Збірник праць Інституту математики НАН України 2016, т. 13, № 3, 205–217

УДК 517.925.51

# Про стійкість лінійних імпульсних систем з перемиканнями

***В.І. Слинько***[1]***, С.В. Кравчук***[2]

[1] *S.P.Timoshenko Institute of Mechanics of NAS of Ukraine, Kyiv, Ukraine; vitstab@ukr.net*
[2] *S.P.Timoshenko Institute of Mechanics of NAS of Ukraine, Kyiv, Ukraine; qkp@ukr.net*

The new conditions for the stability of linear impulsive systems with variable structure were established. Applying the commutation calculation and direct Lyapunov method the conditions for switching that ensure the stability of linear impulsive system were obtained.

Установлены новые условия устойчивости линейных импульсных систем переменной структуры. Применив коммутационное исчисления и прямой метод Ляпунова получены условия на переключения, которые обеспечивают устойчивость линейной импульсной системы.

## Вступ

Системи диференціальних рівнянь змінної структури з імпульсною дією використовуються при моделюванні динаміки крокуючих апаратів [1], механічних систем при дії ударних навантажень [2], а також систем, для яких вектор стану в деякі моменти часу може миттєво змінюватися [3]. Питання загальної теорії диференціальних рівнянь з імпульсною дією (існування та єдиність, оцінки розв'язків тощо), теореми про стійкість розв'язків за лінійним наближенням і узагальнені теореми прямого методу Ляпунова наведено в монографії А.М. Самойленка та М.О. Перестюка [4]. В останні роки в теорії керування і стабілізації руху набули значної актуальності математичні моделі систем з перемиканнями [6]. Такі системи володіють цікавими динамічними властивостями. Наприклад, лінійна система з перемиканнями, яка має дві нестійкі структурні матриці, при певних умовах може бути стабілізована за рахунок вибору закону перемикання. Відзначимо, що аналогічне явище має місце і для лінійних систем з імпульсною дією. В оглядовій статті [5] розглянуто умови dwell-time стійкості і стабілізації лінійних позитивних імпульсних систем змінної структури, наведено приклади застосування цих умов.

Значний інтерес в теорії стійкості систем з перемиканнями становить питання про стабілізацію руху системи за рахунок вибору закону перемикання, зокрема у випадку, коли всі структурні елементи системи одночасно є нестійкими. Для імпульсних систем диференціальних рівнянь в роботах [9–13] систематично розроблені методи аналізу стійкості руху імпульсних систем у випадку, коли положення рівноваги неперервної і дискретної компонент імпульсної системи є одночасно нестійкими.

Слід відзначити, що з перших результатів, які стосуються стійкості лінійних імпульсних систем (теорема 15.2, с. 104 [4]) стала цілком зрозуміла роль комутаційних співвідношень при дослідженні стійкості руху імпульсних систем. Для систем з перемиканням важливість структури алгебри Лі, породженої векторними полями, які визначають структури системи, вказано в роботах [7,8]. Зазначимо також роботи [14], [15], в яких комутаційні співвідношення відіграють важливу роль при дослідженні впливу структури сил на стійкість механічних систем. В роботі [16] при дослідженні стійкості лінійних систем змінної структури суттєво враховувались алгебраїчні властивості структурної множини.

Метою цієї роботи є застосування комутаційного числення в поєднанні з методами аналізу стійкості руху імпульсних систем, розвинених в монографії [4] та статті [13] для встановлення нових умов стійкості лінійних імпульсних систем змінної структури. Одержані умови стійкості дозволяють визначити закони перемикання, які стабілізують лінійну імпульсну систему.

## 1 Постановка задачі.

Розглянемо лінійну імпульсну систему

$$\begin{aligned} \frac{dx(t)}{dt} &= A_{\sigma(k)}x(t), \quad t \in (\tau_k, \tau_{k+1}], \\ x(t^+) &= B_{\sigma(k)}x(t), \quad t = \tau_k, \end{aligned} \tag{1}$$

де $x \in \mathbb{R}^n$, $t \in \mathbb{R}$, $A_i \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $\sigma(k) = k(\mathrm{mod}\ 2)$, $x(t^+) = \lim\limits_{\tau\to t+0} x(\tau)$, $B_i \in \mathbb{R}^{n\times n}$ – невироджені структурні матриці, $i = 1, 2$, $\{\tau_k\}_{k=0}^{\infty}$ –

послідовність моментів імпульсної дії, відносно якої припустимо, що вона зростає і має єдину точку скупчення на нескінченності.

Припустимо, що $\tau_0 = t_0 = 0$ і позначимо через $x(t;x_0)$ розв'язок задачі Коші для системи (1), який задовольняє початкову умову $x(0;x_0) = x_0$. Тоді $x(t;x_0)$ — неперервно диференційовна функція по змінній $t$ на множині $t \in \mathbb{R}_+ \setminus \{\tau_k\}_{k=0}^{\infty}$. Покладемо для визначеності $x(\tau_k - 0; x_0) = x(\tau_k; x_0)$.

Систему (1) будемо досліджувати за наступних припущень:

1) структурні матриці $A_1$ і $A_2$ комутують, тобто $A_1A_2 = A_2A_1$;

2) якщо $\sigma(k) = 1$, то $\tau_{k+1} - \tau_k = \theta_1 > 0$.

**Означення 1.1.** *Лінійна система* (1) *називається асимптотично стійкою, якщо для довільного числа* $\varepsilon > 0$ *існує число* $\delta(\varepsilon) > 0$*, таке, що з умови* $\|x_0\| < \delta(\varepsilon)$ *випливає нерівність* $\|x(t;x_0)\| < \varepsilon$ *при всіх* $t > 0$ *і*

$$\lim_{t\to\infty} \|x(t;x_0)\| = 0.$$

Основною задачею, яка розв'язана далі, є встановлення обмежень на параметри закону перемикання, який задовольняє додаткове припущення 2) і забезпечує асимптотичну стійкість системи (1).

## 2 Основний результат.

Питання стійкості лінійної імпульсної системи (1) можна розв'язати на основі аналізу її матриціанта

$$\Omega_0^{\tau_{2k}} = \prod_{l=0}^{k-1} e^{A_2(\tau_{2l+2} - \tau_{2l+1})} B_2 e^{A_1\theta_1} B_1.$$

Нагадаємо відому формулу [17], яка відіграє провідну роль в цій роботі

$$e^{-A\theta} B e^{A\theta} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\theta^k}{k!} [\underbrace{A, [A, ..., [A}_{k}, B]...]] = e^{-\theta \operatorname{ad}_A}(B),$$

де $[A,B] = AB - BA$, $\operatorname{ad}_A(X) = AX - XA$.

Праву частину даної рівності позначимо через $Q_{A,B}^{\theta}$ і нехай $Q_{A,B}^{N,\theta}$ позначає відрізок ряду $Q_{A,B}^{\theta}$, тобто

$$Q_{A,B}^{N,\theta} = \sum_{k=0}^{N} (-1)^k \frac{\theta^k}{k!} \operatorname{ad}_A^k(B).$$

Тоді матрицант можна подати у вигляді

$$\Omega_0^{\tau_{2k}} = \prod_{l=0}^{k-1} e^{A_2(\tau_{2l+2}-\tau_{2l+1})} B_2 e^{A_1\theta_1} B_1 =$$
$$= \prod_{l=0}^{k-1} e^{A_2(\tau_{2l+2}-\tau_{2l+1})} e^{A_1\theta_1} Q_{A_1,B_2}^{\theta_1} B_1 =$$
$$= \prod_{l=0}^{k-1} e^{(A_1\theta_1 + A_2(\tau_{2l+2}-\tau_{2l+1}))} Q_{A_1,B_2}^{\theta_1} B_1.$$

Таким чином, задача про стійкість системи (1) еквівалентна аналогічній задачі для системи вигляду

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dt} &= \widetilde{A}_k y, \quad t \neq \tau_{2k}, \\ y(t^+) &= Q_{A_1,B_2}^{\theta_1} B_1 y(t), \quad t = \tau_{2k}, \end{aligned} \tag{2}$$

де $y \in \mathbb{R}^n$,

$$\widetilde{A}_k = \frac{1}{\tau_{2k+2} - \tau_{2k}} (\theta_1 A_1 + (\tau_{2k+2} - \tau_{2k+1}) A_2) =$$
$$= \frac{1}{\tau_{2k+2} - \tau_{2k+1} + \theta_1} (\theta_1 A_1 + (\tau_{2k+2} - \tau_{2k+1}) A_2).$$

Дослідження стійкості системи (2) проведемо, використовуючи прямий метод Ляпунова.

## 3 Умови стійкості

Розглянемо задачу про вибір правила перемикання, яке забезпечує стійкість лінійної імпульсної системи (1). Для цього встановимо умови для послідовності моментів імпульсної дії $\{\tau_k\}_{k=0}^{\infty}$, які забезпечують стійкість допоміжної системи (2). Зауважимо, що якщо для послідовності моментів імпульсної дії виконується умова $\tau_{2k+2} - \tau_{2k+1} = \theta_2 > 0$, то лінійна імпульсна система (1) є періодичною і питання про її стійкість можна розв'язати на основі теорії Флоке—Ляпунова. Закон перемикання будемо шукати у вигляді обмежень на величини $\delta_k = \tau_{2k+2} - \tau_{2k+1} - \theta_2$, $k \in \mathbb{Z}_+$.

Припустимо, що величина $\theta_2 > 0$ вибрана, наприклад, з умови асимптотичної стійкості $r(e^{A_2\theta_2}B_2e^{A_1\theta_1}B_1) < 1$ або з інших міркувань. Визначимо матрицю

$$\widetilde{A} = \nu_1 A_1 + \nu_2 A_2, \quad \nu_i = \frac{\theta_i}{\theta_1+\theta_2}, \quad i = 1,2.$$

Розглянемо різні підходи до дослідження допоміжної системи (2) в залежності від спектральних властивостей матриці $\widetilde{A}$.

**3.1.** Нехай $\widetilde{A}$ – гурвіцева матриця, тобто для всіх $\lambda \in \sigma(\widetilde{A})$, $\operatorname{Re}\lambda < 0$. У цьому випадку, для довільної симетричної, додатньо визначеної матриці $G$, існує симетрична, додатньо визначена матриця $P$, яка є розв'язком матричного рівняння Ляпунова

$$\widetilde{A}^T P + P\widetilde{A} = -G.$$

Допоміжну систему (2) подамо у вигляді

$$\begin{aligned} &\frac{dy}{dt} = \widetilde{A}y + (\widetilde{A}_k - \widetilde{A})y, \quad t \neq \tau_{2k}, \\ &y(t^+) = Q^{\theta_1}_{A_1,B_2}B_1 y(t), \quad t = \tau_{2k}. \end{aligned} \tag{3}$$

Розглянемо функцію Ляпунова $v(t) = y^T P y$ і оцінимо її повну похідну вздовж розв'язків системи (3) при $t \neq \tau_k$.

$$\left.\frac{dv}{dt}\right|_{(3)} \leqslant -y^T G y + 2\|P\|\|\widetilde{A}_k - \widetilde{A}\|\|y\|^2, \quad t \neq \tau_{2k}. \tag{4}$$

Припустимо, що закон перемикання такий, що виконується умова

$$\sup_{k\in\mathbb{Z}_+} |\delta_k| < \delta^* < \theta_2. \tag{5}$$

Оскільки

$$\begin{aligned} \|\widetilde{A}_k - \widetilde{A}\| = \Big\|\frac{1}{\tau_{2k+2}-\tau_{2k+1}+\theta_1}(\theta_1 A_1 + (\tau_{2k+2}-\tau_{2k+1})A_2) - \\ -\Big(\frac{\theta_1}{\theta_1+\theta_2}A_1 + \frac{\theta_2}{\theta_1+\theta_2}A_2\Big)\Big\| \leq \frac{\theta_1|\delta_k|(\|A_1\|+\|A_2\|)}{(\delta_k+\theta_1+\theta_2)(\theta_1+\theta_2)}. \end{aligned}$$

Тоді

$$\|\widetilde{A}_k - \widetilde{A}\| \leq \frac{\theta_1\delta^*(\|A_1\|+\|A_2\|)}{(\theta_1+\theta_2-\delta^*)(\theta_1+\theta_2)}.$$

Отже, для повної похідної функції Ляпунова має місце оцінка

$$\frac{dv}{dt}\Big|_{(3)} \leq \Big( -\lambda_m(G) + \frac{2\|P\|\theta_1\delta^*(\|A_1\| + \|A_2\|)}{(\theta_1+\theta_2-\delta^*)(\theta_1+\theta_2)}\Big)\|y\|^2.$$

Припустимо, що для $\delta^*$ виконується нерівність

$$\delta^* < \frac{\lambda_m(G)(\theta_1+\theta_2)^2}{2\|P\|\theta_1(\|A_1\|+\|A_2\|) + \lambda_m(G)(\theta_1+\theta_2)}. \tag{6}$$

Ця нерівність дозволяє одержати оцінку

$$\frac{dv}{dt}\Big|_{(3)} \leq \frac{1}{\lambda_M(P)}\Big( -\lambda_m(G) + \frac{2\|P\|\theta_1\delta^*(\|A_1\| + \|A_2\|)}{(\theta_1+\theta_2-\delta^*)(\theta_1+\theta_2)}\Big)v.$$

В моменти імпульсної дії $t = \tau_k$ мають місце рівності

$$\begin{gathered} v(y(t^+)) = y^T(t)B_1^T(Q^{\theta_1}_{A_1,B_2})^T P Q^{\theta_1}_{A_1,B_2}B_1 y(t) = \\ = y^T(t)B_1^T(Q^{N,\theta_1}_{A_1,B_2} + Q^{\theta_1}_{A_1,B_2} - Q^{N,\theta_1}_{A_1,B_2})^T P(Q^{N,\theta_1}_{A_1,B_2} + Q^{\theta_1}_{A_1,B_2} - \\ -Q^{N,\theta_1}_{A_1,B_2})B_1 y(t) = y^T(t)B_1^T(Q^{N,\theta_1}_{A_1,B_2})^T P Q^{N,\theta_1}_{A_1,B_2}B_1 y(t) + \\ + y^T(t)B_1^T(Q^{\theta_1}_{A_1,B_2} - Q^{N,\theta_1}_{A_1,B_2})^T P Q^{N,\theta_1}_{A_1,B_2}B_1 y(t) + \\ + y^T(t)B_1^T(Q^{N,\theta_1}_{A_1,B_2})^T P(Q^{\theta_1}_{A_1,B_2} - Q^{N,\theta_1}_{A_1,B_2})B_1 y(t) + \\ + y^T(t)B_1^T(Q^{\theta_1}_{A_1,B_2} - Q^{N,\theta_1}_{A_1,B_2})^T P(Q^{\theta_1}_{A_1,B_2} - Q^{N,\theta_1}_{A_1,B_2})B_1 y(t). \end{gathered}$$

Позначимо $\alpha_N = \lambda_M(B_1^T(Q^{N,\theta_1}_{A_1,B_2})^T P Q^{N,\theta_1}_{A_1,B_2}B_1)$.

Використовуючи нерівність Коші-Буняковського, одержимо оцінки

$$\begin{gathered} y^T(t)B_1^T(Q^{N,\theta_1}_{A_1,B_2})^T P Q^{N,\theta_1}_{A_1,B_2}B_1 y(t) \leqslant \|B_1\|^2 \cdot \|Q^{N,\theta_1}_{A_1,B_2}\|^2 \cdot \|P\| \cdot \|y\|^2, \\ y^T(t)B_1^T(Q^{\theta_1}_{A_1,B_2} - Q^{N,\theta_1}_{A_1,B_2})^T P Q^{N,\theta_1}_{A_1,B_2}B_1 y(t) \leqslant \\ \leqslant \|B_1\|^2 \cdot \|Q^{N,\theta_1}_{A_1,B_2}\| \cdot \|Q^{\theta_1}_{A_1,B_2} - Q^{N,\theta_1}_{A_1,B_2}\| \cdot \|P\| \cdot \|y\|^2, \\ y^T(t)B_1^T(Q^{N,\theta_1}_{A_1,B_2})^T P(Q^{\theta_1}_{A_1,B_2} - Q^{N,\theta_1}_{A_1,B_2})B_1 y(t) \leqslant \\ \leqslant \|B_1\|^2 \cdot \|Q^{N,\theta_1}_{A_1,B_2}\| \cdot \|Q^{\theta_1}_{A_1,B_2} - Q^{N,\theta_1}_{A_1,B_2}\| \cdot \|P\| \cdot \|y\|^2, \\ y^T(t)B_1^T(Q^{\theta_1}_{A_1,B_2} - Q^{N,\theta_1}_{A_1,B_2})^T P(Q^{\theta_1}_{A_1,B_2} - Q^{N,\theta_1}_{A_1,B_2})B_1 y(t) \leqslant \\ \leqslant \|B_1\|^2 \cdot \|Q^{\theta_1}_{A_1,B_2} - Q^{N,\theta_1}_{A_1,B_2}\|^2 \cdot \|P\| \cdot \|y\|^2. \end{gathered}$$

Легко бачити, що

$$\|[\underbrace{A,[A,...,[A}_{m},B]...]]\| = \|\operatorname{ad}_A^m(B)\| \leqslant \|\operatorname{ad}_A\|^m \cdot \|B\|.$$

Використовуючи останню нерівність, одержимо

$$\|Q^{\theta_1}_{A_1,B_2} - Q^{N,\theta_1}_{A_1,B_2}\| \leqslant \left(\frac{\theta_1^{N+1}}{(N+1)!}\|\operatorname{ad}_{A_1}\|^{N+1} + \right.$$

$$\left. + \frac{\theta_1^{N+2}}{(N+2)!}\|\operatorname{ad}_{A_1}\|^{N+2} + ...\right)\|B_2\| = \frac{\|B_2\|\theta_1^{N+1}}{(N+1)!} \cdot \|\operatorname{ad}_{A_1}\|^{N+1}\left(1 + \right.$$

$$\left. + \frac{\theta_1}{(N+2)}\|\operatorname{ad}_{A_1}\| + \frac{\theta_1^2}{(N+2)(N+3)}\|\operatorname{ad}_{A_1}\|^2 + ...\right) \leqslant$$

$$\leqslant \frac{(\|\operatorname{ad}_{A_1}\|\theta_1)^{N+1}\|B_2\|}{(N+1)!}\left(1 + \frac{\|\operatorname{ad}_{A_1}\|\theta_1}{1!} + \frac{(\|\operatorname{ad}_{A_1}\|\theta_1)^2}{2!} + ...\right) =$$

$$= \frac{(\|\operatorname{ad}_{A_1}\|\theta_1)^{N+1}\|B_2\|e^{\|\operatorname{ad}_{A_1}\|\theta_1}}{(N+1)!}.$$

Позначимо

$$\beta_N = \frac{\|B_1\|^2\|Q^{N,\theta_1}_{A_1,B_2}\|(\|\operatorname{ad}_{A_1}\|\theta_1)^{N+1}\|B_2\|e^{\|\operatorname{ad}_{A_1}\|\theta_1}\|P\|}{(N+1)!},$$

$$\gamma_N = \frac{\|B_1\|^2(\|\operatorname{ad}_{A_1}\|\theta_1)^{2N+2}\|B_2\|^2e^{2\|\operatorname{ad}_{A_1}\|\theta_1}\|P\|}{((N+1)!)^2}.$$

Тоді для $v(y(t^+))$ справедлива оцінка

$$v(y(t^+)) \leqslant \alpha_N\|y\|^2 + 2\beta_N\|y\|^2 + \gamma_N\|y\|^2 = (\alpha_N + 2\beta_N + \gamma_N)\|y\|^2 \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\alpha_N + 2\beta_N + \gamma_N}{\lambda_m(P)}v(y(t)). \tag{7}$$

Якщо виконується нерівність (6), то для дослідження стійкості лінійної системи (2) застосовна теорема 18.2 з [4] про асимптотичну стійкість, в якій покладемо

$$\varphi(s) = \frac{1}{\lambda_M(P)}\Big(\lambda_m(G) - \frac{2\|P\|\theta_1\delta^*(\|A_1\| + \|A_2\|)}{(\theta_1 + \theta_2 - \delta^*)(\theta_1 + \theta_2)}\Big)s,$$

$$\psi(s) = \frac{\alpha_N + 2\beta_N + \gamma_N}{\lambda_m(P)}s.$$

Таким чином, одержимо нерівність

$$\ln \frac{\alpha_N + 2\beta_N + \gamma_N}{\lambda_m(P)} < \frac{(\theta_1+\theta_2+\delta_k)}{\lambda_M(P)}\Big(\lambda_m(G) - \frac{2\|P\|\theta_1\delta^*(\|A_1\|+\|A_2\|)}{(\theta_1+\theta_2-\delta^*)(\theta_1+\theta_2)}\Big).$$

Отже, підсумком наведених вище міркувань є наступне твердження.

**Теорема 3.1.** *Нехай система* (1) *така, що* $\widetilde{A}$ *– матриця Гурвіца, виконується нерівність* (6) *і для деякого* $N$ *виконується нерівність*

$$0 \le \delta^* < \frac{\lambda_m(G)(\theta_1+\theta_2) - \lambda_M(P)\ln\frac{\alpha_N+2\beta_N+\gamma_N}{\lambda_m(P)}}{\lambda_m(G) + \frac{2\|P\|\theta_1(\|A_1\|+\|A_2\|)}{\theta_1+\theta_2}}.$$

*Тоді закон перемикання, для якого виконуються умова* (5)*, забезпечує стійкість лінійної системи* (1)*.*

Далі розглянемо випадки, коли матриця $\widetilde{A}$ не є гурвіцевою або не виконується нерівність (6).

**3.2.** Припустимо, що для спектрального радіуса матриці $Q^{N,\theta_1}_{A_1,B_2}B_1$ при деякому $N$ виконується нерівність $r(Q^{N,\theta_1}_{A_1,B_2}B_1) < 1$. В цьому випадку система (2) може бути досліджена на основі теореми 18.3 [4]. Розглянемо функцію Ляпунова $v(y) = y^TPy$, де $P$ – розв'язок матричного рівняння

$$(Q^{N,\theta_1}_{A_1,B_2})^T P Q^{N,\theta_1}_{A_1,B_2}B_1 - P = -R, \tag{8}$$

де $R$ — симетрична додатньо визначена матриця.

Умова $r(Q^{N,\theta_1}_{A_1,B_2}B_1) < 1$ гарантує, що для довільної симетричної, додатньо визначеної матриці $R$ існує єдина симетрична, додатньо визначена матриця $P$, яка є розв'язком матричного рівняння (8).

В цьому випадку, внаслідок (4) виконується нерівність

$$\frac{dv}{dt}\Big|_{(2)} \le y^T(t)(\widetilde{A}^TP + P\widetilde{A})y(t) + \frac{2\|P\|\theta_1\delta^*(\|A_1\|+\|A_2\|)}{\lambda_m(P)(\theta_1+\theta_2-\delta^*)(\theta_1+\theta_2)}\|y\|^2$$

Оскільки за припущенням або матриця $\widetilde{A}$ не є гурвіцевою, або не виконується нерівність (6), то

$$\gamma_0 + \frac{2\|P\|\theta_1\delta^*(\|A_1\|+\|A_2\|)}{(\theta_1+\theta_2-\delta^*)(\theta_1+\theta_2)} > 0,$$

де $\gamma_0 = \lambda_M(\widetilde{A}^T P + P\widetilde{A})$. Як наслідок,

$$\frac{dv}{dt}\Big|_{(3)} \leq \frac{1}{\lambda_m(P)}\Big(\gamma_0 + \frac{2\|P\|\theta_1\delta^*(\|A_1\|+\|A_2\|)}{(\theta_1+\theta_2-\delta^*)(\theta_1+\theta_2)}\Big)v.$$

Аналогічно до того як одержано оцінку (7), можна показати, що

$$v(y(t^+)) \leqslant y^T(t)(P-R)y(t) + 2\beta_N\|y\|^2 + \gamma_N\|y\|^2 \leqslant \\ \leqslant \frac{\lambda_M(P-R)+2\beta_N+\gamma_N}{\lambda_m(P)}v(y(t)).$$

Покладемо

$$\varphi(s) = \frac{1}{\lambda_m(P)}(\gamma_0 + \frac{2\|P\|\theta_1\delta^*(\|A_1\|+\|A_2\|)}{(\theta_1+\theta_2-\delta^*)(\theta_1+\theta_2)})s, \\ \psi(s) = \frac{\lambda_M(P-R)+2\beta_N+\gamma_N}{\lambda_m(P)}.$$

Застосовуючи теорему 18.3 з [4], одержимо нерівність

$$\lambda_m(P)\ln\frac{\lambda_m(P)}{\lambda_M(P-R)+2\beta_N+\gamma_N} > \\ > (\gamma_0 + \frac{2\|P\|\theta_1\delta^*(\|A_1\|+\|A_2\|)}{(\theta_1+\theta_2-\delta^*)(\theta_1+\theta_2)})(\theta_1+\theta_2+\delta_k),$$

яка гарантує асимптотичну стійкість лінійної системи (2). Підсумком наведених вище міркувань є наступна теорема.

**Теорема 3.2.** *Нехай система* (1) *така, що або* $\widetilde{A}$ *не є гурвіцевою матрицею, або не виконується нерівність* (6), *і для деякого* $N$ *виконуються нерівності*

$$r(Q^{N,\theta_1}_{A_1,B_2}B_1) < 1, \\ \lambda_m(P)\ln\frac{\lambda_m(P)}{\lambda_M(P-R)+2\beta_N+\gamma_N} > \\ > (\gamma_0 + \frac{2\|P\|\theta_1\delta^*(\|A_1\|+\|A_2\|)}{(\theta_1+\theta_2-\delta^*)(\theta_1+\theta_2)})(\theta_1+\theta_2+\delta^*).$$

*Тоді закон перемикання, для якого виконуються умова* (5), *забезпечує стійкість лінійної системи* (1).

**3.3.** У випадку 3.2, за умови, що не виконується нерівність $r(Q^{N,\theta_1}_{A_1,B_2}B_1) < 1$, для дослідження стійкості лінійної імпульсної системи (2) неможливо застосувати теореми 18.2 і 18.3 з монографії [4]. В цьому випадку для дослідження стійкості лінійної імпульсної системи (2) застосуємо результати роботи [13].

**Лема 3.1.** *Нехай існує симетрична додатньо визначена матриця $P$ така, що рівномірно по $k \in \mathbb{Z}_+$ виконуються лінійні матричні нерівності*

$$\begin{gathered}(\tau_{2k+2}-\tau_{2k})((\widetilde{A}_k)^T P + P\widetilde{A}_k)+\\ +(Q^{\theta_1}_{A_1,B_2})^T B_1^T P Q^{\theta_1}_{A_1,B_2}B_1 - P < 0,\\ (\widetilde{A}_k^T)^2 P + 2\widetilde{A}_k^T P\widetilde{A}_k + P\widetilde{A}_k^2 \geq 0.\end{gathered} \tag{9}$$

Тоді лінійна імпульсна система (2) є асимптотично стійкою.

*Доведення.* Застосуємо до системи (2) твердження теореми 2.3 з роботи [13], вибравши функцію Ляпунова $v(x) = x^T P x$ і $p = 2$. Тоді отримаємо нерівності (9). Лему доведено. $\square$

Для визначення оцінок для величини $\delta^*$, які гарантують стійкість лінійної імпульсної системи (2) розглянемо матричне рівняння

$$(\theta_1+\theta_2)(\widetilde{A}^T P + P\widetilde{A}) + B_1^T (Q^{N,\theta_1}_{A_1,B_2})^T P Q^{N,\theta_1}_{A_1,B_2} B_1 - P = -G. \tag{10}$$

**Теорема 3.3.** *Припустимо, що для заданої додатньо визначеної симетричної матриці $G$ існує симетрична додатньо визначена матриця $P$, яка визначається з рівняння* (10) *і така, що матриця*

$$R = (\widetilde{A}^2)^T P + 2\widetilde{A}^T P\widetilde{A} + P\widetilde{A}^2 > 0.$$

*Якщо для деякого натурального числа $N$ виконуються нерівності*

$$2\|\widetilde{A}\|\|P\|\delta^* + \frac{2\theta_1\delta^*(\theta_1+\theta_2+\delta^*)\|P\|}{(\theta_1+\theta_2)(\theta_1+\theta_2-\delta^*)} + 2\beta_N + \gamma_N < \lambda_m(G),$$

$$\frac{2\|\widetilde{A}\|\theta_1\delta^*(\|A_1\|+\|A_2\|)}{(\theta_1+\theta_2)(\theta_1+\theta_2-\delta^*)} + \frac{\theta_1^2(\delta^*)^2(\|A_1\|+\|A_2\|)^2}{(\theta_1+\theta_2)^2(\theta_1+\theta_2-\delta^*)^2} < \frac{\lambda_m(R)}{4\|P\|},$$

*то закон перемикання для якого виконуються умова* (5) *забезпечує стійкість лінійної системи* (1).

*Доведення.* ‘ Доведемо, що за умов теореми 3.3 виконуються нерівності (9). Справді, нехай $\zeta \in \mathbb{R}^n$, $\zeta \neq 0$, тоді

$$\zeta^T[(\tau_{2k+2}-\tau_{2k})((\widetilde{A}_k)^T P + P\widetilde{A}_k) + (Q^{\theta_1}_{A_1,B_2})^T B_1^T P Q^{\theta_1}_{A_1,B_2} B_1 - P]\zeta =$$
$$= \zeta^T[(\theta_1+\theta_2+\delta_k)(\widetilde{A}^T P + P\widetilde{A}) + (\theta_1+\theta_2+\delta_k)((\widetilde{A}_k-\widetilde{A})^T P +$$
$$+P(\widetilde{A}_k-\widetilde{A})) + B_1^T(Q^{N,\theta_1}_{A_1,B_2})^T P Q^{N,\theta_1}_{A_1,B_2} B_1 - P + B_1^T(Q^{\theta_1}_{A_1,B_2}-$$
$$-Q^{N,\theta_1}_{A_1,B_2})^T P Q^{N,\theta_1}_{A_1,B_2} B_1 + B_1^T(Q^{N,\theta_1}_{A_1,B_2})^T P(Q^{\theta_1}_{A_1,B_2} - Q^{N,\theta_1}_{A_1,B_2})B_1 +$$
$$+B_1^T(Q^{\theta_1}_{A_1,B_2} - Q^{N,\theta_1}_{A_1,B_2})^T P(Q^{\theta_1}_{A_1,B_2} - Q^{N,\theta_1}_{A_1,B_2})B_1]\zeta \leq$$
$$\leq -\zeta^T G\zeta + [2\|\widetilde{A}\|\|P\|\delta^* + 2(\theta_1+\theta_2+\delta^*)\|P\|\|\widetilde{A}_k-\widetilde{A}\| +$$
$$+2\beta_N + \gamma_N]\|\zeta\|^2 \leq \Big(-\lambda_m(G) + 2\|\widetilde{A}\|\|P\|\delta^* +$$
$$+\frac{2(\theta_1+\theta_2+\delta^*)\|P\|\theta_1\delta^*(\|A_1\|+\|A_2\|)}{(\theta_1+\theta_2)(\theta_1+\theta_2-\delta^*)} + 2\beta_N + \gamma_N\Big)\|\zeta\|^2 < 0.$$

Аналогічно,

$$\zeta^T[(\widetilde{A}_k^T)^2 P + 2\widetilde{A}_k^T P\widetilde{A}_k + P\widetilde{A}_k^2]\zeta = \zeta^T[(\widetilde{A}^2)^T P + 2\widetilde{A}P\widetilde{A} + P\widetilde{A}^2]\zeta +$$
$$+\zeta^T[(\widetilde{A}^T(\widetilde{A}_k-\widetilde{A})^T + (\widetilde{A}_k-\widetilde{A})^T\widetilde{A}^T + (\widetilde{A}_k^T-\widetilde{A}^T)^2)P +$$
$$+2\widetilde{A}^T P(\widetilde{A}_k-\widetilde{A}) + 2(\widetilde{A}_k-\widetilde{A})^T P\widetilde{A} + 2(\widetilde{A}_k-\widetilde{A})^T P(\widetilde{A}_k-\widetilde{A}) +$$
$$+P\widetilde{A}(\widetilde{A}_k-\widetilde{A}) + P(\widetilde{A}_k-\widetilde{A})\widetilde{A} + P(\widetilde{A}_k-\widetilde{A})^2)]\zeta \geq$$
$$\geq \zeta^T R\zeta - [8\|\widetilde{A}\|\|\widetilde{A}_k-\widetilde{A}\|\|P\| + 4\|P\|\|\widetilde{A}_k-\widetilde{A}\|^2]\|\zeta\|^2 \geq$$
$$\geq \Big[\lambda_m(R) - 4\|P\|\Big(2\|\widetilde{A}\|\frac{\theta_1\delta^*(\|A_1\|+\|A_2\|)}{(\theta_1+\theta_2-\delta^*)(\theta_1+\theta_2)} -$$
$$-\frac{\theta_1^2(\delta^*)^2(\|A_1\|+\|A_2\|)^2}{(\theta_1+\theta_2-\delta^*)^2(\theta_1+\theta_2)^2}\Big)\Big]\|\zeta\|^2 \geq 0.$$

Таким чином, виконуються умови леми 3.1, і отже, лінійна імпульсна система (1) є асимптотично стійкою. Теорему доведено. □

**Обговорення результатів.** Важливість одержаних результатів полягає в тому, що на практиці неможливо точно забезпечити виконання умов періодичності, тому важливо не тільки відшукати правила перемикання, які забезпечують стабілізацію лінійної імпульсної системи, але і встановити умови робастності цих правил. Фактично умови стікості одержані в теоремах 3.1—3.3 є умовами робастної стійкості для послідовності моментів імпульсної дії. В подальшому доцільно провести дослідження робастної стійкості при малих варіаціях параметрів системи, а також при більш широких припущеннях щодо структурних матриць, зокрема послабити умови комутування структурних матриць неперервної компоненти системи, використовуючи формулу Кемпбела—Бейкера—Хаусдорфа [17]. Також одержані результати мають перспективу узагальнення для нелінійних систем змінної структури з імпульсною дією.

*Автори висловлюють щиру вдячність Д.О. Ситнику за корисне обговорення результатів роботи.*

Публікація містить результати досліджень, проведених при грантовій підтримці Державного фонду фундаментальних досліджень за конкурсним проектом № Ф62/110-2015 № 0112U000241, та гранту Міністерства освіти та науки України за проектом №0116U004691.

[1] Ларин В. Б. Управление шагающими аппаратами. — Л.: Наукова думка, 1980. — 168 с.

[2] Иванов А. П. О периодических движениях тяжелого твердого тела с ударами о горизонтальную плоскость // Известия РАН. МТТ. — 1985. — №. 2. — с. 30–35.

[3] Smith R. Impulsive Differential Equations with Applications to Self-Cycling Fermentation. — MacMaster University, 2001. — 152 p.

[4] Самойленко А. М., Перестюк Н. А. Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием. — К. : Вища школа, 1980. — 288 с.

[5] Corentin Briat. Dwell-time stability and stabilization conditions for linear positive impulsive and switched systems // arXiv:1608.02741v1 [math.OC], 9 Aug 2016.

[6] Daniel Liberzon and A. Stephen Morse. Basic Problems in Stability and Design of Switched Systems // IEEE Control Systems. — 1999. — no. 3. — P. 59–70.

[7] Narendra K. S., Balakrishnan J. A common Lyapunov function for stable LTI systems with commuting A-matrices // IEEE Trans. Automat. Control. — 1994. — Vol. 39, — P. 2469–2471.

[8] Shim H., Noh D. J., Seo J. H. Common Lyapunov function for exponentially stable nonlinear systems // 4th SIAM Conf. on Control and its Applications . — Jacksonville, FL, 1998.

[9] Двирный А. И., Слынько В. И. Об устойчивости по нелинейному приближению систем дифференциальных уравнений с импульсным воздействием // Автоматика и телемеханика. — 2014. — т. 75, № 11. — с. 3–18.

[10] Двирный А. И., Слынько В. И. Об устойчивости по нелинейному квазиоднородному приближению дифференциальных уравнений с импульсным воздействием // Матем. сборник. — 2014. — т. 205, № 6. — с. 109–138.

[11] Двирный А. И., Слынько В. И. Об устойчивости критических положений равновесия некоторых классов сложных импульсных систем // Изв. РАН. Серия ТиСУ. — 2014. — № 1. — с. 22–34.

[12] Двирный А. И., Слынько В. И. Об устойчивости решений крупномасштабных систем дифференциальных уравнений с импульсным воздействием в критических случаев // Дифференциальные уравнения. — 2014. — т. 50, № 4. — с. 428–438.

[13] Двирный А. И., Слынько В. И. Применение прямого метода Ляпунова к исследованию устойчивости решений систем дифференциальных уравнений с импульсным воздействием // Матем. заметки. — 2014. — т. 96, № 1. — с. 22–35.

[14] Makarov V. L., Dragunov D. V. Stability preserving structural transformations of Systems of linear second-order ordinary differential equations // arXiv: 1204.1814v1 [math.DS] 9 Apr 2012.

[15] Koshlyakov V. N., . Makarov V. L. Mechanical systems equivalent, in the sense of Lyapunov, to systems without nonconservative positional forces // Prikl. Mat. Mekh. — 2007. — vol. 71, no. 1. — p. 12–22.

[16] Рычка С. А., Слынько В. И. Об устойчивости квазилинейных систем переменной структуры // Динамические системы. — 2012. — т. 2(30), № 1. — с. 143–154.

[17] Magnus W. On the exponential solution of differential equations for a linear operator // Communications on Pure and Applied Mathematics. — 1954. — vol. 7 — c. 649–673.