

Кінетичні кластерні розклади твірних операторів розв'язків ієрархій еволюційних рівнянь

І. В. Гап'як

Abstract. The article provides an overview of the method of kinetic cluster expansions for generating operators of solutions to the hierarchies of evolutionary equations. The developed method allows for a rigorous justification of the derivation of nonlinear kinetic equations from the microscopic dynamics of a system of many particles.

Анотація. В статті подано огляд методу кінетичних кластерів розкладів для твірних операторів розв'язків ієрархій еволюційних рівнянь. Розроблений метод дозволяє строго обґрунтовувати вивід нелінійних кінетичних рівнянь з мікроскопічної динаміки систем багатьох частинок.

1. ПЕРЕДНЄ СЛОВО

Однією з фундаментальних задач сучасної математичної фізики є обґрунтування кінетичних рівнянь, тобто, замкнених рівнянь відносно одночастинкової функції розподілу. Відомі історичні приклади кінетичних рівнянь – рівняння Больцмана [6] та рівняння Енскога [9], які описують процеси зіткнення частинок у розріджених газах. Звичайний підхід до виведення рівняння Больцмана полягає в побудові асимптотичної границі Больцмана–Греда для розв'язку задачі Коші для ієрархії рівнянь ББГКІ (Боголюбов–Борн–Грін–Кірквуд–Івон), який представляється розкладами в ряд теорії збурення [7, 22].

Відмітимо, що еволюція як скінченної, так і нескінченної кількості частинок визначається функціями розподілу (станами), які описуються задачею Коші для ієрархії рівнянь ББГКІ, яка для скінченної кількості частинок є еквівалентною до задачі Коші рівняння Ліувілля для функції розподілу ймовірності [7, 22]. У певних ситуаціях [7] колективна поведінка багаточастинкових систем може бути описана кінетичними рівняннями. Звичайна філософія опису кінетичної еволюції полягає в

2020 Mathematics Subject Classification: 35C10; 35Q20; 82C05; 82D05; 70F45

Ключові слова: ієрархія еволюційних рівнянь; кінетичне рівняння; кластерні розклади; кумулянт; напівгрупа операторів; частинки із зіткненнями

DOI: <https://doi.org/10.3842/trim.v21n1.538>

наступному: якщо початковий стан задається одночастинковою редукованою функцією розподілу, тоді еволюцію стану можна ефективно описати за допомогою одночастинкової редукованої функції розподілу, яка визначається нелінійним кінетичним рівнянням. В даній роботі на основі розробленого методу кінетичних кластерних розкладів для непертурбативного розв'язку ієрархій еволюційних рівнянь ББГКІ представлено огляд робіт, які присвячені строгому виводу узагальненого кінетичного рівняння Енскоґа та редукованих функціоналів.

Альтернативний підхід до опису еволюції станів ґрунтується на послідовності функцій, які визначаються як кумулянти редукованих функцій розподілу. Ці функції інтерпретуються як редуковані кореляційні функції, які підпорядковуються відповідній ієрархії нелінійних еволюційних рівнянь [16, 17]. Для початкових станів редукованих кореляційних функцій, які задовольняють умову хаосу використано метод кінетичних кластерних розкладів і описано еволюцію редукованих кореляцій за допомогою кінетичного рівняння, а саме, кінетичного рівняння Енскоґа [13].

Також для функцій, які описують кореляції в системі скінченного числа пружних куль і визначаються задачею Коші для ієрархії еволюційних рівнянь Ліувілля [16], використовуючи метод кінетичних кластерних розкладів встановлено залежність між s частинковою ($s \geq 0$) кореляційною функцією та одночастинковими кореляційними функціями в довільний момент часу.

2. КУМУЛЯНТИ ГРУП ОПЕРАТОРІВ

У цьому розділі буде представлено непертурбативний розв'язок задачі Коші для ієрархії рівнянь ББГКІ для системи пружних куль. Такий розв'язок визначається через кумулянти груп операторів рівняння Ліувілля.

Розглянемо систему нефіксованого, тобто довільного, але скінченного числа частинок одиничної маси (формалізм нерівноважного великого канонічного ансамблю [1, 7]) взаємодіючих як пружні кулі з діаметром $\sigma > 0$. Кожна частинка характеризується фазовою координатою $(q_i, p_i) \equiv x_i \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$, $i \geq 1$. Для конфігурацій такої системи справедливі наступні нерівності: $|q_i - q_j| \geq \sigma$, $i \neq j \geq 1$, тобто множина $W_s \equiv \{(q_1, \dots, q_s) \in \mathbb{R}^{3s} \mid |q_i - q_j| < \sigma \text{ хоча б для однієї пари } (i, j) : i \neq j \in (1, \dots, s)\}$ є множиною заборонених конфігурацій.

Нехай стани системи пружних куль належать простору інтегрованих функцій $L_s^1 \equiv L^1(\mathbb{R}^{3s} \times (\mathbb{R}^{3s} \setminus W_s))$, $s \geq 1$, які є симетричними відносно перестановки аргументів $x_1, \dots, x_s$, дорівнюють нулю на множині

заборонених конфігурацій $\mathbb{W}_s$ з нормою:

$$\|f_s\|_{L^1(\mathbb{R}^{3s} \times \mathbb{R}^{3s})} = \int dx_1 \dots dx_s |f_s(x_1, \dots, x_s)|.$$

Позначимо через $L_{s,0}^1 \subset L_s^1$ підпростір неперервно диференційованих функцій з компактним носієм.

Еволюція всіх можливих станів описується послідовністю маргінальних (s -частинкових) функцій розподілу $F_s(t, x_1, \dots, x_s)$, $s \geq 1$, що задовольняють задачу Коші для ієрархії рівнянь ББГКІ (ланцюжка рівнянь Боголюбова) [7]

$$\frac{\partial}{\partial t} F_s(t) = \mathcal{L}_s F_s(t) + \sum_{i=1}^s \int_{\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3} dx_{s+1} \mathcal{L}_{\text{int}}(i, s+1) F_{s+1}(t), \quad (2.1)$$

$$F_s(t)|_{t=0} = F_s^0, \quad s \geq 1. \quad (2.2)$$

Якщо $t > 0$, в ієрархії еволюційних рівнянь (2.1) оператор Ліувілля $\mathcal{L}_s$ визначається через дужку Пуассона невзаємодіючих частинок з граничною умовою на $\partial\mathbb{W}_s$ [7]:

$$\mathcal{L}_s F_s(t) := - \sum_{i=1}^s \langle p_i, \frac{\partial}{\partial q_i} \rangle_{|\partial\mathbb{W}_s} F_s(t, x_1, \dots, x_s), \quad (2.3)$$

де через $\langle \cdot, \cdot \rangle$ позначено скалярний добуток. Гранична умова на $\partial\mathbb{W}_s$ визначається за таким правилом: якщо $t \geq 0$, то при $|q_i - q_j| = \sigma$ потрібно у випадку $\langle (q_i - q_j), (p_i - p_j) \rangle \leq 0$ в дужці Пуассона перейти від значень імпульсів частинок (p_i, p_j) до значень імпульсів до зіткнення (p_i^*, p_j^*) згідно з співвідношеннями

$$\begin{aligned} p_i^* &:= p_i - \eta \langle \eta, (p_i - p_j) \rangle, \\ p_j^* &:= p_j + \eta \langle \eta, (p_i - p_j) \rangle. \end{aligned} \quad (2.4)$$

При $t < 0$ така заміна відповідає випадку $\langle (q_i - q_j), (p_i - p_j) \rangle > 0$ [7].

Оператор $\mathcal{L}_{\text{int}}(i, s+1)$ визначається співвідношенням:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^s \int_{\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3} dx_{s+1} \mathcal{L}_{\text{int}}(i, s+1) F_{s+1}(t) := \\ \sigma^2 \sum_{i=1}^s \int_{\mathbb{R}^3 \times \mathbb{S}_+^2} dp_{s+1} d\eta \langle \eta, (p_i - p_{s+1}) \rangle (F_{s+1}(t, x_1, \dots, q_i, p_i^*, \dots \\ \dots, x_s, q_i - \sigma\eta, p_{s+1}^*) - F_{s+1}(t, x_1, \dots, x_s, q_i + \sigma\eta, p_{s+1})), \end{aligned} \quad (2.5)$$

де $\mathbb{S}_+^2 := \{\eta \in \mathbb{R}^3 \mid |\eta| = 1, \langle \eta, (p_i - p_{s+1}) \rangle > 0\}$ і імпульси p_i^*, p_{s+1}^* визначаються з формул (2.4).

Якщо $t < 0$, генератор ієрархії рівнянь ББГКІ визначається співвідношенням:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^s \int_{\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3} dx_{s+1} \mathcal{L}_{\text{int}}(i, s+1) F_{s+1}(t) := \\ \sigma^2 \sum_{i=1}^s \int_{\mathbb{R}^3 \times \mathbb{S}_+^2} dp_{s+1} d\eta \langle \eta, (p_i - p_{s+1}) \rangle (F_{s+1}(t, x_1, \dots, x_s, \\ q_i - \sigma\eta, p_{s+1}) - F_{s+1}(t, x_1, \dots, q_i, p_i^*, \dots, x_s, q_i + \sigma\eta, p_{s+1}^*)), \end{aligned} \quad (2.6)$$

Надалі будемо розглядати початковий стан частинок (2.2), який задовольняє умову хаосу [7], а саме, випадок стану статистично незалежних частинок

$$F_s(t)|_{t=0} = F_s^{(c)}(x_1, \dots, x_s) \equiv \prod_{i=1}^s F_1^0(x_i) \mathcal{X}_{\mathbb{R}^{3s} \setminus \mathbb{W}_s}, \quad s \geq 1, \quad (2.7)$$

де $\mathcal{X}_{\mathbb{R}^{3s} \setminus \mathbb{W}_s} \equiv \mathcal{X}_s(q_1, \dots, q_s)$ – функція Хевісайда дозволених конфігурацій s пружних куль. Зауважимо, що початковий стан (2.7) є характерним для кінетичного опису багаточастинкової системи, оскільки в цьому випадку всі можливі стани характеризуються за допомогою одночастинкової редукованої функції розподілу.

У просторі $L^1(\mathbb{R}^{3n} \times \mathbb{R}^{3n})$ визначена така група сильно неперервних операторів

$$\begin{aligned} (S_s(-t)f_s)(x_1, \dots, x_s) &\equiv S_s(-t, 1, \dots, s)f_s(x_1, \dots, x_s) := \\ &\begin{cases} f_s(X_1(-t, x_1, \dots, x_s), \dots, X_s(-t, x_1, \dots, x_s)), & (x_1, \dots, x_s) \in (\mathbb{R}^{3s} \times (\mathbb{R}^{3s} \setminus \mathbb{W}_s)), \\ 0, & (q_1, \dots, q_s) \in \mathbb{W}_s, \end{cases} \end{aligned} \quad (2.8)$$

де $X_i(-t)$ – фазова траєкторія i -ї частинки, яка побудована нижче. Зауважимо, що фазові траєкторії системи пружних куль визначаються майже скрізь на фазовому просторі $\mathbb{R}^{3s} \times (\mathbb{R}^{3s} \setminus \mathbb{W}_s)$ крім множини $\mathbb{M}_s^0$ нульової міри Лебега [7]. Множина $\mathbb{M}_s^0$ складається із точок фазового простору, які визначають такі початкові дані, що під час еволюції породжують багатократні зіткнення, тобто зіткнення більше ніж двох частинок, більше ніж одне двохчастинкове зіткнення в деякий момент часу і на скінченному інтервалі часу відбувається нескінченне число зіткнень.

Якщо початковий стан (2.7) $F_1^0 \in L^1(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3)$ визначається одночастинковою функцією розподілу, тоді непертурбативний розв'язок початкової задачі ієрархії рівнянь ББГКІ (2.1), (2.7) зображується послідовністю $F(t) = (1, F_1(t), \dots, F_s(t), \dots)$ редукованих (s -частинкових)

функцій розподілу [18, 20]

$$F_s(t, x_1, \dots, x_s) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \int_{(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3)^n} dx_{s+1} \dots dx_{s+n} \mathfrak{A}_{1+n}(-t, \quad (2.9)$$

$$\{1, \dots, s\}, s+1, \dots, s+n) \prod_{i=1}^{s+n} F_1^0(x_i) \mathcal{X}_{\mathbb{R}^3(s+n) \setminus \mathbb{W}_{s+n}}, \quad s \geq 1,$$

де твірний оператор $\mathfrak{A}_{1+n}(-t) \in (n+1)$ -го порядку кумулянт груп операторів (2.8), який визначається таким розкладом:

$$\mathfrak{A}_{1+n}(-t, \{1, \dots, s\}, s+1, \dots, s+n) = \quad (2.10)$$

$$\sum_{\mathbf{P}: (\{1, \dots, s\}, s+1, \dots, s+n) = \bigcup_i X_i} (-1)^{|\mathbf{P}|-1} (|\mathbf{P}| - 1)! \prod_{X_i \subset \mathbf{P}} S_{|\theta(X_i)|}(-t, \theta(X_i)),$$

і використано наступні позначення: $\{1, \dots, s\}$ є множина, яка складається із одного елемента $(1, \dots, s)$, тобто $|\{1, \dots, s+1\}| = 1$, $\sum_{\mathbf{P}}$ – сума по всіх можливих розбиттях $\mathbf{P}$ множини $(\{1, \dots, s\}, s+1, \dots, s+n)$ на $|\mathbf{P}|$ непорожніх підмножин $X_i \in (\{1, \dots, s\}, s+1, \dots, s+n)$, які взаємно не перетинаються, відображення θ є відображення декластиризації, яке визначається згідно формули: $\theta(\{1, \dots, s\}) = 1, \dots, s$. Найпростіші приклади кумулянтів (2.10) визначаються наступним чином:

$$\begin{aligned} \mathfrak{A}_1(-t, 1, \dots, s) &= S_s(-t, 1, \dots, s), \\ \mathfrak{A}_2(-t, 1, \dots, s, s+1) &= S_{s+1}(-t, 1, \dots, s, s+1) - \\ &\quad S_s(-t, 1, \dots, s) S_1(-t, s+1), \\ \mathfrak{A}_3(-t, \{1, \dots, s\}, s+1, s+2) &= S_{s+2}(-t, 1, \dots, s+2) - \\ &\quad - S_{s+1}(-t, 1, \dots, s+1) S_1(-t, s+2) - S_{s+1}(-t, 1, \dots, s, s+2) \times \\ &\quad S_1(-t, s+1) - S_s(-t, 1, \dots, s) S_2(-t, s+1, s+2) + \\ &\quad 2! S_s(-t, 1, \dots, s) S_1(-t, s+1) S_1(-t, s+2). \end{aligned}$$

Для кумулянтів (2.10) груп операторів (2.8) справедлива оцінка

$$\int_{(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3)^{s+n}} dx_1 \dots dx_{s+n} |(\mathfrak{A}_{1+n}(-t, \{1, \dots, s\}, s+1, \dots, s+n) f_{s+n})$$

$$(x_1, \dots, x_{s+n})| \leq n! e^{n+2} \|f_{s+n}\|_{L_{s+n}^1}. \quad (2.11)$$

Дійсно, дана оцінка випливає із нерівностей

$$\int_{(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3)^{s+n}} dx_1 \dots dx_{s+n} |(\mathfrak{A}_{1+n}(-t, \{1, \dots, s\}, s+1, \dots, s+n)$$

$$f_{s+n})(x_1, \dots, x_{s+n})| \leq \sum_{\mathbf{P}: (\{1, \dots, s\}, s+1, \dots, s+n) = \bigcup_i X_i} (|\mathbf{P}| - 1)! \|f_{s+n}\|_{L_{s+n}^1} =$$

$$\sum_{k=1}^{n+1} s(n+1, k)(k-1)! \|f_{s+n}\|_{L_{s+n}^1},$$

де $s(n+1, k)$ – числа Стірлінга другого роду для яких мають місце такі нерівності:

$$\sum_{k=1}^{n+1} s(n+1, k)(k-1)! = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k} \sum_{\substack{r_1, \dots, r_k \geq 1 \\ r_1 + \dots + r_k = n+1}} \frac{(n+1)!}{r_1! \dots r_k!} \leq \sum_{k=1}^{n+1} k^n \leq n! e^{n+2}.$$

Враховуючи оцінку (2.11), ряд (2.9) для довільних $t \in \mathbb{R}$ збігається по нормі простору L_s^1 за умови що: $\|F_1^0\|_{L^1(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3)} < e^{-1}$, яка є умовою на середнє число частинок.

Зауважимо, що непертурбативний розв'язок (2.9) ієрархії рівнянь ББГ-КІ (2.1) перетворюється до форми пертурбативного (ітераційного) ряду [7] як результат застосування аналогів рівнянь Дюамеля [4] до кумулянтів груп операторів (2.10).

Якщо початкові дані $F_1^0 \in L_0^1(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3)$, то послідовність функцій (2.9) є сильним розв'язком початкової задачі ієрархії рівнянь ББГКІ (2.1) і (2.7), і для довільних початкових даних $F_1^0 \in L^1(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3)$ це є слабкий розв'язок [7].

3. МЕТОД КІНЕТИЧНИХ КЛАСТЕРНИХ РОЗКЛАДІВ

В даному розділі сформулюємо перетворення для кумулянтів (2.10) груп операторів (2.8), які дозволяли б розклади редукованих функцій розподілу (2.9) при $s \geq 2$ виразити в термінах розкладів по одночастинковій функції розподілу. Відмітимо, що вперше поняття кластерних розкладів було запропоновано в роботі [8].

Для того, щоб переформулювати задачу Коші (2.1), (2.7) як нову задачу Коші для одночастинкової функції розподілу та явно визначених функціоналів відносно такої функції, введемо наступні кластерні розклади кумулянтів (2.10) груп операторів (2.8) [13]

$$\begin{aligned} \mathfrak{A}_{1+n}(-t, \{1, \dots, s\}, s+1, \dots, s+n) \mathfrak{I}_{s+n}(1, \dots, s+n) = & \quad (3.1) \\ \sum_{k_1=0}^n \frac{n!}{(n-k_1)! k_1!} \mathfrak{A}_{1+n-k_1}(t, \{1, \dots, s\}, s+1, \dots, s+n-k_1) \times \\ \sum_{k_2=0}^{k_1} \frac{k_1!}{k_2! (k_1-k_2)!} \cdots \sum_{k_{n-k_1+s}=0}^{k_{n-k_1+s-1}} \frac{k_{n-k_1+s-1}!}{k_{n-k_1+s}! (k_{n-k_1+s-1} - k_{n-k_1+s})!} \times \\ \prod_{i=1}^{s+n-k_1} \mathfrak{A}_{1+k_{n-k_1+s+1-i}-k_{n-k_1+s+2-i}}(-t, i, s+n-k_1+1+ \end{aligned}$$

$$+k_{s+n-k_1+2-i}, \dots, s+n-k_1+k_{s+n-k_1+1-i}) \times \\ \mathfrak{I}_{1+k_n-k_1+s+1-i-k_n-k_1+s+2-i}(i, s+n-k_1+1+k_{s+n-k_1+2-i}, \dots \\ \dots, s+n-k_1+k_{s+n-k_1+1-i}), \quad n \geq 0.$$

В формулі (3.1) введено позначення: $k_{s+1} \equiv 0$, а оператор $\mathfrak{I}_{s+n}$ визначається через формулу

$$\mathfrak{I}_{s+n}(1, \dots, s+n)f_{s+n} := \mathcal{X}_{\mathbb{R}^{3(s+n)} \setminus \mathbb{W}_{s+n}} f_{s+n}, \quad (3.2)$$

де $\mathcal{X}_{\mathbb{R}^{3(s+n)} \setminus \mathbb{W}_{s+n}}$ – функція Хевісайда дозволених конфігурацій $s+n$ пружних куль. У випадку початкових станів (2.7), що включають в собі кореляції такого типу, кластерні розклади (3.1) дозволяють врахувати початкові кореляції в кінетичному рівнянні. Розклади (3.1) будемо називати кінетичними кластерними розкладами для кумулянтів (2.10) груп операторів (2.9).

Щоб краще зрозуміти структуру рекурсивних співвідношень (3.1) наведемо кілька прикладів цих співвідношень. Але для цього спочатку визначимо нові еволюційні оператори, а саме кумулянти розсієння, які визначаються згідно формули

$$\hat{\mathfrak{A}}_{1+n}(t, \{1, \dots, s\}, s+1, \dots, s+n) := \quad (3.3) \\ \mathfrak{A}_{1+n}(-t, \{1, \dots, s\}, s+1, \dots, s+n) \mathfrak{I}_{s+n}(X) \prod_{i=1}^{s+n} \mathfrak{A}_1(t, i).$$

Тепер наведемо приклади рекурсивних співвідношень (3.1) найнижчих порядків в термінах кумулянтів розсієння (3.3). Поділявши лівою і правою частинами рівності (3.1) на еволюційний оператор $\prod_{i=1}^{s+n} \mathfrak{A}_1(t, i)$, отримаємо

$$\begin{aligned} \hat{\mathfrak{A}}_1(t, \{1, \dots, s\}) &= \mathfrak{V}_1(t, \{1, \dots, s\}), \\ \hat{\mathfrak{A}}_2(t, \{1, \dots, s\}, s+1) &= \mathfrak{V}_2(t, \{1, \dots, s\}, s+1) + \\ &\quad \mathfrak{V}_1(t, \{1, \dots, s\}) \sum_{i_1=1}^s \hat{\mathfrak{A}}_2(t, i_1, s+1), \\ \hat{\mathfrak{A}}_3(t, \{1, \dots, s\}, s+1, s+2) &= \mathfrak{V}_3(t, \{1, \dots, s\}, s+1, s+2) + \\ &+ 2! \mathfrak{V}_2(t, \{1, \dots, s\}, s+1) \sum_{i_1=1}^{s+1} \hat{\mathfrak{A}}_2(t, i_1, s+2) + \mathfrak{V}_1(t, \{1, \dots, s\}) \times \\ &\times \left(\sum_{i_1=1}^s \hat{\mathfrak{A}}_3(t, i_1, s+1, s+2) + 2! \sum_{1=i_1 < i_2}^s \hat{\mathfrak{A}}_2(t, i_1, s+1) \hat{\mathfrak{A}}_2(t, i_2, s+2) \right), \end{aligned}$$

де $\hat{\mathfrak{A}}_{1+n}(t)$ — $(1+n)$ -го порядку ($n = 0, 1, 2$) кумулянт розсіяння (3.3). Легко перевірити, що розв'язки цих співвідношень задаються наступними розкладами:

$$\begin{aligned} \mathfrak{V}_1(t, \{1, \dots, s\}) &= \hat{\mathfrak{A}}_1(t, \{1, \dots, s\}) = S_s(-t, 1, \dots, s) \mathfrak{J}_s(Y) \prod_{i=1}^s S_1(t, i), \\ \mathfrak{V}_2(t, \{1, \dots, s\}, s+1) &= \hat{\mathfrak{A}}_2(t, \{1, \dots, s\}, s+1) - \\ &\quad \hat{\mathfrak{A}}_1(t, \{1, \dots, s\}) \sum_{i_1=1}^s \hat{\mathfrak{A}}_2(t, i_1, s+1), \\ \mathfrak{V}_3(t, \{1, \dots, s\}, s+1, s+2) &= \hat{\mathfrak{A}}_3(t, \{1, \dots, s\}, s+1, s+2) - \\ &\quad - 2! \hat{\mathfrak{A}}_2(t, \{1, \dots, s\}, s+1) \sum_{i_1=1}^{s+1} \hat{\mathfrak{A}}_2(t, i_1, s+2) - \hat{\mathfrak{A}}_1(t, \{1, \dots, s\}) \times \\ &\quad \left(\sum_{i_1=1}^s \hat{\mathfrak{A}}_3(t, i_1, s+1, s+2) - 2! \sum_{i_1=1}^s \sum_{i_2=1}^{s+1} \hat{\mathfrak{A}}_2(t, i_1, s+1) \times \right. \\ &\quad \left. \hat{\mathfrak{A}}_2(t, i_2, s+2) + 2! \sum_{1 \leq i_1 < i_2}^s \hat{\mathfrak{A}}_2(t, i_1, s+1) \hat{\mathfrak{A}}_2(t, i_2, s+2) \right). \end{aligned}$$

У загальному випадку розв'язки рекурсивних співвідношень (3.1), тобто $(1+n)$ -го порядку ($n \geq 0$) оператори $\mathfrak{V}_{1+n}(t)$, визначаються через розклади ($s \geq 2, n \geq 0$)

$$\begin{aligned} \mathfrak{V}_{1+n}(t, \{1, \dots, s\}, s+1, \dots, s+n) &= n! \sum_{k=0}^n (-1)^k \sum_{m_1=1}^n \dots \quad (3.4) \\ \dots \sum_{m_k=1}^{n-m_1-\dots-m_{k-1}} &\frac{1}{(n-m_1-\dots-m_k)!} \hat{\mathfrak{A}}_{1+n-m_1-\dots-m_k}(t, \{1, \dots, s\}, \\ s+1, \dots, s+n-m_1-\dots-m_k) &\prod_{j=1}^k \sum_{k_2^j=0}^{m_j} \dots \sum_{k_{n-m_1-\dots-m_j+s}^j=0}^{k_{n-m_1-\dots-m_j+s-1}^j} \\ &\prod_{i_j=1}^{s+n-m_1-\dots-m_j} \frac{1}{(k_{n-m_1-\dots-m_j+s+1-i_j}^j - k_{n-m_1-\dots-m_j+s+2-i_j}^j)!} \times \\ &\times \hat{\mathfrak{A}}_{1+k_{n-m_1-\dots-m_j+s+1-i_j}^j - k_{n-m_1-\dots-m_j+s+2-i_j}^j}^j(t, i_j, \\ &\quad +s+n-m_1-\dots-m_j+1+k_{s+n-m_1-\dots-m_j+2-i_j}^j, \dots \\ &\quad \dots, s+n-m_1-\dots-m_j+k_{s+n-m_1-\dots-m_j+1-i_j}^j). \end{aligned}$$

де мається на увазі, що $k_1^j \equiv m_j$, $k_{n-m_1-\dots-m_j+s+1}^j \equiv 0$. Цей факт перевіряється як результат підстановки виразу (3.4) у рекурсивні співвідношення (3.1). Слід відзначити, що кореляції, які породжуються під час динаміки пружних куль та початкові кореляції, які пов'язані із забороненими конфігураціями повністю визначаються через еволюційні оператори (3.4).

Відмітимо деякі характерні властивості еволюційних операторів (3.4). У сенсі слабкої збіжності в просторі $L^1(\mathbb{R}^{3s} \times \mathbb{R}^{3s} \setminus \mathbb{W}_s)$ інфінітезимальний генератор першого порядку еволюційного оператора (3.4) визначається через оператор

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} (\mathfrak{V}_1(t, \{1, \dots, s\}) - I) f_s = \sum_{i < j=1}^s \mathcal{L}_{\text{int}}(i, j) f_s,$$

де оператор $\mathcal{L}_{\text{int}}^*(i, j)$ визначається формулою (2.5).

У загальному випадку, тобто при $n \geq 1$, у такому ж сенсі, як і для еволюційного оператора першого порядку (3.4) має місце рівність:

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \mathfrak{V}_{1+n}(t, \{1, \dots, s\}, s+1, \dots, s+n) f_{s+n} = 0.$$

У випадку системи невзаємодіючих частинок для кумулянтів розсіяння (3.3) мають місце такі рівності:

$$\hat{\mathfrak{A}}_{1+n}(t, \{1, \dots, s\}, s+1, \dots, s+n) = \prod_{i=1}^s S_1(-t, i) \mathfrak{I}_s(1, \dots, s) \prod_{j=1}^s S_1(t, j) \delta_{n,0},$$

де $n \geq 0$, $\delta_{n,0}$ – символ Кронекера, тоді ми отримаємо

$$\mathfrak{V}_{1+n}(t, \{1, \dots, s\}, s+1, \dots, s+n) = \prod_{i=1}^s S_1(-t, i) \mathfrak{I}_s(1, \dots, s) \prod_{j=1}^s S_1(t, j) \delta_{n,0}.$$

Подібним чином як у початковий час $t = 0$ справедлива така рівність: $\mathfrak{V}_{1+n}(0, \{1, \dots, s\}, s+1, \dots, s+n) = \mathfrak{I}_s(1, \dots, s) \delta_{n,0}$, $n \geq 0$.

4. РЕДУКОВАНІ ФУНКЦІОНАЛИ СТАНУ ЧАСТИНОК

Як було зазначено вище еволюція системи нефіксованого числа частинок, які взаємодіють як пружні кулі описується послідовністю редукованих функцій розподілу $F(t) = (1, F_1(t, x_1), \dots, F_s(t, x_1, \dots, x_s), \dots)$, де $F_s(t)$ визначаються задачею Коші для ієрархії рівнянь ББГКІ (2.1), (2.2). Для початкових даних (2.7) застосовуючи кластерні розклади

(3.1) до кумулянтів (2.10) груп операторів (2.8) у редукованих функціях розподілу, ми отримуємо, що еволюція станів повністю визначається послідовністю редукованих функціоналів стану від одночастинкової функції розподілу, а саме: $F(t | F_1(t)) = (1, F_1(t, x_1), \dots, F_s(t, x_1, \dots, x_s | F_1(t)), \dots)$.

Дійсно, представимо кумулянти (2.10) груп операторів (2.8) із розкладу для розв'язку (2.9) у кінетичні кластерні розклади (3.1) у випадку $s \geq 2$. Тоді, представивши ряд за індексом сумування n та суму за індексом сумування k_1 у вигляді добутку двох рядів, отримуємо:

$$\begin{aligned}
 F_s(t, x_1, \dots, x_s) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \int_{(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3)^n} dx_{s+1} \dots dx_{s+n} \mathfrak{A}_{1+n}(-t, \{1, \dots, s\}, \\
 &s+1, \dots, s+n) \mathfrak{I}_{s+n}(1, \dots, s+n) \prod_{i=1}^{s+n} F_1^0(x_i) = \\
 &\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \int_{(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3)^n} dx_{s+1} \dots dx_{s+n} \mathfrak{V}_{1+n}(t, \{1, \dots, s\}, s+1, \dots, s+n) \times \\
 &\sum_{k_1=0}^{\infty} \sum_{k_2=0}^{k_1} \dots \sum_{k_{n+s}=0}^{k_{n+s-1}} \frac{1}{k_{n+s}!(k_{n+s-1} - k_{n+s})! \dots (k_1 - k_2)!} \times \\
 &\int_{(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3)^{k_1}} dx_{n+s+1} \dots dx_{n+s+k_1} \prod_{i=1}^{n+s} \mathfrak{A}_{1+k_{n+s+1-i}-k_{n+s+2-i}}(-t, i, \\
 &n+s+1+k_{n+s+2-i}, \dots, n+s+k_{n+s+1-i}) \prod_{j=1}^{n+s+k_1} F_1^0(x_j) \times \\
 &\mathcal{X}_{1+k_{n+s+1-i}-k_{n+s+2-i}}(q_i, q_{n+s+1+k_{n+s+2-i}}, \dots, q_{n+s+k_{n+s+1-i}}),
 \end{aligned}$$

де використані позначення введені вище. Внаслідок справедливості формули добутку (4.5) у випадку довільного індексу $s \geq 2$, в отриманому розкладі ряд по індексу сумування k_1 може бути виражений в термінах одночастинкової функції розподілу (4.2). Тому мають місце наступні рівності

$$\begin{aligned}
 &\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \int_{(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3)^n} dx_{s+1} \dots dx_{s+n} \mathfrak{A}_{1+n}(-t, \{1, \dots, s\}, s+1, \dots, s+n) \times \\
 &\mathfrak{I}_{s+n}(1, \dots, s+n) \prod_{i=1}^{s+n} F_1^0(x_i) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \int_{(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3)^n} dx_{s+1} \dots dx_{s+n} \mathfrak{V}_{1+n}(t, \\
 &\{1, \dots, s\}, s+1, \dots, s+n) \prod_{i=1}^{s+n} F_1(t, x_i),
 \end{aligned}$$

де $(n+1)$ -го порядку еволюційний оператор $\mathfrak{V}_{1+n}(t)$ визначається формулою (3.4). Тобто, ми встановили, що маргінальні функціонали стану визначаються таким розкладом:

$$F_s(t, x_1, \dots, x_s \mid F_1(t)) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \int_{(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3)^n} dx_{s+1} \dots \quad (4.1)$$

$$\dots dx_{s+n} \mathfrak{V}_{1+n}(t, \{1, \dots, s\}, s+1, \dots, s+n) \prod_{i=1}^{s+n} F_1(t, x_i),$$

де $(1+n)$ -го порядку еволюційні оператори $\mathfrak{V}_{1+n}(t)$, $n \geq 0$ визначаються формулою (3.4). Іншими словами, для вказаних початкових станів всі можливі стани системи пружних куль в довільний момент часу можуть бути описані в рамках одночастинкової функції розподілу без будь-якої апроксимації.

Типовими властивостями для кінетичного опису еволюції побудованих редукованих функціоналів стану (4.1) є індуковані властивостями еволюційних операторів (3.4).

Виведемо еволюційне рівняння, розв'язком якого є одночастинкова функція розподілу через яку визначаються редуковані функціонали стану (4.1)

$$F_1(t, x_1) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \int_{(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3)^n} dx_2 \dots dx_{n+1} \mathfrak{A}_{1+n}(-t, 1, \dots, n+1) \times \quad (4.2)$$

$$\prod_{i=1}^{n+1} F_1^0(x_i) \mathcal{X}_{\mathbb{R}^{3(1+n)} \setminus \mathbb{W}_{1+n}},$$

де еволюційний оператор $\mathfrak{A}_{1+n}(-t)$ визначається формулою (2.10).

Враховуючи справедливість наступних рівностей для кумулянтів (2.10) груп операторів (2.8) для $f \in L_0^1$ в сенсі збіжності по нормі [7]

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \mathfrak{A}_1(-t, 1) f_1(x_1) = \mathcal{L}_1(1) f_1(x_1),$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \int_{\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3} dx_2 \mathfrak{A}_2(-t, 1, 2) f_2(x_1, x_2) = \int_{\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3} dx_2 \mathcal{L}_{\text{int}}(1, 2) f_2(x_1, x_2),$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \int_{\mathbb{R}^{3n} \times (\mathbb{R}^{3n} \setminus \mathbb{W}_n)} dx_2 \dots dx_{n+1} \mathfrak{A}_{1+n}(-t, 1, \dots, n+1) f_{n+1} = 0, \quad n \geq 2,$$

де оператори $\mathcal{L}_1(1)$ і $\mathcal{L}_{\text{int}}(1, 2)$ визначаються формулами (2.3) та (2.5) відповідно. У результаті диференціювання по часовій змінній виразу (4.2) в сенсі поточної збіжності на просторі $L^1(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3)$ отримаємо

таке рівняння: [7, 19]

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} F_1(t, x_1) = -\langle p_1, \frac{\partial}{\partial q_1} \rangle F_1(t, x_1) + \\ \int_{\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3} dx_2 \mathcal{L}_{\text{int}}^*(1, 2) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \int_{(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3)^n} dx_3 \dots \\ \dots dx_{n+2} \mathfrak{A}_{1+n}(-t, \{1, 2\}, 3, \dots, n+2) \prod_{i=1}^{n+2} F_1^0(x_i) \mathcal{X}_{\mathbb{R}^{3(n+2)} \setminus \mathbb{W}_{n+2}}. \end{aligned} \quad (4.3)$$

Для того, щоб виразити другий член в правій частині цієї рівності в термінах одночастинкової функції розподілу (4.2), розкладемо кумулянти (2.10) груп операторів (2.8) в кінетичний кластерний розклад (3.1) у випадку, коли $s = 2$. Представимо ряд по індексу сумування n і суму по індексу сумування k_1 у вигляді добутку двох рядів. Як результат отримаємо:

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \int_{(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3)^n} dx_3 \dots dx_{n+2} \mathfrak{A}_{1+n}(-t, \{1, 2\}, 3, \dots, n+2) \times \\ \mathfrak{I}_{n+2} \prod_{i=1}^{n+2} F_1^0(x_i) = \\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{k_1=0}^{\infty} \int_{(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3)^{n+k_1}} dx_3 \dots dx_{n+2+k_1} \mathfrak{V}_{1+n}(t, \{1, 2\}, 3, \dots \\ \dots, n+2) \sum_{k_2=0}^{k_1} \dots \sum_{k_{n+2}=0}^{k_{n+1}} \frac{1}{k_{n+2}!(k_{n+1} - k_{n+2})! \dots (k_1 - k_2)!} \times \\ \prod_{i=1}^{n+2} \mathfrak{A}_{1+k_{n+3-i}-k_{n+4-i}}(-t, i, n+3+k_{n+4-i}, \dots, n+2+k_{n+3-i}) \\ \mathcal{X}_{1+k_{n+3-i}-k_{n+4-i}}(q_i, q_{n+3+k_{n+4-i}}, \dots, q_{n+2+k_{n+3-i}}) \prod_{j=1}^{n+2+k_1} F_1^0(x_j). \end{aligned} \quad (4.4)$$

Останній ряд може бути виражений в термінах одночастинкової функції розподілу (4.2) згідно до наступної формули добутку для рядів (4.2)

$$\begin{aligned} \prod_{i=1}^{n+2} F_1(t, x_i) = \sum_{k_1=0}^{\infty} \sum_{k_2=0}^{k_1} \dots \sum_{k_{n+2}=0}^{k_{n+1}} \frac{1}{k_{n+2}!(k_{n+1} - k_{n+2})! \dots (k_1 - k_2)!} \\ \int_{(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3)^{k_1}} dx_{n+3} \dots dx_{n+2+k_1} \prod_{i=1}^{n+2} \mathfrak{A}_{1+k_{n+3-i}-k_{n+4-i}}(-t, i, \end{aligned} \quad (4.5)$$

$$n+3+k_{n+4-i}, \dots, n+2+k_{n+3-i}) \mathcal{X}_{1+k_{n+3-i}-k_{n+4-i}}(q_i, \\ q_{n+3+k_{n+4-i}}, \dots, q_{n+2+k_{n+3-i}}) \prod_{j=1}^{n+2+k_1} F_1^0(x_j).$$

Згідно рівностей (4.4) та (4.5), і беручи до уваги означення (2.5) оператора $\mathcal{L}_{\text{int}}(1, 2)$ для $t > 0$, з рівності (4.3) отримаємо:

$$\frac{\partial}{\partial t} F_1(t, x_1) = -\langle p_1, \frac{\partial}{\partial q_1} \rangle F_1(t, x_1) + \quad (4.6)$$

$$\sigma^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \int_{\mathbb{R}^3 \times \mathbb{S}_+^2} dp_2 d\eta \int_{(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3)^n} dx_3 \dots dx_{n+2} \langle \eta, (p_1 - p_2) \rangle \times \\ (\mathfrak{V}_{1+n}(t, \{1^*, 2^*\}, 3, \dots, n+2) F_1(t, q_1, p_1^*) \times \\ F_1(t, q_1 - \sigma\eta, p_2^*) \prod_{i=3}^{n+2} F_1(t, x_i) - \\ \mathfrak{V}_{1+n}(t, \{1, 2_+\}, 3, \dots, n+2) F_1(t, x_1) \times \\ F_1(t, q_1 + \sigma\eta, p_2) \prod_{i=3}^{n+2} F_1(t, x_i)),$$

де використано такі позначення як і в рівнянні (2.1). Тракуватимемо побудовану тотожність для одночастинкової функції розподілу як кінетичне рівняння системи пружних куль і називатимемо таке еволюційне рівняння як узагальнене кінетичне рівняння Енскоґа. Ряд, яким представляється інтеграл зіткнень, збігається за умови [13]: $\|F_1(t)\|_{L^1(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3)} < e^{-8}$.

Підкреслимо, що коефіцієнти виведеного кінетичного рівняння (4.6) визначаються через початкові кореляції, які пов'язані із забороненими конфігураціями частинок.

Зауважимо, що в роботі [13] було доведено теорему про існування розв'язку задачі Коші для узагальненого рівняння Енскоґа.

Таким чином, якщо початкові дані визначаються через одночастинкову функцію розподілу на дозволених конфігураціях, тоді еволюція станів визначена через ієрархію рівнянь ББГКІ (2.1) може бути повністю описана узагальненим кінетичним рівнянням Енскоґа (4.6) і послідовністю маргінальних функціоналів стану $F_s(t, x_1, \dots, x_s \mid F_1(t))$, $s \geq 2$, які визначаються розкладами (4.1).

Відмітимо, що розклади (4.1) маргінальних функціоналів стану є нерівноважним аналогом розкладів Урселла–Майєра по степенях густини рівноважної функції розподілу. Зокрема, якщо одночастинкова функція розподілу є Максвелівською функцією розподілу, то маргінальні

функціонали стану (4.1) перетворюються у розклади Урселла–Майєра [5, 21].

5. РЕДУКОВАНІ КОРЕЛЯЦІЙНІ ФУНКЦІОНАЛИ

Альтернативним описом еволюції нефіксованого числа частинок, які взаємодіють як пружні кулі, є опис через редуковані кореляційні функції, які визначаються через редуковані кореляційні функції таким чином [16, 17]:

$$F_s(t, x_1, \dots, x_s) = \sum_{P: (x_1, \dots, x_s) = \bigcup_i X_i} \prod_{X_i \subset P} G_{|X_i|}(t, X_i), \quad s \geq 1, \quad (5.1)$$

де символ $\sum_{P: (x_1, \dots, x_s) = \bigcup_i X_i}$ є сумою по всіх можливих розбиттях P множини $(x_1, \dots, x_s)$ на $|P|$ взаємно неперетинних підмножин $X_i \subset (x_1, \dots, x_s)$. Як наслідок, розв'язок рекурентних співвідношень (5.1) представляється через редуковані функції розподілу:

$$G_s(t, x_1, \dots, x_s) = \sum_{P: (x_1, \dots, x_s) = \bigcup_i X_i} (-1)^{|P|-1} (|P| - 1)! \prod_{X_i \subset P} F_{|X_i|}(t, X_i), \quad s \geq 1. \quad (5.2)$$

Функції (5.2) описують кореляції станів системи пружних куль. Структура розкладів (5.2) є такою, що редуковані кореляційні функції є кумулянтами редукованих функцій розподілу (2.9). Відмітимо, що редуковані кореляційні функції (5.2) задовольняють нелінійну ієрархію еволюційних рівнянь [16, 17].

Розглянемо початкові дані для яких в початковий момент часу відсутні кореляції між пружними кулями на дозволених конфігураціях, а саме, $G^c = (0, G_1^0, 0, \dots, 0, \dots)$. У цьому випадку розв'язок нелінійної ієрархії еволюційних рівнянь для редукованих кореляційних функцій визначається таким розвиненням [16, 17]:

$$G_1(t, x_1) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \int_{(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3)^n} dx_2 \dots dx_{1+n} \mathfrak{A}_{1+n}(t, 1, \dots, n+1) \times \prod_{i=1}^{n+1} G_1^0(x_i) \mathcal{X}_{\mathbb{R}^{3(n+1)} \setminus \mathbb{W}_{n+1}}, \quad (5.3)$$

де $\mathfrak{A}_{1+n}(t, 1, \dots, n+1)$ – кумулянт (2.10) $(1+n)$ -го порядку груп еволюційних операторів (2.8).

Аналогічно як і для редукованих функцій розподілу для початкових даних, які задовольняють умову хаосу, використовуючи кінетичні

кластерні розклади сформулюємо нову задачу Коші для одночастинкової редукованої кореляційної функції розподілу та послідовність кореляційних функціоналів $G_s(t|G_1(t))$ від одночастинкової редукованої кореляційної функції (5.3) [16, 17]:

$$G_s(t, x_1, \dots, x_s | G_1(t)) = \quad (5.4)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \int_{(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3)^n} dx_{s+1} \dots dx_{s+n} \mathfrak{V}_{s+n}(t, 1, \dots, s+n) \prod_{i=1}^{s+n} G_1(t, x_i),$$

$$s \geq 2.$$

Оператор $\mathfrak{V}_{s+n}(t)$, $n \geq 0$, $(s+n)$ -го порядку визначається таким представленням:

$$\mathfrak{V}_{s+n}(t, 1, \dots, s, s+1, \dots, s+n) = n! \sum_{k=0}^n (-1)^k \sum_{n_1=1}^n \dots \quad (5.5)$$

$$\sum_{n_k=1}^{n-n_1-\dots-n_{k-1}} \frac{1}{(n-n_1-\dots-n_k)!} \hat{\mathfrak{A}}_{s+n-n_1-\dots-n_k}(t,$$

$$1, \dots, s+n-n_1-\dots-n_k) \prod_{j=1}^k \sum_{\substack{D_j : Z_j = \bigcup_{l_j} X_{l_j}, \\ |D_j| \leq s+n-n_1-\dots-n_j}} \frac{1}{|D_j|!} \times$$

$$\sum_{i_1 \neq \dots \neq i_{|D_j|=1}}^{s+n-n_1-\dots-n_j} \prod_{X_{l_j} \subset D_j} \frac{1}{|X_{l_j}|!} \hat{\mathfrak{A}}_{1+|X_{l_j}|}(t, i_{l_j}, X_{l_j}),$$

де $\sum_{D_j: Z_j = \bigcup_{l_j} X_{l_j}}$ є сума по всіх можливих розбиттях множини $Z_j \equiv (s+n-n_1-\dots-n_j+1, \dots, s+n-n_1-\dots-n_{j-1})$ на не більше ніж $s+n-n_1-\dots-n_j$ лінійно впорядкованих підмножин, $(s+n)$ -го порядку кумулянт розсієння визначається формулою

$$\hat{\mathfrak{A}}_{s+n}(t, 1, \dots, s+n) := \mathfrak{A}_{s+n}(t, 1, \dots, s+n) \mathcal{X}_{\mathbb{R}^{3(s+n)} \setminus \mathbb{W}_{s+n}} \prod_{i=1}^{s+n} (\mathfrak{A}_1)^{-1}(t, i),$$

і використано позначення вище.

Наведемо кілька простих прикладів операторів (5.5):

$$\mathfrak{V}_s(t, 1, \dots, s) = \mathfrak{A}_s(t, 1, \dots, s) \mathcal{X}_{\mathbb{R}^{3s} \setminus \mathbb{W}_s} \prod_{i=1}^s (\mathfrak{A}_1)^{-1}(t, i),$$

$$\mathfrak{V}_{s+1}(t, 1, \dots, s, s+1) =$$

$$\begin{aligned}
& \mathfrak{A}_{s+1}(t, 1, \dots, s+1) \mathcal{X}_{\mathbb{R}^{3(s+1)} \setminus \mathbb{W}_{s+1}} \prod_{i=1}^{s+1} (\mathfrak{A}_1)^{-1}(t, i) - \\
& \mathfrak{A}_s(t, 1, \dots, s) \mathcal{X}_{\mathbb{R}^{3s} \setminus \mathbb{W}_s} \prod_{i=1}^s (\mathfrak{A}_1)^{-1}(t, i) \sum_{j=1}^s \mathfrak{A}_2(t, j, s+1) \times \\
& \mathcal{X}_{\mathbb{R}^6 \setminus \mathbb{W}_2} (\mathfrak{A}_1)^{-1}(t, j) (\mathfrak{A}_1)^{-1}(t, s+1).
\end{aligned}$$

Якщо $\|G_1(t)\|_{L^1(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3)} < e^{-(3s+2)}$, для довільних $t \in \mathbb{R}$ ряд (5.4) збігається по нормі простору L_s^1 [13].

У цьому випадку метод побудови редукованих кореляційних функціоналів (5.4) базується на застосуванні варіацій кластерних розкладів, а саме, кінетичних кластерних розкладів [13], до породжуючих операторів (2.10) рядів, що представляють редуковані кореляційні функції.

Дійсно, враховуючи співвідношення кінетичних кластерних розкладів для кумулянтів розсієння:

$$\begin{aligned}
\hat{\mathfrak{A}}_{s+n}(t, 1, \dots, s+n) &= \sum_{n_1=0}^n \frac{n!}{(n-n_1)!} \mathfrak{A}_{s+n-n_1}(t, 1, \dots, s+n-n_1) \times \\
&\sum_{\substack{D: Z = \bigcup_l X_l, \\ |D| \leq s+n-n_1}} \frac{1}{|D|!} \sum_{i_1 \neq \dots \neq i_{|D|}}^{s+n-n_1} \prod_{X_l \subset D} \frac{1}{|X_l|!} \hat{\mathfrak{A}}_{1+|X_l|}(t, i_l, X_l),
\end{aligned}$$

де $\sum_{D: Z = \bigcup_l X_l, |D| \leq s+n-n_1}$ є сумою за всіма можливими розбиттями D лінійно впорядкованої множини $Z \equiv (s+n-n_1+1, \dots, s+n)$ на не більше ніж $s+n-n_1$ лінійно впорядкованих підмножин, ми отримуємо розклади для редукованих кореляційних функціоналів $G_s(t, x_1, \dots, x_s \mid G_1(t))$, $s \geq 2$, (5.4) [16].

Зазначимо, що структура кінетичних кластерних розкладів для кумулянтів розсієння груп операторів (2.8) подібна до структури віріальних розкладів рівноважних функцій розподілу, тобто має вигляд степеневого ряду по густині.

Якщо початкові дані $G_1^0 \in L_1^1$, тоді для довільного $t \in \mathbb{R}$ одночастинкова кореляційна функція (5.3) є слабким розв'язком задачі Коші для немарківського кінетичного рівняння Енскоґа [16]:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t} G_1(t, x_1) &= \\
&\mathcal{L}(1)G_1(t, x_1) + \int_{\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3} dx_2 \mathcal{L}_{\text{int}}(1, 2)G_1(t, x_1)G_1(t, x_2) +
\end{aligned} \tag{5.6}$$

$$\int_{\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3} dx_2 \mathcal{L}_{\text{int}}(1, 2) G_2(t, x_1, x_2 \mid G_1(t)),$$

$$G_1(t, x_1)|_{t=0} = G_1^0(x_1), \quad (5.7)$$

де перша частина інтегралу зіткнень у рівнянні (5.6) має структуру Больцмана—Енскоґа, а друга частина інтегралу зіткнень визначається через двочастинковий кореляційний функціонал, представлений у вигляді ряду (5.4). Цей ряд описує всі можливі кореляції, що виникають внаслідок динаміки твердих куль, а також поширення початкових кореляцій, які пов'язані із забороненими конфігураціями.

6. КОРЕЛЯЦІЙНІ ФУНКЦІОНАЛИ СТАНУ

Альтернативний підхід до опису стану скінченної кількості твердих куль полягає у використанні функцій, визначених за допомогою кластерних розкладів функцій розподілу ймовірностей [10, 16]. Історично було запропоновано кілька підходів до опису кореляцій у багаточастинкових системах. Серед них варто згадати відомий підхід до динаміки кореляцій, запропонований І. Прігожином [23] і Р. Балеску [3], та його застосування в теорії плазми.

Введемо послідовність кореляційних функцій $g(t) = (1, g_1(t, x_1), \dots, g_s(t, x_1, \dots, x_s), \dots)$, які описують еволюцію кореляцій системи скінченного числа пружних куль. В роботі [16] встановлено, що редуковані кореляційні функції розподілу (5.2) визначаються через кореляційні функції таким представленням:

$$G_s(t, x_1, \dots, x_s) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \int_{(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3)^n} dx_{s+1} \dots dx_{s+n} g_{s+n}(t, x_1, \dots, x_{s+n}), \quad s \geq 1. \quad (6.1)$$

Еволюція послідовності кореляційних функцій $g(t)$ багатьох твердих куль визначається задачею Коші для ієрархії еволюційних рівнянь Ліувілля, яка визначається в слабкому формулюванні таким чином [16, 17]:

$$\frac{\partial}{\partial t} g_s(t, x_1, \dots, x_s) = \mathcal{L}_s(1, \dots, s) g_s(t, x_1, \dots, x_s) + \sum_{P: (x_1, \dots, x_s) = X_1 \cup X_2} \sum_{i_1 \in \hat{X}_1} \sum_{i_2 \in \hat{X}_2} \mathcal{L}_{\text{int}}(i_1, i_2) g_{|X_1|}(t, X_1) g_{|X_2|}(t, X_2), \quad (6.2)$$

$$g_s(t, x_1, \dots, x_s)|_{t=0} = g_s^0(x_1, \dots, x_s), \quad s \geq 1, \quad (6.3)$$

де $\sum_{P: (x_1, \dots, x_s) = X_1 \cup X_2}$ є сумою за всіма можливими розбиттями P множини $(x_1, \dots, x_s)$ на дві непорожні попарно неперетинні підмножини X_1 і X_2 , символ $\hat{X}_i$ позначає множину індексів підмножини X_i координат фазового простору, а оператор $\mathcal{L}_s$ визначений на підпросторі $L_0^1 \subset L^1$ формулою (2.3). Слід зазначити, що ієрархія Ліувілля (6.2) є сукупністю рекурентних еволюційних рівнянь.

Для $t \geq 0$ наведемо кілька перших прикладів рекурентних рівнянь (6.2) для системи твердих куль:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} g_1(t, x_1) &= -\langle p_1, \frac{\partial}{\partial q_1} \rangle g_1(t, x_1), \\ \frac{\partial}{\partial t} g_2(t, x_1, x_2) &= -\sum_{j=1}^2 \langle p_j, \frac{\partial}{\partial q_j} \rangle g_2(t, x_1, x_2) + \\ &\quad \sigma^2 \int_{\mathbb{S}_+^2} d\eta \langle \eta, (p_1 - p_2) \rangle (g_2(t, q_1, p_1^*, q_2, p_2^*) \delta(q_1 - q_2 + \sigma\eta) - \\ &\quad g_2(t, x_1, x_2) \delta(q_1 - q_2 - \sigma\eta)) + \\ &\quad \sigma^2 \int_{\mathbb{S}_+^2} d\eta \langle \eta, (p_1 - p_2) \rangle (g_1(t, q_1, p_1^*) g_1(t, q_2, p_2^*) \delta(q_1 - q_2 + \sigma\eta) - \\ &\quad g_1(t, x_1) g_1(t, x_2) \delta(q_1 - q_2 - \sigma\eta)), \end{aligned}$$

де використовувалися позначення, прийняті вище.

Для початкових даних, які належать простору інтегрованих функцій, розв'язок задачі Коші (6.2), (6.3) визначається таким представленням [16]:

$$g_s(t, x_1, \dots, x_s) = \sum_{P: (x_1, \dots, x_s) = \bigcup_j X_j} \mathfrak{A}_{|P|}(t, \{\hat{X}_1\}, \dots, \{\hat{X}_{|P|}\}) \prod_{X_j \in P} g_{|X_j|}^0(X_j), \quad s \geq 1, \quad (6.4)$$

де символ $\sum_{P: (x_1, \dots, x_s) = \bigcup_j X_j}$ означає суму за всіма можливими розбиттями P множини $(x_1, \dots, x_s)$ на $|P|$ на непорожні попарно неперетинні підмножини X_j , символ $\hat{X}$ означає множину індексів множини X координат фазового простору, а множина $(\{\hat{X}_1\}, \dots, \{\hat{X}_{|P|}\})$ складається з елементів, які є підмножинами $\hat{X}_j \subset (1, \dots, s)$, тобто, $|(\{\hat{X}_1\}, \dots, \{\hat{X}_{|P|}\})| = |P|$. Породжуючий оператор $\mathfrak{A}_{|P|}(t)$ представлення (6.4) є $|P|$ -го порядку кумулянт груп операторів (2.8), який визначається такою сумою:

$$\mathfrak{A}_{|P|}(t, \{\hat{X}_1\}, \dots, \{\hat{X}_{|P|}\}) := \quad (6.5)$$

$$\sum_{P': (\{\hat{X}_1\}, \dots, \{\hat{X}_{|P'|}\}) = \bigcup_k Z_k} (-1)^{|P'|-1} (|P'|-1)! \prod_{Z_k \subset P'} S_{|\theta(Z_k)|}(t, \theta(Z_k)),$$

де символ $\theta \in$ відображенням декластеризації: $\theta(\{\hat{X}_i\}) \doteq (\hat{X}_i)$. Найпростіші приклади кореляційних функцій (6.4) визначаються такими рівностями: $g_1(t, x_1) = \mathfrak{A}_1(t, 1)g_1^0(x_1)$, $g_2(t, x_1, x_2) = \mathfrak{A}_1(t, \{1, 2\})g_2^0(x_1, x_2) + \mathfrak{A}_2(t, 1, 2)g_1^0(x_1)g_1^0(x_2)$.

Розглянемо далі випадок, коли кореляції між твердими кулями у початковий момент часу відсутні (початковий стан, що задовольняє умові хаосу [7, 24]), послідовність початкових кореляційних функцій на допустимих конфігураціях має такий вигляд $g^{(c)}(0) = (0, g_1^0(x_1), 0, \dots, 0, \dots)$. У цьому випадку для $(x_1, \dots, x_s) \in \mathbb{R}^{3s} \times (\mathbb{R}^{3s} \setminus \mathbb{W}_s)$ розклади (6.4) представляються наступним чином

$$g_s(t, x_1, \dots, x_s) = \mathfrak{A}_s(t, 1, \dots, s) \prod_{i=1}^s g_1^0(x_i) \mathcal{X}_{\mathbb{R}^{3s} \setminus \mathbb{W}_s}, \quad s \geq 1, \quad (6.6)$$

де породжуючий оператор $\mathfrak{A}_s(t)$ цього розкладу є s -го порядку кумулянт груп операторів (2.8), визначений через розклад

$$\mathfrak{A}_s(t, 1, \dots, s) = \sum_{P: (1, \dots, s) = \bigcup_i X_i} (-1)^{|P|-1} (|P|-1)! \prod_{X_i \subset P} S_{|X_i|}(t, X_i), \quad (6.7)$$

з позначеннями, прийнятими в формулі (6.4). Із представлення (6.6) видно, що у разі відсутності кореляцій на початковий момент часу, кореляції, згенеровані динамікою системи твердих куль, повністю визначаються кумулянтами (6.7) груп операторів (2.8).

Зазначимо, що у випадку початкових даних $g^{(c)}(0)$ розклади (6.6) можна переписати в іншому поданні, яке пояснює їх фізичний зміст. Дійсно, для $n = 1$ ми маємо $g_1(t, x_1) = \mathfrak{A}_1(t, 1)g_1^0(x_1) = g_1^0(p_1, q_1 - p_1 t)$.

Згідно з формулою (6.6) та визначенням кумулянта першого порядку $\mathfrak{A}_1(t) = S_1(-t)$, і його оберненою групою $S_1^{-1}(-t) = S_1(t)$, ми виразимо кореляційні функції $g_s(t)$, $s \geq 2$, через одночастинкову кореляційну функцію $g_1(t)$. Розкладаючи кумулянт груп операторів (6.7) у формулі (6.6) у кінетичний кластерний розклад (3.1) ми отримуємо для $s \geq 2$ такі кореляційні функціонали стану:

$$g_s(t, x_1, \dots, x_s | g_1(t)) = \hat{\mathfrak{A}}_s(t, 1, \dots, s) \prod_{i=1}^s g_1(t, x_i), \quad s \geq 2,$$

де $\hat{\mathfrak{A}}_s(t, 1, \dots, s)$ є s -го порядку кумулянт (6.7) операторів розсієння

$$\hat{S}_n(t, 1, \dots, n) \doteq S_n(-t, 1, \dots, n) \mathcal{X}_{\mathbb{R}^{3n} \setminus \mathbb{W}_n} \prod_{i=1}^n S_1(t, i), \quad n \geq 1.$$

На підпростор $L_{n,0}^1$ генератор оператора розсіювання $\hat{S}_n(t, 1, \dots, n)$ визначаються через оператор: $\frac{d}{dt}\hat{S}_n(t, 1, \dots, n) |_{t=0} = \sum_{j_1 < j_2=1}^n \mathcal{L}_{\text{int}}(j_1, j_2)$, де для $t \geq 0$ оператор $\mathcal{L}_{\text{int}}(j_1, j_2)$ визначається формулою (2.5).

7. ВИСНОВОК

Метою цього огляду було представити застосування розробленого методу кінетичних кластерних розкладів для виведення кінетичного рівняння системи багатьох частинок із зіткненнями та побудови функціоналів від розв'язку такого рівняння.

У роботі розв'язок ієрархій еволюційних рівнянь ББГКІ для частинок із зіткненнями визначено непертурбативним представленням, а саме, кумулянтами відповідного порядку для груп операторів рівнянь Ліувілля. На основі такого непертурбативного представлення розв'язку, для початкових даних, які визначаються одночастинковими редукованими функціями розподілу було представлено метод кінетичних кластерних розкладів для кумулянтів груп операторів рівняння Ліувілля. Завдяки цьому методу було отримано без будь-яких апроксимацій не марківське кінетичне рівняння Енскоґа та редуковані функціонали стану від розв'язку цього кінетичного рівняння. Зауважимо, що в роботах [14, 15] представлено підхід виведення кінетичного рівняння Енскоґа із динаміки спостережуваних для системи багатьох частинок із зіткненнями.

Також для початкових даних редукованих кореляційних функцій та кореляційних функцій, які задовольняють умову хаосу, за допомогою методу кінетичних кластерних розкладів було побудовано редуковані кореляційні функціонали від одночастинкової редукованої кореляційної функції та кореляційні функціонали від одночастинкової кореляційної функції відповідно. Було показано, що одночастинкова редукована кореляційна функція задовольняє кінетичне рівняння Енскоґа.

Таким чином, представлений метод кінетичних кластерних розкладів дає математичний механізм побудови кінетичних рівнянь для редукованої одночастинкової функції розподілу або редукованої кореляційної функції, а також, дає можливість визначити еволюцію групи частинок із зіткненнями як функціонал від розв'язку цих кінетичних рівнянь. Зауважимо, що для відкритих систем частинок із зіткненнями метод кінетичних кластерних розкладів розроблено в роботах [2, 11], а для квантових багаточастинкових систем розглянуто в [12].

ЛІТЕРАТУРА

- [1] Д. Я. Петрина, В. И. Герасименко. Математические проблемы статистической механической системы упругих шаров. *Успехи мат. наук*, 45(3):135–182, 1990.

- [2] I. В. Гап'як, В. І. Герасименко. Рівняння Фоккера-Планка з початковими кореляціями в кінетичній теорії зіткнень. *Буковинський математичний журнал*, 3(3-4):29–35, 2015.
- [3] R. Balescu. Dynamical correlation patterns: a new representation of the Liouville equation. *Physica*, 56(1):1–24, 1971. doi:10.1016/0031-8914(71)90002-4.
- [4] J. Banasiak, L. Arlotti. *Perturbations of Positive Semigroups with Applications*. New York: Springer, 2006.
- [5] N. N. Bogolyubov. *Problems of the dynamical theory in statistical physics*. Gostechizdat, M., 1946. URL: <https://books.google.com.ua/books?id=GUE6AQAAIAAJ>.
- [6] L. E. Boltzmann. Weitere Studien über das Wärmegleichgewicht unter Gasmolekülen. *Sitzungsber. Akad. Wiss.*, 66:275—370, 1872.
- [7] C. Cercignani, V. I. Gerasimenko, D. Ya. Petrina. *Many-particle Dynamics and Kinetic Equations*. Springer, (Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1st ed. 1997), 2012. doi:10.1007/978-94-011-5558-8.
- [8] Mayer J. E., Montroll E. Molecular distribution. *Journal of chemical physics*, 9:2–16, 1941. URL: <http://dx.doi.org/10.1063/1.1750822>, doi:10.1063/1.1750822.
- [9] D. Enskog. Kinetische theorie der wärmeleitung, reibung und selbstdiffusion in gewissen verdichteten gasen und flüssigkeiten. *Kungl. Sv. Vetenskapsakademiens Handl.*, 63(4):3–44, 1922.
- [10] I. V. Gapyak, V. I. Gerasimenko. Hierarchy of evolution equations for correlations of hard-sphere fluids. *Reports of NAS of Ukraine*, (3):3–12, 2022. doi:10.15407/dopovidi2022.02.003.
- [11] I.V. Gapyak, V.I. Gerasimenko. The non-markovian fokker–planck kinetic equation for a system of hard spheres. *Rep. of the NAS of Ukraine*, (12):29–35, 2014. doi:10.15407/dopovidi2014.12.029.
- [12] V. I. Gerasimenko. Nonlinear kinetic equations of quantum systems. *Proc. Inst. Math. NASU*, 17(2):82–112, 2020. doi:10.48550/arXiv.2107.10872.
- [13] V. I. Gerasimenko, I. V. Gapyak. Hard sphere dynamics and the Enskog equation. *Kinetic and Related Models*, 5(3):459–484, 2012. doi:10.3934/krm.2012.5.459.
- [14] V. I. Gerasimenko, I. V. Gapyak. Low-density asymptotic behavior of observables of hard sphere fluids. *Advances in Math. Phys.*, 2018:1–11, 2018. doi:10.1155/2018/6252919.
- [15] V. I. Gerasimenko, I. V. Gapyak. Boltzmann–Grad asymptotic behavior of collisional dynamics. *Reviews in Math. Phys.*, 33(2):2130001, 2021. doi:10.1142/s0129055x21300016.
- [16] V. I. Gerasimenko, I. V. Gapyak. Propagation of correlations in a hard-sphere system. *J Stat. Phys.*, 189(2), 2022. doi:10.1007/s10955-022-02958-8.
- [17] V. I. Gerasimenko, I. V. Gapyak. Advances in theory of evolution equations of many colliding particles. *Збірник праць Ін-ту математики НАН України*, 20(1), 2023. doi:10.3842/trim.v20n1.528.
- [18] V. I. Gerasimenko, I. V. Gapyak. Non-perturbative solutions of hierarchies of evolution equations for colliding particles. *AIP Advances*, 14, 2024. doi:10.1063/5.0223487.
- [19] V. I. Gerasimenko, D. Ya. Petrina. Thermodynamic limit of nonequilibrium states of a three-dimensional system of elastic spheres. *Theor. Math. Phys.*, 64:734–747, 1985. doi:10.1007/BF01017041.
- [20] V. I. Gerasimenko, T. V. Ryabukha. Cumulant representation of solutions of the BBGKY hierarchy of equations. *Ukrainian Math. J.*, 54:1583–1601, 2002. doi:10.1023/A:1023771917748.

- [21] M. S. Green, R. A. Piccirelli. Basis of the functional assumption in the theory of the Boltzmann equation. *Phys. Rev.*, 132:1388–1410, 1963. doi:10.1103/PhysRev.132.1388.
- [22] D. Ya. Petrina, V. I. Gerasimenko. Mathematical problems of statistical mechanics of a system of elastic balls. *Rus. Math. Surveys*, 45(3):153–211, 1990. doi:10.1070/rm1990v045n03abeh002360.
- [23] I. Prigogine. *Non-Equilibrium Statistical Mechanics*. N.Y.: John Wiley & Sons, 1962.
- [24] H. Spohn. *Large Scale Dynamics of Interacting Particles*. Springer-Verlag, Berlin, 1991. doi:10.1007/978-3-642-84371-6.

І. В. Гап'як

ІНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ НАН УКРАЇНИ, КИЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ІМЕНІ ТАРАСА ШЕВЧЕНКА

Email: ihapiak@knu.ua

ORCID: 0000-0003-2102-1583