

Крайові задачі для інтегро-диференціальних рівнянь

І. А. Бондар

Abstract. This paper presents a detailed survey of research on boundary value problems for integro-differential and integro-dynamic systems. The existence of solutions to these problems is examined using the theoretical apparatus of pseudo-inverse matrices and operators, alongside the Vishik-Lyusternik's method for the case of weakly perturbed systems.

Анотація. У даній роботі представлений огляд праць присвячених крайовим задачам для інтегро-диференціальних та інтегро-динамічних систем. Для дослідження існування розв'язків таких задач використано апарат теорії псевдообернених матриць та операторів, метод Вишика–Люстерніка (у випадку слабкозбурених систем).

1. ВСТУП

Задачі побудови конструктивних методів аналізу лінійних та слабконелінійних крайових задач для широкого класу систем функціонально-диференціальних рівнянь, які традиційно займають одне із центральних та важливих місць у якісній теорії диференціальних рівнянь, ґрунтовно вивчалися у роботах Б. Ван-дер-Поля, В. Вольтерра, А. Пуанкаре, М.І. Ронто, А.М. Самойленка, М.О. Перестюка, О.А. Бойчука, В.П. Журавльова [4, 5]. Це зумовлено, перш за все, важливістю практичного застосування теорії крайових задач у різних областях знань: теорії нелінійних коливань, теорії стійкості руху, теорії керування; низки радіотехнічних, механічних та біологічних задач.

Специфіка розгляду крайових задач для систем інтегро-диференціальних рівнянь полягає в тому, що їх лінійна частина є оператором, який не має оберненого. Цей факт суттєво ускладнює дослідження таких операторних рівнянь та крайових задач для них та призводить до

Робота виконана у рамках науково-дослідної теми молодих учених НАН України 2024-2025 рр. (державний реєстраційний номер 0124U002111), а також грантом Simons Foundation (1290607, І.А.Б.).

2020 Mathematics Subject Classification: 34B15, 45J05, 93C15, 49J15, 65J15

Ключові слова: крайові задачі, інтегро-диференціальні рівняння, інтегро-динамічні системи, псевдообернені матриці, ортопроектори, метод Вишика–Люстерніка, ітераційний процес, керування

DOI: <https://doi.org/10.3842/trim.v21n1.537>

того, що розв'язок крайової задачі для таких систем складається із умов розв'язності як самої операторної системи, так і крайової задачі для неї.

Для дослідження існування розв'язків таких задач використано апарат теорії псевдообернених матриць та операторів, який розвинено у роботах А.М. Самойленка, О.А. Бойчука, С.А. Кривошеї [16, 20].

Результати отримані в роботах [3, 6, 7, 10–13, 17, 18], а також методика їх отримання, можуть бути використані при подальшому розвитку теорії крайових задач для інтегро-диференціальних рівнянь при моделюванні та дослідженні фізичних, економічних та біологічних процесів.

Основні результати, що визначають наукову новизну, такі:

1. Використовуючи метод Вішика-Люстерника [19] та теорію псевдообернених за Муром-Пенроузом матриць, знайдено достатні умови існування розв'язків лінійних слабкозбурених систем інтегро-диференціальних рівнянь та крайових задач для них у припущенні, що породжуючі задачі нерозв'язні. Побудовано загальний вигляд розв'язків таких задач у вигляді частин рядів Лорана, які збігаються при фіксованому, достатньо малому ε [12].
2. Отримано критерій розв'язності лінійної неоднорідної задачі для системи інтегро-диференціальних рівнянь з імпульсним впливом. Запропоновано задачі такого типу розглядати як внутрішні крайові задачі ("*interface BVP's*") [13, 18].
3. Для слабконелінійної системи інтегро-диференціальних рівнянь та крайової задачі для неї побудовано рівняння для породжуючих констант, які визначають необхідні умови існування розв'язків, доведено достатні умови та встановлено зв'язок між необхідними та достатніми умовами. Побудовано збіжну ітераційну процедуру відшукування розв'язків. Також досліджено імпульсні нелінійні крайові задачі для відповідних систем та встановлені умови існування їх розв'язку у відповідному класі вектор-функцій [7, 10, 17].
4. Отримано умови біфуркації з точки $\varepsilon = 0$ розв'язків слабкозбурених систем лінійних інтегро-динамічних рівнянь на проміжку $[a, b]$ довільної часової шкали. Побудовано збіжний ітераційний процес пошуку розв'язків у вигляді частини ряду Лорана [11].
5. Розглянуто неоднорідну систему інтегро-диференціальних рівнянь з виродженим ядром, яка є розв'язною не при всіх неоднорідностях. Вводячи керування зведено дану систему до розв'язної. Знайдено вигляд такого керування та критерій розв'язності системи. Розглянуто аналогічну проблему для крайової задачі для системи інтегро-диференціальних рівнянь [17].

2. СЛАБКОНЕЛІНІЙНІ КРАЙОВІ ЗАДАЧІ ДЛЯ СИСТЕМ ІНТЕГРО-ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ З ІМПУЛЬСНИМ ВПЛИВОМ

При математичному моделюванні еволюції реальних процесів з короткочасовими збуреннями часто їх тривалістю можна знехтувати і вважати, що ці збурення носять "миттєвий" характер. Така ідеалізація приводить до необхідності дослідження динамічних систем з розривними траєкторіями або, як їх часно називають, диференціальні системи з імпульсним впливом.

М.М. Крилов та М.М. Боголюбов показали, що при дослідженні систем диференціальних рівнянь з імпульсним впливом можна успішно застосовувати асимптотичні методи нелінійної механіки. Систематичне вивчення математичних проблем теорії диференціальних систем з імпульсним впливом почалося у роботах А.Д. Мишкіса, А.М. Самойленка, М.О. Перестюка, А. Халаная, Д. Векслера. У подальшому, ідеї, закладені у цих роботах, отримали свій розвиток та узагальнення у багаточисленних публікаціях [2, 4, 22]. Стало зрозуміло, що теорію диференціальних систем з імпульсним впливом можна розвивати і для дослідження розв'язності систем інтегро-диференціальних рівнянь [1].

Такий напрям у теорії крайових задач для інтегро-диференціальних рівнянь з імпульсним впливом розвинений у роботах [7, 10], де розглянуто слабконелінійну систему інтегро-диференціальних рівнянь з імпульсною дією у фіксований момент часу

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) - \Phi(t) \int_a^b [A(s)x(s) + B(s)\dot{x}(s)] ds = \\ = f(t) + \varepsilon \int_a^b K(t, s) Z(x(s, \varepsilon), s, \varepsilon) ds, \end{aligned} \quad (2.1)$$

$$\Delta E_i x|_{t=\tau_i} := S_i x(\tau_i - 0) + \gamma_i + \varepsilon J_1(x(\cdot, \varepsilon), \varepsilon), \quad (2.2)$$

$$t \neq \tau_i, t \in [a, b], \tau_i \in (a, b), i = 1, 2, \dots, p,$$

та крайову умову

$$\ell x(\cdot) = \alpha + \varepsilon J_2(x(\cdot, \varepsilon), \varepsilon), \quad \alpha \in \mathbb{R}^q \quad (2.3)$$

Тут $A(t), B(t), \Phi(t) - (m \times n), (m \times n), (n \times m)$ – вимірні матриці, компоненти яких належать простору $L_2[a, b]$; вектор-стовпчики матриці $\Phi(t)$ – лінійно-незалежні на $[a, b]$, $f(t)$ – n -вимірний вектор-функція з $L_2[a, b]$; $L_2[a, b]$ – гільбертовий простір інтегрованих зі степенню 2 вектор-функцій $x : [a, b] \longrightarrow R^n$ з нормою $\|x\|_{L_2} = \left(\int_a^b \sum_{j=1}^n |x_j(t)|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}}$, де

$|x_j(t)|^2 \in L_2[a, b]$, $j = 1, 2, \dots, n$, $\|x\| = 0 \iff x(t) = 0$ майже всюди на $[a, b]$; $E_i, S_i - (k_i \times n)$ -вимірні матриці, $\gamma_i - k_i$ -вимірний вектор стовпчик констант, $\text{rank}(E_i + S_i) = k_i$ ($i = 1, 2, \dots, p$), тобто розв'язок системи (2.1), (2.2) визначається однозначним продовженням через точки розриву

$$\Delta E_i x|_{t=\tau_i} = E_i(x(\tau_i + 0) - x(\tau_i - 0)), \quad (2.4)$$

тут імпульс задаться не по всіх копонентах невідомої n -вимірної вектор-функції $x(t) = \text{col}(x_1(t), x_2(t), \dots, x_{k_i}(t), \dots, x_n(t))$, а лише по k_i її копонентах; ℓ – обмежений лінійний векторний функціонал визначений в $D_2[a; b]$,

$\ell = \text{col}(\ell_1, \ell_2, \ell_3, \dots, \ell_p) : D_2[a; b] \rightarrow \mathbb{R}^p$; $\alpha = \text{col}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_p) \in \mathbb{R}^p$; $Z(x(t, \varepsilon), t, \varepsilon)$ – нелінійна по першій компоненті n -вимірна вектор-функція, неперервно диференційована по x в околі породжуючого розв'язку, інтегровна по t і неперервна по ε :

$$Z(\cdot, t, \varepsilon) \in C^1[\|x - x_0\| \leq \mu], Z(x(\cdot, \varepsilon), \cdot, \varepsilon) \in L_2[a, b],$$

$Z(x(t, \cdot), t, \cdot) \in C[0, \varepsilon_0]$; $J_1(x(\cdot, \varepsilon), \varepsilon)$, $J_2(x(\cdot, \varepsilon), \varepsilon)$ – нелінійні обмежені, відповідно, p , q -вимірні вектор-функціонали, неперервно диференційовані по x у розумінні Фреше і неперервні по ε в околі породжуючого розв'язку.

Шукана функція $x(t)$ визначається у просторі n -вимірних функцій, які допускають розриви першого роду у точках $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_p \in (a, b)$ і які абсолютно неперервні на кожному із проміжків: $[a, \tau_1), [\tau_1, \tau_2), \dots, [\tau_p, b]$. Такі функції $x(t) \in D_2([a, b] \setminus \{\tau_i\}_I)$ допускають представлення

$$x(t) = \int_a^t \dot{x}(s) ds + x(a) + \sum_{i=1}^p \chi_{[\tau_i, b]}(t) \Delta x(\tau_i), \quad (2.5)$$

де $\Delta x(\tau_i) = x(\tau_i) - x(\tau_i - 0)$, $i = 1, \dots, p$, $\chi_{[\tau_i, b]}(t)$ – характеристична функція проміжка $[\tau_i, b]$. Норму у просторі $D_2([a, b] \setminus \{\tau_i\}_I)$ задаємо наступним чином

$$\begin{aligned} \|x\|_{D_2([a, b] \setminus \{\tau_i\}_I)} &= \|\dot{x}\|_{L_2[a, b]} + |x(a)|_{\mathbb{R}^n} + \left\| \sum_{i=1}^p \chi_{[\tau_i, b]}(t) \Delta x(\tau_i) \right\|_{\mathbb{R}^n}, \\ \|x\|_{L_2[a, b]} &= \left(\int_a^b \sum_{i=1}^n |x_i(t)|^2 dt \right)^{1/2}, \quad t \in [a, b]. \end{aligned} \quad (2.6)$$

У роботі [10] показано, що досліджувати задачу з імпульсним впливом (2.1)–(2.3) можна, розглядаючи її як внутрішню крайову задачу ("interface BVP's" [15]). Для того, щоб продемонструвати цей зв'язок,

введено $\varphi x(\cdot)$ – k -вимірний лінійний обмежений векторний функціонал, такий, що

$$\varphi := col(\varphi_1, \dots, \varphi_p) : D_2([a, b] \setminus \{\tau_i\}_I) \rightarrow \mathbb{R}^k,$$

$k := k_1 + k_2 + \dots + k_p$, $\varphi_i: D_2[a, b] \setminus \{\tau_i\}_I \rightarrow \mathbb{R}^{k_i}$, $i = 1, \dots, p$, наступним чином

[illegible]

і тепер імпульсну дію (2.2) можна записати як крайову умову

$$\varphi x(\cdot) = \gamma + \varepsilon J_1(x(\cdot, \varepsilon), \varepsilon), \quad (2.8)$$

де $\gamma = col(\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_p) \in \mathbb{R}^k$, $\gamma_i \in \mathbb{R}^{k_i}$.

Об'єднавши таким чином "внутрішню" крайову умову (2.8) із заданою (2.3) отримано $k + q$ умов на невідому n -вимірну вектор-функцію $x(t)$, а саме

$$\mathfrak{L}x(\cdot) = \delta + \varepsilon J(x(\cdot, \varepsilon), \varepsilon) \in R^{k+q}, \quad (2.9)$$

де

$$\mathfrak{L} := \begin{bmatrix} \varphi \\ \ell \end{bmatrix}, \quad \delta := \begin{bmatrix} \gamma \\ \alpha \end{bmatrix}, \quad \delta \in R^{k+q}, \quad J(x(\cdot, \varepsilon)) := \begin{bmatrix} J_1(x(\cdot, \varepsilon)) \\ J_2(x(\cdot, \varepsilon)) \end{bmatrix}.$$

Тепер слабконелінійну імпульсну крайову задачу (2.1)–(2.3) можна розглядати як слабконелінійну крайову задачу (2.1), (2.9).

Встановлено необхідну, достатню умови розв'язності та зв'язок між ними для слабконелінійної крайової задачі для інтегро-диференціальних рівнянь з імпульсним впливом типу (2.1), (2.9), розв'язок якої визначений у такому класі вектор-функцій: $x(\cdot, \varepsilon) \in D_2[a, b] \setminus \{\tau_i\}_I$, $\dot{x}(\cdot, \varepsilon) \in L_2[a, b]$, $x(t, \cdot) \in C[0, \varepsilon_0]$ і такий, що при $\varepsilon = 0$ перетворюється в один із розв'язків породжуючої крайової задачі

$$\dot{x}(t) - \Phi(t) \int_a^b [A(s)x(s) + B(s)\dot{x}(s)] ds = f(t), \quad (2.10)$$

$$\mathfrak{L}x(\cdot) = \delta \in \mathbb{R}^{k+q}, \quad (2.11)$$

яка детально розглянута у роботі [3].

Розв'язок $x(t, 0) = x_0(t, c_r)$ породжуючої крайової задачі (2.10), (2.11) називається *породжуючим розв'язком* слабконелінійної імпульсної крайової задачі (2.1)–(2.3), де $c_r \in \mathbb{R}^r$ – невідомий вектор констант, який можна визначити із побудованої алгебраїчної системи.

Справедливими є наступні твердження.

Теорема 2.1. [Необхідна умова.] Нехай слабконелінійна імпульсна крайова задача (2.1)–(2.3) має розв’язок $x = x(t, \varepsilon)$, такий, що

$$x(\cdot, \varepsilon) \in D_2[a, b] \setminus \{\tau_i\}_I, \quad \dot{x}(\cdot, \varepsilon) \in L_2[a, b], \quad x(t, \cdot) \in C(0, \varepsilon_0]$$

і який при $\varepsilon = 0$ перетворюється у породжуючий розв’язок

$$x_0(t, c_r^0) = \Psi_0(t) P_{D_{r_1}} P_{Q_r} c_r^0 + \Psi_0(t) P_{D_{r_1}} Q^+ (\delta - \mathfrak{L} F(\cdot)) + F(t), \quad (2.12)$$

$$\forall c_r^0 \in \mathbb{R}^r, \quad r = m + n - \text{rank } D - \text{rank } Q.$$

Тоді вектор констант c_r^0 обов’язково повинен бути дійсним коренем системи рівнянь

$$P_{D_{d_1}^*} \int_a^b \left[A(s) \int_a^s \int_a^b K(\tau, s) Z(x_0(s, c_r^0), s, 0) ds d\tau + \right. \\ \left. + B(s) \int_a^b K(s, \tau) Z(x_0(\tau, c_r^0), \tau, 0) d\tau \right] ds = 0, \quad (2.13)$$

$$P_{Q_{d_2}^*} \left\{ J(x_0(\cdot, c_r^0), 0) - \mathfrak{L} \left(\int_a^b \int_a^b K(\tau, s) Z(x_0(s, c_r^0), s, 0) ds d\tau + \right. \right. \\ \left. + \Psi_0(\cdot) D^+ \int_a^b \left[A(t) \int_a^t \int_a^b K(\tau, s) Z(x_0(s, c_r^0), s, 0) ds d\tau + \right. \right. \\ \left. \left. + B(t) \int_a^b K(t, s) Z(x_0(s, c_r^0), s, 0) ds \right] dt \right) \Big\} = 0, \quad (2.14)$$

$$d_1 = m - \text{rank } D, \quad d_2 = p - \text{rank } Q.$$

Доведення даного твердження аналогічне доведенню теореми 5.4 [4] та теореми 4.5 [14]. У випадку періодичних задач, константа c_r^0 має фізичний зміст і є амплітудою породжуючого розв’язку, тому у класичній періодичній задачі відповідне рівняння для систем звичайних диференціальних рівнянь називають рівнянням для *породжуючих амплітуд*. По аналогії, називаємо рівняння (2.13), (2.14) – *рівняннями для породжуючих констант* імпульсної крайової задачі для систем інтегро-диференціальних рівнянь (2.1)–(2.3).

Якщо рівняння (2.13), (2.14) розв’язне, то вектор $c_r = c_r^0 \in \mathbb{R}^r$ визначає той породжуючий розв’язок (2.12), якому може відповідати розв’язок $x(t, \varepsilon)$ вихідної імпульсної крайової задачі (2.1)–(2.3), а це те саме, що розв’язок внутрішньої крайової задачі (2.1), (2.9) при $\varepsilon = 0$. Якщо ж рівняння (2.13), (2.14) не має розв’язку, то й імпульсна крайова задача (2.1)–(2.3) не буде мати розв’язку. Мова йде про дійсні корені рівняння

для породжуючих констант (2.13), (2.14). Таким чином, необхідна умова розв'язності імпульсної крайової задачі (2.1)–(2.3) задовольняється вимогою, щоб рівняння (2.13), (2.14) мало хоча один дійсний розв'язок $c_r = c_r^0 \in \mathbb{R}^r$.

Теорема 2.2. (Достатня умова). *Нехай породжуюча крайова задача (2.10), (2.11) при виконанні умов (2.13), (2.14) має r -параметричну сім'ю розв'язків (2.12), де $r = m + n - \text{rank } D - \text{rank } Q$. Тоді для кожного дійсного значення вектора $c_r = c_r^0 \in \mathbb{R}^r$, що задовольняє систему рівнянь (2.13), (2.14) для породжуючих констант та при умові*

$$\text{rank } B_0 = d_1 + d_2 \quad (2.15)$$

слабконелінійна крайова задача (2.1)–(2.3) має хоча б один розв'язок $x = x(t, \varepsilon): x(\cdot, \varepsilon) \in D_2([a, b] \setminus \{\tau_i\}_I), \dot{x}(\cdot, \varepsilon) \in L_2[a, b], x(t, \cdot) \in C[0, \varepsilon_0]$, який при $\varepsilon = 0$ перетворюється у породжуючий розв'язок (2.12) і визначається за допомогою збіжного ітераційного процесу та формулою $x_k(t, \varepsilon) = x_0(t, c_r^0) + y_k(t, \varepsilon), (k = 0, 1, 2, \dots)$.

Теорема 2.3. (Зв'язок між необхідною та достатньою умовами). *Для того, щоб слабконелінійна крайова задача для системи інтегро-диференціальних рівнянь (2.1)–(2.3) мала розв'язок*

$$\begin{aligned} x = x(t, \varepsilon): \quad & x(\cdot, \varepsilon) \in D_2[a, b], \quad \dot{x}(\cdot, \varepsilon) \in L_2[a, b], \\ & x(t, \cdot) \in C[0, \varepsilon_0], \quad x(t, 0) = x_0(t, c_r^0), \end{aligned}$$

де $x_0(t, c_r^0)$ – породжуючий розв'язок (2.12) з $c_r = c_r^0 \in \mathbb{R}^r$ ($r = r_1 - \text{rank } Q, r_1 = m + n - \text{rank } D$), необхідно, щоб константа c_r^0 була дійсним коренем рівняння для породжуючих констант (2.13), (2.14) і достатньо, щоб виконувалася умова

$$\text{rank} \{B_0 := \frac{\partial \bar{F}(c_r)}{\partial c_r}\}_{|c_r=c_r^0} = d_1 + d_2.$$

Більше того, якщо $p = r_1$, остання умова означає, що $c_r = c_r^0 \in \mathbb{R}^r$ є простим коренем рівняння для породжуючих констант (2.13), (2.14).

Тут матриця B_0 є відомою [10] і будується по заданих копонентах системи (2.1).

3. НЕЗАВЖДИ РОЗВ'ЯЗНІ ІНТЕГРО-ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ З ВИРОДЖЕНИМ ЯДРОМ

У роботі [17] представлено ще один метод, який дозволяє нерозв'язну систему (2.10) звести до розв'язної. Для цього введено у систему

інтегро-диференціальних рівнянь керування $u \in \mathbb{R}^n$ наступним чином

$$\dot{x}(t) - \Phi(t) \int_a^b \left[A(s)x(s) + B(s)\dot{x}(s) \right] ds = f(t) + \int_a^b K(t,s)dsu \quad (3.1)$$

і справедливим є наступний наслідок з теореми 1 [21].

Наслідок 3.1. *Не всюди розв'язну систему інтегро-диференціальних рівнянь (2.10), можна доповнити, додаючи до неї керування у вигляді $\int_a^b K(t,s)dsu$, до розв'язної при $\forall f(t) \in L_2[a,b]$ тоді і тільки тоді, коли*

$$P_{S*}P_{D_{d_1}^*} = 0. \quad (3.2)$$

При цьому величину керування u необхідно вибрати наступним:

$$u = S^+ P_{D_{d_1}^*} \tilde{b} + P_S c, \quad c \in \mathbb{R}^n.$$

Тут $d_1 \times n$ -вимірна матриця

$$S := P_{D_{d_1}^*} \int_a^b \left[A(s) \int_a^s \int_a^b K(\tau,s)dsd\tau + B(s) \int_a^b K(s,\tau)d\tau \right] ds,$$

S^+ – псевдообернена (за Муром–Пенроузом) до S – $(n \times d_1)$ -вимірна матриця, P_{S*} – $(d_1 \times d_1)$ -вимірна матриця (ортопроектор), який проєктує $\mathbb{R}^{d_1}$ на $N(S^*)$, P_S – $(n \times n)$ -вимірна матриця (ортопроектор), який проєктує $\mathbb{R}^n$ на $N(S)$.

Таким чином при умові (3.2) керування $u(c)$ може бути не єдиним, бо залежить від довільної сталої $P_S c \in \mathbb{R}^n$. Це дозволяє використовувати цей підхід для дослідження задач про оптимальне керування.

Також у [17] досліджено питання керовності і крайової задачі для системи інтегро-диференціальних рівнянь.

4. СЛАВКО ЗБУРЕНІ СИСТЕМИ ЛІНІЙНИХ ІНТЕГРО-ДИНАМІЧНИХ РІВНЯНЬ НА ЧАСОВІЙ ШКАЛІ

Побудова математичних моделей процесів реального світу, призводить до розгляду крайових задач для різних операторних рівнянь. У

роботі [11] розглянуто систему інтегро-динамічних рівнянь зі збуренням на деякій часовій шкалі $\mathbb{T}$ вигляду

$$\begin{aligned} x^\Delta(t) - \Phi(t) \int_a^b [A(s)x(s) + B(s)x^\Delta(s)] \Delta s = f(t) + \\ + \varepsilon \int_a^b [K(t,s)x(s) + K_1(t,s)x^\Delta(s)] \Delta s. \end{aligned} \quad (4.1)$$

Припускається, що $A(t), B(t) - (m \times n)$ -, $\Phi(t) - (n \times m)$ -, $f(t) - (n \times 1)$ -, $K(t,s), K_1(t,s) - (n \times n)$ -вимірні матриці, компоненти яких належать простору $L_2[a,b]_{\mathbb{T}}$ Δ -інтегровних з квадратом на проміжку $[a,b]_{\mathbb{T}} := [a,b] \cup \mathbb{T}$ функцій; стовпчики матриці $\Phi(t)$ – лінійно-незалежні на $[a,b]_{\mathbb{T}}$, тобто $\text{rank} \Phi(t) = m$. А також, що породжуюча система

$$x^\Delta(t) - \Phi(t) \int_a^b [A(s)x(s) + B(s)x^\Delta(s)] \Delta s = f(t), \quad (4.2)$$

яку отримаємо з (4.1) при $\varepsilon = 0$, нерозв'язна. Виникають питання, чи можна за допомогою лінійного збурення звести систему (4.2) до розв'язної? А якщо можна, то якими повинні бути складові збурених матриць $K(t,s), K_1(t,s)$ в інтегро-динамічній системі (4.1), щоб вона стала розв'язною при довільних неоднорідностях $f(t) \in L_2[a,b]_{\mathbb{T}}$?

Розв'язок системи (4.1) знайдено у класі вектор-функцій

$$x = x(t, \varepsilon) : x(\cdot, \varepsilon) \in D_2[a,b]_{\mathbb{T}}, \quad x^\Delta(\cdot, \varepsilon) \in L_2[a,b]_{\mathbb{T}}, \quad x(t, \cdot) \in C(0, \varepsilon_0],$$

і показано, що існування розв'язку задачі (4.1) істотно залежить від $(d_1 \times r_1)$ -вимірної матриці B_0 . Доведено наступну теорему.

Теорема 4.1. *Нехай $\text{rank} B_0 = n_2 < d_1$ і система інтегро-динамічних рівнянь (4.1) зі збуренням задовольняє вказаним вище умовам так, що породжуюча ($\varepsilon = 0$) система (4.2) не розв'язна. Тоді, якщо виконується умова*

$$P_{B_0^*} P_{D_{d_1}^*} = 0 \quad (4.3)$$

система (4.1) має ρ -параметричну ($\rho = n + m - n_1 - n_2$) сім'ю розв'язків у вигляді збіжного ряду при фіксованому $\varepsilon \in (0; \varepsilon_]$:*

$$x(t, \varepsilon) = \sum_{k=-1}^{\infty} \varepsilon^k x_k(t, c_\rho), \quad \forall c_\rho \in \mathbb{R}^\rho, \quad \forall t \in [a,b]_{\mathbb{T}}. \quad (4.4)$$

Для доведення даного факту застосовано метод Вішика-Люстерника [19], який дозволяє знайти ефективні коефіцієнти умови виникнення

розв'язків системи (4.1) для $\forall t \in [a, b]_{\mathbb{T}}$ у вигляді частини ряду Лорана по степенях малого параметра ε .

Зауваження 4.1. Умова (4.3) є достатньою умовою існування розв'язку системи (4.1). Якщо умова (4.3) не виконується, то розв'язок системи (4.1) у вигляді ряду (4.4) не існує, але може існувати у вигляді частини ряду Лорана типу (4.4) по степенях $-2, -3, \dots$ малого параметра ε .

Зауваження 4.2. Якщо додатково вимагати виконання умови $P_{B_0} = 0$, то система (4.1) буде мати єдиний розв'язок у вигляді збіжного ряду

$$x(t, \varepsilon) = \sum_{k=-1}^{\infty} \varepsilon^k \bar{x}_k(t, \bar{c}_k).$$

5. Висновки

Дослідження крайових задач для систем інтегро-диференціальних рівнянь як у нелінійному випадку, та і у динамічному, пропонують широкий спектр можливостей як для теоретичного розвитку, так і для практичного застосування. Оскільки технології продовжують розвиватися, розуміння та контроль над складними динамічними системами залишаються важливою сферою дослідження.

Наприклад, імпульсні системи інтегро-диференціальних рівнянь з керуванням [17] можуть бути використані для моделювання та аналізу різних економічних явищ. Одним із прикладів є моделювання інтервенцій економічної політики в макроекономічному контексті. У свою чергу, інтегро-динамічні системи та крайові задачі для них у відповідних просторах [11] є потужними інструментами для моделювання різних процесів, які мають складну динаміку та враховують попередні стани системи, це фізичні, біологічні або економічні процеси, де поточний стан залежить від усіх попередніх станів. Широкий спектр застосування даної теорії мотивує до подальшого її розвитку [8, 9].

ЛІТЕРАТУРА

- [1] M. Akhmet, R. Seilova. Control of a boundary value problem for a linear impulsive integro-differential system. *Integral and integro-differential equations*, 36(10):1369–1376, 2000. doi:10.1134/S0012266114030057.
- [2] O. Boichuk. Boundary value problems for impulse differential systems. *Universitatis Jagellonicae Acta Mathematica*, XXXVI(5):187–192, 1998.
- [3] O. Boichuk, I. Holovats'ka. Boundary-value problems for systems of integrodifferential equations. *Journal of Mathematical Sciences*, 203(3):306–321, 2014. doi:10.1007/s10958-014-2135-1.

- [4] O. Boichuk, A. Samoilenko. *Generalized inverse operators and Fredholm boundary value problems*. Berlin, Boston: De Gruyter, 2004. doi:10.1515/9783110944679.
- [5] O. Boichuk, A. Samoilenko, V. Zhuravlev. Linear boundary-value problems for normally solvable operator equations in a Banach space. *Differ. Equ.*, 50(3):1–11, 2014. doi:10.1134/S0012266114030057.
- [6] I. Bondar. Weakly perturbed boundary-value problems for systems of integro-differential equations with impulsive action. *Tatra Mountains Mathematical Publications (Subtitle: Differential and Difference Equations and Applications 2014)*, 63:73–87, 2015. doi:10.1515/tmmp-2015-0021.
- [7] I. Bondar. Weakly nonlinear boundary-value problems for systems of impulsive integrodifferential equations. critical case of the second order. *Journal of Mathematical Sciences*, 249(4):553–572, 2020. doi:10.1007/s10958-022-06074-6.
- [8] I. Bondar. Linear boundary-value problems for systems of integrodifferential equations with degenerate kernel. resonance case for a weakly perturbed boundary-value problem. *Journal of Mathematical Sciences*, 274:822–832, 2023. doi:10.1007/s10958-023-06645-1.
- [9] I. Bondar. *Regularization of Linear Impulsive Boundary Value Problem for Systems of Integro-Differential Equations*. In: Timokha, A. (eds) *Analytical and Approximate Methods for Complex Dynamical Systems*. Understanding Complex Systems. Springer, Cham, 2025. doi:10.1515/9783110944679.
- [10] I. Bondar, M. Gromyak, N. Kozlova. Weakly nonlinear impulsive boundary-value problems for systems of integrodifferential equations. *Miskolc Mathematical Notes*, 17(1):69–84, 2016. doi:10.18514/MMN.2016.1897.
- [11] I. Bondar, O. Nesterenko, O. Strakh. Weakly perturbed systems of linear integro-dynamic equations on time scales. *Journal of Mathematical Sciences*, 265(4):561–576, 2022. doi:10.1007/s10958-022-06074-6.
- [12] I. Bondar, R. Ovchar. Bifurcation of solutions of the boundary-value problem for systems of integrodifferential equations with degenerate kernel. *Journal of Mathematical Sciences*, 238(3):224–236, 2019. doi:10.1007/s10958-019-04231-y.
- [13] I. Bondar, O. Strakh. Weakly perturbed impulsive boundary-value problem for integrodifferential systems in the resonance case. *Journal of Mathematical Sciences*, 274(1):13–24, 2023. doi:10.1007/s10958-023-06567-y.
- [14] I. Golovatska. Weakly perturbed boundary-value problems for systems of integro-differential equations. *Tatra Mountains Mathematical Publications*, 54(1):61–71, 2013. doi:10.2478/tmmp-2013-0005.
- [15] A. Zettl. Adjoint and self-adjoint bvp's with interface conditions. *SIAM J. Appl. Math.*, 16(4), 1968. doi:10.1137/0116069.
- [16] О. Бойчук, С. Кривошея, А. Самойленко. Крайові задачі для систем лінійних інтегро-диференціальних рівнянь з виродженим ядром. *Укр. мат. журн.*, 48(11):1576–1579, 1996.
- [17] І. Бондар. Умови керування для незавжди розв'язних інтегро-диференціальних рівнянь з виродженим ядром та крайових задач для них. *Буковинський математичний журнал*, 4(1-2):13–17, 2016.
- [18] І. Бондар, М. Громяк. Імпульсна крайова задача для інтегро-диференціальних рівнянь з виродженим ядром. Некритичний випадок. *Буковинський математичний журнал*, 5(3-4):15–17, 2017.
- [19] М. Вишик, Люстерник Л. Решение некоторых задач о возмущениях в случае матриц и самосопряженных и несамосопряженных дифференциальных уравнений

- Решение некоторых задач о возмущениях в случае матриц и самосопряженных и несамосопряженных дифференциальных уравнений. *УМН*, 3(15):3–80, 1960.
- [20] С. Кривошея. Умови розв'язності нетерових крайових задач для інтегро-диференціальних систем. *Вісник Київського Університету. Серія: фізико-математичні науки*, 4:144–151, 2001.
- [21] А. Самойленко, О. Бойчук, С. Кривошея. Крайові задачі для систем лінійних інтегро-диференціальних рівнянь з виродженим ядром. *Укр. мат. журн.*, 48(11):1576–1579, 1996.
- [22] А. Самойленко, М. Перестюк. *Диференціальні рівняння з імпульсною дією*. Київ: Вища школа, 1987.

І. А. Бондар

Інститут математики НАН України, м. Київ

Email: bondar.ivnn@gmail.com

ORCID: 0000-0001-8876-1557