Збірник праць Ін-ту математики НАН України (2023) т. 20, №1, 911–946

Інтегральні теореми в скінченновимірній комутативній алгебрі

С. А. Плакса, В. С. Шпаківський

Abstract. For monogenic (continuous and differentiable in the sense of Gâteaux) functions given in special real subspaces of an arbitrary finite-dimensional commutative associative algebra over the complex field and taking values in this algebra, we establish basic properties analogous to properties of holomorphic functions of a complex variable. Methods for proving results are based on a representation of monogenic functions via holomorphic functions of complex variables that allows to establish analogues of Cauchy-Riemann conditions and the continuity of Gâteaux derivatives of all orders for monogenic functions. In such a way, analogues of a number of classical theorems of complex analysis (the Cauchy integral theorem for a curvilinear integral, the Cauchy integral formula, the Morera theorem, the Taylor theorem) are proved and different equivalent definitions for the mentioned monogenic functions are established. An analogue of the Cauchy theorem for an integral over non piecewise smooth surfaces is proved.

Анотація. Для моногенних (неперервних і диференційовних за Гато) функцій, що визначені у спеціальних дійсних підпросторах довільної скінченновимірної комутативної асоціативної алгебри над комплексним полем і примають значення в цій алгебрі, встановлено основні властивості, аналогічні властивостям голоморфних функцій комплексної змінної. Методи дослідження базуються на представленні моногенних функцій через голоморфні функції комплексних змінних, що дає змогу встановити аналоги умов Коші-Рімана та неперервність похідних Гато всіх порядків для моногенних функцій. У такий спосіб доведено аналоги ряду класичних теорем комплексного аналізу (інтегральна теорема Коші для криволінійного інтеграла, інтегральна формула Коші, теорема Морери, теорема Тейлора) та встановлено різні еквівалентні означення моногенних функцій. Доведено аналог теореми Коші для поверзневого інтеграла по не кусково гладких поверхнях.

2020 Mathematics Subject Classification: 30G35, 35J05, 31A30

Ключові слова: комутативна банахова алгебра; моногенна функція; аналітична функція; гіперголоморфна функція; умови Коші-Рімана; теорема Коші; інтегральна формула Коші; теорема Морери; теорема Тейлора

DOI: http://dx.doi.org/10.3842/trim.v20n1.533

1. Вступ

З середини 70-х років минулого століття в Інституті математики НАН України, починаючи з роботи І. П. Мельниченка [55], систематично і послідовно розробляється алгебраїчно-аналітичний підхід до основних еліптичних рівнянь математичної фізики, який пов'язаний з використанням комутативних алгебр.

Ідея такого підходу полягає у знаходженні комутативних банахових алгебр таких, щоб диференційовні за Гато функції зі значеннями в цих алгебрах мали компоненти, які є розв'язками заданих рівнянь з частинними похідними.

Такі алгебри були знайдені І. П. Мельниченком для тривимірного рівняння Лапласа (див. [55, 58, 59]) і еліптичних рівнянь з виродженням на осі, що описують осесиметричні потенціальні поля (див. [56,59]), В. Ф. Ковальовим і І. П. Мельниченком для двовимірного бігармонічного рівняння (див. [51, 57]) і узагальненого бігармонічного рівняння (див. [52]). Згодом, в роботах [27, 31] показано, що для опису всіх просторових гармонічних функцій у формі компонент диференційовних за Гато гіперкомплексних функцій відповідні нескінченновимірні комутативні банахові алгебри необхідно включити у топологічні векторні простори з тим же базисом і топологією покоординатної збіжності.

Інтерес до дослідження функцій в комутативних алгебрах гіперкомплексних чисел останнім часом зростає у зв'язку з поєднанням зручностей властивості комутативності з широкими можливостями застосувань (див., наприклад, монографії Г.Б, Прайса [35], Д. Бокалетті та ін. [9], М.Е. Луна-Елізаррарас та ін. [24] і роботи В.В. Кісіля [20, 21], А. Погоруя, М.Н. Родрігеса-Даніно і М. Шапіро [34], в яких вивчаються різноманітні алгебраїчні, геометричні і аналітичні аспекти теорії гіперкомплексних чисел).

Зрозуміло, що для успішної реалізації вказаного вище підходу до основних еліптичних рівнянь математичної фізики, необхідно розповсюдити класичні методи теорії голоморфних функцій комплексної змінної на диференційовні за Гато функції, задані в банахових алгебрах, асоційованих з рівняннями математичної фізики. Ускладненість ситуації при цьому полягає в обмеженості можливостей переносу класичних теорем комплексного аналізу в аналіз на банахових алгебрах.

У роботі Е. Р. Лорха [23] доведено інтегральну теорему Коші та інтегральну формулу Коші, теореми Тейлора та Морера для функцій, диференційовних у сенсі Лорха в довільній опуклій області комутативної банахової алгебри. Умову опуклості області в цих результатах було знято Е.К. Блюмом [5].

У той же час, застосування диференціовних функцій зі значеннями в комутативних банахових алгебрах до побудови розв'язків рівнянь математичної фізики вимагає дослідження таких функцій у спеціальних дійсних підпросторах вказаних алгебр (див. цитовані роботи [27, 31, 51, 52, 55, 57–59] та роботи П. В. Кетчума [18, 19], Л. Собреро [45]) і М. Н. Рошкулеця [39].

У цій роботі розглядаються моногенні (тобто неперервні та диференційовні за Гато) функції $\Phi : \Omega \to \mathbb{A}$, що визначені в області Ω певного дійсного підпростору E_3 скінченновимірної комутативної асоціативної алгебри $\mathbb{A}$ з одиницею над полем комплексних чисел і приймають значення в цій алгебрі.

Як буде показано, основні властивості таких моногенних функцій аналогічні властивостям голоморфних функцій комплексної змінної. Методи дослідження базуються на представленні моногенних функцій через голоморфні функції комплексних змінних, що дає змогу встановити аналоги умов Коші-Рімана та неперервність похідних Гато всіх порядків для моногенних функцій. У такий спосіб доведено аналоги ряду класичних теорем комплексного аналізу (інтегральна теорема Коші для криволінійного інтеграла, інтегральна формула Коші, теорема Морери, теорема Тейлора) та встановлено різні еквівалентні означення моногенних функцій.

Встановлені результати узагальнюють відповідні результати робіт [26, 28–30, 33] для моногенних функцій в конкретних скінченновимірних комутативних асоціативних алгебрах. Згадаємо також роботи П.В. Кетчума [18, 19], В. Гончарова [14] і М.Н. Рошкулеця [38, 40], в яких аналоги теореми Коші та інтегральної формули Коші для криволінійного інтеграла встановлено в інших конкретних комутативних алгебрах.

Вкажемо роботи, в яких деякі інтегральні теореми доведено в некомутативних алгебрах. Так, ряд гіперкомплексних аналогів інтегральної теореми Коші для криволінійного інтеграла встановлено в роботах А. Садбері [48], Ф. Коломбо, І. Сабадіні і Д. Струппи [11]. В роботах А. Садбері [48], Ф. Брекса, Р. Деланга і Ф. Соммена [7], В. В. Кравченка і М. В. Шапіро [22], С. Бернштейн [4], О. Ф. Геруса [49] подібні теореми доведено для поверхневого інтеграла.

2. Моногенні функції в скінченновимірній комутативній асоціативній алгебрі

Нехай $\mathbb{A}$ – n-вимірна комутативна асоціативна банахова алгебра з одиницею 1 над полем дійсних чисел $\mathbb{R}$ або над полем комплексних чисел $\mathbb{C}$, $3 \leqslant n \leqslant \infty$.

Розглянемо в алгебрі $\mathbb{A}$ вектори $e_1 = 1$, e_2, e_3, лінійно незалежні над полем $\mathbb{R}$. Це означає, що рівність

$$\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3 = 0, \qquad \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R},$$

виконується тоді і тільки тоді, коли $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$.

Нехай $E_3 := \{\zeta := xe_1 + ye_2 + ze_3 \ : \ x, y, z \in \mathbb{R}\}$ – лінійна оболонка векторів e_1, e_2, e_3 над полем $\mathbb{R}$.

Будемо використовувати однакове позначення Ω для області $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ і для області в E_3, яка є конгруентною до області Ω.

2.1. **Диференційовність за Лорхом і за Гато. Моногенні і аналітичні функції.** Розглянемо функцію $\Phi\colon \Omega \to \mathbb{A}$, визначену в області $\Omega \subset E_3$, і поняття диференційовності цієї функції за Лорхом і за Гато.

Функція $\Phi\colon \Omega \to \mathbb{A}$ називається *диференційовною за Лорхом* (див. [23]) в області $\Omega \subset E_3$, якщо для кожної точки $\zeta \in \Omega$ існує елемент $\Phi'_L(\zeta) \in \mathbb{A}$ такий, що для кожного $\varepsilon > 0$ існує $\delta > 0$ таке, що для всіх $h \in E_3$, для яких $\|h\| < \delta$, виконується нерівність

$$\big\|\Phi(\zeta + h) - \Phi(\zeta) - h\Phi'_L(\zeta)\big\| \leqslant \|h\|\,\varepsilon. \tag{2.1}$$

Очевидно, що в нерівності (2.1) *похідна Лорха* $\Phi'_L(\zeta)$ є функцією змінної ζ, тобто $\Phi'_L\colon \Omega \to \mathbb{A}$.

Зазначимо, що динференційовними за Лорхом функціями в комутативних асоціативних банахових алгебрах над полем $\mathbb{C}$ є, зокрема, головні продовження (див., наприклад, монографію Е. Хілле і Р. Філліпса [63, с. 182]) голоморфних функцій комплексної змінної. Якщо комплексна функція F є голоморфною в області $D \subset \mathbb{C}$, то для усіх $\zeta \in \mathbb{A}$, спектр яких міститься в D, головне продовження функції F виражається рівністю

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma} F(t)\,(t-\zeta)^{-1}\,dt, \tag{2.2}$$

де Γ – довільна замкнена спрямлювана жорданова крива в D, яка охоплює спектр елемента ζ.

Використовуючи диференціал Гато, І. П. Мельниченко [55] розглянув похідну Гато функції $\Phi\colon \Omega \to \mathbb{A}$ також як функцію точки $\zeta \in \Omega$.

Ми кажемо, що функція $\Phi\colon \Omega \to \mathbb{A}$ є *диференційовною за Гато* в області $\Omega \subset E_3$, якщо для кожної точки $\zeta \in \Omega$ існує елемент $\Phi'_G(\zeta) \in \mathbb{A}$ такий, що

$$\lim_{\delta \to 0+0} \left(\Phi(\zeta + \delta h) - \Phi(\zeta)\right)\delta^{-1} = h\Phi'_G(\zeta) \quad \forall h \in E_3. \tag{2.3}$$

Очевидно, що *похідна Гато* $\Phi'_G(\zeta)$ для кожного вектора $h \in E_3$ є узагальненням класичної похідної за напрямком.

Зауважимо, що обидва означення: похідної Лорха (2.1) і похідної Гато (2.3), – враховують існування необоротних елементів h в алгебрі $\mathbb{A}$, оскільки в цих означеннях не використовується ділення на елементи алгебри на відміну від класичного означення похідної функції комплексної змінної.

Очевидно, що функція Φ, диференційовна за Лорхом в області Ω, є також диференційовною за Гато і $\Phi'_L(\zeta) = \Phi'_G(\zeta)$ для всіх $\zeta \in \Omega$. Обернене твердження не є істинним подібно до того, як існування класичних похідних у точці за усіма напрямками не гарантує сильної диференційовності (і навіть неперервності) функції у цій точці.

Для функції $\Phi\colon \Omega \to \mathbb{A}$ розглянемо поняття моногенності та аналітичності.

Ми говоримо, що функція $\Phi\colon \Omega \to \mathbb{A}$ *моногенна* в області $\Omega \subset E_3$, якщо Φ неперервна і диференційовна за Гато в кожній точці області Ω.

Ми використовуємо поняття моногенної функції у сенсі існування для неї похідних чисел (див. монографії Е. Гурса [15] і Ю. Ю. Трохимчука [62]) у поєднанні з неперервністю цієї функції.

У науковій літературі назва моногенна функція використовується також для функцій, які задані у некомутативних алгебрах і задовольняють деякі умови, подібні до класичних умов Коші-Рімана (див., наприклад, роботу Дж. Райана [41]). Такі функції називають також регулярними (див., наприклад, роботу А. Садбері [48]) або гіперголоморфними (див., наприклад, монографію В. В. Кравченка і М. В. Шапіро [22]).

Функцію $\Phi : \Omega \to \mathbb{A}$ називають *аналітичною* в області $\Omega \subset E_3$, якщо в деякому околі кожної точки $\zeta_0 \in \Omega$ вона може бути представлена у вигляді суми збіжного степеневого ряду з коефіцієнтами, що належать алгебрі $\mathbb{A}$.

Очевидно, що кожна аналітична функція $\Phi : \Omega \to \mathbb{A}$ є моногенною в області $\Omega \subset E_3$ і її похідна Гато $\Phi'_G(\zeta)$ також є моногенною в цій області. Далі будуть вказані достатні умови, за яких моногенна функція

$$\Phi : \Omega \to \mathbb{A}$$

є аналітичною в області $\Omega \subset E_3$.

2.2. **Представлення моногенних функцій за допомогою голоморфних функцій комплексних змінних.** Нехай тепер $\mathbb{A}$ – довільна n-вимірна комутативна асоціативна алгебра з одиницею над полем комплексних чисел. Е. Картан у роботі [8] довів, що в алгебрі $\mathbb{A}$ існує базис $\{I_k\}_{k=1}^n$ і існують структурні константи $\Upsilon_{r,k}^s$ такі, що виконуються наступні правила множення:

$$1)\ \forall r,s \in [1,m] \cap \mathbb{N} : \quad I_r I_s = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad r \neq s, \\ I_r & \text{при} \quad r = s; \end{cases}$$

2) $\forall r,s\in[m+1,n]\cap\mathbb{N}:\quad I_rI_s=\sum\limits_{k=\max\{r,s\}+1}^{n}\Upsilon_{r,k}^{s}I_k\,;$

3) $\forall s\in[m+1,n]\cap\mathbb{N}\,\exists\,!\,u_s\in[1,m]\cap\mathbb{N}\quad\forall\,r\in[1,m]\cap\mathbb{N}:$

$$I_rI_s=\begin{cases}0 & \text{при}\quad r\neq u_s,\\ I_s & \text{при}\quad r=u_s,\end{cases}$$

де $\mathbb{N}$ – множина натуральних чисел. Очевидно, що перші m базисних векторів $\{I_u\}_{u=1}^{m}$ є ідемпотентами і породжують напівпросту підалгебру $\mathcal{S}$ алгебри $\mathbb{A}$, а вектори $\{I_r\}_{r=m+1}^{n}$ породжують нільпотентну підалгебру $\mathcal{N}$ цієї алгебри. Надалі алгебру $\mathbb{A}$ з базисом Картана позначатимемо $\mathbb{A}_n^m$. Одиницею алгебри $\mathbb{A}_n^m$ є елемент $1=\sum\limits_{u=1}^{m}I_u$.

Норма елемента $v=\sum\limits_{r=1}^{n}v_rI_r$ алгебри $\mathbb{A}_n^m$ визначається рівністю

$$\|v\|:=\sqrt{\sum_{r=1}^{n}|v_r|^2}.$$

Алгебра $\mathbb{A}_n^m$ містить m максимальних ідеалів

$$\mathcal{I}_u:=\left\{\sum_{k=1,\,k\neq u}^{n}\lambda_kI_k\mid\lambda_k\in\mathbb{C}\right\},\quad u=1,2,\ldots,m.$$

Визначимо m лінійних неперервних мультиплікативних функціоналів $f_u:\mathbb{A}_n^m\to\mathbb{C}$ рівностями

$$f_u(I_u)=1,\qquad\qquad f_u(\omega)=0,$$

для всіх $\omega\in\mathcal{I}_u$, $u=1,2,\ldots,m$. Нехай

$$e_1=1,\qquad e_2=\sum_{r=1}^{n}a_rI_r,\qquad e_3=\sum_{r=1}^{n}b_rI_r \tag{2.4}$$

при $a_r,b_r\in\mathbb{C}$ – трійка векторів в алгебрі $\mathbb{A}_n^m$, які лінійно незалежні над полем $\mathbb{R}$.

Нехай $\zeta:=xe_1+ye_2+ze_3$, де $x,y,z\in\mathbb{R}$.

Очевидно, що $\xi_u:=f_u(\zeta)=x+ya_u+zb_u$, $u=1,2,\ldots,m$.

Накладемо наступне обмеження на вибір лінійної оболонки E_3:

$$f_u(E_3):=\{f_u(\zeta):\zeta\in E_3\}=\mathbb{C},\qquad u=1,2,\ldots,m, \tag{2.5}$$

тобто образом $f_u(E_3)$ множини E_3 при кожному відображенні f_u має бути вся комплексна площина (див. [28]). Очевидно, що це має місце тоді і тільки тоді, коли при кожному фіксованому $u=1,2,\ldots,m$ хоча б одне з чисел a_u чи b_u належить $\mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$.

Для області $\Omega \subset E_3$ через D_u позначимо область комплексної площини, на яку Ω відображається функціоналом f_u.

У роботі [43] доведено наступне представлення резольвенти:

$$(te_1 - \zeta)^{-1} = \sum_{u=1}^{m} \frac{1}{t - \xi_u} I_u + \sum_{s=m+1}^{n} \sum_{k=2}^{s-m+1} \frac{Q_{k,s}}{(t - \xi_{u_s})^k} I_s \tag{2.6}$$

$$\forall\, t \in \mathbb{C} : t \neq \xi_u, \quad u = 1, 2, \ldots, m,$$

де $Q_{k,s}$ визначені такими рекурентними співвідношеннями:

$$Q_{2,s} := T_s, \quad Q_{k,s} = \sum_{r=k+m-2}^{s-1} Q_{k-1,r}\, B_{r,\,s}, \quad k = 3, 4, \ldots, s - m + 1,$$

при $T_s := y a_s + z b_s$, $B_{r,s} := \sum\limits_{k=m+1}^{s-1} T_k C_{r,s}^k$, $s = m + 2, \ldots, n$, а натуральні числа u_s визначені у правилі множення 3) алгебри $\mathbb{A}_n^m$.

Із співвідношень (2.6) випливає, що точки $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, які відповідають необоротним елементам $\zeta \in \mathbb{A}_n^m$, лежать на прямих

$$L_u : \quad \begin{cases} x + y \operatorname{Re} a_u + z \operatorname{Re} b_u = 0, \\ \qquad y \operatorname{Im} a_u + z \operatorname{Im} b_u = 0. \end{cases} \tag{2.7}$$

Наступна теорема містить представлення моногенних функцій, що приймають значення в алгебрі $\mathbb{A}_n^m$, через голоморфні функції комплексних змінних.

Теорема 2.3 ([43]). *Нехай виконується умова (2.5) і область $\Omega \subset E_3$ є опуклою в напрямку прямих L_u при всіх $u = 1, 2, \ldots, m$. Тоді кожна моногенна функція $\Phi : \Omega \to \mathbb{A}_n^m$ подається у вигляді*

$$\begin{aligned} \Phi(\zeta) = \sum_{u=1}^{m} I_u \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_u} F_u(t)(t - \zeta)^{-1}\, dt + \\ + \sum_{s=m+1}^{n} I_s \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_{u_s}} G_s(t)(t - \zeta)^{-1}\, dt, \end{aligned} \tag{2.8}$$

де F_u – деяка голоморфна функція в області D_u і G_s – деяка голоморфна функція в області D_{u_s}, а Γ_q – замкнена жорданова спрямлювана крива, яка лежить в області D_q, охоплює точку ξ_q і не містить точок ξ_ℓ, $\ell = 1, 2, \ldots, m, \ell \neq q$.

Зауваження 2.4. Основна відмінність між інтегральним оператором (2.8) і головним продовженням (2.2) голоморфних функцій у комутативну банахову алгебру полягає в тому, що крива Γ_u не зобов'язана охоплювати всі точки спектра елемента ζ. Тому інтегральний оператор (2.8) застосовний також у випадку, коли деякі точки згаданого спектра не належать області D.

Зазначимо, що Теорему 2.3 узагальнено в роботі [44] на випадок моногенних функцій $\Phi : \Omega \to \mathbb{A}_n^m$, заданних в області $\Omega \subset E_k$, де

$$E_k := \{\zeta = \sum_{j=1}^{k} x_j e_j : \ \ x_j \in \mathbb{R}\}$$

– лінійна оболонка векторів $e_1 = 1, e_2, \ldots, e_k$, $2 \leqslant k \leqslant 2n$, лінійно незалежних над полем $\mathbb{R}$. Отримані представлення моногенних функцій узагальнюють відповідні результати робіт [28, 33, 50, 60, 61] та ряд інших результатів про представлення аналітичних функцій в конкретних скінченновимірних комутативних алгебрах, що беруть свій початок від роботи Ф. Рінглеба [37], який отримав аналогічне представлення аналітичних функцій бікомплексної змінної.

Принциповими наслідками рівності (2.8) є твердження, сформульовані в наступній теоремі, яка справедлива для довільної області $\Omega \subset E_3$.

Теорема 2.5. *Нехай виконується умова* (2.5) *і функція* $\Phi : \Omega \to \mathbb{A}_n^m$ *є моногенною в довільній області* $\Omega \subset E_3$. *Тоді:*

1) *функція* Φ *є диференціовною за Лорхом в області* Ω *;*
2) *похідні Гато* $\Phi_G^{(r)}$ *є моногенними функціями в* Ω *для всіх* r.

Доведення. Розглянемо довільну точку $\zeta_0 \in \Omega$ і кулю $\mho \subset \Omega$ з центром у точці ζ_0.

Оскільки $\mho$ – опукла множина, то функція Φ подається у вигляді (2.8) в $\mho$. Звідси випливає, що компоненти U_k розкладу

$$\Phi(\zeta) = \sum_{k=1}^{n} U_k(x, y, z)\, I_k. \tag{2.9}$$

є $\mathbb{R}$-диференційовними функціями в області $\mho$, тобто співвідношення

$$U_k(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z) - U_k(x, y, z) =$$
$$= \frac{\partial U_k(x,y,z)}{\partial x}\,\Delta x + \frac{\partial U_k(x,y,z)}{\partial y}\,\Delta y + \frac{\partial U_k(x,y,z)}{\partial z}\,\Delta z +$$
$$+\, o\left(\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2}\right), \ (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2 \to 0,$$

виконуються для всіх $(x, y, z) \in \mho$.

Тепер диференційовність функції Φ за Лорхом в області $\mho$ встановлюється повністю аналогічно до диференційовності функції комплексної змінної за умови, що її дійсна і уявна частини є диференційовними функціями двох дійсних змінних (див., наприклад, М.О. Лаврентьєв і Б.В. Шабат [53, с. 21]).

Використовуючи представлення (2.8) функції Φ в області $\mho$, отримуємо наступний вираз для похідної Гато порядку r:

$$\Phi_G^{(r)}(\zeta) = \sum_{u=1}^{m} I_u \frac{r!}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma_u} F_u(t)\Big((te_1 - \zeta)^{-1}\Big)^{r+1} dt +$$
$$+ \sum_{s=m+1}^{n} I_s \frac{r!}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma_{u_s}} G_s(t)\Big((te_1 - \zeta)^{-1}\Big)^{r+1} dt, \qquad \forall\, \zeta \in \mho.$$

Більш того, ця похідна є неперервною функцією в області $\mho$. Отже, похідна Гато $\Phi_G^{(r)}$ є моногенною функцією в $\mho$ для будь-якого r.

В силу довільності вибору точки ζ_0 і кулі $\mho$ всі твердження теореми справедливі в області Ω. □

Розглянемо питання про аналоги умов Коші-Рімана як необхідних і достатніх умов моногенності функцій $\Phi : \Omega \to \mathbb{A}_n^m$.

Теорема 2.6. *Нехай виконується умова* (2.5). *Для того, щоб функція* $\Phi : \Omega \to \mathbb{A}_n^m$ *була моногенною в області* $\Omega \subset E_3$, *необхідно і достатньо, щоб усі функції* $U_k : \Omega \to \mathbb{C}$ *в розкладі* (2.9) *були* $\mathbb{R}$*-диференціовними в області* Ω *і в цій області виконувалися умови*

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} = \frac{\partial \Phi}{\partial x} e_2, \qquad \frac{\partial \Phi}{\partial z} = \frac{\partial \Phi}{\partial x} e_3. \tag{2.10}$$

Доведення. Необхідність. $\mathbb{R}$-диференційовність функцій $U_k : \Omega \to \mathbb{C}$ в розкладі (2.9) випливає з представлення (2.8) моногенної функції Φ (див. доведення теореми 2.5).

Вибираючи в рівності (2.3) послідовно елементи $e_1 = 1, e_2, e_3$ у якості вектора h, отримуємо рівності

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = \Phi'_G(\zeta), \qquad \frac{\partial \Phi}{\partial y} = e_2\, \Phi'_G(\zeta), \qquad \frac{\partial \Phi}{\partial z} = e_3\, \Phi'_G(\zeta),$$

наслідком яких є рівності (2.10).

Достатність доводиться повністю аналогічно до того, як це робиться при доведенні відповідної теореми про диференційовність функцій комплексної змінної (див., наприклад, М. О. Лаврентьєв і Б. В. Шабат [53, с. 21]). □

Отже, умови (2.10) за своєю природою аналогічні до класичних умов Коші-Рімана для голоморфних функцій комплексної змінної.

3. Контурні інтегральні теореми для моногенних функцій в скінченновимірній комутативній асоціативній алгебрі

Розглянемо лініну оболонку

$$E_3 := \{\zeta = xe_1 + ye_2 + ze_3 \mid x, y, z \in \mathbb{R}\},$$

породжену векторами (2.4).

Визначимо криволінійний інтеграл в просторі E_3. Будемо використовувати те саме позначення γ для кривої в $\mathbb{R}^3$ і для конгруентної кривої в E_3.

Для спрямлюваної жорданової кривої γ в $\mathbb{R}^3$ і неперервної функції $\Psi : \gamma \to \mathbb{A}_n^m$, розкладеної за базисом $\{I_k\}_{k=1}^n$ у вигляді

$$\Psi(\zeta) = \sum_{k=1}^n U_k(x, y, z)\, I_k + i \sum_{k=1}^n V_k(x, y, z)\, I_k, \tag{3.1}$$

де $(x, y, z) \in \gamma$ і $U_k : \gamma \to \mathbb{R}$, $V_k : \gamma \to \mathbb{R}$, визначимо інтеграл вздовж кривої $\gamma \subset E_3$ рівністю

$$\int_\gamma \Psi(\zeta)\, d\zeta := \sum_{k=1}^n I_k \int_\gamma U_k(x, y, z)\, dx + \sum_{k=1}^n e_2 I_k \int_\gamma U_k(x, y, z)\, dy +$$
$$+ \sum_{k=1}^n e_3 I_k \int_\gamma U_k(x, y, z)\, dz + i \sum_{k=1}^n I_k \int_\gamma V_k(x, y, z)\, dx +$$
$$+ i \sum_{k=1}^n e_2 I_k \int_\gamma V_k(x, y, z)\, dy + i \sum_{k=1}^n e_3 I_k \int_\gamma V_k(x, y, z)\, dz,$$

де $d\zeta := e_1\, dx + e_2\, dy + e_3\, dz$.

Визначимо також поверхневий інтеграл в просторі E_3. Ми використовуємо те саме позначення Σ для поверхні в $\mathbb{R}^3$ і для конгруентної поверхні в E_3.

Нехай Σ – поверхня в $\mathbb{R}^3$ з вимірними за Жорданом проекціями на координатні площини. Для неперервної функції $\Psi : \Sigma \to \mathbb{A}_n^m$, розкладеної за базисом $\{I_k\}_{k=1}^n$ у вигляді (3.1), де $(x, y, z) \in \Sigma$ і $U_k : \Sigma \to \mathbb{R}$, $V_k : \Sigma \to \mathbb{R}$, визначимо інтеграл по поверхні Σ з диференціальною формою $dx\, dy$ рівністю

$$\int_\Sigma \Psi(\zeta)\, dx\, dy := \sum_{k=1}^n I_k \int_\Sigma U_k(x, y, z)\, dx\, dy + i \sum_{k=1}^n I_k \int_\Sigma V_k(x, y, z)\, dx\, dy.$$

Аналогічно визначаються інтеграли з диференціальними формами $dydz$ та $dzdx$.

Означення криволінійного і поверхневого інтегралів від функції гіперкомплексної змінної коректні в тому сенсі, що їх значення не залежать від вибору допустимих параметризацій відповідно кривої чи поверхні, оскільки гіперкомплексні інтеграли визначаються через відповідні дійсні інтеграли.

3.1. **Формула Стокса і теорема Коші для криволінійного інтеграла.** Наступне твердження містить аналог формули Стокса в алгебрі $\mathbb{A}_n^m$.

Теорема 3.2. *Якщо функція $\Phi : \Omega \to \mathbb{A}_n^m$ неперервна разом з частинними похідними першого порядку в області $\Omega \subset E_3$ і Σ – кусково-гладка поверхня в Ω, край якої γ є кусково-гладкою жордановою кривою, то справедливий наступний аналог формули Стокса:*

$$\int\limits_{\gamma} \Phi(\zeta)\, d\zeta = \int\limits_{\Sigma} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} e_2 - \frac{\partial \Phi}{\partial y} e_1\right) dx\, dy + \\ + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} e_3 - \frac{\partial \Phi}{\partial z} e_2\right) dy\, dz + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial z} e_1 - \frac{\partial \Phi}{\partial x} e_3\right) dz\, dx.$$

Тепер перший крок в доведенні теореми Коші для гіперкомплексного криволінійного інтеграла полягає у використанні неперервності похідної Гато моногенної функції, яку встановлено в теоремі 2.5 за умови (2.5), аналогів умов Коші-Рімана (2.10) і теореми 3.2. В результаті отримуємо наступне твердження.

Теорема 3.3. *Нехай виконується умова* (2.5). *Нехай $\Phi : \Omega \to \mathbb{A}_n^m$ – моногенна функція в області $\Omega \subset E_3$ і Σ – кусково-гладка поверхня в Ω, край якої γ є кусково-гладкою жордановою кривою. Тоді*

$$\int\limits_{\gamma} \Phi(\zeta)\, d\zeta = 0. \tag{3.2}$$

Зауваження 3.4. Зокрема, рівність (3.2) виконується у випадку, коли γ – межа $\partial\triangle$ будь-якого трикутника $\triangle$, що міститься в Ω. Пояснимо, що під трикутником $\triangle$ ми розуміємо плоску фігуру, обмежену трьома відрізками, що з'єднують три його вершини, а межа $\partial\triangle$ розглядається у відносній топології площини трикутника.

Другий крок в доведенні теореми Коші для гіперкомплексного криволінійного інтеграла здійснюється у випадку, коли область $\Omega \subset E_3$ є опуклою і γ – довільна замкнена спрямлювана жорданова крива в області Ω. У цьому випадку рівність (3.2) для кожної моногенної функції $\Phi : \Omega \to \mathbb{A}_n^m$ може бути доведена класичним способом так, як це зробив Е. Р. Лорх [23] в опуклій області усієї алгебри.

Через $\gamma[\zeta_1, \zeta_2]$ будемо позначати дугу орієнтованої жорданової кривої γ, де ζ_1 – початок цієї дуги і ζ_2 – її кінець.

Нарешті, доведемо наступний гіперкомплексний аналог інтегральної теореми Коші.

Теорема 3.5. *Нехай виконується умова* (2.5) *і функція* $\Phi : \Omega \to \mathbb{A}_n^m$ *є моногенною в області* $\Omega \subset E_3$. *Тоді для довільної замкненої жорданової спрямлюваної кривої* γ, *яка гомотопна точці в* Ω, *справедлива рівність* (3.2).

Доведення. Застосуємо схему доведення теореми 3.2 з роботи Е. Блюма [5]. Нехай крива γ має параметризацію $\zeta = \phi(t)$, $0 \leqslant t \leqslant 1$, при цьому $\phi(0) = \phi(1) = \zeta_0$, і нехай γ – гомотопна точці ζ_0. Тоді існує функція $H(s,t)$ двох дійсних змінних s і t, яка неперервна на квадраті $Q := [0,1] \times [0,1]$ і приймає значення в області Ω, така, що

$$H(0,t) = \phi(t), \quad H(1,t) \equiv \zeta_0 \qquad \forall\, t \in [0,1],$$
$$H(s,0) = H(s,1) = \zeta_0 \qquad \forall\, s \in [0,1].$$

Оскільки функція H – неперервна на компактній множині Q, то образ $K := \{H(s,t) : (s,t) \in Q\}$ є компактною множиною в Ω. Позначимо

$$\rho := \min_{\zeta' \in K,\, \zeta'' \in \partial\Omega} \|\zeta' - \zeta''\|.$$

Оскільки функція H – рівномірно неперервна на множині Q, то існує $\delta > 0$ таке, що

$$\|H(s',t') - H(s,t)\| < \rho/2 \tag{3.3}$$

для всіх $(s,t), (s',t') : |s' - s| < \delta,\ |t' - t| < \delta$.

Виберемо числа $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = 1$, що задовольняють нерівності $t_j - t_{j-1} < \delta$, $j = 1, 2, \ldots, n$, і покладемо $s_1 = t_1$. Позначимо $\zeta_{0,j} := H(0, t_j)$, $\zeta_{1,j} := H(s_1, t_j)$ при $j = 1, 2, \ldots, n-1$. Також через L_j позначимо відрізок з початком у точці $\zeta_{0,j}$ і кінцем у точці $\zeta_{1,j}$.

Введемо в розгляд криву $\gamma_1 := \{H(s_1, t) : 0 \leqslant t \leqslant 1\}$. Не зменшуючи загальності, можемо вважати, що крива γ_1 є спрямлюваною, оскільки, якщо це необхідно, γ_1 може бути замінена гомотопною їй ламаною, яка складається з відрізків, що послідовно сполучають точки $\zeta_0, \zeta_{1,1}, \zeta_{1,2}, \ldots, \zeta_{1,n}$.

В силу нерівності (3.3) дуги $\gamma[\zeta_0, \zeta_{01}]$, $\gamma_1[\zeta_0, \zeta_{11}]$ і відрізок L_1 містяться в кулі

$$B(\zeta_0) := \{\zeta \in E_3 : \|\zeta - \zeta_0\| < \rho\}.$$

Оскільки $B(\zeta_0)$ – опукла множина, що міститься в Ω, то

$$\int\limits_{\gamma[\zeta_0,\zeta_{01}]} \Phi(\zeta)d\zeta \ + \int\limits_{L_1} \Phi(\zeta)d\zeta \ = \int\limits_{\gamma_1[\zeta_0,\zeta_{11}]} \Phi(\zeta)d\zeta. \tag{3.4}$$

При $j = 1, 2, \ldots, n-2$ з (3.3) випливають наступні нерівності:

$$\begin{aligned} \|\zeta - \zeta_{0,j}\| < \rho/2, &\qquad \forall\, \zeta \in \gamma[\zeta_{0,j}, \zeta_{0,j+1}], \\ \|\zeta - \zeta_{1,j}\| < \rho/2, &\qquad \forall\, \zeta \in \gamma_1[\zeta_{1,j}, \zeta_{1,j+1}], \\ \|\zeta_{1,j} - \zeta_{0,j}\| < \rho/2, & \end{aligned}$$

в силу яких дуги $\gamma[\zeta_{0,j}, \zeta_{0,j+1}]$, $\gamma_1[\zeta_{1,j}, \zeta 1, j+1]$ і відрізки L_j, L_{j+1} містяться в кулі $B(\zeta_{0,j}) := \{\zeta \in E_3 : \|\zeta - \zeta_{0,j}\| < \rho\}$. Оскільки $B(\zeta_{0,j})$ – опукла множина, що міститься в Ω, то

$$-\int\limits_{L_j} \Phi(\zeta)d\zeta \ + \int\limits_{\gamma[\zeta_{0,j},\zeta_{0,j+1}]} \Phi(\zeta)d\zeta \ + \int\limits_{L_{j+1}} \Phi(\zeta)d\zeta \ = \int\limits_{\gamma_1[\zeta_{1,j},\zeta_{1,j+1}]} \Phi(\zeta)d\zeta, \tag{3.5}$$

$j = 1, 2, \ldots, n-2$.

Нарешті, подібно до рівності (3.4) отримуємо рівність

$$-\int\limits_{L_{n-1}} \Phi(\zeta)d\zeta \ + \int\limits_{\gamma[\zeta_{0,n-1},\zeta_0]} \Phi(\zeta)d\zeta \ = \int\limits_{\gamma_1[\zeta_{1,n-1},\zeta_0]} \Phi(\zeta)d\zeta. \tag{3.6}$$

Додаючи всі рівності (3.4), (3.5) і (3.6), бачимо, що знищуються всі інтеграли вздовж відрізків і залишається рівність

$$\int\limits_{\gamma} \Phi(\zeta)d\zeta \ = \int\limits_{\gamma_1} \Phi(\zeta)d\zeta. \tag{3.7}$$

Далі покладаємо $s_j = t_j$ і вводимо в розгляд криву $\gamma_j := \{H(s_j, t) : 0 \leqslant t \leqslant 1\}$ при $j = 2, 3, \ldots, n$. Подібно до γ_1, не зменшуючи загальності, можемо вважати, що всі криві γ_j є спрямлюваними.

Тепер подібно до рівності (3.7) отримуємо рівності

$$\int\limits_{\gamma_1} \Phi(\zeta)d\zeta = \int\limits_{\gamma_2} \Phi(\zeta)d\zeta = \ldots = \int\limits_{\gamma_n} \Phi(\zeta)d\zeta.$$

Таким чином, ми отримали рівність

$$\int\limits_{\gamma} \Phi(\zeta)d\zeta = \int\limits_{\gamma_n} \Phi(\zeta)d\zeta,$$

в якій крива γ_n вироджується в точку, оскільки $H(1,t) \equiv \zeta_0$. Отже,

$$\int\limits_{\gamma_n} \Phi(\zeta) d\zeta = 0,$$

і рівність (3.2) доведено. □

3.6. **Теорема Морери.** Через $s[\zeta_1, \zeta_2]$ позначимо відрізок з початком ζ_1 і кінцем ζ_2.

Справедливий наступний аналог теореми Морера для функцій зі значеннями в алгебрі $\mathbb{A}_n^m$.

Теорема 3.7. *Якщо функція $\Phi : \Omega \to \mathbb{A}_n^m$ неперервна в області $\Omega \subset E_3$ і задовольняє рівність*

$$\int\limits_{\partial\triangle} \Phi(\zeta)\, d\zeta = 0 \tag{3.8}$$

для кожного трикутника $\triangle$, що міститься в області Ω, то функція Φ є моногенною в області Ω.

Доведення. Нехай a – довільна фіксована точка в Ω. Розглянемо функцію

$$\Psi(\zeta) \ := \int\limits_{s[a,\zeta]} \Phi(\tau)\, d\tau.$$

Покажемо, що функція Ψ є моногенною в області Ω і

$$\Psi'_G(\zeta) = \Phi(\zeta). \tag{3.9}$$

Візьмемо $h \in E_3$ і $\delta > 0$ такі, що трикутник $\triangle$ з вершинами a, ζ і $\zeta + \delta h$ міститься в Ω.

Використовуючи рівність (3.8), перетворюємо різницю

$$\begin{aligned}\Psi(\zeta+\delta h) - \Psi(\zeta) \ &= \int\limits_{s[a,\zeta+\delta h]} \Phi(\tau)\, d\tau \ - \int\limits_{s[a,\zeta]} \Phi(\tau)\, d\tau \ = \\ &= \int\limits_{s[a,\zeta+\delta h]} \Phi(\tau)\, d\tau \ + \int\limits_{s[\zeta,a]} \Phi(\tau)\, d\tau \ + \int\limits_{s[\zeta+\delta h,\zeta]} \Phi(\tau)\, d\tau \ - \int\limits_{s[\zeta+\delta h,\zeta]} \Phi(\tau)\, d\tau \ = \\ &= \int\limits_{\triangle} \Phi(\tau)\, d\tau \ + \int\limits_{s[\zeta,\zeta+\delta h]} \Phi(\tau)\, d\tau \ = \int\limits_{s[\zeta,\zeta+\delta h]} \Phi(\tau)\, d\tau.\end{aligned} \tag{3.10}$$

Використовуючи рівність (3.10), і неперервність функції Φ в точці ζ, отримуємо співвідношення

$$\begin{aligned}
&\left\|\frac{\Psi(\zeta+\delta h)-\Psi(\zeta)}{\delta}-\Phi(\zeta)h\right\|=\frac{1}{\delta}\left\|\int\limits_{s[\zeta,\zeta+\delta h]}\Phi(\tau)\,d\tau-\Phi(\zeta)\delta h\right\|=\\
&=\frac{1}{\delta}\left\|\int\limits_{s[\zeta,\zeta+\delta h]}\big(\Phi(\tau)-\Phi(\zeta)\big)\,d\tau\right\|\leqslant\frac{M}{\delta}\int\limits_{s[\zeta,\zeta+\delta h]}\|\Phi(\tau)-\Phi(\zeta)\|\,\|d\tau\|\leqslant\\
&\leqslant\frac{M}{\delta}\sup_{\tau\in s[\zeta,\zeta+\delta h]}\|\Phi(\tau)-\Phi(\zeta)\|\cdot\int\limits_{s[\zeta,\zeta+\delta h]}\|d\tau\|\leqslant\\
&\leqslant M\,\|h\|\sup_{\tau\in s[\zeta,\zeta+\delta h]}\|\Phi(\tau)-\Phi(\zeta)\|\to 0,\quad \delta\to 0,
\end{aligned}\tag{3.11}$$

де M – деяка абсолютна стала.

Зі співвідношення (3.11) випливає рівність

$$\lim_{\delta\to 0+0}\frac{\Psi(\zeta+\delta h)-\Psi(\zeta)}{\delta}=\Phi(\zeta)h,$$

наслідком якої є рівність (3.9).

Оскільки в довільному околі точки ζ функція Φ є похідною Гато моногенної функції $\Psi:\Omega\to\mathbb{A}_3$, то в силу теореми 2.5 Φ є моногенною функцією в області Ω. □

3.8. **Інтегральна формула Коші.** Ми використовуємо те саме позначення L_u для множини в E_3, що є конгруентною до прямої (2.7) в $\mathbb{R}^3$. Нехай

$$\zeta_0:=x_0e_1+y_0e_2+z_0e_3$$

– довільна точка області $\Omega\subset E_3$. В околі точки ζ_0, який міститься в Ω, візьмемо коло $C(\zeta_0)$ з центром в точці ζ_0. Через C_u позначимо образ кола $C(\zeta_0)$ при відображенні f_u, $u=1,2,\ldots,m$. Припустимо, що коло $C(\zeta_0)$ *охоплює множину* (див. [28])

$$\Big\{\zeta_0+\zeta:\zeta\in\bigcup_{u=1}^{m}L_u\Big\}.\tag{3.12}$$

Це означає, що крива C_u обмежує область D'_u таку, що $f_u(\zeta_0)\in D'_u$ при $u=1,2,\ldots,m$.

Скажемо, що крива $\gamma\subset\Omega$ *один раз охоплює множину* (3.12) (див. [28]), якщо існує коло $C(\zeta_0)$, яке охоплює вказану множину і гомотопне кривій γ в області $\Omega\setminus\Big\{\zeta_0+\zeta:\zeta\in\bigcup\limits_{u=1}^{m}L_u\Big\}$.

Візьмемо коло $C(0)$ з центром в точці 0, яке міститься в E_3 і охоплює множину $\bigcup\limits_{u=1}^{m} L_u$. Оскільки функція ζ^{-1} – неперервна на кривій $C(0)$, то існує інтеграл

$$\lambda := \int\limits_{C(0)} \tau^{-1}\, d\tau. \tag{3.13}$$

В силу теореми 3.5, значення інтеграла (3.13) не залежить від вибору кола $C(0)$, яке охоплює множину $\bigcup\limits_{u=1}^{m} L_u$.

Наступне твердження містить аналог інтегральної формули Коші для моногенних функцій $\Phi : \Omega \to \mathbb{A}_n^m$, заданних в області $\Omega \subset E_3$.

Теорема 3.9. *Нехай виконується умова* (2.5) *і функція* $\Phi : \Omega \to \mathbb{A}_n^m$ *є моногенною в області* $\Omega \subset E_3$. *Тоді для кожної точки* $\zeta_0 \in \Omega$ *виконується наступна рівність:*

$$\lambda\, \Phi(\zeta_0) = \int\limits_{\gamma} \Phi(\zeta)\, (\zeta - \zeta_0)^{-1}\, d\zeta, \tag{3.14}$$

де γ *– довільна замкнена жорданова спрямлювана крива в* Ω, *яка охоплює один раз множину* (3.12).

Доведення. Для довільного $\varepsilon \in (0, 1)$ розглянемо коло

$$C(\zeta_0, \varepsilon) := \{\zeta_0 + \varepsilon(\zeta - \zeta_0) : \zeta \in C(\zeta_0)\},$$

де $C(\zeta_0)$ – коло, існування якого випливає з того, що крива γ охоплює один раз множину (3.12).

Оскільки γ гомотопна колу $C(\zeta_0, \varepsilon)$ в області $\Omega \backslash \{\zeta_0 + \zeta : \zeta \in \bigcup\limits_{u=1}^{m} L_u\}$, то з використанням теореми 3.5 отримуємо рівність

$$\int\limits_{\gamma} \Phi(\zeta)\, (\zeta - \zeta_0)^{-1}\, d\zeta \;=\; \int\limits_{C(\zeta_0,\varepsilon)} \Phi(\zeta)\, (\zeta - \zeta_0)^{-1}\, d\zeta. \tag{3.15}$$

Далі, представляючи інтеграл в правій частині рівності (3.15) у вигляді суми двох інтегралів, отримуємо

$$\begin{aligned} \int\limits_{\gamma} \Phi(\zeta)\, (\zeta - \zeta_0)^{-1}\, d\zeta \;&=\; \int\limits_{C(\zeta_0,\varepsilon)} (\Phi(\zeta) - \Phi(\zeta_0))\, (\zeta - \zeta_0)^{-1}\, d\zeta \;+ \\ &+\; \Phi(\zeta_0) \int\limits_{C(\zeta_0,\varepsilon)} (\zeta - \zeta_0)^{-1}\, d\zeta =: J_1 + J_2. \end{aligned} \tag{3.16}$$

Тут $J_2 = \lambda\, \Phi(\zeta_0)$ в силу рівності (3.13) при $\tau = \zeta - \zeta_0$.

Підінтегральна функція в інтегралі J_1 обмежена константою, яка не залежить від ε. Дійсно, в силу теореми 2.5 функція Φ диференційовна за Лорхом в області Ω і похідна $\Phi'_L = \Phi'_G$ неперервна в Ω. Тому зі співвідношення (2.1) випливає нерівність

$$\|\Phi(\zeta) - \Phi(\zeta_0)\| \leqslant c\varepsilon \qquad \forall\, \zeta \in C(\zeta_0, \varepsilon),$$

де стала c не залежить від ε. Крім того, функція $(\zeta - \zeta_0)^{-1}$, яка є неперервною на $C(\zeta_0)$, є також обмеженою на $C(\zeta_0)$. В результаті ми отримуємо оцінку

$$\|(\zeta - \zeta_0)^{-1}\| \;\leqslant\; \varepsilon^{-1} \max_{\tau \in C(\zeta_0)} \|(\tau - \zeta_0)^{-1}\| \;\leqslant\; c\varepsilon^{-1}, \quad \forall\, \zeta \in C(\zeta_0, \varepsilon),$$

де стала c не залежить від ε. З отриманих оцінок випливає, що функція $(\Phi(\zeta) - \Phi(\zeta_0))(\zeta - \zeta_0)^{-1}$ обмежена на колі $C(\zeta_0, \varepsilon)$ константою, яка не залежить від ε. Отже, інтеграл J_1 прямує до нуля, коли $\varepsilon \to 0$.

Нарешті, переходячи до границі в рівності (3.16) при $\varepsilon \to 0$, отримуємо рівність (3.14). □

На відміну від подібних результатів Е. Лорха [23] і Е. Блюма [5], функція $\Phi : \Omega \to \mathbb{A}_n^m$ в теоремі 3.9 задана тільки в області Ω підпростору E_3, а не в області з усієї алгебри. Більш того, зауважимо, що інтегральна формула Коші, встановлена у роботах [5, 23], не застосовна до моногенної функції $\Phi : \Omega \to \mathbb{A}_n^m$, оскільки в ній інтегрування здійснюється вздовж кривої, на якій функція Φ, взагалі кажучи, не визначена.

Теорема 3.10. *Стала λ, визначена рівністю* (3.13), *є оборотним елементом в алгебрі $\mathbb{A}_n^m$.*

Доведення. З розкладу (2.6) випливає рівність

$$\zeta^{-1} = \sum_{k=1}^{n} \widetilde{A}_k\, I_k \tag{3.17}$$

з коефіцієнтами $\widetilde{A}_k$, що визначаються рівностями

$$\begin{aligned} \widetilde{A}_u &= \frac{1}{\xi_u}, && u = 1, 2, \ldots, m, \\ \widetilde{A}_s &= \sum_{k=2}^{s-m+1} \frac{\widetilde{Q}_{k,s}}{\xi_{u_s}^k}, && s = m+1, m+2, \ldots, n, \end{aligned} \tag{3.18}$$

в яких $\widetilde{Q}_{k,s}$ визначаються рекурентними співвідношеннями:

$$\begin{aligned}&\widetilde{Q}_{2,s} = -T_s,\\ &\widetilde{Q}_{k,s} = -\sum_{r=k+m-2}^{s-1} \widetilde{Q}_{k-1,r}\, B_{r,\,s}, \quad k = 3, 4, \ldots, s-m+1,\end{aligned} \tag{3.19}$$

де

$$T_s := y a_s + z b_s, \qquad s = m+1, m+2, \ldots, n, \tag{3.20}$$

$$B_{r,s} := \sum_{p=m+1}^{s-1} T_p \Upsilon_{r,s}^p, \qquad s = m+2, m+3, \ldots, n, \tag{3.21}$$

а структурні сталі $\Upsilon_{r,s}^p$ і натуральні числа u_s визначені відповідно в правилах множення 2) і 3) алгебри $\mathbb{A}_n^m$.

Враховуючи рівність (3.17) і співвідношення

$$d\zeta = dx\, e_1 + dy\, e_2 + dz\, e_3 = \sum_{u=1}^{m} \Big(dx + a_u\, dy + b_u\, dz\Big) I_u + \\ + \sum_{r=m+1}^{n} \Big(a_r\, dy + b_r\, dz\Big) I_r = \sum_{u=1}^{m} d\xi_u\, I_u + \sum_{r=m+1}^{n} dT_r\, I_r,$$

отримуємо наступну рівність:

$$\zeta^{-1}\, d\zeta = \sum_{u=1}^{m} \widetilde{A}_u\, d\xi_u\, I_u + \sum_{r=m+1}^{n} \widetilde{A}_{u_r}\, dT_r\, I_r + \\ + \sum_{s=m+1}^{n} \widetilde{A}_s\, d\xi_{u_s}\, I_s + \sum_{s=m+1}^{n} \sum_{r=m+1}^{n} \widetilde{A}_s\, dT_r\, I_s I_r =: \sum_{k=1}^{n} \sigma_k\, I_k. \tag{3.22}$$

Тепер, враховуючи рівності (3.22) і (3.18), обчислюємо

$$\int\limits_{C(0)} \sum_{u=1}^{m} \sigma_u\, I_u = \sum_{u=1}^{m} I_u \int\limits_{C_u(0)} \frac{d\xi_u}{\xi_u} = 2\pi i \sum_{u=1}^{m} I_u = 2\pi i,$$

де $C_u(0)$ – образ кола $C(0)$ при відображенні f_u. Тому

$$\lambda = 2\pi i + \sum_{k=m+1}^{n} I_k \int\limits_{C(0)} \sigma_k,$$

і λ є оборотним елементом. $\square$

Отже, інтегальна формула Коші (3.14) може бути переписана у вигляді

$$\Phi(\zeta_0) = \lambda^{-1} \int\limits_{\gamma_\zeta} \Phi(\zeta)\,(\zeta - \zeta_0)^{-1}\,d\zeta. \tag{3.23}$$

В деяких спеціальних випадках (див. [28, 29, 33]) встановлено, що

$$\lambda = 2\pi i, \tag{3.24}$$

як і в комплексній площині.

Очевидно, що рівність (3.24) виконується тоді і тільки тоді, коли

$$\int\limits_{C(0)} \sigma_k = 0 \qquad \forall\ k = m+1, \ldots, n, \tag{3.25}$$

але умови (3.25) важко перевірити в загальному випадку.

Вкажемо один спеціальний випадок, коли умови (3.25) легко перевіряются і рівність (3.24) виконується. Використаємо представлення алгебри $\mathbb{A}_n^m$ у вигляді напівпрямої суми $\mathbb{A}_n^m = \mathcal{S} \oplus_s \mathcal{N}$, де $\mathcal{S}$ – m-вимірна напівпроста підалгебра і $\mathcal{N}$ – $(n-m)$-вимірна нільпотентна підалгебра.

Теорема 3.11. *Нехай $\mathbb{A}_n^m = \mathcal{S} \oplus_s \mathcal{N}$ і $E_3 \subset \mathcal{S}$. Тоді виконується рівність* (3.24).

Доведення. З умови $E_3 \subset \mathcal{S}$ випливає, що

$$a_k = b_k = 0$$

для всіх $k = m+1, \ldots, n$ в розкладі (2.4). Тому для довільного $\zeta \in E_3$, усі функції T_s і $B_{r,s}$ у співвідношеннях (3.20) і (3.21) рівні нулю.

Тепер, враховуючи співвідношення (3.19), робимо висновок про те, що в рівностях (3.18), $\widetilde{A}_s = 0$ при $s = m+1, \ldots, n$. Звідси миттєво випливають рівності $\sigma_k = 0$ при $k = m+1, \ldots, n$ і усіх $\zeta \in E_3$. Отже, умови (3.25) задовольняються і рівність (3.24) виконується. □

Зазначимо, що у випадку тривимірної лінійної оболонки E_3 теорема 3.11 узагальнює [28, теорема 6], доведену для напівпростих алгебр, на алгебри $\mathbb{A}_n^m$, які, взагалі кажучи, не є напівпростими.

Якщо крива інтерування в рівності (3.13) не охоплює множину $\bigcup\limits_{u=1}^{m} L_u$, то інтеграл в (3.13) може бути необоротним елементом алгебри $\mathbb{A}_n^m$. Це підтверджує наступний приклад.

Приклад 3.12. Розглянемо алгебру $\mathbb{A}_2$ (див. [60]) з базисом $\{\mathcal{I}_1, \mathcal{I}_2, \rho\}$ і таблицею множення:

$$\mathcal{I}_1^2 = \mathcal{I}_1, \quad \mathcal{I}_2^2 = \mathcal{I}_2, \quad \mathcal{I}_1\mathcal{I}_2 = 0, \quad \rho^2 = 0, \quad \mathcal{I}_1\rho = 0, \quad \mathcal{I}_2\rho = \rho.$$

Тут базис складається з двох ідемпотентних елементів $I_1 = \mathcal{I}_1$, $I_2 = \mathcal{I}_2$ і нільпотентного елемента $I_3 = \rho$, тобто $n = 3$ і $m = 2$.

Розглянемо інший базис в алгебрі $\mathbb{A}_2$:

$$e_1 = 1 = \mathcal{I}_1 + \mathcal{I}_2, \qquad e_2 = i\mathcal{I}_1 + \rho, \qquad e_3 = i\mathcal{I}_2.$$

Для $\zeta = xe_1 + ye_2 + ze_3$ маємо

$$\xi_1 = x + iy \qquad , \xi_2 = \xi_{u_3} = x + iz.$$

Обернений елемент (3.17) має вигляд

$$\zeta^{-1} = \frac{1}{\xi_1}\mathcal{I}_1 + \frac{1}{\xi_2}\mathcal{I}_2 - \frac{y}{\xi_2^2}\rho,$$

так що всі необоротні елементи $\zeta \in E_3$ розміщуються на двох координатних прямих $L_1 = \{ze_3 : z \in \mathbb{R}\}$ і $L_2 = \{ye_2 : y \in \mathbb{R}\}$.

Візьмемо коло

$$C^{y,R} := \{\tau = xe_1 + e_2 + ze_3 : x^2 + z^2 = R^2\},$$

яке охоплює пряму L_2, але не охоплює пряму L_1. Тоді для $\zeta \in C^{y,R}$ маємо

$$d\zeta = dx\, e_1 + dz\, e_3 = dx\, \mathcal{I}_1 + d\xi_2\, \mathcal{I}_2,$$

$$\zeta^{-1}\, d\zeta = \left(\frac{1}{x+i}\mathcal{I}_1 + \frac{1}{\xi_2}\mathcal{I}_2 - \frac{1}{\xi_2^2}\rho\right)(dx\, \mathcal{I}_1 + d\xi_2\, \mathcal{I}_2) =$$
$$= \frac{dx}{x+i}\mathcal{I}_1 + \frac{d\xi_2}{\xi_2}\mathcal{I}_2 - \frac{d\xi_2}{\xi_2^2}\rho.$$

Легко обчислюється інтеграл

$$\int\limits_{C^{y,R}} \zeta^{-1}\, d\zeta = 2\pi i\, \mathcal{I}_2,$$

тобто цей інтеграл є необоротним елементом алгебри $\mathbb{A}_n^m$.

3.13. **Теорема Тейлора.** Виконуючи розклад функції (3.23) у степеневий ряд подібно до розкладу голоморфних функцій, що базується на розкладі в степеневий ряд ядра Коші (див., наприклад, О. І. Маркушевич [54, с. 298]), отримуємо наступне твердження.

Теорема 3.14. *Нехай виконується умова* (2.5) *і функція* $\Phi : \Omega \to \mathbb{A}_n^m$ *є моногенною в області* $\Omega \subset E_3$. *Тоді* Φ *є аналітичною в області* Ω, *тобто в деякому околі кожної точки* $\zeta_0 \in \Omega$ *вона може бути представлена у вигляді суми збіжного степеневого ряду*

$$\Phi(\zeta) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k\, (\zeta - \zeta_0)^k, \tag{3.26}$$

де

$$c_n = \frac{\Phi_G^{(n)}(\zeta_0)}{n!} = \lambda^{-1} \int\limits_{\gamma} \Phi(\tau)\Big((\tau - \zeta_0)^{-1}\Big)^{n+1} d\tau, \quad n = 0, 1, \dots,$$

і γ – довільна замкнена жорданова спрямлювана крива в Ω, яка охоплює один раз множину (3.12).

3.15. **Еквівалентні означення моногенних функцій.** Наступна теорема, що містить різні еквівалентні означення моногенної функції, є аналогом класичної теореми комплексного аналізу про різні еквівалентні означення голоморфних функцій.

Теорема 3.16. *Нехай виконується умова* (2.5). *Функція $\Phi : \Omega \to \mathbb{A}_n^m$ є моногенною в довільній області $\Omega \subset E_3$ тоді і тільки тоді, коли виконується одна з наступних умов:*

(I) *усі компоненти $U_k : \Omega \to \mathbb{C}$ розкладу* (2.9) *є $\mathbb{R}$-диференційовними функціями в області Ω і в цій області виконуються умови* (2.10)*;*

(II) *функція Φ є аналітичною в області Ω, тобто для кожної точки $\zeta_0 \in \Omega$ існує окіл, в якому функція Φ представляється у вигляді суми збіжного степеневого ряду* (3.26) *з коефіцієнтами c_k, що належать алгебрі $\mathbb{A}_n^m$;*

(III) *функція Φ неперервна в області Ω і виконується рівність* (3.8) *для кожного трикутника $\triangle$, що міститься в області Ω;*

(IV) *функція Φ є диференційовною за Лорхом в області Ω;*

(V) *в кожній кулі $\mho \subset \Omega$ існують m голоморфних функцій F_u в областях $D_u := \{f_u(\zeta) : \zeta \in \mho\}$, $u = 1, 2, \dots, m$, і $n - m$ голоморфних функцій G_s в областях D_{u_s}, $s = m+1, m+2, \dots, n$, таких, що функція Φ представляється у вигляді* (2.8)*, де Γ_u – замкнена жорданова спрямлювана крива, яка лежить в області D_u, охоплює точку $f_u(\zeta)$ і не містить точок $f_q(\zeta)$, $q = 1, 2, \dots, m$, $q \neq u$.*

Доведення. Еквівалентність умови (I) і моногенності функції Φ доведено в теоремі 2.6. Еквівалентність умови (II) і моногенності функції Φ є наслідком теореми 3.14 і властивості збіжного степеневого ряду (3.26) визначати моногенну функцію в області збіжності. Еквівалентність умови (III) і моногенності функції Φ випливає з теорем 3.5 і 3.7. Еквівалентність умови (IV) і моногенності функції Φ випливає з першого твердження теореми 2.5. Нарешті, еквівалентність умови (V) і моногенності функції Φ випливає з теореми 2.3. □

Теорема 3.16 узагальнює результати робіт [26, 28–30, 33, 60, 61], встановлені для моногенних функцій в конкретних скінченновимірних алгебрах.

4. Теорема Коші для поверхневого інтеграла в скінченновимірній комутативній асоціативній алгебрі

Інтегральна теорема Коші є фундаментальним результатом класичного комплексного аналізу в комплексній площині $\mathbb{C}$: якщо межа ∂D області $D \subset \mathbb{C}$ є замкненою спрямлюваною жордановою кривою і функція $F\colon \overline{D} \longrightarrow \mathbb{C}$ – неперервна в замиканні $\overline{D}$ області D і голоморфна в D, то

$$\int\limits_{\partial D} F(z)dz = 0.$$

Розвиток гіперкомплексного аналізу як в комутативних, так і некомутативних алгебрах потребує аналогічних загальних аналогів інтегральної теореми Коші для багатовимірних просторів.

Добре відомо, що у випадку, коли однозв'язна область має замкнену кусково-гладку межу, просторові аналоги інтегральної теореми Коші можна отримати за допомогою класичної формули Гаусса-Остроградського за умови, що задана функція має неперервні частинні похідні першого порядку, які неперервно продовжуються на межу області. У такий спосіб аналоги інтегральної теореми Коші доведено в алгебрі кватерніонів (див., наприклад, монографію В. В. Кравченка і М. В. Шапіро [22, с. 66]) і в алгебрах Кліффорда (див., наприклад, монографію Ф. Брекса, Р. Деланга і Ф. Соммена [7, с. 52]).

Узагальнення інтегральної теореми Коші полягають у послабленні вимог до межі або до заданої функції. Як правило, такі узагальнення базуються на узагальненій Гаусса-Остроградського-Гріна-Стокса формулі (див., наприклад, Г. Федерер [12] або Дж. Харрісон і А. Нортон [16]) за умови неперервності частинних похідних заданої функції, але для розширених класів поверхонь інтегрування; див., наприклад,, Р. Абреу Блайя і Х. Борі Рейєс [1], а також Р. Абреу Блайя, Д. Пена Пена і Х. Борі Рейєс [3], де розглядаються спрямлювані або регулярні поверхні. В роботах А. Садбері [48] і О. Ф. Геруса [49], неперервність частинних похідних замінено диференційовністю компонент заданої функції, що приймає значення в алгебрі кватерніонів. Зазначимо, що в роботі [49] межа області залишається кусково-гладкою.

Далі ми доведемо аналог інтегральної теореми Коші для поверхневого інтеграла від гіперголоморфної функції, що задана в області тривимірного простору і приймає значення в довільній n-вимірній комутативній асоціативній алгебрі, де $3 \leqslant n < \infty$. Зазначимо, що моногенні функції в гармонічних алгебрах утворюють підмножину гіперголоморфних функцій, які, крім того, можуть бути заданими в областях, межі яких не є кусково-гладкими.

Аналогічний результат опубліковано в роботі [32] для гіперголоморфних функцій за умови, що задана комутативна алгебра розглядається над полем комплексних чисел. Проте, як випливає з наведеного далі доведення, така умова є неістотною. Зазначимо також, що подібний аналог інтегральної теореми Коші доведено О. Ф. Герусом [17] для гіперголоморфних функцій, що приймають значення в некомутативній алгебрі кватерніонів.

4.1. **Поверхневі інтеграли по квадровних поверхнях.** Розглянемо поняття квадровної поверхні в $\mathbb{R}^3$. Множина Σ називається *поверхнею* у просторі $\mathbb{R}^3$, якщо Σ є гомеоморфним образом квадрата $G := [0,1] \times [0,1]$ (див., наприклад, [36, с. 24]).

Через Σ^ε позначимо ε-окіл поверхні Σ, тобто множину

$$\Sigma^\varepsilon := \Big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \sqrt{(x-x_1)^2 + (y-y_1)^2 + (z-z_1)^2} \leqslant \varepsilon, \quad (x_1,y_1,z_1) \in \Sigma\Big\}.$$

Відстанню Фреше $d(\Sigma,\Lambda)$ між поверхнями Σ і Λ називається інфімум дійсних чисел ε, для яких виконуються співвідношення $\Sigma \subset \Lambda^\varepsilon$, $\Lambda \subset \Sigma^\varepsilon$ (див., наприклад, [13]). Послідовність багатогранників Λ_n називається *рівномірно збіжною* до поверхні Σ, якщо $d(\Lambda_n,\Sigma) \to 0$ при $n \to \infty$ (див., наприклад, [36, с. 121]).

Площею Лебега поверхні Σ називається величина

$$\mathfrak{L}(\Sigma) := \inf \liminf_{n\to\infty} \mathfrak{L}(\Lambda_n),$$

де інфімум береться по усіх послідовностях Λ_n, рівномірно збіжних до Σ (див., наприклад, [36, с. 468]), а $\mathfrak{L}(\Lambda_n)$ – площа багатогранника Λ_n.

Нехай поверхня Σ має скінченну площу Лебега. Тоді за теоремою Л. Чезарі [10, с. 7] існує параметризація поверхні

$$\Sigma = \big\{f(u,v) := \big(x(u,v),\, y(u,v),\, z(u,v)\big) : (u,v) \in G\big\}$$

така, що якобіани

$$A := \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v} - \frac{\partial y}{\partial v}\frac{\partial z}{\partial u}, \quad B := \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} - \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial u}, \quad C := \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u} \tag{4.1}$$

існують майже всюди на квадраті $G := [0;1] \times [0;1]$ і

$$\mathfrak{L}(\Sigma) = \int\limits_G \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}\, du\, dv. \tag{4.2}$$

У випадку, коли $\mathfrak{L}(\Sigma) < \infty$ і рівність (4.2) виконується для заданої параметризації Σ, поверхню Σ будемо називати *квадровною*.

Сформулюємо деякі достатні умови квадровності поверхні Σ.

- Якщо Σ – спрямлювана поверхня (тобто, ліпшицевий образ квадрата), то з результатів Т. Радо [36, IV.4.28, IV.4.1 (e)] випливає, що поверхня Σ квадровна.
- Нехай компоненти $x(u,v)$, $y(u,v)$, $z(u,v)$ відображення f – абсолютно неперервні за Тонеллі (див., наприклад, [42, с. 169]). Нехай, крім того, в якобіанах A, B, C відображення f в кожному з добутків
$$\frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v}, \qquad \frac{\partial y}{\partial v}\frac{\partial z}{\partial u}, \qquad \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}, \qquad \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial u}, \qquad \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v}, \qquad \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u}$$
одна частинна похідна належить класу інтегровних функцій $L_p(G)$ на G, а інша частинна похідна належить $L_q(G)$, де $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$. Тоді поверхня Σ квадровна (див. Т. Радо [36, V.2.26]). Відзначимо, що для спрямлюваної поверхні Σ компоненти $x(u,v)$, $y(u,v)$, $z(u,v)$ відображення f абсолютно неперервні за Тонеллі (див., наприклад, [42, с. 169]).
- Якщо дві компоненти відображення $f(u,v)$ є функціями Ліпшиця, а третя компонента – абсолютно неперервна за Тонеллі, то поверхня Σ квадровна (див. Т. Радо [36, V.2.28]).

Тепер визначимо поверхневі інтеграли по квадровних поверхнях. *Замкнену поверхню* $\Gamma \subset \mathbb{R}^3$ розуміємо як образ сфери при гомеоморфному відображенні, яке відображає *хоча б одне коло на спрялювану криву*.

Отже, замкнена поверхня Γ подається як об'єднання двох поверхонь Γ_1, Γ_2, для яких $\Gamma_1 \cap \Gamma_2 =: \gamma$ є замкненою жордановою спрямлюваною кривою.

Нехай поверхні Γ_1, Γ_2 задані параметрично:
$$\Gamma_1 = \left\{f_1(u,v) := \big(x_1(u,v),\, y_1(u,v),\, z_1(u,v)\big) : (u,v) \in G\right\},$$
$$\Gamma_2 = \left\{f_2(u,v) := \big(x_2(u,v),\, y_2(u,v),\, z_2(u,v)\big) : (u,v) \in G\right\}.$$

Замкнена поверхня Γ називається *квадровною*, якщо поверхні Γ_1 і Γ_2 квадровні.

Для замкненої квадровної поверхні Γ і неперервної функції $F : \Gamma \to \mathbb{R}$ визначимо інтеграли по Γ рівностями
$$\int\limits_{\Gamma} F(x,y,z)\,dydz := \int\limits_{G} F\Big(x_1(u,v), y_1(u,v), z_1(u,v)\Big) A_1\,du\,dv - \\ - \int\limits_{G} F\Big(x_2(u,v), y_2(u,v), z_2(u,v)\Big) A_2\,du\,dv, \tag{4.3}$$

$$\begin{aligned}\int\limits_{\Gamma} F(x,y,z)\,dzdx := \int\limits_{G} F\Big(x_1(u,v),y_1(u,v),z_1(u,v)\Big)B_1\,du\,dv-\\ -\int\limits_{G} F\Big(x_2(u,v),y_2(u,v),z_2(u,v)\Big)B_2\,du\,dv,\end{aligned} \tag{4.4}$$

$$\begin{aligned}\int\limits_{\Gamma} F(x,y,z)\,dxdy := \int\limits_{G} F\Big(x_1(u,v),y_1(u,v),z_1(u,v)\Big)C_1\,du\,dv-\\ -\int\limits_{G} F\Big(x_2(u,v),y_2(u,v),z_2(u,v)\Big)C_2\,du\,dv,\end{aligned} \tag{4.5}$$

з якобіанами A_k, B_k, C_k відображення f_k вигляду (4.1) при $k = 1, 2$.

Легко переконатися у коректності означень (4.3)-(4.5). Справді, значення правих частин інтегралів в рівностях (4.3)-(4.5) однакові для усіх параметризацій f_1, f_2, для яких площі $\mathfrak{L}(\Gamma_1)$, $\mathfrak{L}(\Gamma_2)$ подаються рівностями вигляду (4.2), і значення правих частин інтегралів в рівностях (4.3)-(4.5) не залежать від вибору спрямлюваної кривої γ, яка розбиває Γ на дві частини.

Лема 4.2. *Якщо Γ замкнена квадровна поверхня, то*

$$\int\limits_{\Gamma} dydz = \int\limits_{\Gamma} dzdx = \int\limits_{\Gamma} dxdy = 0. \tag{4.6}$$

Доведення. За означенням

$$\int\limits_{\Gamma} dydz = \int\limits_{G} A_1\,du\,dv - \int\limits_{G} A_2\,du\,dv. \tag{4.7}$$

З результатів Т. Радо [36, V.2.64 (iii), IV.4.21 (iii$_3$)] випливає, що для поверхонь Γ_1, Γ_2 справедливі наступні рівності:

$$\int\limits_{G} A_k\,du\,dv = \int\limits_{\partial G} ydz, \qquad k = 1, 2, \tag{4.8}$$

де інтеграл в правій частині розуміємо як інтеграл Лебега-Стілтьєса, який беремо по межі ∂G квадрата G в додатному напрямку. Тепер з рівностей (4.7), (4.8) плививає, що перший інтеграл в рівності (4.6) дорівнює нулю. Інші рівності (4.6) доводяться аналогічно. □

4.3. **Гіперголоморфні функції. Допоміжні твердження.** Нехай тепер $\mathbb{A}$ – комутативна асоціативна алгебра над полем дійсних чисел $\mathbb{R}$ з базисом $\{e_k\}_{k=1}^{n}$, $3 \leqslant n < \infty$. Виділимо лінійний підпростір

$$E_3 := \{\zeta = xe_1 + ye_2 + ze_3 : x, y, z \in \mathbb{R}\},$$

породжений векторами e_1, e_2, e_3. Будемо використовати однакове позначення Ω для множини в $\mathbb{R}^3$ і для конгруентної множини в E_3.

Розглянемо функцію $\Psi : \Omega \to \mathbb{A}$, розкладену за базисом $\{e_k\}_{k=1}^n$ у вигляді

$$\Psi(\zeta) = \sum_{k=1}^{n} U_k(x, y, z) e_k, \tag{4.9}$$

де $(x, y, z) \in \Omega$ і $U_k : \Omega \to \mathbb{R}$.

Будемо казати, що функція $\Psi : \Omega \to \mathbb{A}$ є *гіперголоморфною* в області $\Omega \subset E_3$, якщо її дійснозначні компоненти розкладу (4.9) є диференційовними функціями в Ω і виконується наступна умова в кожній точці області Ω:

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x} e_1 + \frac{\partial \Psi}{\partial y} e_2 + \frac{\partial \Psi}{\partial z} e_3 = 0. \tag{4.10}$$

В науковій літературі використовуються різні назви для функцій, які задовольняють рівняння вигляду (4.10). Наприклад, в роботах А. Садбері [48], Ф. Коломбо, І. Сабадіні і Д. Струппи [11], В. Шпрьоссіга [46] такі функції називаються регулярними, а в роботах Ф. Брекса, Р. Деланга і Ф. Соммена [7], С. Бернштейн [4], Дж. Райана [41] – моногенними функціями. Ми будемо використовувати термінологію робіт В. В. Кравченка і М. В. Шапіро [22] В. Шпрьоссіга [47], О. Ф. Геруса [49].

Нехай Ω – обмежена замкнена множина в $\mathbb{R}^3$. Для неперервної функції $\Psi : \Omega_\zeta \to \mathbb{A}$, розкладеної за базисом $\{e_k\}_{k=1}^n$ у вигляді (4.9), означимо об'ємний інтеграл рівністю

$$\int\limits_{\Omega} \Psi(\zeta)\, dx\, dy\, dz := \sum_{k=1}^{n} e_k \int\limits_{\Omega} U_k(x, y, z)\, dx\, dy\, dz.$$

Нехай Γ – замкнена квадровна поверхня в $\mathbb{R}^3$. Для неперервної функції $\Psi : \Gamma_\zeta \to \mathbb{A}$, розкладеної за базисом $\{e_k\}_{k=1}^n$ у вигляді (4.9), де $(x, y, z) \in \Gamma$ і $U_k : \Gamma \to \mathbb{R}$, означимо поверхневий інтеграл по Γ з диференціальною формою $\sigma := dy\, dz\, e_1 + dz\, dx\, e_2 + dx\, dy\, e_3$ рівністю

$$\int\limits_{\Gamma} \Psi(\zeta)\sigma := \sum_{k=1}^{n} e_1 e_k \int\limits_{\Gamma} U_k(x, y, z)\, dy\, dz +$$
$$+ \sum_{k=1}^{n} e_2 e_k \int\limits_{\Gamma} U_k(x, y, z)\, dz\, dx + \sum_{k=1}^{n} e_3 e_k \int\limits_{\Gamma} U_k(x, y, z)\, dx\, dy,$$

де інтеграли в правій частині рівності визначені рівностями (4.3)-(4.5).

Наступна лема є наслідком леми 4.2 і означення диференціальної форми σ.

Лема 4.4. *Якщо* Γ *– замкнена квадровна поверхня, то*

$$\int\limits_{\Gamma} \sigma = 0. \tag{4.11}$$

Введемо евклідову норму

$$\|a\| := \left(\sum_{k=1}^{n} |a_k|^2\right)^{1/2}$$

в алгебрі $\mathbb{A}$, де $a = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k e_k$ і $a_k \in \mathbb{R}$ при $k = \overline{1,n}$.

Нехай Γ – замкнена квадровна поверхня в $\mathbb{R}^3$. Для неперервної функції $U : \Gamma \to \mathbb{R}$, означимо поверхневий інтеграл по Γ з диференціальною формою $\|\sigma\|$ рівністю

$$\int\limits_{\Gamma} U(xe_1 + ye_2 + ze_3)\|\sigma\| :=$$

$$:= \int\limits_{G} U\Big(x_1(u,v)e_1 + y_1(u,v)e_2 + z_1(u,v)e_3\Big)\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}\, du\, dv -$$

$$- \int\limits_{G} U\Big(x_2(u,v)e_1 + y_2(u,v)e_2 + z_2(u,v)e_3\Big)\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}\, du\, dv.$$

Наступне твердження містить аналог формули Гаусса-Остроградського в алгебрі $\mathbb{A}$, який випливає з класичної формули Гаусса-Остроградського:

Теорема 4.5. *Нехай* Ω *– однозв'язна область в* E_3 *з кусково-гладкою межею* $\partial\Omega$*. Нехай* $\Psi : \Omega \to \mathbb{A}$ *– неперервна функція, що має неперервні частинні похідні першого порядку в області* Ω*, які неперервно продовжуються на межу* $\partial\Omega$*. Тоді справедливий наступний аналог формули Гаусса-Остроградського:*

$$\int\limits_{\partial\Omega} \Psi(\zeta)\sigma = \int\limits_{\Omega} \left(\frac{\partial\Psi}{\partial x}\, e_1 + \frac{\partial\Psi}{\partial y}\, e_2 + \frac{\partial\Psi}{\partial z}\, e_3\right) dx\, dy\, dz. \tag{4.12}$$

Доведення наступної теореми подібне до доведень А. Садбері [48, теорема 9] і О. Ф. Геруса [49, теорема 1], де розглядалися функції, що приймають значення в алгебрі кватерніонів.

Теорема 4.6. *Нехай* ∂P *– межа замкненого куба* P*, який міститься в області* $\Omega \subset E_3$*, і функція* $\Psi : \Omega \to \mathbb{A}$ *– гіперголоморфна в області* Ω*.*

Тоді виконується наступна рівність:

$$\int\limits_{\partial P} \Psi(\zeta)\sigma = 0.$$

Доведення. Позначимо

$$K := \Big\| \int\limits_{\partial P} \Psi(\zeta)\sigma \Big\|.$$

Нехай тако, S позначає площу поверхні ∂P. Розділимо P на 8 рівних кубів і позначимо через P^1 такий куб, для якого

$$\Big\| \int\limits_{\partial P^1} \Psi(\zeta)\sigma \Big\| \geqslant K/8.$$

Очевидно, що поверхня ∂P^1 має площу $S/4$.

Продовжуючи цей процес, отримаємо послідовність вкладених кубів P^m з площами $S/4^m$ поверхонь ∂P^m, які задовольняють нерівності

$$\Big\| \int\limits_{\partial P^m} \Psi(\zeta)\sigma \Big\| \geqslant K/8^m. \tag{4.13}$$

За принципом Кантора існує єдина точка $\zeta_0 := x_0e_1 + y_0e_2 + z_0e_3$, спільна для всіх кубів P^m. Оскільки функція Ψ має вигляд (4.9) і дійснозначні компоненти U_k диференційовні в Ω, то в околі точки ζ_0 маємо розклад

$$\Psi(\zeta) = \Psi(\zeta_0) + \Delta x\frac{\partial\Psi(\zeta_0)}{\partial x} + \Delta y\frac{\partial\Psi(\zeta_0)}{\partial y} + \Delta z\frac{\partial\Psi(\zeta_0)}{\partial z} + \delta(\zeta,\zeta_0)\rho,$$

де $\Delta x := x - x_0$, $\Delta y := y - y_0$, $\Delta z := z - z_0$, і $\delta(\zeta,\zeta_0)$ – нескінченно мала функція при $\rho := \|\zeta - \zeta_0\| \to 0$.

Тому для всіх достатньо малих кубів маємо

$$\int\limits_{\partial P^m} \Psi(\zeta)\sigma = \Psi(\zeta_0)\int\limits_{\partial P^m} \sigma + \frac{\partial\Psi(\zeta_0)}{\partial x}\int\limits_{\partial P^m} \Delta x\,\sigma + \frac{\partial\Psi(\zeta_0)}{\partial y}\int\limits_{\partial P^m} \Delta y\,\sigma +$$
$$+ \frac{\partial\Psi(\zeta_0)}{\partial z}\int\limits_{\partial P^m} \Delta z\,\sigma + \int\limits_{\partial P^m} \delta(\zeta,\zeta_0)\rho\,\sigma = \sum_{r=1}^{5} J_r.$$

Згідно з формулою (4.12), $J_1 = 0$. Використовуючи цю формулу і враховуючи рівність (4.10), отримуємо

$$J_2 + J_3 + J_4 = \frac{\partial\Psi(\zeta_0)}{\partial x}\, e_1V_m + \frac{\partial\Psi(\zeta_0)}{\partial y}\, e_2V_m + \frac{\partial\Psi(\zeta_0)}{\partial z}\, e_3V_m = 0,$$

де через V_m позначено об'єм куба P^m.

Відзначимо, що для довільного $\varepsilon > 0$ існує число m_0 таке, що нерівність $\|\delta(\zeta,\zeta_0)\| < \varepsilon$ виконується для всіх кубів P^m при $m > m_0$. Відзначимо також, що ρ не більше, ніж діагональ куба P^m, тобто, $\rho \leqslant \frac{\sqrt{S}}{2^m\sqrt{2}}$. Тому, використовуючи згадані вище нерівності для $\delta(\zeta,\zeta_0)$ і ρ, отримуємо

$$\Big\| \int\limits_{\partial P^m} \Psi(\zeta)\sigma \Big\| = \|J_5\| \leqslant n\,M \int\limits_{\partial P^m} \rho\,\|\delta(\zeta,\zeta_0)\|\,\|\sigma\| \leqslant n\,M \frac{\sqrt{S}}{2^m\sqrt{2}}\,\frac{S}{4^m}\,\varepsilon, \tag{4.14}$$

де M – деяка абсолютна стала.

Зі співвідношень (4.13) і (4.14) випливає нерівність $K \leqslant c\,\varepsilon$, де стала c не залежить від ε. Перейшовши до границі в останній нерівності при $\varepsilon \to 0$, отримаємо рівність $K = 0$. □

4.7. **Аналог теореми Коші для поверхневого інтеграла.** Встановимо аналог теореми Коші для поверхневого інтеграла по межі $\partial\Omega$ у випадку, коли функція $\Psi : \overline{\Omega} \to \mathbb{A}$ гіперголоморфна в області Ω і неперервна в замиканні $\overline{\Omega}$ цієї області.

Для функції $\Psi : \overline{\Omega} \to \mathbb{A}$, гіперголоморфної в області $\Omega \subset E_3$ і неперервної в замиканні цієї області, розглянемо модуль неперервності

$$\omega_{\Psi,\overline{\Omega}}(\delta) := \sup_{\substack{\zeta_1,\zeta_2 \in \overline{\Omega}, \\ \|\zeta_1-\zeta_2\| \leqslant \delta}} \|\Psi(\zeta_1) - \Psi(\zeta_2)\|.$$

Верхньою площею Мінковського множини $\partial\Omega$ називається величина

$$\mathcal{M}^*(\partial\Omega) := \limsup_{\varepsilon\to 0} \frac{V(\partial\Omega^\varepsilon)}{2\varepsilon}$$

(див., наприклад, П. Маттіла [25, с. 79]), де через $V(\partial\Omega^\varepsilon)$ позначено об'єм множини

$$\partial\Omega^\varepsilon := \Big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \sqrt{(x-x_1)^2 + (y-y_1)^2 + (z-z_1)^2} \leqslant \varepsilon, \\ (x_1,y_1,z_1) \in \partial\Omega\Big\}.$$

Теорема 4.8. *Нехай межею $\partial\Omega$ однозв'язної області $\Omega \subset E_3$ є замкнена квадровна поверхня, для якої $\mathcal{M}^*(\partial\Omega) < \infty$, і Ω має вимірні за Жорданом перетини з усіма площинами, перпендикулярними до координатних осей. Крім того, нехай функція $\Psi : \overline{\Omega} \to \mathbb{A}$ є гіперголоморфною в області Ω і неперервною в замиканні $\overline{\Omega}$ цієї області. Тоді справедлива рівність*

$$\int\limits_{\partial\Omega} \Psi(\zeta)\sigma = 0.$$

Доведення. Оскільки $\mathcal{M}^*(\partial\Omega) < \infty$, то існує $\varepsilon_0 > 0$ таке, що для всіх $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ виконується нерівність

$$V(\partial\Omega^{\varepsilon}) \leqslant c\varepsilon, \tag{4.15}$$

де стала c не залежить від ε.

Візьмемо $\varepsilon < \varepsilon_0/\sqrt{3}$. Розіб'ємо простір $\mathbb{R}^3$ на куби площинами, перпендикулярними до координатних осей, з ребром, довжина якого менша ε. Тоді маємо рівність

$$\int\limits_{\partial\Omega} \Psi(\zeta)\,\sigma = \sum_j \int\limits_{\partial(\Omega\cap K^j)} \Psi(\zeta)\,\sigma + \sum_k \int\limits_{\partial K^k} \Psi(\zeta)\,\sigma, \tag{4.16}$$

де перша сума застосовується до кубів K^j, для яких $\overline{K^j} \cap \partial\Omega \neq \varnothing$, а друга сума застосовується до кубів K^k, для яких $\overline{K^k} \subset \Omega$. За теоремою 4.6, друга сума дорівнює нулю.

Для оцінки інтеграла першої суми візьмемо точку $\zeta_j \in \Omega \cap K^j$. Зазначимо, що діаметр множини $\Omega \cap K^j$ не перевищує $\varepsilon\sqrt{3}$. Оскільки Ω має вимірні за Жорданом перетини з площинами, перпендикулярними до осей координат, то міра Лебега меж згаданих вище перетинів дорівнює 0, і тому множина $\partial(\Omega \cap K^j)$ складається з квадровних поверхонь. Отже, беручи до уваги рівність (4.11), отримуємо

$$\begin{aligned}\Bigg\| \int\limits_{\partial(\Omega\cap K^j)} \Psi(\zeta)\sigma \Bigg\| &= \Bigg\| \int\limits_{\partial(\Omega\cap K^j)} (\Psi(\zeta) - \Psi(\zeta_j))\sigma \Bigg\| \leqslant \\ &\leqslant n\,M \int\limits_{\partial(\Omega\cap K^j)} \|\Psi(\zeta) - \Psi(\zeta_j)\|\,\|\sigma\| \leqslant n\,M\omega_{\Psi,\overline{\Omega}}(\varepsilon\sqrt{3}) \int\limits_{\partial(\Omega\cap K^j)} \|\sigma\|,\end{aligned} \tag{4.17}$$

де M – деяка абсолютна стала.

Таким чином, наступна оцінка є результатом рівності (4.16) і нерівності (4.17):

$$\begin{aligned}\Bigg\| \int\limits_{\partial\Omega} \Psi(\zeta)\,\sigma \Bigg\| &\leqslant n\,M\,\omega_{\Psi,\overline{\Omega}}(\varepsilon\sqrt{3}) \sum_j \int\limits_{\partial(\Omega\cap K^j)} \|\sigma\| \leqslant \\ &\leqslant nM\,\omega_{\Psi,\overline{\Omega}}(\varepsilon\sqrt{3}) \Bigg(\int\limits_{\partial\Omega} \|\sigma\| + 6\sum_j \varepsilon^2 \Bigg).\end{aligned} \tag{4.18}$$

Оскільки $\bigcup_j K^j \subset \partial\Omega^{\varepsilon\sqrt{3}}$, то, враховуючи нерівність (4.15), отримуємо оцінку

$$\sum_j \varepsilon^3 \leqslant V\Big(\partial\Omega^{\varepsilon\sqrt{3}}\Big) \leqslant c\varepsilon\sqrt{3},$$

з якої випливає нерівність

$$\sum_j \varepsilon^2 \leqslant c\sqrt{3}. \tag{4.19}$$

Нарешті, наступна нерівність є результатом оцінок (4.18) і (4.19):

$$\left\| \int\limits_{\partial\Omega_\zeta} \Psi(\zeta)\sigma \right\| \leqslant c_1\, \omega_{\Psi,\overline{\Omega}}(\varepsilon\sqrt{3})$$

де стала c_1 не залежить від ε.

Для завершення доведення зазначимо, що $\omega_{\Psi,\overline{\Omega}}(\varepsilon\sqrt{3}) \to 0$ при $\varepsilon \to 0$ в силу рівномірної неперервності функції Ψ на $\overline{\Omega}$. □

Теорема 4.8 узагальнює [29, теорема 1] доведену для трьохвимірної комутативної алгебри при додаткових припущеннях про межу $\partial\Omega$ і задану функцію. Подібний аналог теореми 4.8 доведений О. Ф. Герусом [17] для гіперголоморфних функцій в некомутативній алгебрі кватерніонів.

Розглянемо деякі умови, за яких виконується нерівність (4.15), що є еквівалентною умові $\mathcal{M}^*(\partial\Omega) < \infty$.

- Зазначимо, що для поверхні Σ в $\mathbb{R}^3$ існують додатні сталі c_1 і c_2 такі, що

$$c_1\varepsilon^3 N_\Sigma(\varepsilon) \leqslant V(\Sigma^\varepsilon) \leqslant c_2\varepsilon^3 N_\Sigma(\varepsilon), \tag{4.20}$$

  де $N_\Sigma(\varepsilon)$ – найменша кількість ε-куль, що покривають Σ (див. Ф. М. Бородіч і А. Ю. Воловіков [6]).

  Зі співвідношення (4.20) випливає, що нерівність (4.15) еквівалентна нерівності вигляду

$$N_\Sigma(\varepsilon)\,\varepsilon^2 \leqslant c, \tag{4.21}$$

  де стала c не залежить від ε.
- Враховуючи, що спрямлювана поверхня Σ є ліпшицевим образом квадрата G і нерівність вигляду (4.21) виконується для G, легко довести нерівність (4.21) для такої поверхні Σ.
- Якщо для поверхні Σ в $\mathbb{R}^3$, яка має скінченну двовимірну міру Хаусдорфа $\mathcal{H}^2(\Sigma)$, існує додатна стала c така, що

$$c\varepsilon^2 \leqslant \mathcal{H}^2\big(\Sigma \cap B(x,\varepsilon)\big) \tag{4.22}$$

  для всіх $x \in \Sigma$ і $\varepsilon \in (0; \mathrm{diam}\Sigma]$, де $\mathrm{diam}\Sigma$ – діаметр поверхні Σ, а через $B(x,\varepsilon)$ позначено відкриту кулю з центром x і радіусом ε, то виконуються нерівності

$$P_\Sigma(\varepsilon)\varepsilon^2 \leqslant c_1\mathcal{H}^2(\Sigma) < \infty,$$

де $P_\Sigma(\varepsilon)$ – найбільша кількість неперетинних ε-куль з центрами в Σ і стала c_1 не залежить від ε (див. Р. Абреу Блайя, Х. Борі Рейєс і Т. Морено-Гарсіа [2, с. 309]). Тому, враховуючи нерівність

$$N_\Sigma(2\varepsilon) \leqslant P_\Sigma(\varepsilon)$$

(див. П. Маттіла [25, с. 78]), отримуємо нерівність (4.21) для поверхні Σ, яка задовольняє умову (4.22).

Зауваження 4.9. Має інтерес розгляд комутативних асоціативних алгебр $\mathbb{A}_n^m$, в яких існують лінійно незалежні над полем $\mathbb{R}$ елементи e_1, e_2, e_3, що задовольняють умову

$$e_1^2 + e_2^2 + e_3^2 = 0. \tag{4.23}$$

Такі алгебри називаються *гармонічними*, оскільки в них кожна моногенна функція $\Phi(\zeta)$ змінної $\zeta = xe_1 + ye_2 + ze_3$ задовольняє тривимірне рівняння Лапласа в силу співвідношень

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\Phi(\zeta) \equiv \Phi''_G(\zeta)(e_1^2 + e_2^2 + e_3^2) = 0$$

(див., наприклад, [18, 26, 55, 59, 61]) подібно до того, як кожна голоморфна функція комплексної змінної задовольняє двовимірне рівняння Лапласа.

Зазначимо, що у випадку лінійної оболонки E_3, для якої виконуються умови (2.5), (4.23) і $e_1 = 1$, моногенні функції вказаної змінної ζ утворюють підмножину гіперголоморфних функцій. Дійсно, кожна моногенна функція $\Phi\colon \Omega \to \mathbb{A}_n^m$ має $\mathbb{R}$-диференційовні компоненти U_k в розкладі (2.9) в області Ω, і в цій області виконуються умови (2.10), наслідком яких є рівності

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} e_1 + \frac{\partial \Phi}{\partial y} e_2 + \frac{\partial \Phi}{\partial z} e_3 = \frac{\partial \Phi}{\partial x}(e_1^2 + e_2^2 + e_3^2) = 0.$$

У той же час існують гіперголоморфні функції які не є моногенними. Наприклад, функція $\Psi(x + ye_2 + ze_3) = ze_2 - ye_3$ задовольняє умову (4.10), але не задовольняє необхідні умови моногенності, а саме рівності вигляду (2.10).

Аналогічно, існують гіперголомофні функції, які не задовольняють тривимірне рівняння Лапласа. Наприклад, функція

$$\Psi(xe_1 + ye_2 + ze_3) = x^2 e_1 + i\left(x^2 + \frac{z^2}{2}\right)e_2 + (xz + x + iy)e_3$$

задовольняє рівняння (4.10), але компоненти x^2 і $x^2 + z^2/2$ не є просторовими гармонічними функціями.

Література

[1] Ricardo Abreu Blaya and Juan Bory Reyes. Boundary value problems for quaternionic monogenic functions on non-smooth surfaces. *Adv. Appl. Clifford Algebras*, 9(1):1–22, 1999. doi:10.1007/BF03041934.

[2] Ricardo Abreu Blaya, Juan Bory Reyes, and Tania Moreno García. Minkowski dimension and Cauchy transform in Clifford analysis. *Complex Anal. Oper. Theory*, 1(3):301–315, 2007. doi:10.1007/s11785-007-0015-0.

[3] Ricardo Abreu Blaya, Dixan Peña Peña, and Juan Bory Reyes. Clifford Cauchy type integrals on Ahlfors-David regular surfaces in $\mathbb{R}^{m+1}$. *Adv. Appl. Clifford Algebras*, 13(2):133–156, 2003. doi:10.1007/s00006-003-0008-7.

[4] S. Bernstein. Factorization of the nonlinear Schrödinger equation and applications. *Complex Variables and Elliptic Equations*, 51(5-6):429–452, 2006. doi:10.1080/17476930500481400.

[5] E. K. Blum. A theory of analytic functions in Banach algebras. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 78:343–370, 1955. doi:10.2307/1993068.

[6] Feodor M. Borodich and Aleksei Yu. Volovikov. Surface integrals for domains with fractal boundaries and some applications to elasticity. *R. Soc. Lond. Proc. Ser. A Math. Phys. Eng. Sci.*, 456(1993):1–24, 2000. doi:10.1098/rspa.2000.0506.

[7] F. Brackx, Richard Delanghe, and F. Sommen. *Clifford analysis*, volume 76 of *Research Notes in Mathematics*. Pitman (Advanced Publishing Program), Boston, MA, 1982.

[8] E. Cartan. Les groupes bilinéaires et les systèmes de nombres complexes. *Ann. Fac. Sci. Toulouse Sci. Math. Sci. Phys.*, 12(1):B1–B64, 1898. URL: http://www.numdam.org/item?id=AFST_1898_1_12_1_B1_0.

[9] Francesco Catoni, Dino Boccaletti, Roberto Cannata, Vincenzo Catoni, Enrico Nichelatti, and Paolo Zampetti. *The mathematics of Minkowski space-time*. Frontiers in Mathematics. Birkhäuser Verlag, Basel, 2008. With an introduction to commutative hypercomplex numbers.

[10] Lamberto Cesari. *Surface area*. Annals of Mathematics Studies, No. 35. Princeton University Press, Princeton, N. J., 1956.

[11] Fabrizio Colombo, Irene Sabadini, and Daniele C. Struppa. Slice monogenic functions. *Israel J. Math.*, 171:385–403, 2009. doi:10.1007/s11856-009-0055-4.

[12] Herbert Federer. *Geometric measure theory*. Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Band 153. Springer-Verlag New York, Inc., New York, 1969.

[13] M. Fréchet. Sur la distance de deux surfaces. *Ann. Soc. Polonaise Math.*, 3:4–19, 1924.

[14] V. Gončarov. Sur l'intégrale de Cauchy dans le domaine hypercomplexe. *Bulletin de l'Académie des Sciences de l'URSS. Classe des sciences mathématiques et na*, (10):1405–1424, 1932.

[15] E. Goursat. *Cours d'analyse mathématique*. Gauthier–Villars, Paris, 1910.

[16] Jenny Harrison and Alec Norton. The Gauss-Green theorem for fractal boundaries. *Duke Math. J.*, 67(3):575–588, 1992. doi:10.1215/S0012-7094-92-06724-X.

[17] O. F. Herus. On the Cauchy theorem for hyperholomorphic functions of spatial variable. *Journal of Mathematical Sciences*, 229(1):1–6, 2018. doi:10.1007/s10958-018-3658-7.

[18] P. W. Ketchum. Analytic functions of hypercomplex variables. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 30(4):641–667, 1928. doi:10.2307/1989440.

[19] P. W. Ketchum. A complete solution of Laplace's equation by an infinite hypervariable. *Amer. J. Math.*, 51(2):179–188, 1929. doi:10.2307/2370704.

[20] Vladimir V. Kisil. Hypercomplex representations of the Heisenberg group and mechanics. *Internat. J. Theoret. Phys.*, 51(3):964–984, 2012. doi:10.1007/s10773-011-0970-0.
[21] V.V. Kisil. Erlangen programme at large: an overview. In *Advances in Applied Analysis, Trends in Mathematics*, pages 1–94. Springer, Basel, 2012. doi:10.1007/978-3-0348-0417-1.
[22] Vladislav V. Kravchenko and Michael V. Shapiro. *Integral representations for spatial models of mathematical physics*, volume 351 of *Pitman Research Notes in Mathematics Series*. Longman, Harlow, 1996.
[23] Edgar R. Lorch. The theory of analytic functions in normed abelian vector rings. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 54:414–425, 1943. doi:10.2307/1990255.
[24] M. Elena Luna-Elizarrarás, Michael Shapiro, Daniele C. Struppa, and Adrian Vajiac. *Bicomplex holomorphic functions*. Frontiers in Mathematics. Birkhäuser/Springer, Cham, 2015. The algebra, geometry and analysis of bicomplex numbers. doi:10.1007/978-3-319-24868-4.
[25] Pertti Mattila. *Geometry of sets and measures in Euclidean spaces*, volume 44 of *Cambridge Studies in Advanced Mathematics*. Cambridge University Press, Cambridge, 1995. Fractals and rectifiability. doi:10.1017/CBO9780511623813.
[26] S. A. Plaksa. Commutative algebras associated with classic equations of mathematical physics. In *Advances in Applied Analysis, Trends in Mathematics*, pages 177–223. Springer, Basel, 2012. doi:10.1007/978-3-0348-0417-5.
[27] S. A. Plaksa. Integral theorems for monogenic functions in an infinite-dimensional space with a commutative multiplication. *Зб. праць Ін-ту матем. НАН України*, 10(4–5):306–319, 2013.
[28] S. A. Plaksa and R. P. Pukhtaievych. Monogenic functions in a finite-dimensional semi-simple commutative algebra. *Analele Universitatii "Ovidius" Constanta – Seria Matematica*, 22(1):221–235, December 2014. doi:10.2478/auom-2014-0018.
[29] S. A. Plaksa and V. S. Shpakivskyi. Integral theorems and a Cauchy formula in a commutative three-dimensional harmonic algebra. *Bull. Soc. Sci. Lett. Łódź Sér. Rech. Déform.*, 60(2):47–54, 2010.
[30] S. A. Plaksa and V. S. Shpakivskyi. Integral theorems in a commutative three-dimensional harmonic algebra. In *Progress in analysis and its applications*, pages 232–239. World Sci. Publ., Hackensack, NJ, 2010. URL: https://doi.org/10.1142/9789814313179_0031, doi:10.1142/9789814313179_0031.
[31] S. A. Plaksa and V. S. Shpakivskyi. A description of spatial potential fields by means of monogenic functions in infinite-dimensional spaces with a commutative multiplication. *Bulletin Soc. Sci. et Lettr. Łódź*, 62(2):55–65, 2012.
[32] S. A. Plaksa and V. S. Shpakivskyi. Cauchy theorem for a surface integral in commutative algebras. *Complex Variables and Elliptic Equations*, 59(1):110–119, November 2013. doi:10.1080/17476933.2013.845178.
[33] S. A. Plaksa and V. S. Shpakivskyi. Monogenic functions in a finite-dimensional algebra with unit and radical of maximal dimensionality. *Journal of Algerian Mathematical Society*, 1(1):1–13, 2014.
[34] A. Pogorui, R.M. Rodríguez-Dagnino, and M. Shapiro. Solutions for PDEs with constant coefficients and derivability of functions ranged in commutative algebras. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 37(17):2799–2810, November 2013. doi:10.1002/mma.3019.

[35] G. Baley Price. *An introduction to multicomplex spaces and functions*, volume 140 of *Monographs and Textbooks in Pure and Applied Mathematics*. Marcel Dekker, Inc., New York, 1991. With a foreword by Olga Taussky Todd.

[36] Tibor Radó. *Length and Area.* American Mathematical Society, New York,,, 1948.

[37] F. Ringleb. Beiträge zur funktionentheorie in hyperkomplexen systemen. *Rend. Circ. Mat. Palermo*, 57:311–340, 1933.

[38] M. N. Roşculeţ. O teorie a funcţiilor de o variabilă hipercomplexă în spaţiul cu trei dimensiuni. *Studii şi Cercetări Matematice*, 5(3–4):361–401, 1954.

[39] M. N. Roşculeţ. Algebre infinite associate la ecuaţii cu derivate parţiale, omogene, cu coeficienţi constanţi de ordin oarecare. *Studii şi Cercetări Matematice*, 6(3–4):567–643, 1955.

[40] M. N. Roşculeţ. Algebre liniare associative şi comutative şi fincţii monogene ataşate lor. *Studii şi Cercetări Matematice*, 6(1–2):135–173, 1955.

[41] J. Ryan. Dirac operators, conformal transformations and aspects of classical harmonic analysis. *J. of Lie Theory*, 8:67–82, 1998.

[42] S. Saks. *Theory of the integral, 2nd English edition.* Warsaw, 1937.

[43] V. Shpakivskyi. Constructive description of monogenic functions in a finite-dimensional commutative associative algebra. *Advances in Pure and Applied Mathematics*, 7(1), January 2016. doi:10.1515/apam-2015-0022.

[44] V. S. Shpakivskyi. Monogenic functions in finite-dimensional commutative associative algebras. *Зб. праць Ін-ту матем. НАН України*, 12(3):251–268, 2015.

[45] L. Sobrero. Nuovo metodo per lo studio dei problemi di elasticità, con applicazione al problema della piastra forata. *Ricerche di Ingegneria*, 13(2):255–264, 1934.

[46] Wolfgang Spröß ig. Eigenvalue problems in the framework of Clifford analysis. *Adv. Appl. Clifford Algebras*, 11(S2):301–316, 2001. doi:10.1007/BF03219141.

[47] Wolfgang Sprössig. Quaternionic analysis and Maxwell's equations. *Cubo*, 7(2):57–67, 2005.

[48] A. Sudbery. Quaternionic analysis. *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.*, 85(2):199–224, 1979. doi:10.1017/S0305004100055638.

[49] О. Ф. Герус. Про гіперголоморфні функції просторової змінної. *Укр. матем. журн.*, 63(4):459–465, 2011.

[50] С. В. Грищук and С. А. Плакса. Моногенные функции в бигармонической алгебре. *Укр. матем. журн.*, 61(12):1587–1596, 2009. doi:10.1007/s11253-010-0319-5.

[51] В. Ф. Ковалев and И. П. Мельниченко. Бигармонические функции на бигармонической плоскости. *Докл. АН УССР. Сер. А*, (8):25–27, 1981.

[52] В. Ф. Ковалев and И. П. Мельниченко. *Алгебры функционально-инвариантных решений р-бигармонического уравнения. Препринт 91.10.* Киев: Ин-т математики АН УССР, 1991.

[53] М.А. Лаврентьев and Б.В. Шабат. *Методы теории функций комплексного переменного.* Москва: Наука, 1987.

[54] А.И. Маркушевич. *Теория аналитических функций*, volume 1. Москва: Наука, 1968.

[55] И. П. Мельниченко. О представлении моногенными функциями гармонических отображений. *Укр. матем. журн.*, 27(5):606–613, 1975.

[56] И. П. Мельниченко. Об одном методе описания потенциальных полей с осевой симметрией. In *Современные вопросы вещественного и комплексного анализа (Ин-т математики АН УССР, Киев)*, pages 98–102. 1984.

[57] И. П. Мельниченко. Бигармонические базисы в алгебрах второго ранга. *Укр. матем. журн.*, 38(2):252–254, 1986.

[58] И. П. Мельниченко. Алгебры функционально-инвариантных решений трехмерного уравнения Лапласа. *Укр. матем. журн.*, 55(9):1284–1290, 2003.

[59] И. П. Мельниченко and С. А. Плакса. *Коммутативные алгебры и пространственные потенциальные поля*. Ин-т математики НАН Украины, Киев, 2008.

[60] С. А. Плакса and Р. П. Пухтаевич. Конструктивное описание моногенных функций в трехмерной гармонической алгебре с одномерным радикалом. *Укр. матем. журн.*, 65(5):670–680, 2013. doi:10.1007/s11253-013-0810-x.

[61] С. А. Плакса and В. С. Шпаковский. Конструктивное описание моногенных функций в гармонической алгебре третьего ранга. *Укр. матем. журн.*, 62(8):1078–1091, 2010. doi:10.1007/s11253-011-0427-x.

[62] Ю. Ю. Трохимчук. *Непрерывные отображения и условия моногенности*. Москва: Физматиз, 1963.

[63] Э. Хилле and Р. Филлипс. *Функциональный анализ и полугруппы*. Москва: Издательство иностр. лит, 1962.

С. А. Плакса
Інститут математики НАН України, м. Київ
Email: plaksa@imath.kiev.ua, plaksa62@gmail.com
ORCID: 0000-0002-2828-0329

В. С. Шпаківський
Інститут математики НАН України, м. Київ
Email: shpakivskyi86@gmail.com
ORCID: 0000-0003-4256-8975