

Залежність ефективних властивостей від регулярних збурень

М. Далла Ріва, П. Луцціні, П. Мусоліно, Р. Пухтаєвич

Abstract. In this review, we present some of our results on the behavior of the effective properties in the presence of perturbations of the geometric and physical parameters. We will first show that the average longitudinal flow of a Newtonian fluid flowing at low Reynolds numbers around a periodic array of cylinders depends analytically on the perturbations of the periodicity structure and the cross section of the cylinders. Next, we will show the analytical dependence of the effective conductivity of a periodic two-phase composite with ideal and non-ideal contacts at the interface on the perturbations of the shape of the inclusions, the periodicity structure, and the conductivity of each material.

Анотація. У цьому огляді ми представляємо деякі наші результати щодо поведінки ефективних властивостей за наявності збурень геометричних і фізичних параметрів. Ми спочатку покажемо, що середній поздовжній потік ньютонівської рідини, що тече з низькими числами Рейнольдса навколо періодичного масиву циліндрів, аналітично залежить від збурень структури періодичності та поперечного перерізу циліндрів. Далі ми покажемо аналітичну залежність ефективної провідності періодичного двофазного композиту з ідеальним і неідеальним контактами на межі від збурень форми включень, структури періодичності та провідності кожного матеріалу.

1. ВСТУП

У статті представлені нещодавні результати щодо впливу збурень геометрії та фізичних параметрів на ефективні властивості. Спочатку розглядається випадок ньютонівської рідини, що тече при низьких числах Рейнольдса навколо періодичного масиву циліндрів і показано, що середнє значення поздовжньої складової швидкості потоку аналітично залежить від збурень структури періодичності та поперечного перерізу циліндрів (див. [7, 9]).

2020 *Mathematics Subject Classification*: 35J25, 35J05, 31B10, 45A05, 74E30, 74G10, 74M15

Ключові слова: longitudinal flow, periodic composite, effective conductivity, transmission problem, perturbed domain, integral equations

DOI: <https://doi.org/10.3842/trim.v21n1.540>

Далі розглядаються теплові властивості двофазних композитів із періодичними включеннями в однорідній матриці. Показано, що ефективна провідність аналітично залежить від збурень форми включень, структури періодичності та провідності матеріалів. Представлено результати для ідеального [8] та неідеального контактів на межі [4].

Середній поздовжній потік та ефективна провідність визначаються як функціонали розв'язків періодичних крайових задач, які ми формуємо в областях, форма яких залежить від певних параметрів збурення. Для їх дослідження ми перетворюємо крайові задачі в системи інтегральних рівнянь на межі цих областей, а потім через зміну змінних переводимо їх на межі фіксованих множин. Далі, за допомогою теореми про неявну функцію для аналітичних відображень у банахових просторах виводяться результати про аналітичну залежність розв'язків, що дає необхідні характеристики ефективних властивостей. Під «аналітичним» завжди мається на увазі "дійсно аналітичний".

Також варто зазначити, що на відміну від багатьох існуючих методів у літературі, які застосовуються до періодичних структур зі специфічними формами (наприклад, дво- чи тривимірні періодичні масиви кругів/сфер або еліпсів/еліпсоїдів), наш метод можна застосовувати до довільних форм за умови дотримання певних припущень щодо регулярності. Крім того, результати щодо аналітичності, які ми отримуємо, передбачають диференційованість відносно параметрів, а тому можна обчислити відповідні похідні з метою характеристики критичних конфігурацій.

Стаття організована наступним чином. У Розділі 2 ми вводимо геометричні позначення розглянутих періодичних структур. Розділ 3 містить результат щодо середнього поздовжнього потоку вздовж періодичного масиву циліндрів. У Розділі 4 та Розділі 5 ми представляємо результат щодо ефективної провідності двофазного періодичного композиту з умовою ідеального та неідеального контактів відповідно.

2. ГЕОМЕТРИЧНІ ПОЗНАЧЕННЯ

Позначимо через $n \in \{2, 3\}$ і $\{e_1, \dots, e_n\}$ розмірність і канонічний базис простору $\mathbb{R}^n$. Якщо $q_{11}, \dots, q_{nn} \in]0, +\infty[$, то ми будемо використовувати наступне позначення:

$$q = \begin{cases} \begin{pmatrix} q_{11} & 0 \\ 0 & q_{22} \end{pmatrix}, & \text{якщо } n = 2, \\ \begin{pmatrix} q_{11} & 0 & 0 \\ 0 & q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & q_{33} \end{pmatrix}, & \text{якщо } n = 3 \end{cases} \quad (2.1)$$

i

$$Q \equiv \prod_{j=1}^n (0, q_{jj}) \subseteq \mathbb{R}^n. \quad (2.2)$$

Множина Q є періодичною коміркою, тоді як q є діагональною матрицею, що включає інформацію про періодичність. Очевидно, що $|Q|_n \equiv \prod_{j=1}^n q_{jj}$ є мірою комірки Q , а $q\mathbb{Z}^n \equiv \{qz : z \in \mathbb{Z}^n\}$ — це множина вершин періодичного поділу $\mathbb{R}^n$, що відповідає комірці Q . Крім того, покладемо $\tilde{Q} \equiv]0, 1[^n$.

Нехай $\mathbb{D}_n(\mathbb{R})$ — простір $n \times n$ діагональних матриць з дійсними елементами, а $\mathbb{D}_n^+(\mathbb{R})$ — множина елементів з $\mathbb{D}_n(\mathbb{R})$ з діагональними елементами в $]0, +\infty[$. Якщо Ω_Q є підмножиною $\mathbb{R}^n$, такою що $\overline{\Omega_Q} \subseteq Q$, ми визначаємо наступні дві періодичні області: $\mathbb{S}_q[\Omega_Q] \equiv \bigcup_{z \in \mathbb{Z}^n} (qz + \Omega_Q)$, $\mathbb{S}_q[\Omega_Q]^- \equiv \mathbb{R}^n \setminus \overline{\mathbb{S}_q[\Omega_Q]}$. Символ ‘ $\bar{\cdot}$ ’ позначає замикання множини.

Якщо u є дійснозначною функцією, визначеною на $\mathbb{S}_q[\Omega_Q]$ або $\mathbb{S}_q[\Omega_Q]^-$, ми говоримо, що u є q -періодичною, якщо $u(x + qz) = u(x)$ для всіх $z \in \mathbb{Z}^n$ та для всіх x з області визначення u . Якщо $k \in \mathbb{N}$, покладемо

$$C_b^k(\overline{\mathbb{S}_q[\Omega_Q]^-}) \equiv \left\{ u \in C^k(\overline{\mathbb{S}_q[\Omega_Q]^-}) : D^\gamma u \text{ обмежена } \forall \gamma \in \mathbb{N}^n \text{ та } |\gamma| \leq k \right\}.$$

На $C_b^k(\overline{\mathbb{S}_q[\Omega_Q]^-})$ ми розглядаємо звичну норму

$$\|u\|_{C_b^k(\overline{\mathbb{S}_q[\Omega_Q]^-})} \equiv \sum_{|\gamma| \leq k} \sup_{x \in \overline{\mathbb{S}_q[\Omega_Q]^-}} |D^\gamma u(x)|, \quad \forall u \in C_b^k(\overline{\mathbb{S}_q[\Omega_Q]^-}),$$

де $|\gamma| \equiv \sum_{i=1}^n \gamma_i$ позначає довжину мультиіндексу $\gamma \equiv (\gamma_1, \dots, \gamma_n) \in \mathbb{N}^n$. Крім того, якщо $\beta \in]0, 1]$, ми покладемо

$$C_b^{k,\beta}(\overline{\mathbb{S}_q[\Omega_Q]^-}) \equiv \left\{ u \in C_b^{k,\beta}(\overline{\mathbb{S}_q[\Omega_Q]^-}) : D^\gamma u \text{ обмежена } \forall \gamma \in \mathbb{N}^n \text{ та } |\gamma| \leq k \right\},$$

а на $C_b^{k,\beta}(\overline{\mathbb{S}_q[\Omega_Q]^-})$ ми розглядаємо звичну норму

$$\|u\|_{C_b^{k,\beta}(\overline{\mathbb{S}_q[\Omega_Q]^-})} \equiv \sum_{|\gamma| \leq k} \sup_{x \in \overline{\mathbb{S}_q[\Omega_Q]^-}} |D^\gamma u(x)| + \sum_{|\gamma|=k} |D^\gamma u : \overline{\mathbb{S}_q[\Omega_Q]^-}|_\beta \quad \forall u \in C_b^{k,\beta}(\overline{\mathbb{S}_q[\Omega_Q]^-}),$$

де $|D^\gamma u : \overline{\mathbb{S}_q[\Omega_Q]^-}|_\beta$ позначає β -Гельдерівську константу $D^\gamma u$ (див. наприклад, Гілбарг і Трудінгер [6] для визначення множин і функцій класу Шаудера $C^{k,\beta}$). Тоді, $C_b^k(\overline{\mathbb{S}_q[\Omega_Q]^-})$ - банаховий підпростір $C_b^k(\overline{\mathbb{S}_q[\Omega_Q]^-})$, визначений як $C_b^k(\overline{\mathbb{S}_q[\Omega_Q]^-}) \equiv \left\{ u \in C_b^k(\overline{\mathbb{S}_q[\Omega_Q]^-}) : u \text{ є } q\text{-періодичною} \right\}$,

а $C_q^{k,\beta}(\overline{\mathbb{S}_q[\Omega_Q]^-})$ - банаховий підпростір $C_b^{k,\beta}(\overline{\mathbb{S}_q[\Omega_Q]^-})$, визначену як

$$C_q^{k,\beta}(\overline{\mathbb{S}_q[\Omega_Q]^-}) \equiv \left\{ u \in C_b^{k,\beta}(\overline{\mathbb{S}_q[\Omega_Q]^-}) : u \in q\text{-періодичною} \right\}.$$

Простори $C_b^k(\overline{\mathbb{S}_q[\Omega_Q]})$, $C_b^{k,\beta}(\overline{\mathbb{S}_q[\Omega_Q]})$, $C_q^k(\overline{\mathbb{S}_q[\Omega_Q]})$ і $C_q^{k,\beta}(\overline{\mathbb{S}_q[\Omega_Q]})$ можуть бути визначені аналогічним чином.

Ми позначаємо через ν_{Ω_Q} одиничну зовнішню нормаль до $\partial\Omega_Q$, а через $d\sigma$ — елемент площі на $\partial\Omega_Q$. Ми зберігаємо стандартні позначення для простору Лебега $L^1(\partial\Omega_Q)$ функцій, інтегрованих за Лебегом. Позначимо через $|\partial\Omega_Q|_{n-1}$ $(n-1)$ -вимірну міру $\partial\Omega_Q$.

Тепер ми вводимо збурення форми. Щоб розглядати області змінної форми, ми фіксуємо множину та розглядаємо клас дифеоморфізмів, що діють на її межі. Тоді збурення дифеоморфізму можна розглядати як збурення області. З цією метою ми фіксуємо наступне

Нехай $\alpha \in]0, 1[$ і нехай Ω є обмеженою відкритою зв'язною підмножиною $\mathbb{R}^n$ класу $C^{1,\alpha}$ такою що $\mathbb{R}^n \setminus \overline{\Omega}$ є зв'язною. (2.3)

Ми позначаємо через $\mathcal{A}_{\partial\Omega}$ множину функцій класу $C^1(\partial\Omega, \mathbb{R}^n)$, які є ін'єктивними та у яких диференціал є ін'єктивним в усіх точках $\partial\Omega$. Тоді нам зручно позначити через $\mathcal{A}_{\partial\Omega}^{\tilde{Q}} \equiv \{\phi \in \mathcal{A}_{\partial\Omega} : \phi(\partial\Omega) \subseteq \tilde{Q}\}$ множину дифеоморфізмів з $\mathcal{A}_{\partial\Omega}$, образ яких міститься у $\tilde{Q}$ (див. Рисунок 2.1).

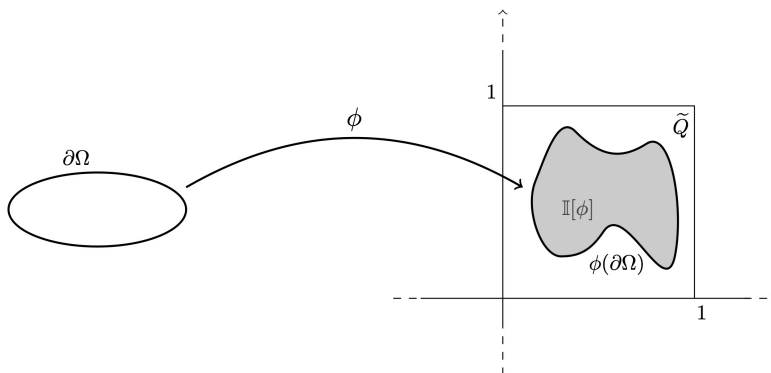
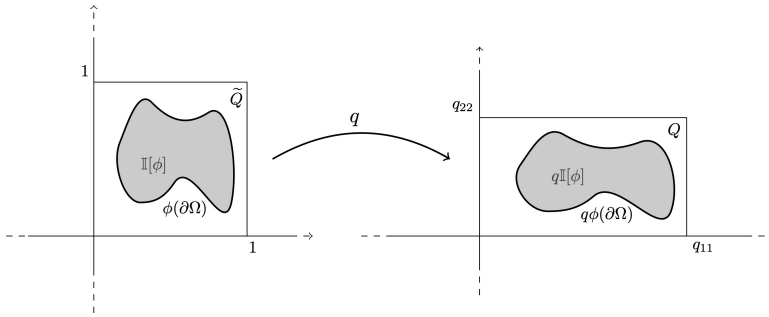
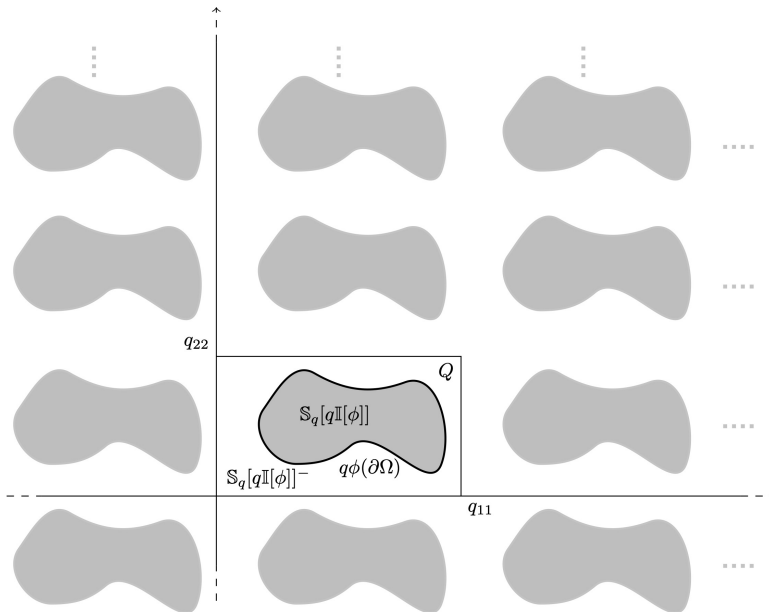


Рис. 2.1. Дифеоморфізм $\phi \in \mathcal{A}_{\partial\Omega}^{\tilde{Q}}$ в $\mathbb{R}^2$.

Якщо $\phi \in \mathcal{A}_{\partial\Omega}^{\tilde{Q}}$, то $\mathbb{R}^n \setminus \phi(\partial\Omega)$ має рівно дві відкриті зв'язні компоненти, і ми позначаємо обмежену з них як $I[\phi]$. Очевидно, що множина $qI[\phi] = \{qx : x \in I[\phi]\}$ міститься у періодичній комірці Q (див. Рисунок 2.2).

Рис. 2.2. Перетворення викликане q в $\mathbb{R}^2$.

Тоді $\mathbb{S}_q[q\mathbb{I}[\phi]]$ та $\mathbb{S}_q[q\mathbb{I}[\phi]]^-$ є двома необмеженими та періодичними множинами, які залежать від (q, ϕ) і моделюють періодичну структуру об'єктів, розглянутих у цій статті (див. Рисунок 2.3). Якщо ми змінюємо елементи q , це призведе до зміни періодичності наборів. Натомість, зміна ϕ викликає зміни у формі періодичних включень.

Рис. 2.3. Множини $\mathbb{S}_q[q\mathbb{I}[\phi]]^-$, $\mathbb{S}_q[q\mathbb{I}[\phi]]$, і $q\phi(\partial\Omega)$ в $\mathbb{R}^2$.

3. СЕРЕДНІЙ ПОЗДОВЖНИЙ ПОТІК ВЗДОВЖ ПЕРІОДИЧНОГО МАСИВУ ЦИЛІНДРІВ

Цей розділ присвячено поздовжньому потоку ньютонівської рідини, що тече при низьких числах Рейнольдса вздовж періодичного масиву циліндрів. Ми досліджуємо вплив збурень структури періодичності (періодична комірка є прямокутником який асоціюється з матрицею q) та форми поперечного перерізу циліндрів (визначається образом фіксованої області через дифеоморфізм ϕ). Оскільки поперечний переріз циліндра є двовимірним, у цьому розділі ми покладаємо $n = 2$.

Додатково припустивши, що градієнт тиску паралельний циліндрам, поле швидкості має лише одну ненульову компоненту. Тоді, інтегруючи поздовжню компоненту поля швидкості по фундаментальній комірці, для кожної пари (q, ϕ) ми визначаємо середнє значення поздовжньої компоненти швидкості потоку $\Sigma[q, \phi]$ (див. (3.2)). Зазначимо, що $\Sigma[q, \phi]$ є мірою кількості рідини, що тече через одну періодичну комірку, яку іноді називають поздовжньою проникністю масиву циліндрів (або її протилежністю, див., наприклад, Мітюшев та Адлер [10, 11]).

Тут нас цікавить залежність (середньої) поздовжньої швидкості від довжини сторін прямокутної комірки та форми поперечного перерізу циліндрів.

Якщо $q \in \mathbb{D}_2^+(\mathbb{R})$ та $\phi \in \mathcal{A}_{\partial\Omega}^{\tilde{Q}}$, то множина $\overline{\mathbb{S}_q[q\mathbb{I}[\phi]]} \times \mathbb{R}$ — нескінченний масив паралельних циліндрів. Натомість, множина $\mathbb{S}_q[q\mathbb{I}[\phi]]^- \times \mathbb{R}$ є областю, в якій ньютонівська рідина тече при низьких числах Рейнольдса. Ми припускаємо, що градієнт тиску, який призводить до руху, є постійним і паралельним до циліндрів. Як наслідок, використовуючи стандартний підхід, заснований на специфічній геометрії задачі, ми можемо перетворити систему Стокса в рівняння Пуассона для ненульової компоненти поля швидкості. Без втрати загальності ми можемо вважати, що в'язкість рідини та ненульова компонента градієнта тиску рівні одиниці. Відповідно, якщо $q \in \mathbb{D}_2^+(\mathbb{R})$ та $\phi \in \mathcal{A}_{\partial\Omega}^{\tilde{Q}}$, то задача зводиться до задачі Діріхле для рівняння Пуассона

$$\begin{cases} \Delta u = 1, & \text{в } \mathbb{S}_q[q\mathbb{I}[\phi]]^-, \\ u(x + qe_i) = u(x), & \forall x \in \overline{\mathbb{S}_q[q\mathbb{I}[\phi]]^-}, \forall i \in \{1, 2\}, \\ u(x) = 0, & \forall x \in \partial\mathbb{S}_q[q\mathbb{I}[\phi]]^-. \end{cases} \quad (3.1)$$

Задача (3.1) має єдиний розв'язок в просторі $C_q^{1,\alpha}(\overline{\mathbb{S}_q[q\mathbb{I}[\phi]]^-})$ і ми позначимо його як $u[q, \phi]$. З фізичної точки зору, функція $u[q, \phi]$ представляє ненульовий компонент векторного поля швидкості (див. Мітюшев та Адлер [10, §2]). Тоді ми можемо визначити $\Sigma[q, \phi]$ як інтеграл швидкості потоку $u[q, \phi]$ по періодичній комірці (див. Мітюшев та Адлер

[10, §3]), а саме

$$\Sigma[q, \phi] \equiv \frac{1}{|Q|_2} \int_{Q \setminus q\mathbb{I}[\phi]} u[q, \phi](x) dx \quad (3.2)$$

$$\forall (q, \phi) \in \mathbb{D}_2^+(\mathbb{R}) \times \left(C^{1,\alpha}(\partial\Omega, \mathbb{R}^2) \cap \mathcal{A}_{\partial\Omega}^{\tilde{Q}} \right).$$

В роботах [7, 9] ми досліджували властивості регулярності $\Sigma[q, \phi]$ як функції від (q, ϕ) . Серед інших результатів, ми довели, що відображення $(q, \phi) \mapsto \Sigma[q, \phi]$ є аналітичним, про що говорить наступна теорема.

Теорема 3.1. *Нехай α, Ω визначені в (2.3). Тоді відображення з*

$$\mathbb{D}_2^+(\mathbb{R}) \times \left(C^{1,\alpha}(\partial\Omega, \mathbb{R}^2) \cap \mathcal{A}_{\partial\Omega}^{\tilde{Q}} \right)$$

в $\mathbb{R}$, що відображає пару (q, ϕ) в $\Sigma[q, \phi]$, є аналітичним.

4. ЕФЕКТИВНА ПРОВІДНІСТЬ ПЕРІОДИЧНОГО ДВОХФАЗНОГО КОМПОЗИТУ З ІДЕАЛЬНИМИ УМОВАМИ КОНТАКТУ

У цьому розділі ми розглядаємо ефективну провідність n -вимірною періодичного двофазного композиту ($n \in \{2, 3\}$) з ідеальним контактом на межі. Композит отримується шляхом введення в однорідну матрицю періодичного набору включень достатньо гладких форм. Як матриця, так і множина включень, заповнені двома різними однорідними та ізотропними теплопровідними матеріалами з провідностями λ^- та λ^+ відповідно, де $(\lambda^+, \lambda^-) \in [0, +\infty]_*^2 \equiv [0, +\infty]^2 \setminus \{(0, 0)\}$. Граничний випадок матеріалу з нульовою провідністю відповідає тепловому ізолятору. Отже, ми припускаємо, що два матеріали не є одночасно ізоляторами. З іншого боку, якщо провідність наближається до $+\infty$, матеріал є ідеальним провідником.

Як відомо, можна визначити ефективну теплопровідність композиційного матеріалу, $\lambda^{\text{eff}, \text{id}}$, за допомогою розв'язку задачі передачі для рівняння Лапласа (див. Означення 4.1, Мітюшев, Обносков, Песецькая, Рогозін [12, §5]). Ефективну теплопровідність можна розглядати як теплопровідність однорідного матеріалу, чії глобальні характеристики теплопровідника є "еквівалентними" характеристикам композита.

З метою введення визначення ефективної провідності спочатку необхідно ввести сім'ю крайових задач для рівняння Лапласа. Якщо $q \in \mathbb{D}_n^+(\mathbb{R})$, $\phi \in C^{1,\alpha}(\partial\Omega, \mathbb{R}^n) \cap \mathcal{A}_{\partial\Omega}^{\tilde{Q}}$ і $(\lambda^+, \lambda^-) \in [0, +\infty]_*^2$, для кожного $j \in \{1, \dots, n\}$ ми розглянемо наступну задачу передачі для пари функцій $(u_j^+, u_j^-) \in C_{\text{loc}}^{1,\alpha}(\mathbb{S}_q[q\mathbb{I}[\phi]]) \times C_{\text{loc}}^{1,\alpha}(\mathbb{S}_q[q\mathbb{I}[\phi]]^-)$:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \Delta u_j^+ = 0 & \text{в } \mathbb{S}_q[q\mathbb{I}[\phi]], \\ \Delta u_j^- = 0 & \text{в } \mathbb{S}_q[q\mathbb{I}[\phi]]^-, \\ u_j^+(x + qe_h) = u_j^+(x) + \delta_{hj}q_{jj} & \forall x \in \overline{\mathbb{S}_q[q\mathbb{I}[\phi]]}, \quad \forall h \in \{1, \dots, n\}, \\ u_j^-(x + qe_h) = u_j^-(x) + \delta_{hj}q_{jj} & \forall x \in \overline{\mathbb{S}_q[q\mathbb{I}[\phi]]}^-, \quad \forall h \in \{1, \dots, n\}, \\ \lambda^+ \frac{\partial}{\partial \nu_{q\mathbb{I}[\phi]}} u_j^+ - \lambda^- \frac{\partial}{\partial \nu_{q\mathbb{I}[\phi]}} u_j^- = 0 & \text{на } \partial q\mathbb{I}[\phi], \\ u_j^+ - u_j^- = 0 & \text{на } \partial q\mathbb{I}[\phi], \\ \int_{\partial q\mathbb{I}[\phi]} u_j^+ d\sigma = 0, \end{array} \right. \quad (4.1)$$

де $\nu_{q\mathbb{I}[\phi]}$ — зовнішня одинична нормаль до $\partial q\mathbb{I}[\phi]$. Нагадуємо, що для $(h, j) \in \{1, \dots, n\}^2$ символ δ_{hj} позначає символ дельта Кронекера, тому $\delta_{hj} = 1$ для $h = j$ і $\delta_{hj} = 0$ в іншому випадку. Задача (4.1) має єдиний розв'язок (u_j^+, u_j^-) в $C_{\text{loc}}^{1,\alpha}(\overline{\mathbb{S}_q[q\mathbb{I}[\phi]])} \times C_{\text{loc}}^{1,\alpha}(\overline{\mathbb{S}_q[q\mathbb{I}[\phi]]}^-)$, який ми позначимо як $(u_j^+[q, \phi, (\lambda^+, \lambda^-)], u_j^-[q, \phi, (\lambda^+, \lambda^-)])$. Цей розв'язок використовується для визначення ефективної провідності (див., наприклад, Мітюшев, Обносков, Песецькая та Рогозін [12, §5]).

Означення 4.1. Нехай $q \in \mathbb{D}_n^+(\mathbb{R})$, $\phi \in C^{1,\alpha}(\partial\Omega, \mathbb{R}^n) \cap \mathcal{A}_{\partial\Omega}^{\tilde{Q}}$, $i, (\lambda^+, \lambda^-) \in [0, +\infty]_{*}^2$. Тоді ефективна провідність

$$\lambda_{ij}^{\text{eff}, \text{id}}[q, \phi, (\lambda^+, \lambda^-)] \equiv (\lambda_{ij}^{\text{eff}, \text{id}}[q, \phi, (\lambda^+, \lambda^-)])_{i,j=1,\dots,n}$$

є матрицею розміром $n \times n$ з елементом (i, j) , визначеним наступним чином

$$\begin{aligned} \lambda_{ij}^{\text{eff}, \text{id}}[q, \phi, (\lambda^+, \lambda^-)] \equiv \frac{1}{|Q|_n} \left\{ \lambda^+ \int_{q\mathbb{I}[\phi]} \frac{\partial}{\partial x_i} u_j^+[q, \phi, (\lambda^+, \lambda^-)](x) dx \right. \\ \left. + \lambda^- \int_{Q \setminus q\mathbb{I}[\phi]} \frac{\partial}{\partial x_i} u_j^-[q, \phi, (\lambda^+, \lambda^-)](x) dx \right\} \\ \forall i, j \in \{1, \dots, n\}. \end{aligned}$$

Аналогічно до вивчення середнього поздовжнього потоку в розділі 3, нас цікавить функція $(q, \phi, (\lambda^+, \lambda^-)) \mapsto \lambda_{ij}^{\text{eff}, \text{id}}[q, \phi, (\lambda^+, \lambda^-)]$. Наступний результат [8, Теорема 5.1] описує регулярність матриці ефективної провідності $\lambda_{ij}^{\text{eff}, \text{id}}[q, \phi, (\lambda^+, \lambda^-)]$ композиту з ідеальними умовами за трійкою "періодичність-форма-провідність". Більш детально, він показує, що елемент (i, j) матриці $\lambda_{ij}^{\text{eff}, \text{id}}[q, \phi, (\lambda^+, \lambda^-)]$ може бути виражений через провідність λ^- матриці, провідність λ^+ включень та аналітичну

залежність від періодичності q , форми включень ϕ і співвідношення $\frac{\lambda^+ - \lambda^-}{\lambda^+ + \lambda^-}$, яке іноді називають параметром контрасту.

Теорема 4.1. *Нехай α, Ω визначені в (2.3). Нехай $i, j \in \{1, \dots, n\}$. Тоді існує відкритий окіл $\mathcal{U}$ в $\mathbb{D}_n^+(\mathbb{R}) \times \left(C^{1,\alpha}(\partial\Omega, \mathbb{R}^n) \cap \mathcal{A}_{\partial\Omega}^{\tilde{Q}}\right) \times [-1, 1]$ простору $\mathbb{D}_n^+(\mathbb{R}) \times \left(C^{1,\alpha}(\partial\Omega, \mathbb{R}^n) \cap \mathcal{A}_{\partial\Omega}^{\tilde{Q}}\right) \times \mathbb{R}$ та аналітична функція Λ_{ij} з $\mathcal{U}$ в $\mathbb{R}$, така що $\lambda_{ij}^{\text{eff}, \text{id}}[q, \phi, (\lambda^+, \lambda^-)] \equiv \delta_{ij}\lambda^- + (\lambda^+ + \lambda^-)\Lambda_{ij}\left[q, \phi, \frac{\lambda^+ - \lambda^-}{\lambda^+ + \lambda^-}\right]$ для всіх $(q, \phi, (\lambda^+, \lambda^-)) \in \mathbb{D}_n^+(\mathbb{R}) \times \left(C^{1,\alpha}(\partial\Omega, \mathbb{R}^n) \cap \mathcal{A}_{\partial\Omega}^{\tilde{Q}}\right) \times [0, +\infty[^2_*$.*

Варто згадати, що в роботі [14] четвертий автор явно обчислив ефективну теплопровідність періодичного розрідженого композиту з ідеальним контактом у вигляді ряду по розміру включень (див. також [13]).

5. ЕФЕКТИВНА ПРОВІДНІСТЬ ПЕРІОДИЧНОГО ДВОХФАЗНОГО КОМПОЗИТУ З НЕІДЕАЛЬНИМИ УМОВАМИ КОНТАКТУ

Тепер ми звертаємося до вивчення ефективної теплопровідності n -вимірної періодичного двофазного композиту ($n \in \{2, 3\}$) з недосконалим (або неідеальним) контактом на межі.

Як матриця, так і множина періодичних включень заповнені двома однорідними та ізотропними теплопровідними матеріалами з теплопровідністю λ^- та λ^+ , відповідно, де $(\lambda^+, \lambda^-) \in]0, +\infty[^2$. Нормальна компонента теплового потоку вважається неперервною на двофазному інтерфейсі, тоді як ми накладаємо умову, що температурне поле має стрибок, пропорційний нормальному тепловому потоку, за допомогою параметра $r \in [0, +\infty[$. Для зручності, ми введемо наступне позначення $\mathcal{P} \equiv]0, +\infty[^2 \times [0, +\infty[$. Нехай $q \in \mathbb{D}_n^+(\mathbb{R})$, $\phi \in C^{1,\alpha}(\partial\Omega, \mathbb{R}^n) \cap \mathcal{A}_{\partial\Omega}^{\tilde{Q}}$, $(\lambda^+, \lambda^-, r) \in \mathcal{P}$. Для визначення ефективної провідності в неідеальному випадку розглянемо наступну крайову задачу:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \Delta u_j^+ = 0 & \text{в } \mathbb{S}_q[q\mathbb{I}[\phi]], \\ \Delta u_j^- = 0 & \text{в } \mathbb{S}_q[q\mathbb{I}[\phi]]^-, \\ u_j^+(x + qe_h) = u_j^+(x) + \delta_{hj}q_{jj} & \forall x \in \mathbb{S}_q[q\mathbb{I}[\phi]], \forall h \in \{1, \dots, n\}, \\ u_j^-(x + qe_h) = u_j^-(x) + \delta_{hj}q_{jj} & \forall x \in \mathbb{S}_q[q\mathbb{I}[\phi]]^-, \forall h \in \{1, \dots, n\}, \\ \lambda^+ \frac{\partial}{\partial \nu_{q\mathbb{I}[\phi]}} u_j^+ - \lambda^- \frac{\partial}{\partial \nu_{q\mathbb{I}[\phi]}} u_j^- = 0 & \text{на } \partial q\mathbb{I}[\phi], \\ \lambda^+ \frac{\partial}{\partial \nu_{q\mathbb{I}[\phi]}} u_j^+ + r(u_j^+ - u_j^-) = 0 & \text{на } \partial q\mathbb{I}[\phi], \\ \int_{\partial q\mathbb{I}[\phi]} u_j^+ d\sigma = 0, \end{array} \right. \quad (5.1)$$

де $j \in \{1, \dots, n\}$. Задача (5.1) має єдиний розв'язок (u_j^+, u_j^-) у просторі $C_{\text{loc}}^{1,\alpha}(\mathbb{S}_q[q\mathbb{I}[\phi]]) \times C_{\text{loc}}^{1,\alpha}(\mathbb{S}_q[q\mathbb{I}[\phi]]^-)$, який ми позначаємо як $(u_j^+[q, \phi, \lambda^+, \lambda^-, r], u_j^-[q, \phi, \lambda^+, \lambda^-, r])$.

Тоді, ефективну провідність можна визначити наступним чином.

Означення 5.1. Нехай $q \in \mathbb{D}_n^+(\mathbb{R})$, $\phi \in C^{1,\alpha}(\partial\Omega, \mathbb{R}^n) \cap \mathcal{A}_{\partial\Omega}^{\tilde{Q}}$, $(\lambda^+, \lambda^-, r) \in \mathcal{P}$. Тоді ефективна провідність

$$\lambda_{ij}^{\text{eff}, \text{nonid}}[q, \phi, \lambda^+, \lambda^-, r] \equiv (\lambda_{ij}^{\text{eff}}[q, \phi, \lambda^+, \lambda^-, r])_{i,j=1,\dots,n}$$

є $n \times n$ матрицею, де елемент (i, j) визначається наступним чином:

$$\begin{aligned} \lambda_{ij}^{\text{eff}, \text{nonid}}[q, \phi, \lambda^+, \lambda^-, r] \equiv & \frac{1}{|Q|_n} \left\{ \lambda^+ \int_{q\mathbb{I}[\phi]} \frac{\partial}{\partial x_i} u_j^+[q, \phi, \lambda^+, \lambda^-, r](x) dx \right. \\ & \left. + \lambda^- \int_{Q \setminus \overline{q\mathbb{I}[\phi]}} \frac{\partial}{\partial x_i} u_j^-[q, \phi, \lambda^+, \lambda^-, r](x) dx \right\}, \\ & \forall i, j \in \{1, \dots, n\}. \end{aligned}$$

Наступний результат (див. [4]) описує регулярність відображення

$$(q, \phi, \lambda^+, \lambda^-, r) \mapsto \lambda^{\text{eff}, \text{nonid}}[q, \phi, \lambda^+, \lambda^-, r].$$

Теорема 5.1. Нехай α, Ω визначені в (2.3). Нехай $i, j \in \{1, \dots, n\}$. Тоді існує відкритий окіл $\mathcal{V}$ множини $\mathbb{D}_n^+(\mathbb{R}) \times (C^{1,\alpha}(\partial\Omega, \mathbb{R}^n) \cap \mathcal{A}_{\partial\Omega}^{\tilde{Q}}) \times \mathcal{P}$ у просторі $\mathbb{D}_n^+(\mathbb{R}) \times (C^{1,\alpha}(\partial\Omega, \mathbb{R}^n) \cap \mathcal{A}_{\partial\Omega}^{\tilde{Q}}) \times \mathbb{R}^3$, та аналітичне відображення Λ_{ij} з $\mathcal{V}$ в $\mathbb{R}$, таке що

$$\lambda_{ij}^{\text{eff}, \text{nonid}}[q, \phi, \lambda^+, \lambda^-, r] \equiv \delta_{ij} \lambda^- + \Lambda_{ij}[q, \phi, \lambda^+, \lambda^-, r]$$

для всіх $(q, \phi, \lambda^+, \lambda^-, r) \in \mathbb{D}_n^+(\mathbb{R}) \times (C^{1,\alpha}(\partial\Omega, \mathbb{R}^n) \cap \mathcal{A}_{\partial\Omega}^{\tilde{Q}}) \times \mathcal{P}$.

Зазначимо, що композити з умовами контакту, відмінними від ідеальних, вивчаються, зокрема, у працях Дриґаса та Мітющева [5], Кастро, Капанадзе та Песетської [1]. Також варто зазначити, що асимптотичну поведінку ефективної теплопровідності періодичного розрідженого композиту з недосконалим контактом було досліджено в [2, 3].

ЛІТЕРАТУРА

- [1] L. P. Castro, D. Kapanadze, E. Pesetskaya. Effective conductivity of a composite material with stiff imperfect contact conditions. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 38(18):4638–4649, 2015. doi:10.1002/mma.3423.
- [2] M. Dalla Riva, P. Musolino. A singularly perturbed nonideal transmission problem and application to the effective conductivity of a periodic composite. *SIAM J. Appl. Math.*, 73(1):24–46, 2013. doi:10.1137/120886637.
- [3] M. Dalla Riva, P. Musolino, R. Pukhtaievych. Series expansion for the effective conductivity of a periodic dilute composite with thermal resistance at the two-phase interface. *Asymptotic Analysis*, 111(3-4):217–250, February 2019. doi:10.3233/asy-181495.
- [4] M. Dalla Riva, P. Paolo Luzzini, P. Musolino, R. Pukhtaievych. Chapter 14 - dependence of effective properties upon regular perturbations. In Igor Andrianov, Simon Gluzman, Vladimir Mityushev, editors, *Mechanics and Physics of Structured Media*, pages 271–301. Academic Press, 2022. doi:10.1016/B978-0-32-390543-5.00019-0.
- [5] P. Drygaś, V. Mityushev. Effective conductivity of unidirectional cylinders with interfacial resistance. *Q. J. Mech. Appl. Math.*, 62(3):235–262, 2009. doi:10.1093/qjmam/hbp010.
- [6] D. Gilbarg, N. S. Trudinger. *Elliptic partial differential equations of second order*, volume 224 of *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences]*. Springer-Verlag, Berlin, second edition, 1983. doi:10.1007/978-3-642-61798-0.
- [7] P. Luzzini, P. Musolino. Perturbation analysis of the effective conductivity of a periodic composite. *Networks and Heterogeneous Media*, 15(4):581–603, 2020. doi:10.3934/nhm.2020015.
- [8] P. Luzzini, P. Musolino. Perturbation analysis of the effective conductivity of a periodic composite. *Networks and Heterogeneous Media*, 15(4):581–603, 2020. doi:10.3934/nhm.2020015.
- [9] P. Luzzini, P. Musolino, R. Pukhtaievych. Shape analysis of the longitudinal flow along a periodic array of cylinders. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 477(2):1369–1395, 2019. doi:10.1016/j.jmaa.2019.05.017.
- [10] V. Mityushev, P. M. Adler. Longitudinal permeability of spatially periodic rectangular arrays of circular cylinders. I. A single cylinder in the unit cell. *ZAMM Z. Angew. Math. Mech.*, 82(5):335–345, 2002. doi:10.1002/1521-4001(200205)82:5<335::AID-ZAMM335>3.0.CO;2-D.
- [11] V. Mityushev, P. M. Adler. Longitudinal permeability of spatially periodic rectangular arrays of circular cylinders. II. An arbitrary distribution of cylinders inside the unit cell. *Z. Angew. Math. Phys.*, 53(3):486–517, 2002. doi:10.1007/s00033-002-8164-5.
- [12] V. Mityushev, Yu. Obnosov, E. Pesetskaya, S. Rogosin. Analytical methods for heat conduction in composites. *Math. Model. Anal.*, 13(1):67–78, 2008. doi:10.3846/1392-6292.2008.13.67-78.
- [13] R. Pukhtaievych. Asymptotic behavior of the solution of singularly perturbed transmission problems in a periodic domain. *Math. Methods Appl. Sci.*, 41(9):3392–3413, 2018. doi:10.1002/mma.4832.

- [14] R. Pukhtaievych. Effective conductivity of a periodic dilute composite with perfect contact and its series expansion. *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik*, 69(3):83, May 2018. doi:10.1007/s00033-018-0976-z.

Matteo Dalla Riva

DEPARTMENT OF ENGINEERING, UNIVERSITY OF PALERMO, 8, VIALE DELLE SCIENZE, 90128 PALERMO, ITALY

Email: matteo.dallariva@unipa.it

ORCID: 0000-0002-5519-3327

Paolo Luzzini

DEPARTMENT OF SCIENCE, TECHNOLOGY, AND INNOVATION, UNIVERSITY OF EASTERN PIEDMONT “AMEDEO AVOGADRO”, 11, VIALE TERESA MICHEL, 15121 ALESSANDRIA, ITALY

Email: paolo.luzzini@uniupo.it

ORCID: 0000-0002-0765-001X

Paolo Musolino

DEPARTMENT OF MATHEMATICS “TULLIO LEVI-CIVITA”, UNIVERSITY OF PADOVA, 63, VIA TRIESTE, 35121 PADOVA, ITALY

Email: paolo.musolino@unipd.it

ORCID: 0000-0001-7366-5124

Roman Pukhtaievych

DEPARTMENT OF COMPLEX ANALYSIS AND POTENTIAL THEORY, INSTITUTE OF MATHEMATICS OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF UKRAINE, 3, TERESHCHENKIVSKA ST., 01004 KYIV, UKRAINE

Email: rpukhtaievych@gmail.com

ORCID: 0000-0002-7279-8213