

Групова класифікація диференціальних рівнянь: алгебраїчний підхід

С. Т. Гурака, О. В. Локажук

Abstract. Using the classical Lie theorem on realizations of Lie algebras by vector fields on the line, we substantially simplify the proof of the known results on the group classification of the classes of (1+1)-dimensional nonlinear evolution equations $u_t = H(u_{xx})$ and $u_t + uu_x = H(u_{xx})$.

Анотація. Використовуючи класичну теорему Лі про реалізацію алгебр Лі векторними полями на прямій, суттєво спрощено доведення відомих результатів про класифікацію класів (1+1)-вимірних нелінійних еволюційних рівнянь вигляду $u_t = H(u_{xx})$ та $u_t + uu_x = H(u_{xx})$.

1. Вступ

Диференціальні рівняння відіграють важливу роль у сучасній науці, адже знаходять своє застосування у багатьох сферах. Один із важливих напрямків цієї галузі математики — груповий аналіз диференціальних рівнянь. Фундаментальним поняттям групового аналізу диференціальних рівнянь є поняття симетрій — перетворень, які переводять розв’язки рівняння (або системи рівнянь) у розв’язки цього самого рівняння (або системи рівнянь). Розрізняють різні типи симетрій: локальні, неперервні, дискретні, контактні, потенціальні, узагальнені тощо. Симетрії широко використовуються, оскільки вони дають можливість будувати точні розв’язки звичайних диференціальних рівнянь та рівнянь із частинними похідними, із довільного тривіального розв’язку отримувати інший, складніший розв’язок, інтегрувати звичайні диференціальні рівняння, понижувати порядок рівняння, виконувати редукцію, описувати закони збереження, будувати інтеграли руху, будувати параметричні схеми в чисельних методах тощо. Перелічені вище задачі зводяться до так званої прямої задачі симетрійного аналізу, яка полягає в описі симетрій для заданого класу диференціальних рівнянь.

2020 Mathematics Subject Classification: 01A72, 16G50, 18G80

Ключові слова: еволюційне рівняння, групова класифікація, перетворення еквівалентності, симетрія, алгебра Лі, алгебраїчний підхід, реалізації алгебр Лі на прямій

DOI: <https://doi.org/10.3842/trim.v21n1.539>

Софус Лі звів задачу пошуку симетрій до лінійної задачі розв'язання перевизначених систем диференціальних рівнянь, таким чином значно спростивши початкову задачу. Однак через брак ефективних інструментів для розв'язку складних перевизначених систем диференціальних рівнянь навіть інфінітезимальний метод може іноді приводити до дуже громіздких обчислень, якщо початкова задача містить довільні параметри або ж її розмірність дуже велика. Ще більше спростити розв'язок можуть різні алгебраїчні методи, які на даний час розробляються в тому числі представниками київської наукової школи симетрійного аналізу.

Основним предметом цієї роботи є еволюційні рівняння

$$u_t = H(t, x, u, u_1, u_2, \dots, u_r), \quad (1.1)$$

де t, x — незалежні змінні (часова та просторова змінні, відповідно); $u = u(t, x)$ — залежна змінна; $u_t = \frac{\partial u}{\partial t}$ — частинна похідна за змінною t ; $u_k = \frac{\partial^k u}{\partial x^k}$ — k -та частинна похідна за змінною x , $k = 1, \dots, r$, $r \in \mathbb{N}$, $r \geq 2$, де r — порядок рівняння; H — довільна гладка функція змінних $t, x, u, u_1, u_2, \dots, u_r$, $H_{u_r} \neq 0$.

Симетрії еволюційних рівнянь та їх властивості — популярні теми багатьох наукових досліджень та праць. Окрім того, дуже часто рівняння цього класу слугують базовими прикладами в симетрійному аналізі диференціальних рівнянь (див., наприклад, [7, 12–14, 21]). Зазначимо, що, згідно з результатами Соколова [24] та Магадєєва [20], контактні перетворення зберігають вигляд рівнянь із класу (1.1) тоді й лише тоді, коли вони мають наступний вигляд:

$$\tilde{t} = \varkappa(t), \quad \tilde{x} = \phi(t, x, u, u_x), \quad \tilde{u} = \psi(t, x, u, u_x),$$

при чому на функції ϕ та ψ накладена умова контактності [25]

$$\phi_{u_x}(u_x \psi_u + \psi_x) = \psi_{u_x}(u_x \phi_u + \phi_x).$$

У роботі [20] Магадєєв встановив, що у випадку скінченновимірної алгебри контактних симетрій (Cont) $(1+1)$ -вимірних еволюційних рівнянь із класу (1.1) її розмірність становить щонайбільше $r+5$. Натомість, у випадку нескінченновимірної алгебри контактних симетрій рівняння завжди можна звести до лінійного за допомогою деяких контактних перетворень. У цій статті автор також навів повний перелік алгебр скінченновимірних контактних симетрій рівнянь із класу (1.1) і відповідні еволюційні рівняння, що їх допускають.

Добре відома (див., наприклад, [15, Theorem 1] і [3, лема 4.5, с. 266]) наступна лема:

Лема 1.1. *Для довільного еволюційного рівняння вигляду (1.1) t -компонента будь-якого інфінітезимального оператора, що породжує однопараметричну групу локальних перетворень симетрії цього рівняння, не залежить від x та u .*

Таким чином, векторні поля, що належать максимальній алгебрі ліївської інваріантності $\mathfrak{g}^H$ еволюційних рівнянь з класу (1.1), можна шукати у вигляді:

$$Q = \xi^0(t)\partial_t + \xi^1(t, x, u)\partial_x + \eta(t, x, u)\partial_u, \quad (1.2)$$

де $\xi^0(t)$, $\xi^1(t, x, u)$ і $\eta(t, x, u)$ пробігають множину гладких функцій своїх аргументів.

Відомою є класична теорема Лі про ліївські алгебри векторних полів на дійсній прямій [19, Satz 6, S. 455] (також [22, Theorem 2.70], [9, Theorem 1] і [4, теорема 1.1, с. 26]).

Теорема 1.1. *Нееквівалентні реалізації скінченновимірних ліївських алгебр векторними полями на t -прямій вичерпують наступні алгебри:*

$$\{0\}, \quad \langle \partial_t \rangle, \quad \langle \partial_t, t\partial_t \rangle, \quad \langle \partial_t, t\partial_t, t^2\partial_t \rangle.$$

Позначимо через π проєкцію з $\mathbb{R}^t \times \mathbb{R}^x$ на $\mathbb{R}^t$ і нехай $k := \dim \pi_* \mathfrak{g}^H$. Оскільки t -компонента векторних полів вигляду (1.2) залежить лише від змінної t , то, з огляду на теорему 1.1, $k \leq 3$.

Раніше теорема Лі вже успішно застосовувалася для групової класифікації класів еволюційних рівнянь та рівняння Шредінгера [6, 17, 18, 23], а також класу лінійних звичайних диференціальних рівнянь довільного фіксованого порядку $r \geq 2$ [11, §3], де існує аналогічна проєктовність на одновимірний простір часової або незалежної змінної, відповідно. У роботі [9] теорему 1.1 використано у задачі групової класифікації рівняння Клейна–Гордона, причому одночасно розглядалися проєкції на обидві незалежні змінні t і x (див. також дисертацію [4, розділ 1]). Натомість, у роботі [10] проєктовність векторних полів на незалежну змінну t дає можливість ефективно використовувати теорему 1.1 для групової класифікації лінійних систем звичайних диференціальних рівнянь другого порядку з довільною кількістю залежних змінних.

2. ГРУПОВА КЛАСИФІКАЦІЯ НЕЛІНІЙНОГО РІВНЯННЯ ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ

2.1. Попередні відомості. Метою цього параграфу є уточнення та спрощення доведення результатів Ахатова, Газізова та Ібрагімова [5, §4]

про групову класифікацію класу еволюційних рівнянь вигляду

$$u_t = H(u_{xx}), \quad (2.1)$$

де $u_t = \frac{\partial u}{\partial t}$, $u_{xx} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, H — довільна гладка функція аргументу u_{xx} . Якщо H лінійна, то рівняння (2.1) відоме як лінійне рівняння теплопровідності, і тому відповідний клас (2.1) іноді називають класом нелінійних рівнянь теплопровідності.

Далі використовуємо позначення: $u_0 := u_t$, $u_1 := u_x$, $u_{11} := u_{xx}$. Тоді початкове рівняння можна переписати як

$$u_0 = H(u_{11}). \quad (2.2)$$

Нижче вважаємо, що індекси $i, j, \dots = 0, 1$, а за повторюваними індексами здійснюється підсумовування, нижні індекси — диференціювання за відповідними змінними. Виключаючи з розгляду випадок лінійного рівняння теплопровідності $u_0 = u_{11}$, припустимо, що H — нелінійна функція змінної u_{11} . (Слід звернути увагу на роботу Ковалю та Поповича [16], у якій виправлено деякі недоліки в груповому аналізі лінійного рівняння теплопровідності.)

Нижче використано наступні позначення для векторних полів алгебр інваріантності рівнянь із класу (2.2):

$$\begin{aligned} Q^1 &= \partial_t, & Q^2 &= \partial_x, & Q^3 &= \partial_u, & Q^4 &= 2t\partial_t + x\partial_x + 2u\partial_u, \\ Q^5 &= x\partial_u, & Q^{6a} &= 2t\partial_t - x^2\partial_u, & Q^{6b} &= x\partial_x - 2t\partial_u, \\ Q^{6c} &= (1-k)t\partial_t + u\partial_u, & k &\neq 0, \pm\frac{1}{3}, 1, & Q^{6c_1} &= 2t\partial_t + 3u\partial_u, \\ Q^{6c_2} &= 4t\partial_t + 3u\partial_u, & Q^{7c_1} &= u\partial_x, & Q^{7c_2} &= x^2\partial_x + xu\partial_u, \end{aligned}$$

де Q^{6c_1} та Q^{6c_2} — частинні випадки векторного поля Q^{6c} для $k = \frac{1}{3}$ та $k = -\frac{1}{3}$, відповідно.

Теорема 2.1 (група еквівалентності, див. [5, §3.3]). *Група еквівалентності $G^\sim$ класу (2.2) породжена перетвореннями вигляду*

$$\begin{aligned} \tilde{t} &= \mu^0 t + \mu^1, & \tilde{x} &= \nu^0 x + \nu^1, \\ \tilde{u} &= \kappa^0 u + \kappa^1 x^2 + \kappa^2 x + \kappa^3 t + \kappa^4, & \tilde{H} &= \frac{\kappa^0}{\mu^0} H + \kappa^3, \end{aligned}$$

де $\mu^0, \mu^1, \nu^0, \nu^1, \kappa^0, \dots, \kappa^4$ — довільні константи, такі, що $\mu^0 \nu^0 \kappa^0 \neq 0$.

Векторне поле (1.2) належить максимальній алгебрі лівської інваріантності $\mathfrak{g}^H$ рівняння з класу (2.2) для будь-якого H тоді й лише тоді, коли воно задовольняє наступне визначальне рівняння:

$$(\zeta^0 - \zeta^{11} H')|_{u_0=H(u_{11})} = 0, \quad (2.3)$$

де ζ^0 та ζ^{11} — відповідні коефіцієнти першого та другого продовжень векторного поля (1.2), $H' := \partial H(u_{11})/\partial u_{11}$.

Розписуючи рівняння (2.3), отримуємо

$$\begin{aligned} & \eta_0 + \eta_u H - H\xi_0^0 - u_1(\xi_0^1 + \xi_u^1 H) \\ & - H'[\eta_{11} + 2\eta_{1u}u_1 + \eta_{uu}u_1^2 + \eta_u u_{11} - 2u_{11}(\xi_1^1 + \xi_u^1 u_1) \\ & - u_1(\xi_{11}^1 + 2\xi_{1u}^1 u_1 + \xi_{uu}^1 u_1^2 + \xi_u^1 u_{11})] = 0. \end{aligned}$$

Після розщеплення цього рівняння за степенями змінної u_1 приходимо до наступної системи:

$$\xi_{uu}^1 = 0, \quad \eta_{uu} - 2\xi_{1u}^1 = 0, \quad (2.4)$$

$$\xi_0^1 + \xi_u^1 H + (2\eta_{1u} - \xi_{11}^1 - 3\xi_u^1 u_{11})H' = 0, \quad (2.5)$$

$$\eta_0 + (\eta_u - \xi_0^0)H - (\eta_{11} + (\eta_u - 2\xi_1^1)u_{11})H' = 0. \quad (2.6)$$

Загальний розв'язок системи (2.4) має вигляд

$$\xi^1 = \alpha(t, x)u + \beta(t, x), \quad \eta = \alpha_1 u^2 + \gamma(t, x)u + \delta(t, x),$$

де $\alpha(t, x)$, $\beta(t, x)$, $\gamma(t, x)$ і $\delta(t, x)$ пробігають множину гладких функцій своїх аргументів.

Підстановка цих виразів у рівняння (2.5) і (2.6) приводить до наступної системи:

$$\begin{aligned} & \alpha_0 u + \beta_0 + \alpha H + (3\alpha_{11}u + (2\gamma_1 - \beta_{11}) - 3\alpha u_{11})H' = 0, \\ & \alpha_{01}u^2 + \gamma_0 u + \delta_0 + (2\alpha_1 u + \gamma - \xi_0^0)H - [\alpha_{111}u^2 + \gamma_{11}u \\ & + \delta_{11} + (2\alpha_1 u + \gamma - 2(\alpha_1 u + \beta_1))u_{11}]H' = 0. \end{aligned}$$

Розділяючи вищенаведену систему за степенями u , приходимо до системи

$$\alpha_0 + 3\alpha_{11}H' = 0, \quad (2.7)$$

$$\beta_0 + \alpha H + (2\gamma_1 - \beta_{11} - 3\alpha u_{11})H' = 0, \quad (2.8)$$

$$\alpha_{01} - \alpha_{111}H' = 0, \quad (2.9)$$

$$\gamma_0 + 2\alpha_1 H - \gamma_{11}H' = 0, \quad (2.10)$$

$$\delta_0 + (\gamma - \xi_0^0)H - (\delta_{11} + (\gamma - 2\beta_1)u_{11})H' = 0. \quad (2.11)$$

Беручи до уваги, що $H'' \neq 0$, з рівняння (2.7) одержуємо

$$\alpha_0 = 0, \quad \alpha_{11} = 0.$$

У той же час рівняння (2.9) стає незначущим. Далі, після диференціювання рівняння (2.8) за змінною u_{11} , отримуємо

$$-2\alpha H' + (2\gamma_1 - \beta_{11} - 3\alpha u_{11})H'' = 0.$$

Після ще одного диференціювання попереднього рівняння за змінною x маємо

$$-2\alpha_1 H' + (2\gamma_{11} - \beta_{111} - 3\alpha_1 u_{11})H'' = 0. \quad (2.12)$$

Диференціюючи рівняння (2.10) за змінною u_{11} , отримуємо

$$2\alpha_1 H' - \gamma_{11} H'' = 0. \quad (2.13)$$

Додаючи рівняння (2.12) і (2.13), маємо

$$(\gamma_{11} - \beta_{111} - 3\alpha_1 u_{11})H'' = 0.$$

Із умови $H'' \neq 0$ одержуємо

$$\alpha_1 = 0, \quad \gamma_{11} = 0, \quad \beta_{111} = 0.$$

З іншого боку, з рівняння (2.10) слідує, що $\gamma_0 = 0$. Тоді

$$\alpha = C^1 = \text{const}, \quad \beta = \beta^2(t)x^2 + \beta^1(t)x + \beta^0(t), \quad \gamma = C^2x + C^3,$$

де функції $\beta^2(t)$, $\beta^1(t)$ та $\beta^0(t)$ пробігають множину гладких функцій змінної t , і $C^1, C^2, \dots$ — довільні константи. Підстановка цих виразів у рівняння (2.8) дає

$$\beta_0^2 x^2 + \beta_0^1 x + \beta_0^0 + C^1 H + (2C^2 - 2\beta^2 - 3C^1 u_{11})H' = 0.$$

Розщеплюючи за змінною x , маємо

$$\beta_0^2 = 0, \quad \beta_0^1 = 0, \quad \beta_0^0 = 0.$$

Тоді

$$\begin{aligned} \beta^2 &= C^4, \quad \beta^1 = C^5, \quad \beta^0 = C^6 t + C^7, \\ C^6 + C^1 H + (2C^2 - 2C^4 - 3C^1 u_{11})H' &= 0. \end{aligned} \quad (2.14)$$

Отже, коефіцієнти векторного поля Q набувають такої форми:

$$\xi^0 = \xi^0(t), \quad (2.15)$$

$$\xi^1 = C^1 u + C^4 x^2 + C^5 x + C^6 t + C^7, \quad (2.16)$$

$$\eta = (C^2 x + C^3)u + \delta(t, x). \quad (2.17)$$

Після підстановки (2.16) і (2.17) в рівняння (2.11) приходимо до наступної класифікаційної умови:

$$\begin{aligned} \delta_0 + (C^2 x + C^3 - \xi_0^0)H \\ - (\delta_{11} + (C^2 x + C^3 - 2(2C^4 x + C^5))u_{11})H' = 0. \end{aligned} \quad (2.18)$$

Якщо H — довільна функція, то із (2.14) і (2.18) знаходимо

$$\begin{aligned} C^6 &= 0, \quad C^1 = 0, \quad C^2 = C^4, \quad \delta_0 = 0, \quad C^2 x + C^3 - \xi_0^0 = 0, \\ \delta_{11} &= 0, \quad (C^2 - 4C^4)x + C^3 - 2C^5 = 0. \end{aligned}$$

Виходить, що

$$\delta = C^8 x + C^9, \quad -3C^4 = 0, \quad C^3 = 2C^5, \quad C^2 = 0,$$

і коефіцієнти векторних полів (1.2) набувають наступного вигляду:

$$\xi^0 = C^3 t + C^{10} = 2C^5 t + C^{10}, \quad \xi^1 = C^5 x + C^7, \quad \eta = 2C^5 u + C^8 x + C^9.$$

Таким чином, рівняння (2.2) з довільною функцією H у правій частині допускає 5-вимірну алгебру Лі $\mathfrak{g}^0$, породжену векторними полями

$$Q^1 = \partial_t, \quad Q^2 = \partial_x, \quad Q^3 = \partial_u, \quad Q^4 = 2t\partial_t + x\partial_x + 2u\partial_u, \quad Q^5 = x\partial_u.$$

Приходимо до наступного твердження.

Теорема 2.2. $\mathfrak{g}^0 = \langle \partial_t, \partial_x, \partial_u, 2t\partial_t + x\partial_x + 2u\partial_u, x\partial_u \rangle$ — ядро ліївських алгебр інваріантності рівнянь із класу (2.2).

2.2. Групова класифікація. Нехай $\dim \pi_* \mathfrak{g}^H = k$. Так як $\dim \pi_* \mathfrak{g}^0 = 2$, то для будь-якого рівняння з класу (2.2) маємо $k = 2$ або $k = 3$, а t -компонента є квадратичною функцією змінної t , тобто,

$$\pi_* \mathfrak{g}^H = \langle \partial_t, t\partial_t \rangle \quad \text{або} \quad \pi_* \mathfrak{g}^H = \langle \partial_t, t\partial_t, t^2\partial_t \rangle.$$

Нижче розглянуто кожен із цих двох випадків окремо.

Спочатку, диференціюючи (2.18) двічі відносно змінної x , отримуємо

$$\delta_{011} - \delta_{1111} H' = 0,$$

тому $\delta_{011} = 0$, $\delta_{1111} = 0$, отже,

$$\delta = C^{20} x^3 + C^{21} x^2 + \rho^1(t)x + \rho^0(t), \quad (2.19)$$

де функції $\rho^1(t)$ та $\rho^0(t)$ пробігають множину гладких функцій змінної t .

$k = 3$. У цьому випадку

$$\xi^0 = \lambda^2 t^2 + \lambda^1 t + \lambda^0, \quad (2.20)$$

де λ^2 , λ^1 і λ^0 — довільні константи.

Після підстановки (2.19) і (2.20) в (2.18) отримуємо

$$\begin{aligned} & \rho_0^1 x + \rho_0^0 + (C^2 x + C^3 - 2\lambda^2 t - \lambda^1) H \\ & - (6C^{20} x + 2C^{21} + (C^2 x + C^3 - 4C^4 x - 2C^5) u_{11}) H' = 0. \end{aligned}$$

Розщеплення цього рівняння за змінною x приводить до наступної системи:

$$\begin{aligned} & \rho_0^1 + C^2 H - (6C^{20} + (C^2 - 4C^4) u_{11}) H' = 0, \\ & \rho_0^0 + (C^3 - 2\lambda^2 t - \lambda^1) H - (2C^{21} + (C^3 - 2C^5) u_{11}) H' = 0. \end{aligned}$$

Диференціюючи друге рівняння вищезгаданої системи відносно змінної t , одержуємо

$$\rho_{00}^0 - 2\lambda^2 H = 0,$$

і тому $\lambda^2 = 0$, оскільки H — нелінійна функція змінної u_{11} . Маємо, що функція ξ^0 може бути щонайбільше лінійною. Це суперечить умові $k = 3$.

$k = 2$. У цьому випадку функція ξ^0 лінійна, тобто,

$$\xi^0 = \lambda^1 t + \lambda^0, \quad (2.21)$$

де λ^1 і λ^0 — довільні константи.

Із підстановки (2.19) і (2.21) в (2.18) слідує

$$\begin{aligned} & \rho_0^1 x + \rho_0^0 + (C^2 x + C^3 - \lambda^1) H \\ & - (6C^{20} x + 2C^{21} + (C^2 x + C^3 - 4C^4 x - 2C^5) u_{11}) H' = 0. \end{aligned}$$

Розщеплення цього рівняння за змінною x приводить до наступної системи:

$$\rho_0^1 + C^2 H - (6C^{20} + (C^2 - 4C^4) u_{11}) H' = 0, \quad (2.22)$$

$$\rho_0^0 + (C^3 - \lambda^1) H - (2C^{21} + (C^3 - 2C^5) u_{11}) H' = 0. \quad (2.23)$$

Після диференціювання (2.22) і (2.23) за змінною t отримуємо, що $\rho_{00}^1 = 0$ і $\rho_{00}^0 = 0$, відповідно. Тому $\rho^1(t) = C^{22}t + C^{23}$ і $\rho^0(t) = C^{24}t + C^{25}$. Отже,

$$\delta(t, x) = C^{20} x^3 + C^{21} x^2 + (C^{22} t + C^{23}) x + (C^{24} t + C^{25}).$$

Із рівнянь (2.15)–(2.17) одержуємо наступні вирази для компонент векторного поля Q :

$$\xi^0 = \lambda^1 t + \lambda^0, \quad \xi^1 = C^1 u + C^4 x^2 + C^5 x + C^6 t + C^7,$$

$$\eta = (C^2 x + C^3) u + C^{20} x^3 + C^{21} x^2 + (C^{22} t + C^{23}) x + (C^{24} t + C^{25}),$$

у той час, як (2.14), (2.22) і (2.23) дають систему визначальних рівнянь для функції H у вигляді

$$C^6 + C^1 H + (2C^2 - 2C^4 - 3C^1 u_{11}) H' = 0, \quad (2.24)$$

$$C^{22} + C^2 H - (6C^{20} + (C^2 - 4C^4) u_{11}) H' = 0, \quad (2.25)$$

$$C^{24} + (C^3 - \lambda^1) H - (2C^{21} + (C^3 - 2C^5) u_{11}) H' = 0. \quad (2.26)$$

Бачимо, що всі ці рівняння мають загальний вигляд

$$a + bH + cH' + du_{11}H' = 0 \quad (2.27)$$

із деякими сталими параметрами a, b, c і d . З точністю до еквівалентності, визначеної в теоремі 2.1, існує тільки три можливості для розв'язків рівняння типу (2.27), а саме, $e^{u_{11}}$, $\ln(u_{11})$ і u_{11}^p , де $p \neq 0, 1$.

Якщо $H = e^{u_{11}}$, то маємо

$$\begin{aligned}\xi^0 &= 2(C^5 - C^{21})t + \lambda^0, & \xi^1 &= C^5x + C^7 \\ \eta &= 2C^5u + C^{21}x^2 + C^{23}x + C^{25}.\end{aligned}$$

Таким чином, за умови $H = e^{u_{11}}$ базис максимальної алгебри лівівської інваріантності має наступний вигляд:

$$\begin{aligned}Q^1 &= \partial_t, & Q^2 &= \partial_x, & Q^3 &= \partial_u, & Q^4 &= 2t\partial_t + x\partial_x + 2u\partial_u, \\ Q^5 &= x\partial_u, & Q^6 &= 2t\partial_t - x^2\partial_u.\end{aligned}$$

Якщо $H = \ln(u_{11})$, то

$$\xi^0 = C^3t + \lambda^0, \quad \xi^1 = C^5x + C^7, \quad \eta = C^3u + C^{23}x + (C^3 - 2C^5)t + C^{25}.$$

У випадку $H = \ln(u_{11})$ одержуємо наступний базис максимальної алгебри лівівської інваріантності:

$$\begin{aligned}Q^1 &= \partial_t, & Q^2 &= \partial_x, & Q^3 &= \partial_u, & Q^4 &= 2t\partial_t + x\partial_x + 2u\partial_u, \\ Q^5 &= x\partial_u, & Q^6 &= x\partial_x - 2t\partial_u.\end{aligned}$$

Якщо $H = u_{11}^p$, то з системи (2.24)–(2.26) отримуємо

$$\begin{aligned}C^6 + C^1u_{11}^p + 2(C^2 - C^4)pu_{11}^{p-1} - 3C^1pu_{11}^p &= 0, \\ C^{22} + C^2u_{11}^p - 6C^{20}pu_{11}^{p-1} - (C^2 - 4C^4)pu_{11}^p &= 0, \\ C^{24} + (C^3 - \lambda^1)u_{11}^p - 2C^{21}pu_{11}^{p-1} - (C^3 - 2C^5)pu_{11}^p &= 0.\end{aligned}$$

Розщеплюючи цю систему, одержуємо

$$\begin{aligned}C^1 &= 3pC^1, & C^2 &= C^4, & C^2 &= p(C^2 - 4C^4), \\ \lambda^1 &= (1 - p)C^3 + 2pC^5, & C^6 &= C^{20} = C^{21} = C^{22} = C^{24} = 0.\end{aligned}$$

Якщо $p \neq \pm \frac{1}{3}$, то

$$\begin{aligned}\lambda^1 &= (1 - p)C^3 + 2pC^5, \\ C^1 &= C^2 = C^6 = C^{20} = C^{21} = C^{22} = C^{24} = 0,\end{aligned}$$

тобто компоненти векторного поля Q мають вигляд

$$\begin{aligned}\xi^0 &= ((1 - p)C^3 + 2pC^5)t + \lambda^0, & \xi^1 &= C^5x + C^7, \\ \eta &= C^3u + C^{23}x + C^{25}.\end{aligned}$$

Отже, коли $H = u_{11}^p$, $p \neq \pm \frac{1}{3}$, то алгебра максимальної ліівської інваріантності породжена наступними векторними полями:

$$\begin{aligned} Q^1 &= \partial_t, & Q^2 &= \partial_x, & Q^3 &= \partial_u, & Q^4 &= 2t\partial_t + x\partial_x + 2u\partial_u, \\ Q^5 &= x\partial_u, & Q^6 &= (1-p)t\partial_t + u\partial_u. \end{aligned}$$

Для $p = \frac{1}{3}$:

$$\lambda^1 = \frac{2}{3}(C^3 + C^5), \quad C^2 = C^6 = C^{20} = C^{21} = C^{22} = C^{24} = 0,$$

тобто компоненти векторного поля Q мають наступний вигляд:

$$\begin{aligned} \xi^0 &= \frac{2}{3}(C^3 + C^5)t + \lambda^0, & \xi^1 &= C^1u + C^5x + C^7, \\ \eta &= C^3u + C^{23}x + C^{25}. \end{aligned}$$

Таким чином, у випадку $H = u_{11}^{1/3}$ отримуємо наступний вигляд алгебри максимальної ліівської інваріантності:

$$\begin{aligned} Q^1 &= \partial_t, & Q^2 &= \partial_x, & Q^3 &= \partial_u, & Q^4 &= 2t\partial_t + x\partial_x + 2u\partial_u, \\ Q^5 &= x\partial_u, & Q^6 &= 2t\partial_t + 3u\partial_u, & Q^7 &= u\partial_x. \end{aligned}$$

Для $p = -\frac{1}{3}$:

$$\lambda^1 = \frac{2}{3}(2C^3 - C^5), \quad C^1 = C^6 = C^{20} = C^{21} = C^{22} = C^{24} = 0,$$

ї компоненти векторного поля Q такі:

$$\begin{aligned} \xi^0 &= \frac{2}{3}(2C^3 - C^5)t + \lambda^0, & \xi^1 &= C^2x^2 + C^5x + C^7, \\ \eta &= (C^2x + C^3)u + C^{23}x + C^{25}. \end{aligned}$$

Отже, якщо $H = u_{11}^{-1/3}$, то алгебра максимальної ліівської інваріантності породжується наступними базисними векторними полями:

$$\begin{aligned} Q^1 &= \partial_t, & Q^2 &= \partial_x, & Q^3 &= \partial_u, & Q^4 &= 2t\partial_t + x\partial_x + 2u\partial_u, \\ Q^5 &= x\partial_u, & Q^6 &= 4t\partial_t + 3u\partial_u, & Q^7 &= x^2\partial_x + xu\partial_u. \end{aligned}$$

Отримані результати підсумовано в наступному твердженні.

Теорема 2.3 (результат групової класифікації, [5, §4]). *Повний список $G^\sim$ -нееквівалентних (максимальних) розширень ліівських симетрій у класі (2.2) вичерпують такі випадки, які наведено у таблиці 2.1.*

У випадку лінійної (несталої) функції H (останній рядок таблиці, який включено для повноти розгляду класу (2.2)) алгебра ліівської інваріантності нескінченновимірна. Тут параметрична функція f залежить

Таблиця 2.1. Результати групової класифікації класу (2.2).

$H(u_{xx})$	<i>Ліівська алгебра інваріантності</i>
$\forall$	$\langle \partial_t, \partial_x, \partial_u, 2t\partial_t + x\partial_x + 2u\partial_u, x\partial_u \rangle$
$\exp u_{xx}$	$\langle \partial_t, \partial_x, \partial_u, 2t\partial_t + x\partial_x + 2u\partial_u, x\partial_u, 2t\partial_t - x^2\partial_u \rangle$
$\ln u_{xx}$	$\langle \partial_t, \partial_x, \partial_u, 2t\partial_t + x\partial_x + 2u\partial_u, x\partial_u, x\partial_x - 2t\partial_u \rangle$
$u_{xx}^p, p \neq 0, \pm\frac{1}{3}, 1$	$\langle \partial_t, \partial_x, \partial_u, 2t\partial_t + x\partial_x + 2u\partial_u, x\partial_u, (1-p)t\partial_t + u\partial_u \rangle$
$u_{xx}^{1/3}$	$\langle \partial_t, \partial_x, \partial_u, 2t\partial_t + x\partial_x + 2u\partial_u, x\partial_u, 2t\partial_t + 3u\partial_u, u\partial_x \rangle$
$u_{xx}^{-1/3}$	$\langle \partial_t, \partial_x, \partial_u, 2t\partial_t + x\partial_x + 2u\partial_u, x\partial_u, 4t\partial_t + 3u\partial_u, x^2\partial_x + xu\partial_u \rangle$
u_{xx}	$\langle \partial_t, \partial_x, u\partial_u, 2t\partial_t + x\partial_x, t\partial_x - \frac{1}{2}xu\partial_u, t^2\partial_t + tx\partial_x - \frac{1}{4}(x^2 + 2t)u\partial_u, f(t, x)\partial_u \rangle$

від змінних (t, x) і пробігає множину розв'язків лінійного рівняння теплопровідності $u_t = u_{xx}$.

3. ГРУПОВА КЛАСИФІКАЦІЯ НЕЛІНІЙНОГО РІВНЯННЯ БЮРГЕРСА

3.1. Попередні відомості. Метою цього параграфа є спрощення доведення результатів [1, 8] про групову класифікацію класу еволюційних рівнянь вигляду

$$u_0 + uu_1 = H(u_{11}), \quad (3.1)$$

де $u_0 := u_t = \frac{\partial u}{\partial t}$, $u_1 := u_x = \frac{\partial u}{\partial x}$, $u_{11} := u_{xx} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, H — довільна гладка функція аргументу u_{xx} . Коли H — лінійна функція, то рівняння (3.1) є добре відомим рівнянням Бюргерса. Згідно з лемою 1.1, векторні поля, що належать максимальній алгебрі ліівської інваріантності $\mathfrak{g}^H$ еволюційних рівнянь із класу (3.1), можна шукати в вигляді (1.2).

Теорема 3.1 (група еквівалентності класу (3.1), див. [2]). *Група еквівалентності $G^\sim$ класу (3.1) породжена операторами ∂_t , ∂_x , $t\partial_x + \partial_u$, $t\partial_t + x\partial_x - H\partial_H$, $x\partial_x + u\partial_u + H\partial_H$, $t^2\partial_x + 2t\partial_u + 2\partial_H$, а також дискретним перетворенням еквівалентності $(t, x, u, H) \rightarrow (-t, -x, u, -H)$. Дія будь-якого перетворення еквівалентності на функцію H має вигляд*

$$\tilde{H}(u_{11}) = \delta_1 H(\delta_2 u_{11}) + \delta_0,$$

де $\delta_0, \delta_1, \delta_2 \in \mathbb{R}$, $\delta_1 \delta_2 \neq 0$.

Векторне поле (1.2) належить максимальній алгебрі лівської інваріантності $\mathfrak{g}^H$ рівняння з класу (3.1) для будь-якої функції H тоді й лише тоді, коли воно задовольняє наступне визначальне рівняння:

$$(\eta u_1 + \zeta^0 + \zeta^1 u - \zeta^{11} H')|_{u_0 + u u_1 = H(u_{11})} = 0, \quad (3.2)$$

де ζ^0 , ζ^1 та ζ^{11} — відповідні коефіцієнти першого та другого продовжень векторного поля (1.2), $H' := \partial H(u_{11})/\partial u_{11}$.

Розписуючи рівняння (3.2), отримуємо

$$\begin{aligned} & \eta u_1 + \eta_0 + H \eta_u + u u_1 \xi_0^0 - H \xi_0^0 - u_1 \xi_0^1 - u_1 \xi_u^1 H + u \eta_1 - u u_1 \xi_1^1 \\ & - H' [\eta_{11} + 2 \eta_{1u} u_1 + \eta_{uu} u_1^2 + \eta_u u_{11} - 2 u_{11} (\xi_1^1 + \xi_u^1 u_1) \\ & - u_1 (\xi_{11}^1 + 2 \xi_{1u}^1 u_1 + \xi_{uu}^1 u_1^2 + \xi_u^1 u_{11})] = 0. \end{aligned}$$

Після розщеплення цього рівняння за степенями змінної u_1 приходимо до наступної системи:

$$\xi_{uu}^1 = 0, \quad \eta_{uu} - 2 \xi_{1u}^1 = 0, \quad (3.3)$$

$$\eta - \xi_0^1 + u (\xi_0^0 - \xi_1^1) - \xi_u^1 H - (2 \eta_{1u} - \xi_{11}^1 - 3 \xi_u^1 u_{11}) H' = 0, \quad (3.4)$$

$$\eta_0 + u \eta_1 + (\eta_u - \xi_0^0) H - (\eta_{11} + (\eta_u - 2 \xi_1^1) u_{11}) H' = 0. \quad (3.5)$$

Загальний розв'язок системи (3.3) має вигляд

$$\xi^1 = a(t, x)u + b(t, x), \quad \eta = a_1 u^2 + c(t, x)u + d(t, x),$$

де $a(t, x)$, $b(t, x)$, $c(t, x)$ і $d(t, x)$ пробігають множину гладких функцій своїх аргументів.

Підстановка цих виразів у рівняння (3.4) і (3.5) приводить до наступної системи:

$$\begin{aligned} & (c - a_0 + \xi_0^0 - b_1)u + (d - b_0) - aH \\ & - (3a_{11}u + 2c_1 - b_{11} - 3au_{11})H' = 0, \\ & a_{11}u^3 + (a_{01} + c_1)u^2 + (c_0 + d_1)u + d_0 + (2a_1u + c - \xi_0^0)H \\ & - (a_{111}u^2 + c_{11}u + d_{11} + (c - 2b_1)u_{11})H' = 0. \end{aligned}$$

Розщеплюючи вищенаведену систему за степенями u , приходимо до системи

$$c - a_0 + \xi_0^0 - b_1 - 3a_{11}H' = 0, \quad (3.6)$$

$$d - b_0 - aH - (2c_1 - b_{11} - 3au_{11})H' = 0, \quad (3.7)$$

$$a_{11} = 0, \quad (3.8)$$

$$a_{01} + c_1 - a_{111}H' = 0, \quad (3.9)$$

$$c_0 + d_1 + 2a_1H - c_{11}H' = 0, \quad (3.10)$$

$$d_0 + (c - \xi_0^0)H - (d_{11} + (c - 2b_1)u_{11})H' = 0. \quad (3.11)$$

Із рівняння (3.8) випливає, що

$$a = \lambda^1(t)x + \lambda^2(t).$$

Тут і нижче $\lambda^1(t), \lambda^2(t), \dots$ пробігають множину гладких функцій змінної t . З урахуванням рівнянь (3.8) і (3.9) маємо $a_{01} + c_1 = 0$, тобто $\lambda_0^1 + c_1 = 0$, звідки можна знайти функцію $c(t, x)$:

$$c = -\lambda_0^1(t)x + \lambda^3(t).$$

Далі підставимо функції a і c в рівняння (3.6):

$$-\lambda_0^1x + \lambda^3 - \lambda_0^1x - \lambda_0^2 + \xi_0^0 - b_1 = 0.$$

Звідси знаходимо функцію $b(t, x)$:

$$b = -\lambda_0^1x^2 + (\xi_0^0 + \lambda^3 - \lambda_0^2)x + \lambda^4(t).$$

Оскільки H — нелінійна функція, то з рівняння (3.10) випливає, що

$$c_0 + d_1 = 0, \quad a_1 = 0.$$

Тоді з рівняння $a_1 = 0$ одержуємо, що $\lambda^1 = 0$, тобто

$$a = \lambda^2(t), \quad b = (\xi_0^0 + \lambda^3 - \lambda_0^2)x + \lambda^4(t), \quad c = \lambda^3(t).$$

Натомість, із рівняння $c_0 + d_1 = 0$ маємо, що $\lambda_0^3 + d_1 = 0$, а отже,

$$d = -\lambda_0^3x + \lambda^5(t).$$

Підстановка щойно уточнених виразів для функцій a, b, c і d в рівняння (3.7) приводить до співвідношення

$$(\lambda^5 - \lambda_0^4) - (2\lambda_0^3 + \xi_{00}^0 - \lambda_{00}^2)x - \lambda^2H + 3\lambda^2u_{11}H' = 0.$$

Прирівнюючи коефіцієнт при x до нуля, отримаємо наступне рівняння:

$$2\lambda_0^3 + \xi_{00}^0 - \lambda_{00}^2 = 0,$$

звідки слідує, що

$$\xi_0^0 = \lambda_0^2 - 2\lambda^3 + m_1.$$

Тут і нижче $m_1, m_2, \dots$ — довільні дійсні сталі.

Отже, приходимо до першої *класифікаційної умови*:

$$(\lambda^5 - \lambda_0^4) - \lambda^2H + 3\lambda^2u_{11}H' = 0.$$

Натомість, із підстановки наведених вище виразів для функцій a, b, c, d і ξ_0^0 в рівняння (3.11) одержимо

$$-\lambda_{00}^3x + \lambda_0^5 + (3\lambda^3 - \lambda_0^2 - m_1)H + (\lambda^3 + 2\xi_0^0 - 2\lambda_0^2)u_{11}H' = 0.$$

Прирівнюючи коефіцієнт при x до нуля, отримаємо наступне рівняння:

$$\lambda_{00}^3 = 0.$$

Звідси робимо висновок, що $\lambda^3 = m_2t + m_3$ і, отже,

$$a = \lambda^2(t), \quad b = (-m_2t + m_1 - m_3)x + \lambda^4(t), \quad c = m_2t + m_3, \\ d = -m_2x + \lambda^5(t), \quad \xi_0^0 = -2m_2t + \lambda_0^2 - 2m_3 + m_1.$$

Друга класифікаційна умова набуває вигляду

$$\lambda_0^5 + (3\lambda^3 - \lambda_0^2 - m_1)H + (\lambda^3 + 2\xi_0^0 - 2\lambda_0^2)u_{11}H' = 0.$$

Таким чином, приходимо до наступної системи:

$$(\lambda^5 - \lambda_0^4) - \lambda^2H + 3\lambda^2u_{11}H' = 0, \\ \lambda_0^5 + (3m_2t + 3m_3 - \lambda_0^2 - m_1)H + (m_2t + m_3 + 2\xi_0^0 - 2\lambda_0^2)u_{11}H' = 0, \\ \xi_0^0 = -2m_2t + \lambda_0^2 - 2m_3 + m_1. \quad (3.12)$$

Якщо H — довільна функція, то з (3.12) після розщеплення знаходимо:

$$\lambda^5 = \lambda_0^4, \quad \lambda^2 = 0, \quad \lambda_0^5 = 0, \quad 3m_2t + 3m_3 - \lambda_0^2 - m_1 = 0, \\ -3m_2t + 2m_1 - 3m_3 = 0.$$

Звідси отримуємо, що

$$\lambda^5 = m_4, \quad \lambda^4 = m_4t + m_5, \quad m_2 = 0, \quad 3m_3 - m_1 = 0, \quad 2m_1 - 3m_3 = 0,$$

тому $m_1 = 0$, $m_3 = 0$ і функції a , b , c , d і ξ_0^0 набувають наступного вигляду:

$$a = 0, \quad b = m_4t + m_5, \quad c = 0, \quad d = m_4, \quad \xi_0^0 = 0.$$

Отже, коефіцієнти векторних полів (1.2) мають форму:

$$\xi^0 = m_6, \quad \xi^1 = m_4t + m_5, \quad \eta = m_4.$$

Таким чином, рівняння (3.1) з довільною функцією H у правій частині допускає 3-вимірну алгебру Лі $\mathfrak{g}^0$, породжену векторними полями

$$Q^1 = \partial_t, \quad Q^2 = \partial_x, \quad Q^3 = t\partial_x + \partial_u.$$

Приходимо до наступного твердження.

Теорема 3.2 (див. [2]). $\mathfrak{g}^0 = \langle \partial_t, \partial_x, t\partial_x + \partial_u \rangle$ — ядро лівських алгебр інваріантності рівнянь із класу (3.1).

3.2. Групова класифікація. Нехай знову $\dim \pi_*\mathfrak{g}^H = k$. Оскільки $\dim \pi_*\mathfrak{g}^0 = 1$, то для будь-якого рівняння з класу (3.1) маємо, що $k = 1$, $k = 2$ або $k = 3$. Додатково припускаємо, що t -компонента є квадратичною функцією змінною t . Отже,

$$\pi_*\mathfrak{g}^H = \langle \partial_t \rangle, \quad \pi_*\mathfrak{g}^H = \langle \partial_t, t\partial_t \rangle \quad \text{або} \quad \pi_*\mathfrak{g}^H = \langle \partial_t, t\partial_t, t^2\partial_t \rangle.$$

Нижче розглянуто кожен із цих трьох випадків окремо.

$k = 3$. У цьому випадку

$$\xi^0 = \mu^2 t^2 + \mu^1 t + \mu^0, \quad (3.13)$$

де μ^2 , μ^1 і μ^0 — довільні константи. Порівнюючи з третім рівнянням із (3.12), маємо

$$2\mu^2 t + \mu^1 = -2m_2 t + \lambda_0^2 - 2m_3 + m_1, \quad (3.14)$$

звідки після диференціювання за змінною t отримаємо $\lambda_{00}^2 = 2\mu^2 + 2m_2$, іншими словами,

$$\lambda^2 = (\mu^2 + m_2)t^2 + m_7 t + m_8.$$

Підставляючи щойно наведений вираз у (3.14), одержимо

$$2\mu^2 t + \mu^1 = -2m_2 t + (2\mu^2 + 2m_2)t + m_7 - 2m_3 + m_1,$$

звідки слідує, що $m_7 = \mu^1 + 2m_3 - m_1$, тобто

$$\lambda^2 = (\mu^2 + m_2)t^2 + (\mu^1 + 2m_3 - m_1)t + m_8. \quad (3.15)$$

Після підстановки (3.15) в друге рівняння системи (3.12) отримуємо

$$\begin{aligned} & \lambda_0^5 + ((m_2 - 2\mu^2)t + (m_3 - \mu^1))H \\ & + (-3m_2 t + (2m_1 - 3m_3))u_{11}H' = 0. \end{aligned} \quad (3.16)$$

Після диференціювання двічі за змінною t одержимо

$$\lambda_{000}^5 = 0,$$

що свідчить про те, що функція λ^5 — квадратична, скажімо,

$$\lambda^5 = m_9 t^2 + m_{10} t + m_{11}.$$

Підставимо цей вираз назад у рівняння (3.16), отримаємо

$$\begin{aligned} & 2m_9 t + m_{10} + ((m_2 - 2\mu^2)t + (m_3 - \mu^1))H \\ & + (-3m_2 t + (2m_1 - 3m_3))u_{11}H' = 0. \end{aligned}$$

Розщеплюючи за змінною t , приходимо до системи:

$$\begin{aligned} & 2m_9 + (m_2 - 2\mu^2)H - 3m_2 u_{11}H' = 0, \\ & m_{10} + (m_3 - \mu^1)H + (2m_1 - 3m_3)u_{11}H' = 0. \end{aligned} \quad (3.17)$$

Підставимо тепер функції λ^5 і λ^2 у перше рівняння (3.12):

$$\begin{aligned} & (m_9 t^2 + m_{10} t + m_{11} - \lambda_0^4) \\ & - ((\mu^2 + m_2)t^2 + (\mu^1 + 2m_3 - m_1)t + m_8)H \\ & + 3((\mu^2 + m_2)t^2 + (\mu^1 + 2m_3 - m_1)t + m_8)u_{11}H' = 0. \end{aligned} \quad (3.18)$$

Диференціювання тричі за змінною t показує, що $\lambda_{0000}^4 = 0$, що свідчить про те, що функція λ^4 — кубічна. Отже,

$$\lambda^4 = m_{12}t^3 + m_{13}t^2 + m_{14}t + m_{15}.$$

Підставляючи функцію λ^4 назад у рівняння (3.18), маємо

$$\begin{aligned} & (m_9t^2 + m_{10}t + m_{11} - 3m_{12}t^2 - 2m_{13}t - m_{14}) \\ & - ((\mu^2 + m_2)t^2 + (\mu^1 + 2m_3 - m_1)t + m_8)H \\ & + 3((\mu^2 + m_2)t^2 + (\mu^1 + 2m_3 - m_1)t + m_8)u_{11}H' = 0. \end{aligned}$$

Розщеплюючи за змінною t , одержуємо систему:

$$\begin{aligned} & (m_9 - 3m_{12}) - (\mu^2 + m_2)H + 3(\mu^2 + m_2)u_{11}H' = 0, \\ & (m_{10} - 2m_{13}) - (\mu^1 + 2m_3 - m_1)H + 3(\mu^1 + 2m_3 - m_1)u_{11}H' = 0, \\ & (m_{11} - m_{14}) - m_8H + 3m_8u_{11}H' = 0. \end{aligned} \quad (3.19)$$

Очевидно, що рівняння у системі (3.19) мають загальний вигляд (2.27) із деякими сталими параметрами a , b , c і d . Отже, з точністю до еквівалентності, визначеної в теоремі 3.1, існує тільки три можливості для розв'язків рівняння (2.27), а саме, $e^{u_{11}}$, $\ln(u_{11})$ і u_{11}^p , де $p \neq 0, 1$.

Якщо $H = u_{11}^p$, $p \neq 0, 1$, то із систем (3.17) і (3.19) маємо

$$\begin{aligned} & 2m_9 + (m_2 - 2\mu^2)u_{11}^p - 3m_2pu_{11}^p = 0, \\ & m_{10} + (m_3 - \mu^1)u_{11}^p + (2m_1 - 3m_3)pu_{11}^p = 0, \\ & (m_9 - 3m_{12}) - (\mu^2 + m_2)u_{11}^p + 3(\mu^2 + m_2)pu_{11}^p = 0, \\ & (m_{10} - 2m_{13}) - (\mu^1 + 2m_3 - m_1)u_{11}^p + 3(\mu^1 + 2m_3 - m_1)pu_{11}^p = 0, \\ & (m_{11} - m_{14}) - m_8u_{11}^p + 3m_8pu_{11}^p = 0. \end{aligned} \quad (3.20)$$

При розщепленні цієї системи отримуємо наступні обмеження на сталі:

$$m_9 = 0, \quad m_{10} = 0, \quad m_{12} = 0, \quad m_{13} = 0, \quad m_{11} = m_{14}.$$

Далі, якщо $p \neq \frac{1}{3}$, то маємо ще наступні обмеження:

$$\begin{aligned} & m_2 = 0, \quad \mu^2 = 0, \quad m_8 = 0 \\ & \mu^1 = m_1 - 2m_3, \quad (3 - 3p)m_3 + (2p - 1)m_1 = 0. \end{aligned}$$

За умови $p = \frac{1}{3}$ маємо лише наступні обмеження:

$$\mu^2 = 0, \quad \mu^1 = \frac{2}{3}m_1.$$

Отже, за будь-якого значення $p \neq 0, 1$ (іншими словами, коли функція H не є лінійною функцією свого аргумента) $\mu^2 = 0$, тобто $k \neq 3$ і маємо суперечність.

$k = 2$. У цьому випадку

$$\xi^0 = \mu^1 t + \mu^0, \quad (3.21)$$

де μ^1, μ^0 — довільні константи. Порівнюючи з третім рівнянням із (3.12), маємо

$$\mu^1 = -2m_2 t + \lambda_0^2 - 2m_3 + m_1, \quad (3.22)$$

звідки після диференціювання за змінною t отримаємо

$$\lambda_{00}^2 = 2m_2,$$

іншими словами,

$$\lambda^2 = m_2 t^2 + m_{15} t + m_{16}.$$

Підставляючи щойно наведений вираз у (3.22), одержимо

$$\mu^1 = -2m_2 t + 2m_2 t + m_{15} - 2m_3 + m_1,$$

звідки слідує, що $m_{15} = \mu^1 + 2m_3 - m_1$, тобто

$$\lambda^2 = m_2 t^2 + (\mu^1 + 2m_3 - m_1)t + m_{16}. \quad (3.23)$$

Підстановка (3.23) в друге рівняння системи (3.12) приводить до рівняння

$$\lambda_0^5 + (m_2 t + (m_3 - \mu^1))H + (-3m_2 t + (2m_1 - 3m_3))u_{11}H' = 0. \quad (3.24)$$

Після диференціювання двічі за змінною t отримаємо $\lambda_{000}^5 = 0$, що свідчить про те, що функція λ^5 — квадратична, тобто,

$$\lambda^5 = m_{17} t^2 + m_{18} t + m_{19}.$$

Підставимо цей вираз назад у рівняння (3.24), одержимо

$$\begin{aligned} & 2m_{17} t + m_{18} + (m_2 t + (m_3 - \mu^1))H \\ & + (-3m_2 t + (2m_1 - 3m_3))u_{11}H' = 0. \end{aligned}$$

Розщеплюючи за змінною t , приходимо до системи:

$$\begin{aligned} & 2m_{17} + m_2 H - 3m_2 u_{11} H' = 0, \\ & m_{18} + (m_3 - \mu^1)H + (2m_1 - 3m_3)u_{11}H' = 0. \end{aligned} \quad (3.25)$$

Підставимо тепер функції λ^5 і λ^2 в перше рівняння (3.12):

$$\begin{aligned} & (m_{17} t^2 + m_{18} t + m_{19} - \lambda_0^4) - (m_2 t^2 + (\mu^1 + 2m_3 - m_1)t + m_{16})H \\ & + 3(m_2 t^2 + (\mu^1 + 2m_3 - m_1)t + m_{16})u_{11}H' = 0. \end{aligned} \quad (3.26)$$

Диференціювання тричі за змінною t показує, що $\lambda_{0000}^4 = 0$, що свідчить про те, що функція λ^4 — кубічна. Отже,

$$\lambda^4 = m_{20} t^3 + m_{21} t^2 + m_{22} t + m_{23}.$$

Підставляючи функцію λ^4 назад у рівняння (3.26), маємо

$$\begin{aligned} & (m_{17}t^2 + m_{18}t + m_{19} - 3m_{20}t^2 - 2m_{21}t - m_{22}) \\ & - (m_2t^2 + (\mu^1 + 2m_3 - m_1)t + m_{16})H \\ & + 3(m_2t^2 + (\mu^1 + 2m_3 - m_1)t + m_{16})u_{11}H' = 0. \end{aligned}$$

Розщеплюючи за змінною t , одержуємо таку систему:

$$\begin{aligned} & (m_{17} - 3m_{20}) - m_2H + 3m_2u_{11}H' = 0, \\ & (m_{18} - 2m_{21}) - (\mu^1 + 2m_3 - m_1)H + 3(\mu^1 + 2m_3 - m_1)u_{11}H' = 0, \\ & (m_{19} - m_{22}) - m_{16}H + 3m_{16}u_{11}H' = 0. \end{aligned} \quad (3.27)$$

Бачимо, що всі ці рівняння мають загальний вигляд (2.27) із деякими сталими параметрами a , b , c і d . З точністю до еквівалентності, визначеної в теоремі 3.1, існує тільки три можливості для розв'язків рівняння (2.27), а саме, $e^{u_{11}}$, $\ln(u_{11})$ і u_{11}^p , де $p \neq 0, 1$.

Якщо $H = e^{u_{11}}$, то маємо

$$\xi^0 = \mu^0, \quad \xi^1 = m_{19}t + m_{23}, \quad \eta = m_{19}.$$

Таким чином, у випадку функції $H = e^{u_{11}}$ отримуємо максимальну алгебру лівської інваріантності з теореми 3.2.

Якщо $H = \ln(u_{11})$, то

$$\begin{aligned} \xi^0 &= \mu^1 t + \mu^0, \quad \xi^1 = 2\mu^1 x - \frac{3}{2}\mu^1 t^2 + m_{19}t + m_{23}, \\ \eta &= \mu^1 u - 3\mu^1 t + m_{19}. \end{aligned}$$

За умови $H = \ln(u_{11})$ базис максимальної алгебри лівської інваріантності задається наступними векторними полями:

$$\begin{aligned} Q^1 &= \partial_t, \quad Q^2 = \partial_x, \quad Q^3 = t\partial_x + \partial_u, \\ Q^4 &= t\partial_t + (2x - \frac{3}{2}t^2)\partial_x + (u - 3t)\partial_u. \end{aligned}$$

Якщо $H = u_{11}^p$, $p \neq 0, 1$, то із систем (3.25) і (3.27) отримуємо

$$\begin{aligned} & 2m_{17} + m_2u_{11}^p - 3m_2pu_{11}^p = 0, \\ & m_{18} + (m_3 - \mu^1)u_{11}^p + (2m_1 - 3m_3)pu_{11}^p = 0, \\ & (m_{17} - 3m_{20}) - m_2u_{11}^p + 3m_2pu_{11}^p = 0, \\ & (m_{18} - 2m_{21}) - (\mu^1 + 2m_3 - m_1)u_{11}^p + 3(\mu^1 + 2m_3 - m_1)pu_{11}^p = 0, \\ & (m_{19} - m_{22}) - m_{16}u_{11}^p + 3m_{16}pu_{11}^p = 0. \end{aligned} \quad (3.28)$$

При розщепленні цієї системи за u_{11} отримуємо такі обмеження на сталі:

$$m_{17} = 0, \quad m_{18} = 0, \quad m_{20} = 0, \quad m_{21} = 0, \quad m_{19} = m_{22}.$$

Далі, якщо $p \neq \frac{1}{3}$, то маємо ще наступні обмеження:

$$m_2 = 0, \quad m_{16} = 0, \quad \mu^1 = m_1 - 2m_3, \quad (3 - 3p)m_3 + (2p - 1)m_1 = 0.$$

Останні дві рівності можна переписати таким чином:

$$m_1 = \frac{(3p - 3)m_3}{2p - 1}, \quad \mu^1 = \frac{p + 1}{1 - 2p}m_3.$$

У цьому випадку компоненти векторного поля Q мають наступний вигляд:

$$\xi^0 = \frac{p + 1}{1 - 2p}m_3t + \mu^0, \quad \xi^1 = \frac{2 - p}{1 - 2p}m_3x + m_{19}t + m_{23}, \quad \eta = m_3u + m_{19}.$$

Нижче наведений базис максимальної алгебри лівівської інваріантності для $H = u_{11}^p$, $p \neq 0, \frac{1}{3}, 1$:

$$\begin{aligned} Q^1 &= \partial_t, \quad Q^2 = \partial_x, \quad Q^3 = t\partial_x + \partial_u, \\ Q^4 &= (p + 1)t\partial_t + (2 - p)x\partial_x + (1 - 2p)u\partial_u. \end{aligned}$$

Зауваження 3.1. Якщо $p = -1$, то в цьому випадку проєкція алгебри вищенаведених векторних полів на t -компоненту матиме розмірність 1, але цей випадок включено тут для повноти розгляду степеневі нелінійності.

За умови $p = \frac{1}{3}$ маємо лише наступне обмеження:

$$\mu^1 = \frac{2}{3}m_1.$$

Отже, у випадку $H = u_{11}^{1/3}$ компоненти векторного поля Q такі:

$$\begin{aligned} \xi^0 &= \frac{2}{3}m_1t + \mu^0, \\ \xi^1 &= (m_2t^2 + (2m_3 - \frac{1}{3}m_1)t + m_{16})u \\ &\quad + ((-m_2t + m_1 - m_3)x + m_{19}t + m_{23}), \\ \eta &= (m_2t + m_3)u + (-m_2x + m_{19}). \end{aligned}$$

З точністю до лінійних замін одержуємо наступний базис максимальної алгебри лівівської інваріантності:

$$\begin{aligned} Q^1 &= \partial_t, \quad Q^2 = \partial_x, \quad Q^3 = t\partial_x + \partial_u, \quad Q^4 = 4t\partial_t + 5x\partial_x + u\partial_u, \\ Q^5 &= u\partial_x, \quad Q^6 = (2tu - x)\partial_x + u\partial_u, \quad Q^7 = (tu - x)(t\partial_x + \partial_u). \end{aligned}$$

$k = 1$. У цьому випадку

$$\xi^0 = \mu^0, \tag{3.29}$$

де μ^0 — довільна константа. Порівнюючи з третім рівнянням із (3.12), маємо

$$0 = -2m_2t + \lambda_0^2 - 2m_3 + m_1, \quad (3.30)$$

звідки після диференціювання за змінною t отримаємо $\lambda_{00}^2 = 2m_2$, іншими словами,

$$\lambda^2 = m_2t^2 + m_{23}t + m_{24}.$$

Підставляючи щойно наведений вираз у (3.30), одержимо

$$0 = -2m_2t + 2m_2t + m_{23} - 2m_3 + m_1,$$

звідки слідує, що $m_{23} = 2m_3 - m_1$, тобто

$$\lambda^2 = m_2t^2 + (2m_3 - m_1)t + m_{24}. \quad (3.31)$$

Після підстановки (3.31) у друге рівняння системи (3.12) маємо

$$\lambda_0^5 + (m_2t + m_3)H + (-3m_2t + (2m_1 - 3m_3))u_{11}H' = 0. \quad (3.32)$$

Після диференціювання двічі за змінною t отримаємо $\lambda_{000}^5 = 0$, що свідчить про те, що функція λ^5 — квадратична, тобто

$$\lambda^5 = m_{25}t^2 + m_{26}t + m_{27}.$$

Підставимо цей вираз назад у рівняння (3.32), одержимо

$$2m_{25}t + m_{26} + (m_2t + m_3)H + (-3m_2t + (2m_1 - 3m_3))u_{11}H' = 0.$$

Розщеплюючи за змінною t , приходимо до системи:

$$\begin{aligned} 2m_{25} + m_2H - 3m_2u_{11}H' &= 0, \\ m_{26} + m_3H + (2m_1 - 3m_3)u_{11}H' &= 0. \end{aligned} \quad (3.33)$$

Підставимо тепер функції λ^5 і λ^2 у перше рівняння системи (3.12):

$$\begin{aligned} (m_{25}t^2 + m_{26}t + m_{27} - \lambda_0^4) - (m_2t^2 + (2m_3 - m_1)t + m_{24})H \\ + 3(m_2t^2 + (2m_3 - m_1)t + m_{24})u_{11}H' = 0. \end{aligned} \quad (3.34)$$

Диференціювання тричі за змінною t показує, що $\lambda_{0000}^4 = 0$, що свідчить про те, що функція λ^4 — кубічна. Отже,

$$\lambda^4 = m_{28}t^3 + m_{29}t^2 + m_{30}t + m_{31}.$$

Підставляючи функцію λ^4 назад у рівняння (3.34), маємо

$$\begin{aligned} (m_{25}t^2 + m_{26}t + m_{27} - 3m_{28}t^2 - 2m_{29}t - m_{30}) \\ - (m_2t^2 + (2m_3 - m_1)t + m_{24})H \\ + 3(m_2t^2 + (2m_3 - m_1)t + m_{24})u_{11}H' = 0. \end{aligned}$$

Розщеплюючи за змінною t , одержуємо таку систему:

$$(m_{25} - 3m_{28}) - m_2H + 3m_2u_{11}H' = 0,$$

$$\begin{aligned}(m_{26} - 2m_{29}) - (2m_3 - m_1)H + 3(2m_3 - m_1)u_{11}H' &= 0, \\ (m_{27} - m_{30}) - m_{24}H + 3m_{24}u_{11}H' &= 0.\end{aligned}\quad (3.35)$$

Бачимо, що всі ці рівняння мають загальний вигляд (2.27) із деякими сталими параметрами a, b, c і d . З точністю до еквівалентності, визначеної в теоремі 3.1, існує тільки три можливості для розв'язків рівняння (2.27), а саме, $e^{u_{11}}$, $\ln(u_{11})$ і u_{11}^p , де $p \neq 0, 1$.

Якщо $H = e^{u_{11}}$, то із систем (3.33) і (3.35) одержуємо

$$\xi^0 = \mu^0, \quad \xi^1 = m_{27}t + m_{31}, \quad \eta = m_{27}.$$

Отже, у випадку функції $H = e^{u_{11}}$ отримуємо максимальну алгебру ліівської інваріантності з теореми 3.2.

Якщо $H = \ln(u_{11})$, то із систем (3.33) і (3.35) отримуємо

$$\xi^0 = \mu^0, \quad \xi^1 = m_{27}t + m_{31}, \quad \eta = m_{27}.$$

Таким чином, за умови $H = \ln(u_{11})$ базис максимальної алгебри ліівської інваріантності визначається випадком $k = 2$.

Якщо $H = u_{11}^p$, $p \neq 0, 1$, то із систем (3.33) і (3.35) отримуємо

$$\begin{aligned}2m_{25} + m_2 u_{11}^p - 3m_2 p u_{11}^p &= 0, \\ m_{26} + m_3 u_{11}^p + (2m_1 - 3m_3) p u_{11}^p &= 0, \\ (m_{25} - 3m_{28}) - m_2 u_{11}^p + 3m_2 p u_{11}^p &= 0, \\ (m_{26} - 2m_{29}) - (2m_3 - m_1) u_{11}^p + 3(2m_3 - m_1) p u_{11}^p &= 0, \\ (m_{27} - m_{30}) - m_{24} u_{11}^p + 3m_{24} p u_{11}^p &= 0.\end{aligned}\quad (3.36)$$

Після розщеплення цієї системи за u_{11} отримуємо наступні обмеження на сталі: $m_{25} = 0$, $m_{26} = 0$, $m_{28} = 0$, $m_{29} = 0$, $m_{27} = m_{30}$. Далі, якщо $p \neq \frac{1}{3}$, то з першого й п'ятого рівнянь системи (3.36) маємо ще наступні обмеження: $m_2 = 0$, $m_{24} = 0$. Якщо $p \neq -1$, то з другого й четвертого рівнянь системи (3.36) маємо ще наступні обмеження: $m_1 = 0$, $m_3 = 0$.

Таким чином, при $p \neq \frac{1}{3}, -1$ компоненти векторного поля Q мають наступний вигляд:

$$\xi^0 = \mu^0, \quad \xi^1 = m_{27}t + m_{31}, \quad \eta = m_{27}.$$

Отже, базис максимальної алгебри ліівської інваріантності визначається випадком $k = 2$.

Якщо $p = \frac{1}{3}$, то базис максимальної алгебри ліівської інваріантності також визначається випадком $k = 2$.

Якщо $p = -1$, то $m_1 = 2m_3$, й отримуємо частинний випадок для степеневі нелінійності (див. зауваження 3.1).

Отримані результати підсумовано в наступному твердженні.

Теорема 3.3 (результат групової класифікації, [1]). *Повний список $G^\sim$ -нееквівалентних (максимальних) розширень ліївських симетрій у класі (3.1) вичерпують такі випадки, які наведено в таблиці 3.1.*

ТАБЛИЦЯ 3.1. Результати групової класифікації класу (3.1).

$H(u_{xx})$	Ліївська алгебра інваріантності
$\forall$	$\langle \partial_t, \partial_x, t\partial_x + \partial_u \rangle$
$\ln u_{xx}$	$\langle \partial_t, \partial_x, t\partial_x + \partial_u, t\partial_t + (2x - \frac{3}{2}t^2)\partial_x + (u - 3t)\partial_u \rangle$
u_{xx}	$\langle \partial_t, \partial_x, t\partial_x + \partial_u, 2t\partial_t + x\partial_x - u\partial_u, t^2\partial_t + tx\partial_x + (x - tu)\partial_u \rangle$
$u_{xx}^p, p \neq 0, \frac{1}{3}, 1$	$\langle \partial_t, \partial_x, t\partial_x + \partial_u, (p+1)t\partial_t + (2-p)x\partial_x + (1-2p)u\partial_u \rangle$
$u_{xx}^{1/3}$	$\langle \partial_t, \partial_x, t\partial_x + \partial_u, 4t\partial_t + 5x\partial_x + u\partial_u, u\partial_x, (2tu - x)\partial_x + u\partial_u, (tu - x)(t\partial_x + \partial_u) \rangle$

Третій випадок таблиці відповідає добре відомому рівнянню Бюргерса $u_t + uu_x = u_{xx}$, яке допускає п'ятивимірну алгебру максимальної ліївської інваріантності.

4. ВИСНОВКИ

Вперше задача групової класифікації цих рівнянь була розв'язана у рамках класичного інфінітезимального підходу у роботах Ахатова–Газізова–Ібрагімова та Бойко–Фушича відповідно. Ці доведення були досить громіздкими. Завдяки застосуванню деяких алгебраїчних технік вдалося не лише перевірити та підтвердити достовірність результатів, отриманих раніше в рамках класичного інфінітезимального підходу, але й значно спростити технічні викладки. В обох випадках принциповим кроком було суттєве спрощення доведення із застосуванням алгебраїчного підходу, який полягав в аналізі придатних алгебр ліївської інваріантності. Спочатку був використаний відомий результат, згідно з яким для довільного векторного поля, яке допускається еволюційним рівнянням, його t -компонента залежить лише від змінної t . Після цього був проведений аналіз розмірності проєкції алгебри на цю t -компоненту з використанням класичної теореми Лі про реалізації алгебр Лі векторними полями на прямій.

ЛІТЕРАТУРА

- [1] В. І. Фущич, В. М. Бойко. Галілей-інваріантні рівняння типу Бюргерса та Кортевега–де Фріза високого порядку. *Укр. матем. ж.*, 48(12):1589–1601, 1996. URL: <https://umj.imath.kiev.ua/index.php/umj/article/view/5182>.
- [2] В. М. Бойко, Р. О. Попович. Групова класифікація галілей-інваріантних рівнянь високого порядку. volume 36, pages 45–50. 2001. URL: <https://www.imath.kiev.ua/~boyko/collection2001slava.pdf>.
- [3] В. М. Бойко. Узагальнені оператори Казіміра, сингулярні модулі редукції та симетрії диференціальних рівнянь, 2018. URL: <https://www.imath.kiev.ua/~boyko/BoykoThesis.pdf>.
- [4] О. В. Локазіук. Реалізації алгебр Лі на прямій та групова класифікація диференціальних рівнянь, 2022. URL: https://events.imath.kiev.ua/event/1353/attachments/104/296/Lokaziuk_OV_thesis_PhD_2022.pdf.
- [5] I. Sh. Akhatov, R. K. Gazizov, N. Kh. Ibragimov. Nonlocal symmetries. A heuristic approach. *J. Soviet Math.*, 5(1):1401–1450, 1991.
- [6] A. Bihlo, R. O. Popovych. Group classification of linear evolution equations. *J. Math. Anal. Appl.*, 448(2):982–1005, 2017. arXiv:1605.09251, doi:10.1016/j.jmaa.2016.11.020.
- [7] G. W. Bluman, S. Kumei. *Symmetries and differential equations*, volume 81 of *Applied Mathematical Sciences*. Springer, New York, 1989. doi:10.1007/978-1-4757-4307-4.
- [8] V. M. Boyko. On new generalizations of the Burgers and Korteweg–de Vries equations. In *Symmetry in nonlinear mathematical physics, Vol. 1, 2 (Kyiv, 1997)*, pages 122–129. Natl. Acad. Sci. Ukraine, Inst. Math., Kyiv, 1997.
- [9] V. M. Boyko, O. V. Lokaziuk, R. O. Popovych. Realizations of Lie algebras on the line and the new group classification of $(1 + 1)$ -dimensional generalized nonlinear Klein-Gordon equations. *Anal. Math. Phys.*, 11(3):article no. 127, 38 pp., 2021. arXiv:2008.05460, doi:10.1007/s13324-021-00550-z.
- [10] V. M. Boyko, O. V. Lokaziuk, R. O. Popovych. Admissible transformations and Lie symmetries of linear systems of second-order ordinary differential equations. *J. Math. Anal. Appl.*, 539(2):article no. 128543, 51 pp., 2024. arXiv:2024.12854, doi:10.1016/j.jmaa.2024.128543.
- [11] V. M. Boyko, R. O. Popovych, N. M. Shapoval. Equivalence groupoids of classes of linear ordinary differential equations and their group classification. *J. Phys. Conf. Ser.*, 621:Paper No. 012001, 17, 2015. URL: <https://doi.org/10.1088/1742-6596/621/1/012002>, doi:10.1016/j.jmaa.2024.128543.
- [12] W. I. Fushchich, A. G. Nikitin. *Symmetries of equations of quantum mechanics*. Allerton Press, Inc., New York, 1994.
- [13] W. I. Fushchich, W. M. Shtelen, N. I. Serov. *Symmetry analysis and exact solutions of equations of nonlinear mathematical physics*, volume 246 of *Mathematics and its Applications*. Kluwer Academic Publishers Group, Dordrecht, 1993. doi:10.1007/978-94-017-3198-0.
- [14] N. H. Ibragimov. *A practical course in differential equations and mathematical modelling. Classical and new methods, nonlinear mathematical models, symmetry and invariance principles*. Higher Education Press, Beijing, 2010.
- [15] J. G. Kingston. On point transformations of evolution equations. *J. Phys. A*, 24(14):L769–L774, 1991. doi:10.1088/0305-4470/24/14/003.

- [16] S. D. Koval, R. O. Popovych. Point and generalized symmetries of the heat equation revisited. *J. Math. Anal. Appl.*, 527(2):article no. 127430, 21 pp., 2023. arXiv:2023.12743, doi:10.1016/j.jmaa.2023.127430.
- [17] C. Kurujyibwami, P. Basarab-Horwath, R. O. Popovych. Algebraic method for group classification of $(1 + 1)$ -dimensional linear Schrödinger equations. *Acta Appl. Math.*, 157:171–203, 2018. arXiv:1607.04118, doi:10.1007/s10440-018-0169-y.
- [18] C. Kurujyibwami, R. O. Popovych. Equivalence groupoids and group classification of multidimensional nonlinear Schrödinger equations. *J. Math. Anal. Appl.*, 491(1):article no. 124271, 35 pp., 2020. arXiv:2020.12427, doi:10.1016/j.jmaa.2020.124271.
- [19] S. Lie. Theorie der Transformationsgruppen I. *Math. Ann.*, 16(4):441–528, 1880. doi:10.1007/BF01446218.
- [20] B. A. Magadeev. Group classification of nonlinear evolution equations. *St. Petersburg Math. J.*, 5(2):345–359, 1994.
- [21] P. J. Olver. *Applications of Lie groups to differential equations*, volume 107 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer, New York, 1993. doi:10.1007/978-1-4612-4350-2.
- [22] P. J. Olver. *Equivalence, invariants, and symmetry*. Cambridge University Press, Cambridge, 1995. doi:10.1017/CBO9780511609565.
- [23] S. Opanasenko, A. Bihlo, R. O. Popovych. Group analysis of general Burgers-Korteweg–de Vries equations. *J. Math. Phys.*, 58(8):article no. 081511, 37 pp., 2017. arXiv:1703.06932, doi:10.1063/1.4997574.
- [24] V. V. Sokolov. Symmetries of evolution equations. *Russian Math. Surveys*, 43(5):165–204, 1988. doi:10.1070/RM1988v043n05ABEH001927.
- [25] R. Zhdanov. On relation between potential and contact symmetries of evolution equations. *J. Math. Phys.*, 50(5):article no. 053522, 9 pp., 2009. doi:10.1063/1.3138147.

C. Т. Гупака

DEPARTMENT OF MATHEMATICAL AND STATISTICAL SCIENCES, UNIVERSITY OF ALBERTA,
EDMONTON, ALBERTA, T6G 2G1 CANADA

Email: sophiahuraka@gmail.com

ORCID: 0009-0002-8655-0478

О. В. Локазюк

ІНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ НАН УКРАЇНИ, М. КИЇВ

Email: sasha.lokazuik@gmail.com

ORCID: 0000-0001-9663-251X