, $d_0 = \text{dist}(x_0, \partial D)$, і для кожної вимірної функції $\eta : (r_1, r_2) \rightarrow [0, \infty]$ такої, що

$$\int_{r_1}^{r_2} \eta(r) dr = 1.$$

Гомеоморфізм $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ називають *кільцевим Q -гомеоморфізмом відносно p -модуля в області D* , якщо умова (1.2) виконується для будь-якої точки $x_0 \in D$. Кільцеві Q -гомеоморфізми відносно p -модуля при $p = n$ називають кільцевими Q -гомеоморфізмами (у точці $x_0 \in D$ чи в області D).

Теорія кільцевих Q -гомеоморфізмів відносно p -модуля у просторі $\mathbb{R}^n$ при $p = n$ досліджувалась у роботах [42, 47, 62], при $1 < p < n$ див. [26, 29, 31, 53, 54] та при $p > n$ див. [10, 37, 43, 55–60, 66, 67]. Більш загальні класи відображень досліджувались у [21–23, 32–34, 36, 61, 64, 65].

Нехай ω_{n-1} – площа одиничної сфери $\mathbb{S}^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| = 1\}$ в $\mathbb{R}^n$ та

$$q_{x_0}(r) = \frac{1}{\omega_{n-1} r^{n-1}} \int_{S(x_0, r)} Q(x) d\mathcal{A}$$

середнє інтегральне значення по сфері $S(x_0, r) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x - x_0| = r\}$, тут $d\mathcal{A}$ – елемент площі поверхні.

Нижче наведено критерій належності гомеоморфізмів класу кільцевих Q -гомеоморфізмів відносно p -модуля при $p > 1$ у просторі $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, див. теорему 3.1 у [1].

Твердження 1.1 ([1]). *Нехай D – область в $\mathbb{R}^n$, $x_0 \in D$ та $Q : D \rightarrow [0, \infty]$ – вимірна за Лебегом функція така, що середнє інтегральне значення $q_{x_0}(r)$ скінченне для м.в. (майже всіх) $r \in (0, d_0)$, $d_0 = \text{dist}(x_0, \partial D)$. Гомеоморфізм $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ є кільцевим Q -гомеоморфізмом у точці x_0 тоді і тільки тоді, коли для будь-яких r_1, r_2 таких, що $0 < r_1 < r_2 < d_0$,*

$$M_p(\Delta(fS_1, fS_2; fD)) \leq \frac{\omega_{n-1}}{\left(\int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r^{\frac{n-1}{p-1}} q_{x_0}^{\frac{1}{p-1}}(r)} \right)^{p-1}},$$

де S_1 та S_2 – сфери $S(x_0, r_1)$ і $S(x_0, r_2)$.

Вельми корисним інструментом при дослідженні плоских та просторових відображень виявилися також так звані нижні Q -гомеоморфізми відносно p -модуля, що були вперше введені і вивчалися при $p = n$ у роботі Д. Ковтонюка і В. Рязанова, див. [8] або розд. 9 у монографії [42] та при $p \neq n$ у роботі [28]. Їх означення також носить геометричний характер і мотивовано кільцевим означенням Герінга для квазіконформних відображень.

Далі нагадаємо, що $(n - 1)$ -вимірною поверхнею S в $\mathbb{R}^n$ називають довільне неперервне відображення $S : \omega \rightarrow \mathbb{R}^n$, де ω – відкрита множина в $\overline{\mathbb{R}^{n-1}} := \mathbb{R}^{n-1} \cup \{\infty\}$. Функцією кратності поверхні S називається число прообразів елемента $y \in \mathbb{R}^n$:

$$N(S, y) = \text{card } S^{-1}(y) = \text{card } \{x \in \omega : S(x) = y\}.$$

Для борелевої функції $\rho : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, \infty]$ інтеграл по поверхні S визначається рівністю

$$\int_S \rho d\mathcal{A} := \int_{\mathbb{R}^n} \rho(y) N(S, y) dH^{n-1}(y),$$

де через H^{n-1} позначено $(n - 1)$ -вимірну міру Хаусдорфа в $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$. Надалі покладемо $d\mathcal{A} := d\mathcal{A}_{n-1}$.

Борелеву функцію $\rho : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, \infty]$ називають допустимою для сім'ї Γ $(n - 1)$ -вимірних поверхонь і пишуть $\rho \in \text{adm } \Gamma$, якщо

$$\int_S \rho^{n-1} d\mathcal{A} \geq 1 \tag{1.3}$$

для кожної поверхні $S \in \Gamma$. Тоді p -модулем сім'ї Γ при $p > 1$ називають величину

$$M_p(\Gamma) = \inf_{\rho \in \text{adm } \Gamma} \int_{\mathbb{R}^n} \rho^p(x) dm(x).$$

Кажуть, що деяка властивість виконується для p -майже всіх $(n - 1)$ -вимірних поверхонь сім'ї Γ , якщо підсім'я поверхонь сім'ї Γ , для яких ця властивість порушується, має p -модуль нуль.

Вимірну за Лебегом функцію $\rho : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, \infty]$ називають узагальнено p -допустимою для сім'ї Γ , що складається із $(n - 1)$ -вимірних поверхонь в $\mathbb{R}^n$, і пишуть $\rho \in \text{ext}_p \text{adm } \Gamma$, якщо нерівність (1.3) виконується для p -майже всіх $S \in \Gamma$.

Нехай D – область в $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, $Q : D \rightarrow (0, \infty)$ – вимірна за Лебегом функція. Гомеоморфізм $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ називають *нижнім Q -гомеоморфізмом відносно p -модуля у точці $x_0 \in D$* , якщо

$$M_p(f\Sigma_{\mathbb{A}}) \geq \inf_{\rho \in \text{ext}_p \text{ adm } \Sigma_{\mathbb{A}}} \int_{\mathbb{A}} \frac{\rho^p(x)}{Q(x)} dm(x) \quad (1.4)$$

для кожного кільця $\mathbb{A} = \mathbb{A}(x_0, \varepsilon_1, \varepsilon_2)$, $0 < \varepsilon_1 \leq \varepsilon_2 < d_0$, де $\Sigma_{\mathbb{A}}$ – сім'я всіх сфер $S(x_0, r)$, $r \in (\varepsilon_1, \varepsilon_2)$.

Гомеоморфізм $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ називають *нижнім Q -гомеоморфізмом відносно p -модуля в області D* , якщо умова (1.4) виконується для будь-якої точки $x_0 \in D$. Нижні Q -гомеоморфізми відносно p -модуля при $p = n$ називають нижніми Q -гомеоморфізмами (у точці $x_0 \in D$ чи в області D).

Теорія нижніх Q -гомеоморфізмів відносно p -модуля у просторі $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, при $p = n$ досліджувалась у роботах [8, 42], при $p > n - 1$ див. [28], при $p > n$ див. [14, 16], а також на комплексній площині при $1 < p < 2$ див. [18].

Останнім часом нижні і кільцеві Q -гомеоморфізми знайшли важливі застосування, як в теорії крайових задач для рівнянь Бельтрамі на площині, так і в теорії просторових гомеоморфізмів класів Соболева і більш загальних класів Орліча-Соболева, див. [2–5, 9, 12, 13, 15, 35, 44, 52]. Також теорія нижніх та кільцевих Q -гомеоморфізмів відносно p -модуля може бути застосована до відображень квазіконформних в середньому (див. [11, 27]).

На комплексній площині теорія кільцевих Q -гомеоморфізмів відносно p -модуля використовується при вивченні асимптотичних властивостей регулярних розв'язків нелінійних рівнянь Бельтрамі (див. [30, 63]). Також теорія кільцевих Q -гомеоморфізмів може бути застосована до дослідження відображень зі скінченним спотворенням, які належать класам Орліча-Соболева $W_{\text{loc}}^{1,\varphi}$ за умови типу умови Кальдерона, та, зокрема, класам Соболева $W_{\text{loc}}^{1,p}$ при $p > n - 1$, (див. [31]).

У наступній теоремі встановлено критерій належності гомеоморфізмів класу нижніх Q -гомеоморфізмів відносно p -модуля при $p > n - 1$. Вперше цей критерій було доведено при $p = n$ у роботі [8, теорема 2.1], див. також монографію [42, теорема 9.2], а також у просторі $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, при $p > n - 1$ див. [28, теорема 6.1].

Теорема 1.1 ([28]). *Нехай D – область в $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, $x_0 \in D$. Припустимо, що $Q : D \rightarrow (0, \infty)$ – вимірна функція. Гомеоморфізм $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ є нижнім Q -гомеоморфізмом відносно p -модуля у точці x_0 при $p > n - 1$ тоді і тільки тоді, коли*

$$M_p(f\Sigma_{\mathbb{A}}) \geq \int_{\varepsilon_1}^{\varepsilon_2} \frac{dr}{\|Q\|_{\frac{n-1}{p-n+1}}(x_0, r)} \quad \text{для всіх} \quad 0 < \varepsilon_1 \leq \varepsilon_2 < d_0,$$

де $d_0 = \text{dist}(x_0, \partial D)$, $\Sigma_{\mathbb{A}}$ – сім'я всіх сфер $S(x_0, r)$, $r \in (\varepsilon_1, \varepsilon_2)$, і

$$\|Q\|_{\frac{n-1}{p-n+1}}(x_0, r) := \left(\int_{S(x_0, r)} Q^{\frac{n-1}{p-n+1}}(x) d\mathcal{A} \right)^{\frac{p-n+1}{n-1}}.$$

Інфімум в (1.4) досягається для функції

$$\rho_0(x) = \left(\frac{Q(x)}{\|Q\|_{\frac{n-1}{p-n+1}}(|x - x_0|)} \right)^{\frac{1}{p-n+1}}.$$

У наступній теоремі встановлено зв'язок між нижніми і кільцевими Q -гомеоморфізмами відносно p -модуля.

Теорема 1.2 ([17]). Нехай D – область в $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, $x_0 \in D$. Припустимо, що $Q : D \rightarrow (0, \infty)$ – вимірна за Лебегом функція така, що $\|Q\|_{\frac{n-1}{p-n+1}}(x_0, r) \neq \infty$ для м.в. $r \in (0, d_0)$, $d_0 = \text{dist}(x_0, \partial D)$, і $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ – нижній Q -гомеоморфізм відносно p -модуля у точці x_0 при $p > n - 1$. Тоді f є кільцевим Q_* -гомеоморфізмом відносно $\tilde{p}$ -модуля у точці x_0 при $\tilde{p} = \frac{p}{p-n+1}$ та $Q_*(x) = Q^{\frac{n-1}{p-n+1}}(x)$.

Наслідок 1.1. ([28]) У просторі $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, будь-який нижній Q -гомеоморфізм $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ відносно p -модуля у точці $x_0 \in D$ за умов $p > n - 1$ та $Q \in L_{\text{loc}}^{\frac{n-1}{p-n+1}}(D)$ є кільцевим Q_* -гомеоморфізмом відносно $\tilde{p}$ -модуля в точці x_0 при $\tilde{p} = \frac{p}{p-n+1}$ та $Q_*(x) = Q^{\frac{n-1}{p-n+1}}(x)$.

2. ПОВЕДІНКА НА НЕСКІНЧЕННОСТІ КІЛЬЦЕВИХ Q -ГОМЕОМОРФІЗМІВ

У цьому пункті наведено теореми про асимптотичну поведінку на нескінченності кільцевих Q -гомеоморфізмів відносно p -модуля, які є аналогами теореми Мартіо-Рікмана-Вайсяля про ріст на нескінченності квазірегулярних відображень (див. [39]). У роботі [62] було досліджено випадок при $p = n$.

Нижче наведено теорему про асимптотичну поведінку на нескінченності кільцевих Q -гомеоморфізмів, див. [62].

Нехай $R > 0$ і $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Для гомеоморфізму $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ покладемо

$$M(x_0, f, R) = \max_{|x-x_0|=R} |f(x) - f(x_0)|.$$

Теорема 2.1. ([62]) *Нехай $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ – кільцевий Q -гомеоморфізм у точці $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $r_0 > 0$ та $Q : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, \infty]$ – вимірна за Лебегом функція така, що середнє інтегральне значення $q_{x_0}(r)$ скінченне для м.в. $r > 0$. Тоді*

$$\liminf_{R \rightarrow \infty} M(x_0, R, f) \exp \left(- \int_{r_0}^R \frac{dt}{t q_{x_0}^{\frac{1}{n-1}}(t)} \right) > 0.$$

Наслідок 2.1. ([62]) *Нехай $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ – кільцевий Q -гомеоморфізм у точці $x_0 \in \mathbb{R}^n$ та для деяких чисел $r_0 > 0$, $\kappa = \kappa(x_0) > 0$ виконується умова $q_{x_0}(t) \leq \kappa$ для м.в. $t \in [r_0, \infty)$. Тоді*

$$\liminf_{R \rightarrow \infty} \frac{M(x_0, R, f)}{R^\gamma} > 0,$$

де $\gamma = \kappa^{\frac{1}{1-n}}$.

Наслідок 2.2. ([62]) *Нехай $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ – кільцевий Q -гомеоморфізм у точці $x_0 \in \mathbb{R}^n$ та для деяких чисел $r_0 > 1$, $\kappa = \kappa(x_0) > 0$ виконується умова $q_{x_0}(t) \leq \kappa (\ln t)^{n-1}$ для м.в. $t \in [r_0, \infty)$. Тоді*

$$\liminf_{R \rightarrow \infty} \frac{M(x_0, R, f)}{(\ln R)^\gamma} > 0,$$

де $\gamma = \kappa^{\frac{1}{1-n}}$.

Нижче наведено результати робіт [58], [60] про асимптотичну поведінку на нескінченності кільцевих Q -гомеоморфізмів відносно p -модуля при $p > n$.

Надалі для множини $E \subset \mathbb{R}^n$ через $\text{diam } E$ будемо позначати евклідовий діаметр E .

Теорема 2.2. ([58]) *Припустимо, що $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ – кільцевий Q -гомеоморфізм відносно p -модуля у точці x_0 при $p > n$, де x_0 – деяка точка простору $\mathbb{R}^n$, та для деяких чисел $r_0 > 0$, $\kappa = \kappa(x_0) > 0$ виконується умова*

$$q_{x_0}(t) \leq \kappa t^\alpha \tag{2.1}$$

для м.в. $t \in [r_0, +\infty)$.

1) Якщо $\alpha \in [0, p - n)$, то

$$\liminf_{R \rightarrow \infty} \frac{\text{diam } f(B(x_0, R))}{R^{\frac{p-n-\alpha}{p-n}}} \geq 2 \kappa^{\frac{1}{n-p}} \left(\frac{p-n}{p-n-\alpha} \right)^{\frac{p-1}{p-n}} > 0. \quad (2.2)$$

2) Якщо $\alpha = p - n$, то

$$\liminf_{R \rightarrow \infty} \frac{\text{diam } f(B(x_0, R))}{(\ln R)^{\frac{p-1}{p-n}}} \geq 2 \kappa^{\frac{1}{n-p}} \left(\frac{p-n}{p-1} \right)^{\frac{p-1}{p-n}} > 0, \quad (2.3)$$

де $B(x_0, R) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x - x_0| \leq R\}$.

При $\alpha = 0$ з теореми 2.2 безпосередньо випливає наступне твердження.

Наслідок 2.3. ([58]) *Припустимо, що $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ – кільцевий Q -гомеоморфізм відносно p -модуля у точці x_0 при $p > n$, де x_0 – деяка точка простору $\mathbb{R}^n$, та для деяких чисел $r_0 > 0$, $\kappa = \kappa(x_0) > 0$ виконується умова $q_{x_0}(t) \leq \kappa$ для м.в. $t \in [r_0, +\infty)$. Тоді*

$$\liminf_{R \rightarrow \infty} \frac{\text{diam } f(B(x_0, R))}{R} \geq 2 \kappa^{\frac{1}{n-p}} > 0,$$

де $B(x_0, R) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x - x_0| \leq R\}$.

Розглянемо наступний приклад.

Приклад 2.1. Нехай $x_0 \in \mathbb{R}^n$ та $f_1 : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, де

$$f_1(x) = \begin{cases} \kappa^{\frac{1}{n-p}} \left(\frac{p-n}{p-n-\alpha} \right)^{\frac{p-1}{p-n}} |x - x_0|^{\frac{p-n-\alpha}{p-n}} \frac{x-x_0}{|x-x_0|}, & x \neq x_0, \\ 0, & x = x_0. \end{cases} \quad (2.4)$$

Зауважимо, що відображення f_1 відображає кулю $B(x_0, R)$ на кулю $B(0, \tilde{R})$, де

$$\tilde{R} = \kappa^{\frac{1}{n-p}} \left(\frac{p-n}{p-n-\alpha} \right)^{\frac{p-1}{p-n}} R^{\frac{p-n-\alpha}{p-n}}.$$

Легко бачити, що

$$\begin{aligned} \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{\text{diam } f_1(B(x_0, R))}{R^{\frac{p-n-\alpha}{p-n}}} &= \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{\text{diam } B(0, \tilde{R})}{R^{\frac{p-n-\alpha}{p-n}}} = \\ &= \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{2\tilde{R}}{R^{\frac{p-n-\alpha}{p-n}}} = 2\kappa^{\frac{1}{n-p}} \left(\frac{p-n}{p-n-\alpha} \right)^{\frac{p-1}{p-n}}. \end{aligned}$$

Покажемо, що відображення f_1 є кільцевим Q -гомеоморфізмом відносно p -модуля з функцією $Q(x) = \kappa|x - x_0|^\alpha$ у точці x_0 . Зрозуміло,

що $q_{x_0}(t) = \kappa t^\alpha$. Розглянемо кільце $\mathbb{A}(x_0, r_1, r_2)$, $0 < r_1 < r_2 < \infty$. Зауважимо, що гомеоморфізм f_1 відображає кільце $\mathbb{A}(x_0, r_1, r_2)$ на кільце $\tilde{\mathbb{A}}(0, \tilde{r}_1, \tilde{r}_2)$, де

$$\tilde{r}_i = \kappa^{\frac{1}{n-p}} \left(\frac{p-n}{p-n-\alpha} \right)^{\frac{p-1}{p-n}} r_i^{\frac{p-n-\alpha}{p-n}}, \quad i = 1, 2.$$

Позначимо через Γ множину всіх кривих, які з'єднують сфери $S(x_0, r_1)$ та $S(x_0, r_2)$ у кільці $\mathbb{A}(x_0, r_1, r_2)$. Тоді обчислимо p -модуль сім'ї кривих $f_1\Gamma$:

$$M_p(f_1\Gamma) = \omega_{n-1} \left(\frac{p-n}{p-1} \right)^{p-1} \left(\tilde{r}_2^{\frac{p-n}{p-1}} - \tilde{r}_1^{\frac{p-n}{p-1}} \right)^{1-p}$$

(див., напр., формулу (2) у [25]). Підставляючи у вищеведену нерівність значення $\tilde{r}_1$ та $\tilde{r}_2$, означені вище, отримаємо

$$M_p(f_1\Gamma) = \omega_{n-1} \kappa \left(\frac{p-n-\alpha}{p-1} \right)^{p-1} \left(r_2^{\frac{p-n-\alpha}{p-1}} - r_1^{\frac{p-n-\alpha}{p-1}} \right)^{1-p}.$$

Зауважимо, що останню нерівність можна переписати у вигляді

$$M_p(f_1\Gamma) = \frac{\omega_{n-1}}{\left(\int_{r_1}^{r_2} \frac{dt}{t^{\frac{n-1}{p-1}} q_{x_0}^{\frac{1}{p-1}}(t)} \right)^{p-1}},$$

де $q_{x_0}(t) = \kappa t^\alpha$.

Отже, за твердженням 1.1 гомеоморфізм f_1 є кільцевим Q -гомеоморфізмом відносно p -модуля при $p > n$ з функцією $Q(x) = \kappa |x - x_0|^\alpha$ у точці x_0 .

Зауваження 2.1. Приклад 2.1 показує, що оцінка (2.2) у теоремі 2.2 є точною, тобто досягається на відображенні (2.4).

Теорема 2.3. ([60]) *Припустимо, що $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ – кільцевий Q -гомеоморфізм відносно p -модуля у точці x_0 при $p > n$, де x_0 – деяка точка простору $\mathbb{R}^n$, та для деяких чисел $r_0 > 1$, $\kappa = \kappa(x_0) > 0$ виконується умова*

$$q_{x_0}(t) \leq \kappa t^{p-n} (\ln t)^\alpha \quad (2.5)$$

для м.в. $t \in [r_0, +\infty)$.

1) Якщо $\alpha \in [0, p-1)$, то

$$\liminf_{R \rightarrow \infty} \frac{\text{diam } f(B(x_0, R))}{(\ln R)^{\frac{p-\alpha-1}{p-n}}} \geq 2 \kappa^{\frac{1}{n-p}} \left(\frac{p-n}{p-\alpha-1} \right)^{\frac{p-1}{p-n}} > 0. \quad (2.6)$$

2) Якщо $\alpha = p - 1$, то

$$\liminf_{R \rightarrow \infty} \frac{\text{diam } f(B(x_0, R))}{(\ln \ln R)^{\frac{p-1}{p-n}}} \geq 2 \kappa^{\frac{1}{n-p}} \left(\frac{p-n}{p-1} \right)^{\frac{p-1}{p-n}} > 0, \quad (2.7)$$

де $B(x_0, R) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x - x_0| \leq R\}$.

Зауваження 2.2. У теоремах 2.2, 2.3 оцінки (2.3), (2.6), (2.7) є точними. Аналогічно до прикладу 2.1 можна побудувати приклади кільцевих Q -гомеоморфізмів відносно p -модуля при $p > n$, на яких вони досягаються.

Зауваження 2.3. При виконанні умов теорем 2.2 або 2.3 $\text{diam } f(B(x_0, R)) \rightarrow \infty$ при $R \rightarrow \infty$.

3. ТЕОРЕМИ НЕІСНУВАННЯ КІЛЬЦЕВИХ Q -ГОМЕОМОРФІЗМІВ

У цьому пункті наведено теореми про неіснування кільцевих Q -гомеоморфізмів відносно p -модуля при $p \geq n$.

Теорема 3.1. Нехай x_0 – деяка точка простору $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, $r_0 > 0$ та $Q: \mathbb{R}^n \rightarrow [0, \infty]$ – вимірна за Лебегом функція така, що середнє інтегральне значення $q_{x_0}(r)$ скінченне для м.в. $r > 0$. Тоді не існує кільцевого Q -гомеоморфізму $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ у точці x_0 з асимптотичною умовою

$$\liminf_{R \rightarrow \infty} M(x_0, R, f) \exp \left(- \int_{r_0}^R \frac{dt}{t q_{x_0}^{\frac{1}{n-1}}(t)} \right) = 0.$$

Наслідок 3.1. Нехай x_0 – деяка точка простору $\mathbb{R}^n$ ($n \geq 2$) та для деяких чисел $r_0 > 0$, $\kappa = \kappa(x_0) > 0$ виконується умова $q_{x_0}(t) \leq \kappa$ для м.в. $t \in [r_0, +\infty)$. Тоді не існує кільцевого Q -гомеоморфізму $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ у точці x_0 з асимптотичною умовою

$$\liminf_{R \rightarrow \infty} \frac{M(x_0, R, f)}{R^\gamma} = 0,$$

де $\gamma = \kappa^{\frac{1}{1-n}}$.

Наслідок 3.2. Нехай x_0 – деяка точка простору $\mathbb{R}^n$ ($n \geq 2$) та для деяких чисел $r_0 > 1$, $\kappa = \kappa(x_0) > 0$ виконується умова

$$q_{x_0}(t) \leq \kappa (\ln t)^{n-1}$$

для м.в. $t \in [r_0, +\infty)$. Тоді не існує кільцевого Q -гомеоморфізму $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ у точці x_0 з асимптотичною умовою

$$\liminf_{R \rightarrow \infty} \frac{M(x_0, R, f)}{(\ln R)^\gamma} = 0,$$

де $\gamma = \kappa^{\frac{1}{1-n}}$.

Теорема 3.2. Нехай x_0 – деяка точка простору $\mathbb{R}^n$ ($n \geq 2$) та для деяких чисел $r_0 > 0$, $\kappa = \kappa(x_0) > 0$ виконується умова $q_{x_0}(t) \leq \kappa t^\alpha$ для м.в. $t \in [r_0, +\infty)$.

1) Якщо $\alpha \in [0, p - n)$, то не існує кільцевого Q -гомеоморфізму $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ відносно p -модуля при $p > n$ у точці x_0 з асимптотичною умовою

$$\liminf_{R \rightarrow \infty} \frac{M(x_0, f, R)}{R^{\frac{p-n-\alpha}{p-n}}} = 0.$$

2) Якщо $\alpha = p - n$, то не існує кільцевого Q -гомеоморфізму $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ відносно p -модуля при $p > n$ у точці x_0 з асимптотичною умовою

$$\liminf_{R \rightarrow \infty} \frac{M(x_0, f, R)}{(\ln R)^{\frac{p-1}{p-n}}} = 0.$$

Наслідок 3.3. Нехай x_0 – деяка точка простору $\mathbb{R}^n$ ($n \geq 2$) та для деяких чисел $r_0 > 0$, $\kappa = \kappa(x_0) > 0$ виконується умова $q_{x_0}(t) \leq \kappa$ для м.в. $t \in [r_0, +\infty)$. Тоді не існує кільцевого Q -гомеоморфізму $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ відносно p -модуля при $p > n$ у точці x_0 з асимптотичною умовою

$$\liminf_{R \rightarrow \infty} \frac{\text{diam } f(B(x_0, R))}{R} = 0.$$

Теорема 3.3. Нехай x_0 – деяка точка простору $\mathbb{R}^n$ ($n \geq 2$) та для деяких чисел $r_0 > 1$, $\kappa = \kappa(x_0) > 0$ виконується умова

$$q_{x_0}(t) \leq \kappa t^{p-n} (\ln t)^\alpha$$

для м.в. $t \in [r_0, +\infty)$.

1) Якщо $\alpha \in [0, p - 1)$, то не існує кільцевого Q -гомеоморфізму $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ відносно p -модуля при $p > n$ у точці x_0 з асимптотичною умовою

$$\liminf_{R \rightarrow \infty} \frac{M(x_0, f, R)}{(\ln R)^{\frac{p-\alpha-1}{p-n}}} = 0.$$

2) Якщо $\alpha = p - 1$, то не існує кільцевого Q -гомеоморфізму $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ відносно p -модуля при $p > n$ у точці x_0 з асимптотичною умовою

умовою

$$\liminf_{R \rightarrow \infty} \frac{M(x_0, f, R)}{(\ln \ln R)^{\frac{p-1}{p-n}}} = 0.$$

4. ПОВЕДІНКА НА НЕСКІНЧЕННОСТІ НИЖНІХ Q -ГОМЕОМОРФІЗМІВ

У цьому пункті наведено теореми про асимптотичну поведінку на нескінченності нижніх Q -гомеоморфізмів відносно p -модуля.

Нижче наведено теорему про асимптотичну поведінку на нескінченності нижніх Q -гомеоморфізмів, яка є аналогом результату Мартіо-Рікмана-Вайсяля про "сильне" зростання в околі нескінченності відображень з обмеженим спотворенням (див. [39]).

Теорема 4.1. ([17]) *Нехай $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ – нижній Q -гомеоморфізм у точці $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $r_0 > 0$ та $Q : \mathbb{R}^n \rightarrow (0, \infty)$ – вимірна за Лебегом функція така, що $\|Q\|_{n-1}(x_0, r) \neq \infty$ для м.в. $r > 0$. Тоді*

$$\liminf_{R \rightarrow \infty} M(x_0, R, f) \exp \left(-\omega_{\frac{1}{n-1}} \int_{r_0}^R \frac{dt}{\|Q\|_{n-1}(x_0, t)} \right) = M_0 > 0, \quad (4.1)$$

$$de \|Q\|_{n-1}(x_0, t) = \left(\int_{S(x_0, t)} Q^{n-1}(x) d\mathcal{A} \right)^{\frac{1}{n-1}}.$$

Наведемо деякі позначення. Для цілих значень $k \geq 0$ покладемо

$$e_0 = 1, \quad e_1 = e, \quad e_2 = e^e, \quad \dots, \quad e_{k+1} = \exp e_k$$

$$\text{і} \quad \ln_0 t = t, \quad \ln_1 t = \ln t, \quad \ln_2 t = \ln \ln t, \quad \dots, \quad \ln_{k+1} t = \ln \ln_k t.$$

Наслідок 4.1. ([17]) *Нехай $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ – нижній Q -гомеоморфізм у деякій точці $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Якщо для деяких чисел $r_0 > e_N$, $C_0 = C_0(x_0) > 0$ виконується умова*

$$\|Q\|_{n-1}(x_0, r) \leq C_0 \prod_{k=0}^N \ln_k r$$

для м.в. $r \in [r_0, \infty)$, то

$$\liminf_{R \rightarrow \infty} \frac{M(x_0, R, f)}{(\ln_N R)^\gamma} = M_0 > 0,$$

$$de \gamma = \frac{\omega_{\frac{1}{n-1}}}{C_0}.$$

Наслідок 4.2. ([17]) Якщо для деяких чисел $r_0 > 0$, $C_0 = C_0(x_0) > 0$ виконується умова $\|Q\|_{n-1}(x_0, r) \leq C_0 r$ для м.в. $r \in [r_0, \infty)$, то

$$\liminf_{R \rightarrow \infty} \frac{M(x_0, R, f)}{R^\gamma} = M_0 > 0,$$

$$\text{де } \gamma = \frac{\frac{1}{n-1}}{C_0}.$$

Нижче наведено теореми про асимптотичну поведінку на нескінченності нижніх Q -гомеоморфізмів відносно p -модуля при $n - 1 < p < n$. Аналогічні результати отримано на комплексній площині при $1 < p < 2$ у роботі [18].

Теорема 4.2. Припустимо, що $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ – нижній Q -гомеоморфізм відносно p -модуля у точці x_0 при $n - 1 < p < n$, де x_0 – деяка точка простору $\mathbb{R}^n$, та для деяких чисел $r_0 > 0$, $C_0 = C_0(x_0) > 0$ виконується умова

$$\|Q\|_{\frac{n-1}{p-n+1}}(x_0, t) \leq C_0 t^\beta \quad (4.2)$$

для м.в. $t \in [r_0, +\infty)$.

1) Якщо $\beta \in [p - n + 1, 1)$, то

$$\liminf_{R \rightarrow \infty} \frac{\text{diam } f(B(x_0, R))}{R^{\frac{1-\beta}{n-p}}} \geq 2 C_0^{\frac{1}{p-n}} \lambda_{n,p} \left(\frac{n-p}{1-\beta} \right)^{\frac{1}{n-p}} > 0. \quad (4.3)$$

2) Якщо $\beta = 1$, то

$$\liminf_{R \rightarrow \infty} \frac{\text{diam } f(B(x_0, R))}{(\ln R)^{\frac{1}{n-p}}} \geq 2 C_0^{\frac{1}{p-n}} \lambda_{n,p} (n-p)^{\frac{1}{n-p}} > 0, \quad (4.4)$$

де $B(x_0, R) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x - x_0| \leq R\}$, $\lambda_{n,p} = \omega_{n-1}^{\frac{p-n+1}{(n-1)(n-p)}}$.

Доведення. Дійсно, за теоремою 1.2 нижній Q -гомеоморфізм відносно p -модуля у точці x_0 при $n - 1 < p < n$ є кільцевим Q_* -гомеоморфізмом відносно $\tilde{p}$ -модуля у точці x_0 з параметром $\tilde{p} = \frac{p}{p-n+1} > n$ при $Q_*(x) = Q_{\frac{n-1}{p-n+1}}(x)$. Застосовуючи теорему 2.2 з параметрами $\kappa = \frac{C_0^{\frac{n-1}{p-n+1}}}{\omega_{n-1}}$ та $\alpha = \frac{(n-1)(\beta-p+n-1)}{p-n+1}$, приходимо до висновків теореми. $\square$

Поклавши у теоремі 4.2 $\beta = p - n + 1$, отримаємо наступне твердження.

Наслідок 4.3. Припустимо, що $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ – нижній Q -гомеоморфізм відносно p -модуля у точці x_0 при $n - 1 < p < n$, де x_0 – деяка точка простору $\mathbb{R}^n$, та для деяких чисел $r_0 > 0$, $C_0 = C_0(x_0) > 0$

виконується умова $\|Q\|_{\frac{n-1}{p-n+1}}(x_0, t) \leq C_0 t^{p-n+1}$ для м.в. $t \in [r_0, +\infty)$.

Тоді

$$\liminf_{R \rightarrow \infty} \frac{\text{diam } f(B(x_0, R))}{R} \geq 2 C_0^{\frac{1}{p-n}} \lambda_{n,p} > 0,$$

де $B(x_0, R) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x - x_0| \leq R\}$, $\lambda_{n,p} = \omega_{n-1}^{\frac{p-n+1}{(n-1)(n-p)}}$.

Теорема 4.3. Припустимо, що $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ – нижній Q -гомеоморфізм відносно p -модуля у точці x_0 при $n-1 < p < n$, де x_0 – деяка точка простору $\mathbb{R}^n$, та для деяких чисел $r_0 > 1$, $C_0 = C_0(x_0) > 0$ виконується умова

$$\|Q\|_{\frac{n-1}{p-n+1}}(x_0, t) \leq C_0 t (\ln t)^\beta \quad (4.5)$$

для м.в. $t \in [r_0, +\infty)$.

1) Якщо $\beta \in [0, 1)$, то

$$\liminf_{R \rightarrow \infty} \frac{\text{diam } f(B(x_0, R))}{(\ln R)^{\frac{1-\beta}{n-p}}} \geq 2 C_0^{\frac{1}{p-n}} \lambda_{n,p} \left(\frac{n-p}{1-\beta} \right)^{\frac{1}{n-p}} > 0. \quad (4.6)$$

2) Якщо $\beta = 1$, то

$$\liminf_{R \rightarrow \infty} \frac{\text{diam } f(B(x_0, R))}{(\ln \ln R)^{\frac{1}{n-p}}} \geq 2 C_0^{\frac{1}{p-n}} \lambda_{n,p} (n-p)^{\frac{1}{n-p}} > 0, \quad (4.7)$$

де $B(x_0, R) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x - x_0| \leq R\}$, $\lambda_{n,p} = \omega_{n-1}^{\frac{p-n+1}{(n-1)(n-p)}}$.

Доведення. Дійсно, за теоремою 1.2 нижній Q -гомеоморфізм відносно p -модуля у точці x_0 при $n-1 < p < n$ є кільцевим Q_* -гомеоморфізмом відносно $\tilde{p}$ -модуля у точці x_0 з параметром $\tilde{p} = \frac{p}{p-n+1} > n$ при $Q_*(x) =$

$Q^{\frac{n-1}{p-n+1}}(x)$. Застосовуючи теорему 2.3 з параметрами $\kappa = \frac{C_0^{\frac{n-1}{p-n+1}}}{\omega_{n-1}}$ та $\alpha = \frac{\beta(n-1)}{p-n+1}$, приходимо до висновків теореми. $\square$

Зауваження 4.1. У теоремах 4.2, 4.3 оцінки (4.3), (4.4), (4.6), (4.7) є точними. Можна побудувати приклади нижніх Q -гомеоморфізмів відносно p -модуля при $n-1 < p < n$, на яких вони досягаються.

5. ТЕОРЕМИ НЕІСНУВАННЯ НИЖНІХ Q -ГОМЕОМОРФІЗМІВ

У цьому пункті наведено теореми про неіснування нижніх Q -гомеоморфізмів відносно p -модуля при $n-1 < p \leq n$. При $1 < p < 2$ на комплексній площині аналогічні результати отримано у роботі [18].

Теорема 5.1. Нехай x_0 – деяка точка простору $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, $r_0 > 0$ та $Q : \mathbb{R}^n \rightarrow (0, \infty)$ – вимірна за Лебегом функція така, що $\|Q\|_{n-1}(x_0, r) \neq \infty$ для м.в. $r > 0$. Тоді не існує нижнього Q -гомеоморфізму $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ у точці x_0 з асимптотичною умовою

$$\liminf_{R \rightarrow \infty} M(x_0, R, f) \exp \left(-\omega_{n-1}^{\frac{1}{n-1}} \int_{r_0}^R \frac{dt}{\|Q\|_{n-1}(x_0, t)} \right) = 0,$$

$$de \|Q\|_{n-1}(x_0, t) = \left(\int_{S(x_0, t)} Q^{n-1}(x) d\mathcal{A} \right)^{\frac{1}{n-1}}.$$

Наслідок 5.1. Нехай x_0 – деяка точка простору $\mathbb{R}^n$ ($n \geq 2$) та для деяких чисел $r_0 > e_N$, $C_0 = C_0(x_0) > 0$ виконується умова

$$\|Q\|_{n-1}(x_0, r) \leq C_0 \prod_{k=0}^N \ln_k r$$

для м.в. $t \in [r_0, \infty)$. Тоді не існує нижнього Q -гомеоморфізму $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ у точці x_0 з асимптотичною умовою

$$\liminf_{R \rightarrow \infty} \frac{M(x_0, R, f)}{(\ln_N R)^\gamma} = 0,$$

$$de \gamma = \frac{\omega_{n-1}^{\frac{1}{n-1}}}{C_0}.$$

Наслідок 5.2. Нехай x_0 – деяка точка простору $\mathbb{R}^n$ ($n \geq 2$) та для деяких чисел $r_0 > 0$, $C_0 = C_0(x_0) > 0$ виконується умова $\|Q\|_{n-1}(x_0, r) \leq C_0 r$ для м.в. $t \in [r_0, \infty)$. Тоді не існує нижнього Q -гомеоморфізму $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ у точці x_0 з асимптотичною умовою

$$\liminf_{R \rightarrow \infty} \frac{M(x_0, R, f)}{R^\gamma} = 0,$$

$$de \gamma = \frac{\omega_{n-1}^{\frac{1}{n-1}}}{C_0}.$$

Теорема 5.2. Нехай x_0 – деяка точка простору $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, та для деяких чисел $r_0 > 0$, $C_0 = C_0(x_0) > 0$ виконується умова

$$\|Q\|_{\frac{n-1}{p-n+1}}(x_0, t) \leq C_0 t^\beta$$

для м.в. $t \in [r_0, +\infty)$.

1) Якщо $\beta \in [p - n + 1, 1)$, то не існує нижнього Q -гомеоморфізму $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ відносно p -модуля при $n - 1 < p < n$ у точці x_0 з асимптотичною умовою

$$\liminf_{R \rightarrow \infty} \frac{M(x_0, f, R)}{R^{\frac{1-\beta}{n-p}}} = 0.$$

2) Якщо $\beta = 1$, то не існує нижнього Q -гомеоморфізму $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ відносно p -модуля при $n - 1 < p < n$ у точці x_0 з асимптотичною умовою

$$\liminf_{R \rightarrow \infty} \frac{M(x_0, f, R)}{(\ln R)^{\frac{1}{n-p}}} = 0.$$

Наслідок 5.3. Нехай x_0 – деяка точка простору $\mathbb{R}^n$ ($n \geq 2$) та для деяких чисел $r_0 > 0$, $C_0 = C_0(x_0) > 0$ виконується умова

$$\|Q\|_{\frac{n-1}{p-n+1}}(x_0, t) \leq C_0 t^{p-n+1}$$

для м.в. $t \in [r_0, +\infty)$. Тоді не існує нижнього Q -гомеоморфізму $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ відносно p -модуля при $n - 1 < p < n$ у точці x_0 з асимптотичною умовою

$$\liminf_{R \rightarrow \infty} \frac{\text{diam } f(B(x_0, R))}{R} = 0.$$

Теорема 5.3. Нехай x_0 – деяка точка простору $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, та для деяких чисел $r_0 > 1$, $C_0 = C_0(x_0) > 0$ виконується умова $\|Q\|_{\frac{n-1}{p-n+1}}(x_0, t) \leq C_0 t (\ln t)^\beta$ для м.в. $t \in [r_0, +\infty)$.

1) Якщо $\beta \in [0, 1)$, то не існує нижнього Q -гомеоморфізму $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ відносно p -модуля при $n - 1 < p < n$ у точці x_0 з асимптотичною умовою

$$\liminf_{R \rightarrow \infty} \frac{M(x_0, f, R)}{(\ln R)^{\frac{1-\beta}{n-p}}} = 0.$$

2) Якщо $\beta = 1$, то не існує нижнього Q -гомеоморфізму $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ відносно p -модуля при $n - 1 < p < n$ у точці x_0 з асимптотичною умовою

$$\liminf_{R \rightarrow \infty} \frac{M(x_0, f, R)}{(\ln \ln R)^{\frac{1}{n-p}}} = 0.$$

ЛІТЕРАТУРА

- [1] Д. А. Ковтонюк, Р. Салимов, Е. Севостьянов. *К теории отображений классов Соболева и Орлича-Соболева*. Наукова думка, Київ, 2013.
- [2] В. Рязанов, Р. Салимов, Е. Севостьянов. О классах Орлича-Соболева и отображениях с ограниченным интегралом Дирихле. *Укр. мат. журн.*, 65(9):1254–1265, 2013.
- [3] В. Рязанов, Р. Салимов, Е. Севостьянов. Нормальность классов Орлича-Соболева. *Укр. мат. журн.*, 68(1):106–116, 2016.
- [4] Е. Афанасьева, В. Рязанов, Р. Салимов. К теории отображений класса Соболева с критическим показателем. *Український математичний вісник*, 15(2):154–176, 2018.
- [5] Е. Афанасьева, В. Рязанов, Р. Салимов. К теории классов Соболева с критическим показателем. *Доповіді НАН України*, (8):3–8, 2019.
- [6] А. Игнатьев, В. Рязанов. Конечное среднее колебание в теории отображений. *Український математичний вісник*, 2(3):395–417, 2005.
- [7] А. Игнатьев, В. Рязанов. К теории граничного поведения пространственных отображений. *Український математичний вісник*, 3(2):199–211, 2006.
- [8] Д. Ковтонюк, В. Рязанов. К теории нижних Q -гомеоморфизмов. *Український математичний вісник*, 5(2):157–181, 2008.
- [9] Е. Афанасьева, Р. Салимов. Асимптотическое поведение на бесконечности решений уравнения Бельтрами. *Збірник праць Ін-ту математики НАНУ*, 12(3):9–16, 2015.
- [10] Р. Салимов, Б. Клищук. Экстремальная задача для площади образа круга. *Доповіді НАН України*, (10):22–27, 2016.
- [11] В. Кругликов. Ёмкости конденсаторов и пространственные отображения, квазиконформные в среднем. *Мат. сб.*, 130(2):185–206, 1986.
- [12] Р. Салимов. Асимптотическое поведение классов Орлича-Соболева на бесконечности. *Збірник праць Ін-ту математики НАНУ*, 12(4):273–284, 2015.
- [13] Р. Салимов. О новом условии конечной липшицевости классов Орлича-Соболева. *Математичні Студії*, 44(1):27–35, 2015.
- [14] Р. Салимов. Нижние Q -гомеоморфизмы относительно p -модуля. *Український математичний вісник*, 12(4):484–510, 2015.
- [15] Р. Салимов. Метрические свойства классов Орлича-Соболева. *Український математичний вісник*, 13(1):129–141, 2016.
- [16] Р. Салимов. Об оценке меры образа шара для нижних Q -гомеоморфизмов. *Доповіді НАН України*, 12(1):19–25, 2016.
- [17] Р. Салимов. *Метод неконформного модуля у теорії відображень зі скінченним спотворенням*. Рукопис дис. докт. фіз.-мат. наук, 2021.
- [18] М. Стефанчук. Про асимптотичну поведінку на нескінченності нижніх Q -гомеоморфізмів відносно p -модуля на комплексній площині. *Праці ПММ НАН України*, 38(2):103–118, 2024.
- [19] L. V. Ahlfors. *Lectures on quasiconformal mappings*. Number 10 in Van Nostrand Mathematical Studies. D. Van Nostrand Co., Inc., Toronto, Ont.-New York-London, 1966.
- [20] C. J. Bishop, V. Ya. Gutlyanskii, O. Martio, M. Vuorinen. On conformal dilatation in space. *Intern. Journ. Math. and Math. Scie.*, 22:1397–1420, 2003.
- [21] M. Cristea. Local homeomorphisms satisfying generalized modular inequalities. *Complex Variables and Elliptic Equations*, 59(2):232–246, 2014.

- [22] M. Cristea. Some properties of open discrete generalized ring mappings. *Complex Variables and Elliptic Equations*, 61(5):623–643, 2016.
- [23] M. Cristea. Eliminability results for mappings satisfying generalized modular inequalities. *Complex Variables and Elliptic Equations*, 64(4):676–684, 2019.
- [24] F. W. Gehring. Rings and quasiconformal mappings in space. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 103:353–393, 1962.
- [25] F. W. Gehring. Lipschitz mappings and the p -capacity of ring in n -space. *Advances in the theory of Riemann surfaces (Proc. Conf. Stonybrook, N.Y., 1969)*, *Ann. of Math. Studies*, 66:175–193, 1971.
- [26] A. Golberg. Differential properties of (α, Q) -homeomorphisms. *Further Progress in Analysis, Proc. 6th ISAAC Congr.*, pages 218–228, 2009.
- [27] A. Golberg. Integrally quasiconformal mappings in space. *Збірник праць Ін-ту математики НАНУ*, 7(2):53–64, 2010.
- [28] A. Golberg, R. Salimov. Topological mappings of integrally bounded p -moduli. *Ann. Univ. Bucharest, Ser. Math.*, 3 (LXI):49–66, 2012.
- [29] A. Golberg, R. Salimov. Logarithmic Holder continuity of ring homeomorphisms with controlled p -module. *Complex Variables and Elliptic Equations*, 59(1):91–98, 2014.
- [30] A. Golberg, R. Salimov. Nonlinear Beltrami equation. *Complex Variables and Elliptic Equations*, 65(1):6–21, 2019.
- [31] A. Golberg, R. Salimov, E. Sevost'yanov. Distortion estimates under mappings with controlled p -module. *Ann. Univ. Bucharest, Ser. Math.*, 5 (LXIII):95–114, 2014.
- [32] A. Golberg, R. Salimov, E. Sevost'yanov. Singularities of discrete open mappings with controlled p -module. *J. Anal. Math.*, 127:303–328, 2015.
- [33] A. Golberg, R. Salimov, E. Sevost'yanov. Normal families of discrete open mappings with controlled p -module. *Contemporary Mathematics*, 667:83–103, 2016.
- [34] A. Golberg, R. Salimov, E. Sevost'yanov. Poletskii type inequality for mappings from the Orlicz-Sobolev classes. *Complex Analysis and Operator Theory*, 10:881–901, 2016.
- [35] A. Golberg, R. Salimov, E. Sevost'yanov. Poletskii type inequality for mappings from the Orlicz-Sobolev classes. *Complex Analysis and Operator Theory*, 10:881–901, 2016.
- [36] A. Golberg, R. Salimov, E. Sevost'yanov. Estimates for Jacobian and dilatation coefficients of open discrete mappings with controlled p -module. *Complex Analysis and Operator Theory*, 11(7):1521–1542, 2017.
- [37] B. Klishchuk. On Power-Law Behavior of Some Mapping Class at Infinity. *Journal of Mathematical Sciences*, 268(2):192–198, 2022.
- [38] O. Lehto, K. Virtanen. *Quasiconformal mappings in the Plane*. Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1973.
- [39] O. Martio, S. Rickman, J. Väisälä. Distortion and singularities of quasiregular mappings. *Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A1. Math.*, 465:1–13, 1970.
- [40] O. Martio, V. Ryazanov, U. Srebro, E. Yakubov. Mappings with finite length distortion. *J. Anal. Math.*, 93:215–236, 2004.
- [41] O. Martio, V. Ryazanov, U. Srebro, E. Yakubov. On Q -homeomorphisms. *Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A1. Math.*, 30:49–69, 2005.
- [42] O. Martio, V. Ryazanov, U. Srebro, E. Yakubov. *Moduli in Modern Mapping Theory*. Springer Monographs in Mathematics. Springer, New York, 2009.
- [43] I. Petkov, R. Salimov, M. Stefanchuk. On the distortion of the disk image diameter. *Journal of Mathematical Sciences*, 274(3):352–369, 2023.

- [44] V. Ryazanov, R. Salimov, U. Srebro, E. Yakubov. On Boundary Value Problems for the Beltrami Equations. *Contemporary Mathematics*, 591:211–242, 2013.
- [45] V. Ryazanov, U. Srebro, E. Yakubov. *Degenerate Beltrami equation and radial Q -homeomorphisms*, volume 369. Preprint, Department of Mathematics, University of Helsinki, 2003.
- [46] V. Ryazanov, U. Srebro, E. Yakubov. Beltrami equation and FMO functions. *Contemporary Mathematics*, 382:357–364, 2005.
- [47] V. Ryazanov, U. Srebro, E. Yakubov. On ring solutions of Beltrami equation. *J. Anal. Math.*, 96:117–150, 2005.
- [48] V. Ryazanov, U. Srebro, E. Yakubov. Finite mean oscillation and the Beltrami equation. *Israel J. Math.*, 153:247–266, 2006.
- [49] V. Ryazanov, U. Srebro, E. Yakubov. On the theory of the Beltrami equation. *Ukrainian Mathematical Journal*, 58(11):1786–1798, 2006.
- [50] V. Ryazanov, U. Srebro, E. Yakubov. The Beltrami equation and ring homeomorphisms. *Ukrain. Math. Bull.*, 4(1):79–115, 2007.
- [51] R. Salimov. ACL and differentiability of Q -homeomorphisms. *Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A1. Math.*, 33:295–301, 2008.
- [52] R. Salimov. On regular homeomorphisms in the plane. *Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A1. Math.*, 35:285–289, 2010.
- [53] R. Salimov. One property of ring Q -homeomorphisms with respect to a p -module. *Ukrainian Mathematical Journal*, 65(5):806–813, 2013.
- [54] R. Salimov. To a theory of ring Q -homeomorphisms with respect to a p -modulus. *Journal of Mathematical Sciences*, 196:679–692, 2014.
- [55] R. Salimov, B. Klishchuk. Extremal problem for the area of the image of a disk. *Journal of Mathematical Sciences*, 234(3):373–380, 2018.
- [56] R. Salimov, B. Klishchuk. An extremal problem for the volume functional. *Matematychni Studii*, 50(1):36–43, 2018.
- [57] R. Salimov, B. Klishchuk. Lower bounds for the volume of the image of a ball. *Ukrainian Mathematical Journal*, 71:883–895, 2019.
- [58] R. Salimov, B. Klishchuk. On the asymptotic behavior at infinity of ring Q -homeomorphisms with respect to p -modulus. *Праці ІПММ НАН України*, 36(1):26–35, 2022.
- [59] R. Salimov, B. Klishchuk. On the Behavior at Infinity of One Class of Homeomorphisms. *Current Trends in Analysis, its Applications and Computation. Trends in Mathematics. Birkhäuser, Cham*, pages 173–180, 2022.
- [60] R. Salimov, B. Klishchuk, M. Stefanchuk. On the asymptotic behavior at infinity of one mapping class. *Proceedings of the International Geometry Center*, 16(1):50–58, 2023.
- [61] R. Salimov, E. Sevost'yanov, A. Markish. On the lower estimate of the distortion of distance for one class of mappings. *Ukrainian Mathematical Journal*, 70:1791–1802, 2019.
- [62] R. Salimov, E. Smolovaya. On the order of growth of ring Q -homeomorphisms at infinity. *Ukrainian Mathematical Journal*, 62(6):961–969, 2010.
- [63] R. Salimov, M. Stefanchuk. Finite Lipschitzness of regular solutions to nonlinear Beltrami equation. *Complex Variables and Elliptic Equations*, 69(6):913–923, 2024.
- [64] E. Sevost'yanov, S. Skvortsov, P. Dovhopiatyi. On nonhomeomorphic mappings with the inverse Poletsky inequality. *Journal of Mathematical Sciences*, 252(4):541–557, 2021.

- [65] E. Sevost'yanov, A. Ukhlov. Sobolev mappings and moduli inequalities on Carnot groups. *Journal of Mathematical Sciences*, 249(5):754–768, 2020.
- [66] M. Stefanchuk. On exponential asymptotics of one class of homeomorphisms at a point of the complex plane. *Proceedings of the International Geometry Center*, 17(2):158–170, 2024.
- [67] M. Stefanchuk. On exponential asymptotics of ring Q -homeomorphisms at infinity. *Journal of Mathematical Sciences*, 282(1):83–92, 2024.
- [68] J. Väisälä. *Lectures on n -dimensional quasiconformal mappings*, volume 229 of *Lecture Notes in Math.* Springer-Verlag, Berlin, 1971.

Б. А. Кліщук

ІНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ НАН УКРАЇНИ, м. Київ

Email: kban1988@gmail.com

ORCID: 0000-0001-9632-2079

Р. Р. Салімов

ІНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ НАН УКРАЇНИ, м. Київ

Email: ruslan.salimov1@gmail.com

ORCID: 0000-0001-9395-3334

М. В. Стефанчук

ІНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ НАН УКРАЇНИ, м. Київ

Email: stefanmv43@gmail.com

ORCID: 0000-0003-3672-8346