Збірник праць Ін-ту математики НАН України (2024) т. 21, №1, 71–81

Екстремальне розбиття комплексної площини з вільними полюсами на одиничному колі

І. В. Денега, Я. В. Заболотний

Abstract. This paper is an attempt to follow the path taken by the open problem of V.N. Dubinin on extremal decomposition of the complex plane with free poles on the unit circle. Currently, the problem is not completely solved. In this work, its partial solution for $n \geqslant 40$ is obtained for the case of simply connected domains.

Анотація. Ця стаття є спробою прослідкувати шлях, який пройшла відкрита проблема В.М. Дубініна про екстремальне розбиття комплексної площини з вільними полюсами на одиничному колі. На даний час ця проблема повністю не розв'язана. У даній роботі одержано її частковий розв'язок при $n \geqslant 40$ для випадку однозв'язних областей.

1. Формулювання проблеми та відомі результати

Нехай $\mathbb{N}$ і $\mathbb{R}$ – множини натуральних і дійсних чисел, відповідно, $\mathbb{C}$ – комплексна площина, $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C}\bigcup\{\infty\}$ – розширена комплексна площина, $U = \{z : |z| < 1\}$ — відкритий одиничний круг.

Нехай функція $f(z)$, мероморфна в крузі U, однолисто відображає даний круг на область $B \subset \overline{\mathbb{C}}$ так, що $f(0) = a$, де $a \in B$ і $a \neq \infty$.

Означення 1.1. *Величина $|f'(0)|$ називається конформним радіусом області B в точці a.*

Конформний радіус області B в точці a будемо позначати $R(B, a)$.

Для багатозв'язних областей аналогом поняття конформного радіуса є поняття внутрішнього радіуса [11, 13, 16, 17, 22].

Означення 1.2. *Функцією Гріна $g_B(z, a)$ області B з полюсом в скінченній точці $a \in B$ називається дійсна функція, гармонічна по z в $B\backslash a$,*

This work was supported by grants from the Simons Foundation (1290607, I.V.D., Y.V.Z.)

2020 Mathematics Subject Classification: 30C75

Ключові слова: конформний і внутрішній радіус області, функціонал, квадратичний диференціал

DOI: https://doi.org/10.3842/trim.v21n1.541

яка прямує до нуля, коли z прямує до межі B, і для якої в деякому околі точки a правильний асимптотичний розклад:

$$g_B(z,a) = -\ln|z-a| + \gamma + o(1), \quad z \to a.$$

Означення 1.3. *Внутрішнім радіусом $r(B,a)$ області B відносно скінченної точки a називається величина e^{γ}.*

Відзначимо, що для однозв'язних областей внутрішній радіус області дорівнює її конформному радіусу.

Означення 1.4. *Нехай B – область розширеної комплексної площини $\overline{\mathbb{C}}_z$. Під квадратичним диференціалом в B розумітимемо символ*

$$Q(z)dz^2, \tag{1.1}$$

де $Q(z)$ – функція, мероморфна в B (див. [11,12,14,16,17]*).*

Означення 1.5. *Скінченна точка $z_0 \in B$ називається нулем або полюсом порядку n диференціала* (1.1)*, якщо вона є нулем або полюсом функції $Q(z)$.*

Означення 1.6. *Круговою областю квадратичного диференціала $Q(z)dz^2$ називається однозв'язна область $G \subset \overline{\mathbb{C}}_z$, яка містить єдиний полюс другого порядку цього квадратичного диференціала в точці $w = a \in G$, така, що при конформному однолистому відображенні $w = f(z)$ $(f(a) = 0)$ області G на одиничний круг площини $\mathbb{C}_w$, дійсна тотожність*

$$Q(z)dz^2 \equiv -k\frac{dw^2}{w^2}, \quad k \in \mathbb{R}^+ = (0,\infty).$$

В даній роботі досліджується наступна проблема.

Проблема 1. [11] При всіх значеннях параметра $\gamma \in (0,n]$ показати, що максимум функціонала

$$I_n(\gamma) = r^{\gamma}\left(B_0, 0\right)\prod_{k=1}^{n} r\left(B_k, a_k\right),$$

де B_0, B_1, $B_2, \ldots, B_n$, $n \geqslant 2$, – області, що взаємно не перетинаються, в $\overline{\mathbb{C}}$, $a_0 = 0$, $|a_k| = 1$, $k = \overline{1,n}$, досягається для конфігурації з областей B_k і точок a_k, які володіють n-кратною симетрією.

Ця проблема була сформульована в якості відкритої в 1994 році у роботі [18] (див. також [11]). На даний час вона повністю не розв'язана, її часткові випадки вивчалися в багатьох роботах. У статті [18] сформульована вище задача була розв'язана для значення параметра $\gamma = 1$

і всіх значень натурального параметра $n \geqslant 2$. А саме, було показано, що при її умовах справедлива нерівність

$$r(B_0,0)\prod_{k=1}^{n} r(B_k,a_k) \leqslant r\left(D_0,0\right)\prod_{k=1}^{n} r\left(D_k,d_k\right),$$

де d_k, D_k, $k=\overline{0,n}$, – полюси та кругові області квадратичного диференціала

$$Q(w)dw^2 = -\frac{(n^2-1)w^n+1}{w^2(w^n-1)^2}\,dw^2.$$

Л.В. Ковальов в 1996 році в роботі [20] отримав розв'язок цієї задачі при досить жорстких обмеженнях на розташування систем точок на одиничному колі, а саме, для таких систем точок, для яких виконуються наступні умови

$$0<\alpha_k \leqslant 2/\sqrt{\gamma}, \quad k=\overline{1,n}, \quad n \geqslant 5,$$

де $\alpha_k = \arg a_{k+1} - \arg a_k$, $\arg a_{n+1} := \arg a_1$. Пізніше в [2] було показано, що результат Л.В. Ковальова справедливий і при $n=4$. В 2003 році в [21] одержано розв'язок проблеми 1 для $\gamma \in (0,1]$. Далі, в монографії [16] 2008 року було показано, що аналог результата В.М. Дубініна [18] виконується для довільного $\gamma \in \mathbb{R}^+$, але починаючи з деякого невідомого номера $n_0(\gamma)$. Також в [16] був запропонований метод "керуючих" функціоналів, який дозволяє послабити вимоги на геометрію розташування систем точок.

Надалі дослідження проблеми 1 розвивалося в основному в трьох напрямках. Першим з даних напрямків було дослідження даної проблеми для конкретних значень натурального параметра n.

Нехай

$$I_n^0(\gamma) = \left(\frac{4}{n}\right)^n \frac{\left(\frac{4\gamma}{n^2}\right)^{\frac{\gamma}{n}}}{\left(1-\frac{\gamma}{n^2}\right)^{n+\frac{\gamma}{n}}} \left(\frac{1-\frac{\sqrt{\gamma}}{n}}{1+\frac{\sqrt{\gamma}}{n}}\right)^{2\sqrt{\gamma}}. \tag{1.2}$$

У роботі [3] одержано розв'язок проблеми 1 при $n=2$.

Теорема 1.1 ([3]). *Нехай $\gamma \in (1,2]$. Тоді для довільних різних точок a_1 і a_2 одиничного кола і довільних областей, що взаємно не перетинаються, B_0, B_1, B_2, $a_0=0\in B_0 \subset \overline{\mathbb{C}}$, $a_1 \in B_1 \subset \overline{\mathbb{C}}$, $a_2\in B_2\subset\overline{\mathbb{C}}$, справедлива нерівність*

$$r^{\gamma}\left(B_0,0\right) r\left(B_1,a_1\right) r\left(B_2,a_2\right) \leqslant I_2^0(\gamma)\left(\frac{1}{2}\left|a_1-a_2\right|\right)^{2-\gamma}.$$

Знак рівності в цій нерівності досягається, коли точки a_0, a_1, a_2 й області B_0, B_1, B_2, є, відповідно, полюсами і круговими областями *квадратичного диференціала*

$$Q(w)dw^2 = -\frac{(4-\gamma)w^2+\gamma}{w^2(w^2-1)^2}dw^2. \tag{1.3}$$

При $n = 2$ і $\gamma \in (0,\, 2]$ розглядалася також дещо загальніша задача про максимум функціонала $I_2(\gamma)$ для довільних фіксованих точок $a_1, a_2 \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$ комплексної площини. Тоді справедливий такий результат.

Теорема 1.2 ([3]). *Нехай $\gamma \in (0,\, 2]$. Тоді для довільних різних точок $A_2 = \{a_1, a_2\} \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$, таких, що*

$$|a_1a_2| \leqslant 1, \quad \left(\frac{1}{2}|a_1-a_2|\right)^{2-\gamma} \leqslant 1,$$

і будь-яких областей, що взаємно не перетинаються, B_0, B_1, B_2, $a_0 = 0 \in B_0 \subset \overline{\mathbb{C}}$, $a_1 \in B_1 \subset \overline{\mathbb{C}}$, $a_2 \in B_2 \subset \overline{\mathbb{C}}$, справедлива нерівність

$$r^{\gamma}\left(B_0,0\right) r\left(B_1,a_1\right) r\left(B_2,a_2\right) \leqslant \frac{4\gamma^{\frac{\gamma}{2}}}{\left(1-\frac{\gamma}{4}\right)^{2+\frac{\gamma}{2}}}\left(\frac{1-\frac{\sqrt{\gamma}}{2}}{1+\frac{\sqrt{\gamma}}{2}}\right)^{2\sqrt{\gamma}}.$$

Знак рівності в цій нерівності досягається, коли точки a_0, a_1, a_2 й області B_0, B_1, B_2, є, відповідно, полюсами і круговими областями квадратичного диференціала (1.3).

Для значень $n = 3$ і $n = 4$ найкращі на даний момент результати були отримані в роботі [1].

Другим напрямком в дослідженні проблеми 1 був пошук її розв'язання з деякими додатковими обмеженнями на системи областей і точок.

Використовуючи результат теореми 1.1, було отримано таку оцінку зверху функціонала $I_n(\gamma)$.

Теорема 1.3 ([3]). *Нехай $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 3$, $\gamma \in (1, n]$. Тоді для будь-якої системи різних точок $A_n = \{a_k\}_{k=1}^n$ одиничного кола і будь-якого набору областей, що взаємно не перетинаються, B_0, B_k, $a_0 = 0 \in B_0 \subset \overline{\mathbb{C}}$, $a_k \in B_k \subset \overline{\mathbb{C}}$, $k = \overline{1,n}$, справедлива нерівність*

$$r^{\gamma}(B_0,0)\prod_{k=1}^{n} r(B_k,a_k) \leqslant \left(\sin\frac{\pi}{n}\right)^{n-\gamma}\left(I_2^0\left(\frac{2\gamma}{n}\right)\right)^{\frac{n}{2}}.$$

Наступна теорема дає частковий розв'язок проблеми 1 для $n \geqslant 4$, $\gamma \in (1, n]$, однак при деякому обмеженні на внутрішній радіус області, яка містить точку нуль.

Теорема 1.4 ([3]). *Нехай $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 4$, $\gamma \in (1, n]$ і*

$$K(n,\gamma) = \left[I_n^0(\gamma) \cdot \mu_n(\gamma)\right]^{\frac{1}{\gamma}},$$

де $I_n^0(\gamma)$ визначається співвідношенням (1.2), *а*

$$\mu_n(\gamma) = \left[\frac{4^n}{(n-1)^{n-1}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\gamma}} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{\gamma}}\right)^{n-1}\right]^{-1}.$$

Тоді для будь-якої системи різних точок $A_n = \{a_k\}_{k=1}^n$ одиничного кола і будь-якого набору областей, що взаємно не перетинаються, B_0, B_k, $a_0 = 0 \in B_0 \subset \overline{\mathbb{C}}$, $a_k \in B_k \subset \overline{\mathbb{C}}$, $k = \overline{1,n}$, таких, що

$$r(B_0, 0) \leqslant K(n,\gamma),$$

справедлива нерівність

$$r^\gamma(B_0,0)\prod_{k=1}^{n} r(B_k,a_k) \leqslant \left(\frac{4}{n}\right)^n \frac{\left(\frac{4\gamma}{n^2}\right)^{\frac{\gamma}{n}}}{\left(1-\frac{\gamma}{n^2}\right)^{n+\frac{\gamma}{n}}} \left(\frac{1-\frac{\sqrt{\gamma}}{n}}{1+\frac{\sqrt{\gamma}}{n}}\right)^{2\sqrt{\gamma}}.$$

Знак рівності в цій нерівності досягається тоді, коли a_k і B_k, $k = \overline{0,n}$, є, відповідно, полюсами і круговими областями квадратичного диференціала

$$Q(w)dw^2 = -\frac{(n^2-\gamma)w^n + \gamma}{w^2(w^n-1)^2}\,dw^2. \tag{1.4}$$

Іншим напрямком в дослідженні проблеми 1 був пошук зростаючої мажоранти для всіх значень n, починаючи з деякого номера.

Теорема 1.5 ([3]). *Нехай $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 3$, $\gamma \in (1, \sqrt{n}\,]$. Тоді для будь-якої системи різних точок $A_n = \{a_k\}_{k=1}^n$ одиничного кола і будь-якого набору областей, що взаємно не перетинаються, B_0, B_k, $a_0 = 0 \in B_0 \subset \overline{\mathbb{C}}$, $a_k \in B_k \subset \overline{\mathbb{C}}$, $k = \overline{1,n}$, справедлива нерівність*

$$r^\gamma\left(B_0,0\right)\prod_{k=1}^{n} r\left(B_k,a_k\right) \leqslant r^\gamma\left(D_0,0\right)\prod_{k=1}^{n} r\left(D_k,d_k\right),$$

де d_k, D_k, $k = \overline{0,n}$, $d_0 = 0$, є, відповідно, полюсами і круговими областями квадратичного диференціала (1.4).

В попередній теоремі в ролі мажоранти виступає $\gamma = \sqrt{n}$. Однак виявляється, що в ролі даної мажоранти можна також взяти $\gamma = n^\alpha$ для довільного $\alpha \in \left(\frac{1}{2}; \frac{2}{3}\right)$. Зокрема, правильна наступна теорема.

Теорема 1.6 ([19]). *Для довільного натурального $n \geqslant e^9$ і $0 < \gamma \leqslant n^{\frac{2}{3} - \frac{1}{\sqrt{\ln n}}}$ виконується нерівність:*

$$r^{\gamma}(B_0,a_0)\prod_{k=1}^{n} r(B_k,a_k)\leqslant r^{\gamma}(D_0,a_0^0)\prod_{k=1}^{n} r(D_k,a_k^0),$$

де B_0, B_1, B_2,..., B_n, *– попано неперетинні області в* $\overline{\mathbb{C}}$, $a_0=0$, $|a_k|=1$, $a_1=1$, $k=\overline{1,n}$, *причому знак рівності досягається, наприклад, для* $a_k=a_k^0$, $B_k=D_k$, $k=\overline{0,n}$, *де* a_k^0, D_k, *– відповідно полюси і кругові області квадратичного диференціала* (1.4).

Суттєвим недоліком попередньої теореми є те, що номер, починаючи з якого можна брати $\gamma=n^{\alpha}$ для $\alpha\in\left(\frac{1}{2};\frac{2}{3}\right)$, є дуже великим.

Загалом, найкращі відомі на даний момент результати в даній проблемі як для деяких конкретних значень n, так і для загального випадку відображено в наступній таблиці.

n	2	3	4	$n\geqslant 3$	$n\geqslant e^9$
γ	$(0,2]$	$(0,2.1]$	$(0,2.5]$	$(0,\sqrt{n}]$	$\left(0,n^{\frac{2}{3}-\frac{1}{\sqrt{\ln n}}}\right]$

2. Основний результат

В наступній теоремі наводиться деякий аналог теореми 1.6, однак для $n\geqslant 40$, причому суттєво розширено діапазон γ, для яких твердження проблеми 1 правильне.

Теорема 2.1. *Нехай* $n\in\mathbb{N}$, $n\geqslant 40$ *і* $1<\gamma\leqslant n^{\frac{2}{3}-\frac{2}{3}\frac{\ln\left(\frac{5}{6}\ln(n)\right)}{\ln(n)}}$. *Тоді для довільного набору функцій* f_k, $k=\overline{0,n}$, *регулярних і однолистих в крузі* $|z|<1$, *таких, що* $f_0(0)=0$, $|f_k(0)|=1$ *для* $k=\overline{1,n}$, *причому* $f_i(z_1)\neq f_j(z_2)$ *для довільних натуральних* $1\leqslant i,j\leqslant n$, $i\neq j$, *та довільних різних* $z_1,z_2\in U$, *правильна нерівність:*

$$\left|f_0'(0)\right|^{\gamma}\prod_{k=1}^{n}\left|f_k'(0)\right|\leqslant\left(\frac{4}{n}\right)^{n}\frac{\left(\frac{4\gamma}{n^2}\right)^{\frac{\gamma}{n}}}{\left(1-\frac{\gamma}{n^2}\right)^{n+\frac{\gamma}{n}}}\left(\frac{1-\frac{\sqrt{\gamma}}{n}}{1+\frac{\sqrt{\gamma}}{n}}\right)^{2\sqrt{\gamma}}. \qquad (2.1)$$

Зауважимо, що результат теореми не зміниться для випадку, якщо одна з функцій f_k буде мероморфною.

Доведення. Зауважимо, що набір функцій f_k, $k=\overline{0,n}$, відображає відкритий одиничний круг на деяку систему неперетинних однозв'язних областей, причому $|f_k'(0)|=R\left(B_k,a_k\right)=r\left(B_k,a_k\right)$, де $a_k=f_k(0)$. Нехай для конкретності

$$0=\arg a_1<\arg a_2<\ldots<\arg a_n<2\pi.$$

Позначимо

$\alpha_1 := \frac{1}{\pi}(\arg a_2 - \arg a_1)$, $\alpha_2 := \frac{1}{\pi}(\arg a_3 - \arg a_2)$, ..., $\alpha_n := \frac{1}{\pi}(2\pi - \arg a_n)$.

Позначимо також $\alpha_0 = \max\limits_k \alpha_k$, $k = \overline{1,n}$. Тоді правильне наступне твердження:

Лема 2.1 ([1]). *Нехай $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$, $\gamma > 0$. Нехай система взаємно неперетинних однозв'язних областей $\{B_0, B_1, B_2, \dots, B_n\}$ така, що $0 \in B_0$, $a_k \in B_k \subset \overline{\mathbb{C}}$, $k = \overline{1,n}$, і $r^\gamma(B_0, 0) \prod\limits_{k=1}^{n} r(B_k, a_k) > I_n^0(\gamma)$. Тоді правильна нерівність*

$$r(B_0, 0) \leqslant n^{-\frac{n}{2(n-\gamma)}} \, I_n^0(\gamma)^{-\frac{1}{n-\gamma}},$$

де $I_n^0(\gamma)$ – див. (1.2).

Врахувавши результат роботи [20], а також лему 2.1, нам досить розглянути випадок

$$\left|f_0'(0)\right| \leqslant n^{-\frac{n}{2(n-\gamma)}} \, I_n^0(\gamma)^{-\frac{1}{n-\gamma}} \quad \text{і} \quad \alpha_0 > \frac{2}{\sqrt{\gamma}}.$$

Доведемо, що для даних умов правильна нерівність:

$$\frac{|f_0'(0)|^\gamma \prod\limits_{k=1}^{n} |f_k'(0)|}{\left(\frac{4}{n}\right)^n \frac{\left(\frac{4\gamma}{n^2}\right)^{\frac{\gamma}{n}}}{\left(1-\frac{\gamma}{n^2}\right)^{n+\frac{\gamma}{n}}} \left(\frac{1-\frac{\sqrt{\gamma}}{n}}{1+\frac{\sqrt{\gamma}}{n}}\right)^{2\sqrt{\gamma}}} < 1. \tag{2.2}$$

Врахувавши лему 1, отримаємо, що

$$\left|f_0'(0)\right|^\gamma \leqslant n^{-\frac{n\gamma}{2(n-\gamma)}} \, I_n^0(\gamma)^{-\frac{\gamma}{n-\gamma}}.$$

Підставивши даний вираз в нерівність (2.2), одержимо, що для доведення теореми нам достатньо довести таке співвідношення

$$n^{-\frac{n\gamma}{2(n-\gamma)}} \, I_n^0(\gamma)^{-\frac{n}{n-\gamma}} \prod_{k=1}^{n} \left|f_k'(0)\right| < 1. \tag{2.3}$$

Також, згідно з теоремою 5.2.3 роботи [16] правильна наступна нерівність:

$$\begin{aligned} \prod_{k=1}^{n} \left|f_k'(0)\right| \leqslant 2^n \prod_{k=1}^{n} \alpha_k \leqslant 2^n \alpha_0 \left(\frac{2-\alpha_0}{n-1}\right)^{n-1} < \\ < \frac{4^n}{(n-1)^{n-1}\sqrt{\gamma}} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{\gamma}}\right)^{n-1}. \end{aligned} \tag{2.4}$$

Підставивши нерівність (2.4) в (2.3), отримаємо, що нам потрібно довести нерівність

$$P_n(\gamma) := n^{-\frac{n\gamma}{2(n-\gamma)}} \frac{4^n}{(n-1)^{n-1}\sqrt{\gamma}} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{\gamma}}\right)^{n-1} I_n^0(\gamma)^{-\frac{n}{n-\gamma}} < 1. \qquad (2.5)$$

Використавши рівність (1.2), отримаємо, що

$$P_n(\gamma) = n^{\frac{n\gamma+2n+2\gamma}{2(n-\gamma)}} \left(\frac{n}{n-1}\right)^{n-1} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{\gamma}}\right)^{n-1}$$
$$\left(1 - \frac{\gamma}{n^2}\right)^{\frac{n^2+\gamma}{n-\gamma}} \left(\frac{1}{4\sqrt{\gamma}}\right)^{\frac{n+\gamma}{n-\gamma}} \left(\frac{1+\frac{\sqrt{\gamma}}{n}}{1-\frac{\sqrt{\gamma}}{n}}\right)^{\frac{2n\sqrt{\gamma}}{n-\gamma}}. \qquad (2.6)$$

Оцінимо вираз $P_n(\gamma)$ при умовах теореми. Зокрема, $\left(\frac{n}{n-1}\right)^{n-1} < e$. Відзначимо також, що $\left(1 - \frac{\gamma}{n^2}\right)^{\frac{n^2+\gamma}{n-\gamma}} < 1$. Також правильна наступна оцінка:

$$\left(\frac{1+\frac{\sqrt{\gamma}}{n}}{1-\frac{\sqrt{\gamma}}{n}}\right)^{\frac{2n\sqrt{\gamma}}{n-\gamma}} \left(\frac{1}{4\sqrt{\gamma}}\right)^{\frac{n+\gamma}{n-\gamma}} < 0.06 < \frac{1}{e}.$$

Таким чином,

$$P_n(\gamma) < n^{\frac{n\gamma+2n+2\gamma}{2(n-\gamma)}} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{\gamma}}\right)^{n-1}. \qquad (2.7)$$

Оцінимо тепер вираз $n^{\frac{n\gamma+2n+2\gamma}{2(n-\gamma)}} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{\gamma}}\right)^{n-1}$ при умовах даної теореми. Правильні наступні перетворення:

$$n^{\frac{n\gamma+2n+2\gamma}{2(n-\gamma)}} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{\gamma}}\right)^{n-1} = n^{\frac{n\gamma+2n+2\gamma}{2(n-\gamma)}} \left(\left(1 - \frac{1}{\sqrt{\gamma}}\right)^{\sqrt{\gamma}}\right)^{\frac{n-1}{\sqrt{\gamma}}} <$$
$$< \left(n \left(\frac{1}{e}\right)^{\frac{2n^2-2n-2n\gamma+2\gamma}{n\gamma\sqrt{\gamma}+2n\sqrt{\gamma}+2\gamma\sqrt{\gamma}}}\right)^{\frac{n\gamma+2n+2\gamma}{2(n-\gamma)}} =$$
$$= \left(n \left(\frac{1}{e}\right)^{\frac{n}{\gamma^{\frac{3}{2}}} \frac{2-\frac{2}{n}-\frac{2\gamma}{n}+\frac{2\gamma}{n^2}}{1+\frac{2}{\gamma}+\frac{2}{n}}}\right)^{\frac{n\gamma+2n+2\gamma}{2(n-\gamma)}}. \qquad (2.8)$$

Оскільки в роботі [3] задачу було розв'язано для $n \geqslant 3$ і $1 < \gamma \leqslant \sqrt{n}$, то нам достатньо розглянути тільки $\gamma > \sqrt{n}$. Для $n \geqslant 40$ і $\sqrt{n} < \gamma < n^{\frac{2}{3}-\frac{2}{3}\frac{\ln\left(\frac{5}{6}\ln(n)\right)}{\ln(n)}}$ правильна нерівність

$$\frac{2-\frac{2}{n}-\frac{2\gamma}{n}+\frac{2\gamma}{n^2}}{1+\frac{2}{\gamma}+\frac{2}{n}} > \frac{6}{5},$$

тому отримаємо:

$$n\left(\frac{1}{e}\right)^{\frac{n}{\gamma^{\frac{3}{2}}}\frac{2-\frac{2}{n}-\frac{2\gamma}{n}+\frac{2\gamma}{n^2}}{1+\frac{2}{\gamma}+\frac{2}{n}}} < n\left(\frac{1}{e}\right)^{\frac{6}{5}\frac{n}{\gamma^{\frac{3}{2}}}}. \tag{2.9}$$

Врахувавши, що $\gamma < n^{\frac{2}{3}-\frac{2}{3}\frac{\ln\left(\frac{5}{6}\ln(n)\right)}{\ln(n)}}$, отримаємо, що

$$\frac{6}{5}\frac{n}{\gamma^{\frac{3}{2}}} > \frac{6}{5}\frac{n}{n^{\frac{3}{2}\left(\frac{2}{3}-\frac{2}{3}\frac{\ln\left(\frac{5}{6}\ln(n)\right)}{\ln(n)}\right)}} = \frac{6}{5}n^{\frac{\ln\left(\frac{5}{6}\ln(n)\right)}{\ln(n)}}.$$

Таким чином,

$$n\left(\frac{1}{e}\right)^{\frac{6}{5}\frac{n}{\gamma^{\frac{3}{2}}}} \leqslant n\left(\frac{1}{e}\right)^{\frac{6}{5}n^{\frac{\ln\left(\frac{5}{6}\ln(n)\right)}{\ln(n)}}} = n\left(\frac{1}{e}\right)^{\frac{6}{5}n^{\log_n\left(\frac{5}{6}\ln(n)\right)}} = 1.$$

Підставивши даний результат в нерівності (2.9) і (2.8), маємо

$$n^{\frac{n\gamma+2n+2\gamma}{2(n-\gamma)}}\left(1-\frac{1}{\sqrt{\gamma}}\right)^{n-1} < 1.$$

Таким чином, в нерівності (2.7) отримаємо, що для заданих n і γ виконується нерівність

$$P_n(\gamma) < 1,$$

а звідси, врахувавши нерівності (2.2) – (2.5), і випливає нерівність (2.1). Теорему 2.1 доведено. □

Зауваження 2.1. Враховуючи поведінку виразу

$$H(n,\gamma) := \frac{2-\frac{2}{n}-\frac{2\gamma}{n}+\frac{2\gamma}{n^2}}{1+\frac{2}{\gamma}+\frac{2}{n}}$$

при збільшенні n ми можемо дещо уточнити значення γ, для яких виконується нерівність (2.1). Так, наприклад, для $n \geqslant 47$ і $\gamma > \sqrt{n}$ правильна нерівність $H(n,\gamma) > \frac{5}{4}$, а тому, провівши аналогічні міркування, можна довести, що для даних n нерівність (2.1) виконується для

$1 < \gamma \leqslant n^{\frac{2}{3}-\frac{2}{3}\frac{\ln\left(\frac{4}{5}\ln(n)\right)}{\ln(n)}}$; для $n \geqslant 119$ правильна нерівність $H(n,\gamma) > \frac{3}{2}$, а тому нерівність (2.1) виконується для $1 < \gamma \leqslant n^{\frac{2}{3}-\frac{2}{3}\frac{\ln\left(\frac{2}{3}\ln(n)\right)}{\ln(n)}}$, тобто можна дещо розширити діапазон γ в умові теореми 2.1.

Зауваження 2.2. Доведена вище теорема 2.1 розв'язує проблему 1 для $n \geqslant 40$ і $1 < \gamma \leqslant n^{\frac{2}{3}-\frac{2}{3}\frac{\ln\left(\frac{5}{6}\ln(n)\right)}{\ln(n)}}$ для випадку однозв'язних областей.

З подібними результатами про оцінки добутків внутрішніх радіусів областей можна ознайомитися в роботах [4–10, 15].

Література

[1] A. K. Bakhtin. Separating transformation and extremal problems on nonoverlapping simply connected domains. *J. Math. Sci.*, 234(1):1 – 13, 2018.

[2] A. K. Bakhtin, I. V. Denega. Addendum to a theorem on extremal decomposition of the complex plane. *Bull. Soc. Sci. Lett. Lodz, Ser. Rech. Deform.*, 62(2):83 – 92, 2012.

[3] A. K. Bakhtin, I. V. Denega. Extremal decomposition of the complex plane with free poles. *J. Math. Sci.*, 246(1):1–17, 2020.

[4] A. K. Bakhtin, I. V. Denega. Extremal decomposition of the complex plane with free poles ii. *J. Math. Sci.*, 246(5):602–616, 2020.

[5] A. K. Bakhtin, I. V. Denega. Generalized m. a. lavrentiev's inequality. *J. Math. Sci.*, 262(2):138–153, 2022.

[6] A. K. Bakhtin, A. L. Targonskii. Generalized (n, d)-ray systems of points and inequalities for nonoverlapping domains and open sets. *Ukr. Math. J.*, 63(7):999–1012, 2011.

[7] A. K. Bakhtin, Ya. V. Zabolotnii. Estimates of the products on inner radii for multi-connected domains. *Ukr. Math. J.*, 73(1):6–12, 2021.

[8] I. V. Denega, Ya. V. Zabolotnii. Estimates of products of inner radii of non-overlapping domains in the complex plane. *Complex Variables and Elliptic Equations*, 62(11):1611–1618, 2017.

[9] I. V. Denega, Ya. V. Zabolotnii. An extremal problem on non-overlapping domains containing ellipse points. *Eurasian Math. J.*, 12(4):82–91, 2021.

[10] I. V. Denega, Y. V. Zabolotnyi. Application of upper estimates for products of inner radii to distortion theorems for univalent functions. *Matematychni Studii*, 60(2):138–144, 2023.

[11] V. N. Dubinin. *Condenser capacities and symmetrization in geometric function theory.* Birkhäuser/Springer, Basel, 2014.

[12] P. Duren. *Univalent functions.* Heidelberg and New York: Springer-Verlag, 1983.

[13] G. M. Goluzin. *Geometric theory of functions of a complex variable.* Amer. Math. Soc. Providence, R.I., 1969.

[14] K. Strebel. *Quadratic differentials.* Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1984.

[15] A. L. Targonskii. Extreme problem for a mosaic system of points on the open sets and non-overlapping domains. *Proceedings of the International Geometry Center*, 16(1):91–104, 2023.

[16] А. К. Бахтин, Г. П. Бахтина,, Ю. Б. Зелинский. *Тополого-алгебраические структуры и геометрические методы в комплексном анализе.* Праці ін-ту мат-ки НАН Укр., 2008.

[17] Дж. А. Дженкинс. *Однолистные функции и конформные отображения.* М.: Изд-во иностр. лит., 1962.

[18] В. Н. Дубинин. Метод симметризации в геометрической теории функций комплексного переменного. *Успехи мат. наук.*, 49 (295)(1):3 – 76, 1994.

[19] Я. В. Заболотний. Задача про обчислення максимуму добутку внутрішніх радіусів неперетинних областей на комплексній площині. *Збірник праць Ін-ту матем. НАН України.*, 10(4-5):557–564, 2013.

[20] Л. В. Ковалев. К задаче об экстремальном разбиении со свободными полюсами на окружности. *Дальневосточный матем. сборник*, (2):96 – 98, 1996.

[21] Г. В. Кузьмина. Метод экстремальной метрики в задачах о максимуме произведения степеней конформных радиусов неналегающих областей приналичии свободных параметров. *Зап. научн. сем. ПОМИ*, 302:52 – 67, 2003.

[22] Н. А. Лебедев. *Принцип площадей в теории однолистных функций.* М.: Наука, 1975.

І. В. Денега
Інститут математики НАН України, м. Київ
Email: iradenega@gmail.com
ORCID: 0000-0001-8122-4257

Я. В. Заболотний
Інститут математики НАН України, м. Київ
Email: yaroslavzabolotnii@gmail.com
ORCID: 0000-0002-1878-2077