Збірник праць Ін-ту математики НАН України (2023) т. 20, №1, 805–842

Формули типу Кларка-Окона на просторах регулярних основних і узагальнених функцій в аналізі білого шуму Леві

М. О. Качановський

Abstract. In the classical Gaussian analysis the Clark-Ocone formula can be written in the form

$$F = \mathbf{E}F + \int \mathbf{E}\big(\partial_t F|_{\mathcal{F}_t}\big)\, dW_t,$$

where a function (a random variable) F is square integrable with respect to the Gaussian measure and differentiable by Hida; $\mathbf{E}$ denotes the expectation; $\mathbf{E}\big(\circ|_{\mathcal{F}_t}\big)$—the conditional expectation with respect to the full σ-algebra $\mathcal{F}_t$ that is generated by the Wiener process W up to the point of time t; $\partial_\cdot F$ is the Hida derivative of F; $\int \circ(t) dW_t$ denotes the Itô stochastic integral with respect to the Wiener process. This formula has many applications, in particular, in the stochastic analysis and in the financial mathematics.

In this paper we generalize the Clark-Ocone formula to spaces of regular test and generalized functions of the Lévy white noise analysis. More exactly, we obtain different Clark-Ocone type formulas on the above-mentioned spaces, study the properties of the integrands in these formulas, establish the conditions under which a Clark-Ocone type formula takes a classical form, etc. In particular, we show that the restrictive condition of differentiability by Hida for a random variable is not really significant.

Анотація. У класичному гауссівському аналізі формулу Кларка-Окона можна записати у вигляді

$$F = \mathbf{E}F + \int \mathbf{E}\big(\partial_t F|_{\mathcal{F}_t}\big) dW_t,$$

де функція (випадкова величина) F є квадратично інтегровною за гауссівською мірою та диференційовною за Хідою; $\mathbf{E}$ позначає математичне сподівання; $\mathbf{E}\big(\circ|_{\mathcal{F}_t}\big)$ – умовне математичне сподівання відносно повної σ-алгебри $\mathcal{F}_t$, породженої вінерівським процесом W до моменту часу t; $\partial_\cdot F$ – похідна Хіди F; $\int \circ(t) dW_t$ позначає стохастичний інтеграл Іто за вінерівським процесом. Ця формула має багато застосувань, зокрема, у стохастичному аналізі та у фінансовій математиці.

2020 Mathematics Subject Classification: 46F05, 46F25, 60H40, 60G51, 60H05

Ключові слова: процес Леві; властивість хаотичного розкладу; розширений стохастичний інтеграл; стохастична похідна; формула Кларка-Окона

DOI: http://dx.doi.org/10.3842/trim.v20n1.529

В цій статті ми узагальнюємо формулу Кларка-Окона на простори регулярних основних і узагальнених функцій в аналізі білого шуму Леві. Точніше, ми отримуємо різні формули типу Кларка-Окона на вищезгаданих просторах, вивчаємо властивості підінтегральних функцій у цих формулах, встановлюємо умови, за яких формула типу Кларка-Окона приймає класичний вигляд, тощо. Зокрема, ми показуємо, що обмежувальна умова диференційовності за Хідою для випадкової величини не є суттєвою.

Вступ

Позначимо через $\mathcal{D}$ простір Шварца, що складається з усіх дійснозначних нескінченно-диференційовних функцій на $\mathbb{R}_+ := [0, +\infty)$ з компактними носіями. Добре відомо (напр., [33]), що $\mathcal{D}$ можна наділити топологією проективної границі, породженою сім'єю соболевських просторів. Нехай $\mathcal{D}'$ – множина лінійних неперервних функціоналів на $\mathcal{D}$. Відзначимо, що $\mathcal{D}'$ та $\mathcal{D}$ є негативним та позитивним просторами ланцюжка

$$\mathcal{D}' \supset L^2(\mathbb{R}_+) \supset \mathcal{D}, \tag{0.1}$$

де $L^2(\mathbb{R}_+)$ – простір (класів) дійснозначних функцій на $\mathbb{R}_+$, квадратично інтегровних за мірою Лебега (напр., [33]).

Позначимо через $\langle \cdot, \cdot \rangle$ дуальне спарювання між елементами $\mathcal{D}'$ та $\mathcal{D}$, породжене скалярним добутком у $L^2(\mathbb{R}_+)$; через нижній індекс $\mathbb{C}$ будемо позначати комплексифікації лінійних топологічних просторів (наприклад, елементами $\mathcal{D}_{\mathbb{C}}$ є $a+bi$, $a, b \in \mathcal{D}$); через $\mathcal{C}(\mathcal{D}')$ – циліндричну σ-алгебру на $\mathcal{D}'$.

Нехай γ – стандартна гауссівська міра на $(\mathcal{D}', \mathcal{C}(\mathcal{D}'))$ ($\mathcal{C}(\mathcal{D}')$ вважаємо поповненою відносно γ), тобто ймовірнісна ($\gamma(\mathcal{D}') = 1$) міра з перетворенням Лапласа

$$l_\gamma(\lambda) := \int_{\mathcal{D}'} e^{\langle x, \lambda \rangle} \gamma(dx) = e^{\langle \lambda, \lambda \rangle / 2}, \quad \lambda \in \mathcal{D}_{\mathbb{C}}.$$

Як добре відомо (напр., [4, 19, 25]), кожну квадратично інтегровну за γ та диференційовну за Хідою комплекснозначну функцію (випадкову величину) F на $\mathcal{D}'$ можна представити у вигляді

$$F = \mathbf{E}F + \int \mathbf{E}\big(\partial_t F|_{\mathcal{F}_t}\big) dW_t, \tag{0.2}$$

де $\mathbf{E}$ позначає математичне сподівання; $\mathbf{E}\big(\circ|_{\mathcal{F}_t}\big)$ – умовне математичне сподівання відносно повної σ-алгебри $\mathcal{F}_t$, породженої вінерівським процесом W до моменту часу t (тобто $\mathcal{F}_t$ – поповнення відносно γ σ-алгебри $\sigma(W_u : u \leqslant t)$); $\partial_\cdot F$ – похідна Хіди F; $\int \circ(t) dW_t$ позначає стохастичний інтеграл Іто за вінерівським процесом (для інтегралів по $\mathbb{R}_+$ ми, як правило, не вказуємо границі інтегрування задля спрощення позначень). Формула (0.2) називається *формулою Кларка-Окона.* Як бачимо, ця формула, зокрема, дозволяє поновити версію підінтегральної функції (ця функція не є єдиною, взагалі кажучи), якщо відомий результат стохастичного інтегрування.

Як відомо (напр., [7, 32]), формула (0.2) залишається справедливою (з точністю до зрозумілих модифікацій), якщо замість гауссівської міри розглядається пуассонівська. Відзначимо також, що можна легко уникнути обмежувального припущення, що випадкова величина F має бути диференційовною за Хідою: достатньо узагальнити формулу Кларка-Окона на певні простори узагальнених функцій (при цьому F може залишатись квадратично інтегровною), див., напр., [5, 6].

Формула Кларка-Окона та її узагальнення мають численні застосування, зокрема, у стохастичному аналізі та у фінансовій математиці, див., напр., [1, 6–8, 10, 22, 26–28, 32] і посилання там. Задля задоволення потреб застосувань побудовано різноманітні формули типу Кларка-Окона на різних просторах, з використанням різних стохастичних похідних та зі стохастичними інтегралами за різними випадковими процесами й мірами, див., зокрема, [1,2,5–7,13,14,18–20,22,32,36]. Наприклад, в [19,20] отримано формулу типу Кларка-Окона, пов'язану з процесами Леві, яка містить стохастичні інтеграли за вінерівським процесом та за компенсованою пуассонівською випадковою мірою.

В [6] запропоновано інший підхід до побудови формул типу Кларка-Окона в аналізі Леві, який базується на так званому розкладі Нуаларта-Скоутенса квадратично інтегровних випадкових величин [24,30]; зараз згадані формули містять інтеграли за спеціальними випадковими процесами. Варто відзначити, що автори [6] також узагальнюють свої результати на певні простори узагальнених випадкових величин.

В роботах автора [13,14,36] побудовано формули типу Кларка-Окона на просторах регулярних основних, квадратично інтегровних та регулярних узагальнених функцій майкснерівського аналізу білого шуму. Цей аналіз пов'язаний з узагальненою мірою Майкснера $\mathbf{m}$ [29] та з відповідним випадковим процесом Майкснера, похідною якого (в сенсі узагальнених функцій [34]) є майкснерівський білий шум (мірою цього шуму як узагальненого випадкового процесу [35] є $\mathbf{m}$).

Зауважимо, що підклас процесів Майкснера, який складається зі стаціонарних випадкових процесів, є доволі широким підкласом процесів Леві. Проте, побудови [13, 14, 36] суттєво відрізняються від побудов [19, 20] та [6]: ми намагались зберегти, наскільки це можливо, класичну форму формул типу Кларка-Окона, і тому використовували стохастичну похідну Хіди та стохастичне інтегрування лише за процесом Майкснера.

Дана робота в певному сенсі є продовженням досліджень [13, 14, 36], зараз наша мета полягає в отриманні та вивченні формул типу Кларка-Окона на просторах так званого регулярного параметризованого оснащення простору квадратично інтегровних випадкових величин в аналізі білого шуму Леві [15, 37]. Зокрема, ми встановлюємо необхідну і достатню умову, за якої можливо отримати формули типу Кларка-Окона з використанням інтегрування лише за випадковим процесом Леві; отримуємо різні формули типу Кларка-Окона та вивчаємо властивості підінтегральних функцій у цих формулах; а також з'ясовуємо необхідну і достатню умову, за якої формула типу Кларка-Окона набуває класичного вигляду (0.2) (з процесом Леві замість вінерівського процесу).

Статтю організовано наступним чином. В першому розділі ми наводимо необхідні попередні відомості: розглядаємо процес Леві та будуємо пов'язаний з ним ймовірнісний простір, зручний для подальшого викладу; описуємо запропоноване Є. В. Литвиновим [21] узагальнення властивості хаотичного розкладу в аналізі білого шуму Леві, на основі якого побудоване регулярне параметризоване оснащення простору квадратично інтегровних випадкових величин [15]; нагадуємо конструкцію згаданого оснащення; а також описуємо конструкції розширеного стохастичного інтеграла та стохастичної похідної Хіди на його просторах [15, 16]. Другий розділ присвячено побудові та вивченню формул типу Кларка-Окона: розглянуто формулу Кларка-Окона в найпростішому частинному випадку; встановлено необхідну і достатню умову, за якої можливо отримати формули типу Кларка-Окона з використанням стохастичного інтегрування лише за випадковим процесом Леві; отримано згадані формули найпростішого та наближеного до класичного вигляду; а також визначено необхідну і достатню умову, за якої формула Кларка-Окона в аналізі Леві набуває класичного вигляду.

1. Попередні відомості

В цій роботі будемо позначати через $\|\cdot\|_H$ або $|\cdot|_H$ норму в просторі H; через $(\cdot,\cdot)_H$ дійсний (тобто білінійний) скалярний добуток в просторі H; через $\langle\!\langle\cdot,\cdot\rangle\!\rangle_H$ або $\langle\cdot,\cdot\rangle_H$ дуальне спарювання, породжене скалярним добутком в просторі H; через $\mathcal{B}$ борелівську σ-алгебру; через 1_Δ індикатор множини або події Δ; та через $\widehat{\otimes}$ симетричне тензорне множення. Також ми використовуємо позначення pr lim (відповідно, ind lim) для проективної (відповідно, індуктивної) границі сім'ї просторів; це позначення означає, що граничний простір наділено топологією проективної (відповідно, індуктивної) границі (див., напр., [33]).

1.1. **Процес Леві та його ймовірнісний простір.** Нехай

$$L = (L_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$$

– дійснозначний локально квадратично інтегровний процес Леві (тобто неперервний за ймовірністю випадковий процес на $\mathbb{R}_+$ зі стаціонарними незалежними приростами і такий, що $L_0 = 0$, див., напр., [3]) без гауссівської частини та зсуву. Добре відомо (напр., [6]), що характеристична функція L має вигляд

$$\mathbf{E}[e^{i\theta L_t}] = \exp\Big[t\int_{\mathbb{R}}(e^{i\theta x} - 1 - i\theta x)\nu(dx)\Big], \tag{1.1}$$

де ν – міра Леві процесу L, що є мірою на $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$. Накладемо додатково такі умови: *ν є мірою Радона з носієм, що містить нескінченну кількість точок; $\nu(\{0\}) = 0$; існує $\varepsilon > 0$ таке, що*

$$\int_{\mathbb{R}} x^2 e^{\varepsilon|x|}\nu(dx) < \infty;$$

та

$$\int_{\mathbb{R}} x^2\nu(dx) = 1. \tag{1.2}$$

Визначимо міру білого шуму процесу L.

Означення 1.1.1. Ймовірнісна міра μ на вимірному просторі $(\mathcal{D}', \mathcal{C}(\mathcal{D}'))$ з перетворенням Фур'є

$$\int_{\mathcal{D}'} e^{i\langle\omega,\varphi\rangle}\mu(d\omega) = \exp\Big[\int_{\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}}(e^{i\varphi(t)x} - 1 - i\varphi(t)x)dt\nu(dx)\Big], \quad \varphi\in\mathcal{D}, \tag{1.3}$$

називається мірою білого шуму Леві.

Коректність цього визначення (тобто існування μ) випливає з теореми Бохнера-Мінлоса (напр., [11]), див. [21]. Нижче будемо вважати, що *циліндрична σ-алгебра $\mathcal{C}(\mathcal{D}')$ поповнена відносно μ.*

Позначимо через

$$(L^2) := L^2(\mathcal{D}', \mathcal{C}(\mathcal{D}'), \mu)$$

простір (класів) квадратично інтегровних за μ комплекснозначних функцій на $\mathcal{D}'$. Нехай $f \in L^2(\mathbb{R}_+)$ та послідовність $(\varphi_k \in \mathcal{D})_{k\in\mathbb{N}}$ збігається до f у $L^2(\mathbb{R}_+)$, коли $k\to\infty$. Можна показати (напр., [16, 21]), що

$$\langle\circ, f\rangle := (L^2) - \lim_{k\to\infty}\langle\circ,\varphi_k\rangle$$

є коректно визначеним елементом (L^2) (зокрема, $\langle\circ, f\rangle$ не залежить від того, якою саме послідовністю елементів $\mathcal{D}$ апроксимовано f).

Покладемо $1_{[0,0)} \equiv 0$ (формальний напівінтервал $[0,0)$ природно вважати порожньою множиною). З (1.1) та (1.3) випливає, що

$$\big(\langle \circ, 1_{[0,t)}\rangle\big)_{t\in\mathbb{R}_+}$$

можна ототожнити з процесом Леві на ймовірнісному просторі (ймовірнісній трійці) $(\mathcal{D}', \mathcal{C}(\mathcal{D}'), \mu)$ (див., напр., [6, 7]). Таким чином, для кожного $t \in \mathbb{R}_+$ маємо

$$L_t = \langle \circ, 1_{[0,t)}\rangle \in (L^2).$$

Зауважимо, що похідна у сенсі узагальнених функцій процесу Леві (тобто білий шум Леві)

$$\dot{L}_\cdot(\omega) = \langle \omega, \delta_\cdot\rangle \equiv \omega(\cdot),$$

де δ є дельта-функцією Дірака. Отже, $\dot{L}$ є узагальненим випадковим процесом (в сенсі [34]) з траєкторіями з $\mathcal{D}'$, а μ є мірою $\dot{L}$ у класичному сенсі [35].

1.2. **Литвинівське узагальнення властивості хаотичного розкладу.** Як відомо, фундаментальну роль у гауссівському аналізі білого шуму відіграє так звана *властивість хаотичного розкладу* (ВХР), яка полягає, грубо кажучи, у наступному: кожну квадратично інтегровну випадкову величину можна єдиним чином розкласти в ряд з повторних стохастичних інтегралів Іто від невипадкових функцій (див. детальний виклад, напр., у [23]). Використовуючи ВХР, можна будувати різні простори основних і узагальнених функцій, уводити та досліджувати різноманітні оператори і операції на цих просторах (зокрема, стохастичні інтеграли та похідні, віківське множення), тощо. В аналізі білого шуму Леві, на жаль, ВХР немає (точніше, серед процесів Леві тільки вінерівський та пуассонівський мають цю властивість, див. подробиці у [31]); але побудовано низку її узагальнень (короткий опис таких узагальнень із відповідними посиланнями міститься у [37]).

В цій роботі ми використовуємо одне з найкорисніших узагальнень ВХР в аналізі Леві, запропоноване Є. В. Литвиновим [21]. Коротко опишемо це узагальнення.

Розповсюдимо уведене вище позначення $\langle\cdot,\cdot\rangle$ на дуальні спарювання в симетричних тензорних степенях комплексифікації ланцюжка (0.1). Нехай $\mathbb{Z}_+ := \mathbb{N} \cup \{0\}$. Позначимо через $\mathcal{P}$ множину комплекснозначних поліномів на $\mathcal{D}'$, яка складається з нуля та елементів вигляду

$$f(\omega) = \sum_{n=0}^{N_f} \langle \omega^{\otimes n}, f^{(n)}\rangle, \quad \omega \in \mathcal{D}',\ f^{(n)} \in \mathcal{D}_{\mathbb{C}}^{\widehat{\otimes} n},\ N_f \in \mathbb{Z}_+,\ f^{(N_f)} \neq 0,$$

тут N_f – *степінь поліному* f; $\langle\omega^{\otimes 0}, f^{(0)}\rangle := f^{(0)} \in \mathcal{D}_{\mathbb{C}}^{\hat{\otimes}0} := \mathbb{C}$. Міра білого шуму Леві μ має голоморфне в нулі перетворення Лапласа (це випливає з (1.3) та властивостей міри Леві ν, див. [21]), отже $\mathcal{P}$ є щільною множиною у (L^2) [38].

Позначимо через $\mathcal{P}_n$, $n \in \mathbb{Z}_+$, множину поліномів степені не більше n, через $\overline{\mathcal{P}}_n$ – замикання $\mathcal{P}_n$ в (L^2). Нехай для $n \in \mathbb{N}$

$$\mathbf{P}_n := \overline{\mathcal{P}}_n \ominus \overline{\mathcal{P}}_{n-1} \text{ (ортогональна різниця в } (L^2)).$$

Покладемо також $\mathbf{P}_0 := \overline{\mathcal{P}}_0$. Зрозуміло, що

$$(L^2) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \mathbf{P}_n. \tag{1.4}$$

Нехай $f^{(n)} \in \mathcal{D}_{\mathbb{C}}^{\hat{\otimes}n}$, $n \in \mathbb{Z}_+$. Позначимо через

$$:\!\langle\circ^{\otimes n}, f^{(n)}\rangle\!: \in (L^2)$$

ортогональну проекцію монома $\langle\circ^{\otimes n}, f^{(n)}\rangle$ на $\mathbf{P}_n$. Визначимо дійсні (білінійні) скалярні добутки $(\cdot,\cdot)_{ext}$ на $\mathcal{D}_{\mathbb{C}}^{\hat{\otimes}n}$, $n \in \mathbb{Z}_+$, поклавши для $f^{(n)}, g^{(n)} \in \mathcal{D}_{\mathbb{C}}^{\hat{\otimes}n}$

$$(f^{(n)}, g^{(n)})_{ext} := \frac{1}{n!}\int_{\mathcal{D}'} :\!\langle\omega^{\otimes n}, f^{(n)}\rangle\!: \, :\!\langle\omega^{\otimes n}, g^{(n)}\rangle\!: \mu(d\omega). \tag{1.5}$$

Коректність цього визначення доведено (з точністю до очевидних модифікацій) у [21].

Позначимо через $|\cdot|_{ext}$ норми, що відповідають скалярним добуткам (1.5), тобто $|\cdot|_{ext} := \sqrt{(\cdot,\bar{\cdot})_{ext}}$.

Означення 1.2.1. Для кожного $n \in \mathbb{Z}_+$ визначимо гільбертів простір $\mathcal{H}_{ext}^{(n)}$ як поповнення $\mathcal{D}_{\mathbb{C}}^{\hat{\otimes}n}$ за відповідною нормою $|\cdot|_{ext}$ (для скалярних добутків та норм у просторах $\mathcal{H}_{ext}^{(n)}$ ми збережемо позначення $(\cdot,\cdot)_{ext}$ та $|\cdot|_{ext}$ відповідно).

Для кожного $F^{(n)} \in \mathcal{H}_{ext}^{(n)}$ визначимо *віківський моном*

$$:\!\langle\circ^{\otimes n}, F^{(n)}\rangle\!: \stackrel{\text{def}}{=} (L^2) - \lim_{k\to\infty} :\!\langle\circ^{\otimes n}, f_k^{(n)}\rangle\!:,$$

де $\mathcal{D}_{\mathbb{C}}^{\hat{\otimes}n} \ni f_k^{(n)} \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} F^{(n)}$ в $\mathcal{H}_{ext}^{(n)}$ (коректність цього визначення можна довести методом «змішаних послідовностей»). Легко бачити що, зокрема,

$$:\!\langle\circ^{\otimes 0}, F^{(0)}\rangle\!: = \langle\circ^{\otimes 0}, F^{(0)}\rangle = F^{(0)} \quad \text{та} \quad :\!\langle\circ, F^{(1)}\rangle\!: = \langle\circ, F^{(1)}\rangle,$$

(пор. з [21]).

Оскільки, як неважко бачити,

$$\mathbf{P}_n = \left\{:\!\langle\circ^{\otimes n}, F^{(n)}\rangle\!: \mid F^{(n)} \in \mathcal{H}_{ext}^{(n)}\right\}$$

для кожного $n \in \mathbb{Z}_+$, то з розкладу (1.4) випливає таке твердження.

Теорема 1.2.2 (литвинівське узагальнення ВХР, пор. з [21])**.** *Випадкова величина $F \in (L^2)$ якщо та лише якщо існує єдина послідовність ядер $F^{(n)} \in \mathcal{H}^{(n)}_{ext}$, $n \in \mathbb{Z}_+$, така, що*

$$F = \sum_{n=0}^{\infty} :\langle \circ^{\otimes n}, F^{(n)} \rangle: \tag{1.6}$$

(ряд збігається у (L^2)) та

$$\|F\|^2_{(L^2)} = \int_{\mathcal{D}'} |F(\omega)|^2 \mu(d\omega) = \mathbf{E}|F|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} n! |F^{(n)}|^2_{ext} < \infty. \tag{1.7}$$

Наслідок 1.2.3. *Для $F, G \in (L^2)$ дійсний (білінійний) скалярний добуток має вигляд*

$$(F, G)_{(L^2)} = \int_{\mathcal{D}'} F(\omega) G(\omega) \mu(d\omega) = \mathbf{E}[FG] = \sum_{n=0}^{\infty} n! (F^{(n)}, G^{(n)})_{ext},$$

де $F^{(n)}, G^{(n)} \in \mathcal{H}^{(n)}_{ext}$ – ядра з розкладів (1.6) для F та G відповідно. Зокрема, для $F^{(n)} \in \mathcal{H}^{(n)}_{ext}$, $G^{(m)} \in \mathcal{H}^{(m)}_{ext}$, $n, m \in \mathbb{Z}_+$,

$$\big(:\langle \circ^{\otimes n}, F^{(n)} \rangle:, :\langle \circ^{\otimes m}, G^{(m)} \rangle:\big)_{(L^2)} = \delta_{nm} n! (F^{(n)}, G^{(n)})_{ext},$$

де δ_{nm} – символ Кронекера.

Зауваження 1.2.4. Розклад (1.6) є аналогом розкладу квадратично інтегровної випадкової величини за ортогональними поліномами Ерміта, який є еквівалентним розкладу за повторними стохастичними інтегралами Іто у гауссівському аналізі. В той же час віківські мономи з (1.6) є поліномами лише у тому випадку, коли процес Леві є стаціонарним процесом Майкснера. Зацікавлений читач може знайти детальну інформацію про це у [21].

Для отримання багатьох результатів, пов'язаних з просторами $\mathcal{H}^{(n)}_{ext}$, необхідно рахувати скалярні добутки та норми у цих просторах. Наведена вище формула (1.5) практично непридатна для таких підрахунків; але, на щастя, існує відносно проста явна формула для згаданих скалярних добутків, отримана Є. В. Литвиновим у роботі [21]. Наведемо цю формулу у трохи модифікованій формі, отриманій у [16]. Нехай

$$p_n(x) := x^n + a_{n,n-1} x^{n-1} + \cdots + a_{n,1} x,$$
$$a_{n,j} \in \mathbb{R},\ j \in \{1, \ldots, n-1\},\ n \in \mathbb{N},$$

є ортогональними поліномами у просторі $L^2(\mathbb{R}, \nu)$ (класів) квадратично інтегровних за мірою Леві ν (див. (1.1), (1.3)) дійснозначних функцій на $\mathbb{R}$, тобто для довільних натуральних чисел n, m таких, що $n \neq m$,

$$\int_{\mathbb{R}} p_n(x) p_m(x) \nu(dx) = 0.$$

Позначимо через $\|\cdot\|_\nu$ норму в $L^2(\mathbb{R}, \nu)$. Зауважимо, що $p_1(x) = x$, а тому згідно з (1.2), $\|p_1\|_\nu = 1$.

Для $F^{(n)}, G^{(n)} \in \mathcal{H}_{ext}^{(n)}$, $n \in \mathbb{N}$, маємо

$$\begin{aligned}
&(F^{(n)}, G^{(n)})_{ext} \equiv (F^{(n)}, G^{(n)})_{\mathcal{H}_{ext}^{(n)}} = \\
&= \sum_{\substack{k, l_j, s_j \in \mathbb{N}:\ j=1,\dots,k, \\ l_1 > l_2 > \dots > l_k, \\ l_1 s_1 + \dots + l_k s_k = n}} \frac{n!}{s_1! \cdots s_k!} \Big(\frac{\|p_{l_1}\|_\nu}{l_1!} \Big)^{2s_1} \cdots \Big(\frac{\|p_{l_k}\|_\nu}{l_k!} \Big)^{2s_k} \times \\
&\quad \times \int\limits_{\mathbb{R}_+^{s_1+\dots+s_k}} F^{(n)}(\underbrace{t_1, \dots, t_1}_{l_1}, \dots, \underbrace{t_{s_1}, \dots, t_{s_1}}_{l_1}, \dots, \underbrace{t_{s_1+\dots+s_k}, \dots, t_{s_1+\dots+s_k}}_{l_k}) \times \\
&\quad \times G^{(n)}(\underbrace{t_1, \dots, t_1}_{l_1}, \dots, \underbrace{t_{s_1}, \dots, t_{s_1}}_{l_1}, \dots, \underbrace{t_{s_1+\dots+s_k}, \dots, t_{s_1+\dots+s_k}}_{l_k})\, dt_1 \cdots dt_{s_1+\dots+s_k}.
\end{aligned} \tag{1.8}$$

Зокрема, $(F^{(1)}, G^{(1)})_{ext} = (F^{(1)}, G^{(1)})_{L^2(\mathbb{R}_+)_\mathbb{C}}$,

$$(F^{(2)}, G^{(2)})_{ext} = (F^{(2)}, G^{(2)})_{L^2(\mathbb{R}_+)_\mathbb{C}^{\otimes 2}} + \frac{\|p_2\|_\nu^2}{2} \int_{\mathbb{R}_+} F^{(2)}(t,t) G^{(2)}(t,t) dt,$$

і т. д. Зауважимо, що для кожного натурального $n > 1$ простір $\mathcal{H}_{ext}^{(n)}$ є симетричним підпростором простору (класів) квадратично інтегровних за певною мірою Радона комплекснозначних функцій на $\mathbb{R}_+^n$.

Позначимо $\mathcal{H} := L^2(\mathbb{R}_+)$, тоді $\mathcal{H}_\mathbb{C} = L^2(\mathbb{R}_+)_\mathbb{C}$. З (1.8) випливає, що $\mathcal{H}_{ext}^{(1)} = \mathcal{H}_\mathbb{C}$, *і для кожного* $n \in \mathbb{N} \backslash \{1\}$ *простір* $\mathcal{H}_\mathbb{C}^{\widehat{\otimes} n}$ *можна ототожнити із власним підпростором простору* $\mathcal{H}_{ext}^{(n)}$, *який складається зі «зникаючих на діагоналях» елементів (тобто таких* $F^{(n)}$, *які містять представника (функцію)* $f^{(n)} \in F^{(n)}$ *таку, що* $f^{(n)}(t_1, \dots, t_n) = 0$, *якщо існують* $k, j \in \{1, \dots, n\}$: $k \neq j$, *але* $t_k = t_j$*)*. У цьому сенсі *простір* $\mathcal{H}_{ext}^{(n)}$ *є розширенням (англ. extension) простору* $\mathcal{H}_\mathbb{C}^{\widehat{\otimes} n}$, цим пояснюється, чому ми використовуємо індекси «*ext*» у наших позначеннях. В подальшому, говорячи про вкладення просторів $\mathcal{H}_\mathbb{C}^{\widehat{\otimes} n}$ в простори $\mathcal{H}_{ext}^{(n)}$ та використовуючи позначення на кшталт $\mathcal{H}_\mathbb{C}^{\widehat{\otimes} n} \subset \mathcal{H}_{ext}^{(n)}$, завжди розуміємо такі вкладення у щойно описаному сенсі.

1.3. **Регулярне оснащення простору квадратично інтегровних випадкових величин.** Позначимо

$$\mathcal{P}_W := \Big\{ f = \sum_{n=0}^{N_f} :\langle \circ^{\otimes n}, f^{(n)} \rangle: \ \big| \ f^{(n)} \in \mathcal{D}_{\mathbb{C}}^{\hat{\otimes} n}, N_f \in \mathbb{Z}_+ \Big\} \subset (L^2).$$

Нехай $\beta \in [0,1]$, $q \in \mathbb{Z}$ у випадку $\beta \neq 0$, та $q \in \mathbb{Z}_+$ якщо $\beta = 0$. Визначимо дійсні (білінійні) скалярні добутки $(\cdot,\cdot)_{q,\beta}$ на $\mathcal{P}_W$, поклавши для

$$f = \sum_{n=0}^{N_f} :\langle \circ^{\otimes n}, f^{(n)} \rangle:, \ g = \sum_{n=0}^{N_g} :\langle \circ^{\otimes n}, g^{(n)} \rangle: \in \mathcal{P}_W$$

$$(f,g)_{q,\beta} := \sum_{n=0}^{\min(N_f,N_g)} (n!)^{1+\beta} 2^{qn} (f^{(n)}, g^{(n)})_{ext}.$$

Легко перевірити [9], що $(\cdot,\cdot)_{q,\beta}$ задовольняє аксіоми скалярного добутку.

Позначимо через $(L^2)_q^\beta$ гільбертові простори, що є поповненнями $\mathcal{P}_W$ за нормами, породженими скалярними добутками $(\cdot,\cdot)_{q,\beta}$, та покладемо

$$(L^2)^\beta := \operatorname{pr}\lim_{q\to+\infty} (L^2)_q^\beta.$$

Легко бачити, що справедливе таке твердження (пор. з Теоремою 1.2.2 та її наслідком).

Твердження 1.3.1. 1. *Випадкова величина $F \in (L^2)_q^\beta$ якщо та лише якщо існує єдина послідовність ядер $F^{(n)} \in \mathcal{H}_{ext}^{(n)}$, $n \in \mathbb{Z}_+$, така, що F розкладається в ряд (1.6), який збігається у $(L^2)_q^\beta$, тобто*

$$\|F\|^2_{(L^2)_q^\beta} = \sum_{n=0}^{\infty} (n!)^{1+\beta} 2^{qn} |F^{(n)}|^2_{ext} < \infty. \tag{1.9}$$

2. *Випадкова величина $F \in (L^2)^\beta$ якщо та лише якщо її можна єдиним чином представити у вигляді (1.6), а відповідний ряд (1.9) збігається для кожного $q \in \mathbb{Z}_+$.*

3. *Для $F, G \in (L^2)_q^\beta$ скалярний добуток у $(L^2)_q^\beta$ має вигляд*

$$(F,G)_{(L^2)_q^\beta} = \sum_{n=0}^{\infty} (n!)^{1+\beta} 2^{qn} (F^{(n)}, G^{(n)})_{ext},$$

де $F^{(n)}, G^{(n)} \in \mathcal{H}_{ext}^{(n)}$ – ядра з розкладів (1.6) для F та G відповідно.

Наступне твердження є тривіальною модифікацією відповідного твердження з [15].

Твердження 1.3.2. *Для довільних $\beta \in (0,1]$ та $q \in \mathbb{Z}$, так само як і для $\beta = 0$ та $q \in \mathbb{Z}_+$, простір $(L^2)_q^\beta$ щільно та неперервно вкладено у простір $(L^2) = (L^2)_0^0$.*

Прийнявши до уваги цей результат, побудуємо ланцюжок

$$(L^2)^{-\beta} \supset (L^2)_{-q}^{-\beta} \supseteq (L^2) = (L^2)_0^0 \supseteq (L^2)_q^\beta \supset (L^2)^\beta, \tag{1.10}$$

де $(L^2)_{-q}^{-\beta}$ та $(L^2)^{-\beta} = \operatorname{ind}\lim_{q\to+\infty}(L^2)_{-q}^{-\beta}$ – простори, спряжені відповідно до $(L^2)_q^\beta$ та $(L^2)^\beta$ відносно (L^2).

Означення 1.3.3. Ланцюжок (1.10) називається параметризованим регулярним оснащенням простору (L^2) квадратично інтегровних випадкових величин. Простори $(L^2)_q^\beta$ та $(L^2)^\beta$ називаються параметризованими просторами типу Кондратьєва регулярних основних функцій, а простори $(L^2)_{-q}^{-\beta}$ та $(L^2)^{-\beta}$ – параметризованими просторами типу Кондратьєва регулярних узагальнених функцій.

Наступне твердження випливає безпосередньо із цього означення та загальної теорії дуальності.

Твердження 1.3.4. (пор. з Теоремою 1.2.2, її наслідком та Твердженням 1.3.1) 1. *Регулярна узагальнена функція (узагальнена випадкова величина) $F \in (L^2)_{-q}^{-\beta}$ якщо та лише якщо існує єдина послідовність ядер $F^{(n)} \in \mathcal{H}_{ext}^{(n)}$, $n \in \mathbb{Z}_+$, така, що F розкладається в ряд (1.6), який збігається у $(L^2)_{-q}^{-\beta}$, тобто*

$$\|F\|^2_{(L^2)_{-q}^{-\beta}} = \sum_{n=0}^{\infty}(n!)^{1-\beta}2^{-qn}|F^{(n)}|^2_{ext} < \infty. \tag{1.11}$$

2. *Регулярна узагальнена функція $F \in (L^2)^{-\beta}$ якщо та лише якщо її можна єдиним чином представити у вигляді (1.6), а відповідний ряд (1.11) збігається для деякого $q \in \mathbb{Z}_+$.*

3. *Для $F, G \in (L^2)_{-q}^{-\beta}$ скалярний добуток у $(L^2)_{-q}^{-\beta}$ має вигляд*

$$(F,G)_{(L^2)_{-q}^{-\beta}} = \sum_{n=0}^{\infty}(n!)^{1-\beta}2^{-qn}(F^{(n)}, G^{(n)})_{ext},$$

де $F^{(n)}, G^{(n)} \in \mathcal{H}_{ext}^{(n)}$ – ядра з розкладів (1.6) для F та G відповідно.

4. *Дуальне спарювання між елементами* $F \in (L^2)^{-\beta}_{-q}$ *та* $f \in (L^2)^{\beta}_{q}$, *породжене дійсним (білінійним) скалярним добутком у* (L^2), *має вигляд*

$$\langle\!\langle F, f \rangle\!\rangle_{(L^2)} = \sum_{n=0}^{\infty} n!(F^{(n)}, f^{(n)})_{ext},$$

де $F^{(n)}, f^{(n)} \in \mathcal{H}^{(n)}_{ext}$ *– ядра з розкладів* (1.6) *для* F *та* f *відповідно.*

Відзначимо, що термін «регулярні» у назвах ланцюжка (1.10) та просторів основних і узагальнених функцій пов'язаний із тим фактом, що ядра з розкладів (1.6) елементів всіх просторів ланцюжка (1.10) належать одним і тим самим просторам $\mathcal{H}^{(n)}_{ext}$.

Більше того, простори $(L^2)^{\beta}_{q}$, $(L^2) = (L^2)^0_0$ та $(L^2)^{-\beta}_{-q}$ мають однакову структуру (пор. (1.9), (1.7) та (1.11)), тому в подальшому ми абстрагуємось від того, йдеться про регулярні основні, квадратично інтегровні чи регулярні узагальнені функції, та *будемо за умовчанням розглядати* $(L^2)^{\beta}_{q}$, $\beta \in [-1, 1]$, $q \in \mathbb{Z}$, *з нормою* (1.9).

Зауваження 1.3.5. Використання ваг 2^{qn} саме з числом 2 та з цілим q у визначенні скалярних добутків $(\cdot, \cdot)_{q,\beta}$ не є принциповим – можна використовувати більш загальні ваги K^{qn} із довільними $K > 1$ та $q \in \mathbb{R}$. Але такі узагальнення не є суттєвим для кола питань, які розглядаються у статті, тому ми обмежимось розглядом випадку $K = 2$ та $q \in \mathbb{Z}$ задля спрощення формул та позначень.

1.4. **Розширений стохастичний інтеграл.** Розклад (1.6) для елементів $(L^2)^{\beta}_{q}$ визначає ізометричний ізоморфізм (узагальнений ізоморфізм Вінера-Іто-Сігала)

$$\mathbf{I} : (L^2)^{\beta}_{q} \to \bigoplus_{n=0}^{\infty} (n!)^{1+\beta} 2^{qn} \mathcal{H}^{(n)}_{ext} :$$

для $F \in (L^2)^{\beta}_{q}$ вигляду (1.6)

$$\mathbf{I}F = (F^{(0)}, F^{(1)}, \dots) \in \bigoplus_{n=0}^{\infty} (n!)^{1+\beta}\, 2^{qn}\, \mathcal{H}^{(n)}_{ext}.$$

Нехай $\mathbf{1}$ – одиничний оператор на $\mathcal{H}_{\mathbb{C}}$. Тоді оператор

$$\mathbf{I} \otimes \mathbf{1} \colon (L^2)^{\beta}_{q} \otimes \mathcal{H}_{\mathbb{C}} \to \Big(\bigoplus_{n=0}^{\infty} (n!)^{1+\beta} 2^{qn} \mathcal{H}^{(n)}_{ext}\Big) \otimes \mathcal{H}_{\mathbb{C}} \cong \bigoplus_{n=0}^{\infty} (n!)^{1+\beta} 2^{qn} (\mathcal{H}^{(n)}_{ext} \otimes \mathcal{H}_{\mathbb{C}})$$

є ізометричним ізоморфізмом між гільбертовими просторами

$$(L^2)^{\beta}_{q} \otimes \mathcal{H}_{\mathbb{C}} \qquad \text{та} \qquad \bigoplus_{n=0}^{\infty} (n!)^{1+\beta} 2^{qn} (\mathcal{H}^{(n)}_{ext} \otimes \mathcal{H}_{\mathbb{C}}).$$

Зрозуміло, що для довільних $m \in \mathbb{Z}_+$ та $F_\cdot^{(m)} \in \mathcal{H}_{ext}^{(m)} \otimes \mathcal{H}_\mathbb{C}$ вектор $(\underbrace{0,\dots,0}_{m}, F_\cdot^{(m)}, 0, \dots)$ належить простору $\bigoplus_{n=0}^{\infty} (n!)^{1+\beta} 2^{qn} (\mathcal{H}_{ext}^{(n)} \otimes \mathcal{H}_\mathbb{C})$.

Покладемо

$$:\langle \circ^{\otimes m}, F_\cdot^{(m)} \rangle: \stackrel{def}{=} (\mathbf{I} \otimes \mathbf{1})^{-1} (\underbrace{0,\dots,0}_{m}, F_\cdot^{(m)}, 0, \dots) \in (L^2)_q^\beta \otimes \mathcal{H}_\mathbb{C}.$$

За побудовою елементи $:\langle \circ^{\otimes n}, F_\cdot^{(n)} \rangle:$, $n \in \mathbb{Z}_+$, утворюють ортогональний базис у просторі $(L^2)_q^\beta \otimes \mathcal{H}_\mathbb{C}$ у тому сенсі, що F *належить* $(L^2)_q^\beta \otimes \mathcal{H}_\mathbb{C}$ *якщо та лише якщо* F *можна єдиним чином представити у вигляді ряду*

$$F(\cdot) = \sum_{n=0}^{\infty} :\langle \circ^{\otimes n}, F_\cdot^{(n)} \rangle:, \quad F_\cdot^{(n)} \in \mathcal{H}_{ext}^{(n)} \otimes \mathcal{H}_\mathbb{C}, \tag{1.12}$$

який збігається у $(L^2)_q^\beta \otimes \mathcal{H}_\mathbb{C}$, *тобто*

$$\begin{aligned} \|F\|^2_{(L^2)_q^\beta \otimes \mathcal{H}_\mathbb{C}} &= \|(\mathbf{I} \otimes \mathbf{1}) F\|^2_{\bigoplus_{n=0}^{\infty} (n!)^{1+\beta} 2^{qn} (\mathcal{H}_{ext}^{(n)} \otimes \mathcal{H}_\mathbb{C})} = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (n!)^{1+\beta} 2^{qn} |F_\cdot^{(n)}|^2_{\mathcal{H}_{ext}^{(n)} \otimes \mathcal{H}_\mathbb{C}} < \infty. \end{aligned} \tag{1.13}$$

Опишемо конструкцію розширеного стохастичного інтеграла за процесом Леві, яка базується на розкладі (1.12) (зацікавлений читач може знайти більш детальний виклад у [15, 16]).

Нехай спочатку $F \in (L^2)_q^\beta \otimes \mathcal{H}_\mathbb{C}$ є таким, що ядра $F_\cdot^{(n)}$ належать просторам $\mathcal{H}_\mathbb{C}^{\widehat{\otimes} n} \otimes \mathcal{H}_\mathbb{C} \subset \mathcal{H}_{ext}^{(n)} \otimes \mathcal{H}_\mathbb{C}$ (див. Підрозділ 1.2). Тоді розклад (1.12) еквівалентний представленню

$$F(\cdot) = F_\cdot^{(0} + \sum_{n=1}^{\infty} n! \int_0^\infty \int_0^{t_n} \cdots \int_0^{t_2} F_\cdot^{(n)}(t_1, \dots, t_n) dL_{t_1} \cdots dL_{t_n} \tag{1.14}$$

[16] (див. також [12]), де ряд складається з повторних стохастичних інтегралів Іто; а розширений стохастичний інтеграл можна визначити за класичною схемою як

$$\begin{aligned} &\int F(t) \widehat{d} L_t := \\ &:= \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)! \int_0^\infty \int_0^{t_{n+1}} \cdots \int_0^{t_2} \widehat{F}^{(n)}(t_1, \dots, t_{n+1}) dL_{t_1} \cdots dL_{t_{n+1}} \cong \\ &\cong \sum_{n=0}^{\infty} :\langle \circ^{\otimes n+1}, \widehat{F}^{(n)} \rangle: \in (L^2)_{q-1}^\beta, \end{aligned} \tag{1.15}$$

де $\widehat{F}^{(n)} \in \mathcal{H}_{\mathbb{C}}^{\widehat{\otimes} n+1} \subset \mathcal{H}_{ext}^{(n+1)}$, $n \in \mathbb{Z}_+$, – симетризації ядер $F_{\cdot}^{(n)}$ за всіма аргументами (точніше, проекції $F_{\cdot}^{(n)} \in \mathcal{H}_{\mathbb{C}}^{\widehat{\otimes} n} \otimes \mathcal{H}_{\mathbb{C}}$ на $\mathcal{H}_{\mathbb{C}}^{\widehat{\otimes} n+1}$).

У загальному випадку представлення (1.14) не має місця (адже в аналізі білого шуму Леві ВХР немає), а ядра $\widehat{F}^{(n)}$ є невизначеними, оскільки, взагалі кажучи, неможливо проектувати елементи з просторів $\mathcal{H}_{ext}^{(n)} \otimes \mathcal{H}_{\mathbb{C}}$ на простори $\mathcal{H}_{ext}^{(n+1)}$ (див. Зауваження 1.5.2 нижче). Тим не менш, можна зробити наступне природне узагальнення.

Нехай $F_{\cdot}^{(n)} \in \mathcal{H}_{ext}^{(n)} \otimes \mathcal{H}_{\mathbb{C}}$, $n \in \mathbb{N}$. У класі еквівалентності $F_{\cdot}^{(n)}$ оберемо представника (функцію) $\dot{f}_{\cdot}^{(n)} \in F_{\cdot}^{(n)}$ такого, що

$$\forall t, t_1, \ldots, t_n \in \mathbb{R}_+ \ \left\{\exists k \in \{1, \ldots, n\} : t = t_k\right\} \Rightarrow \dot{f}_t^{(n)}(t_1, \ldots, t_n) = 0 \quad (1.16)$$

(тобто $\dot{f}_t^{(n)}(t_1, \ldots, t_n) = 0$, якщо аргумент t співпадає хоча б з одним з аргументів $t_1, \ldots, t_n$). Нехай $\widehat{f}^{(n)}$ – симетризація функції $\dot{f}_{\cdot}^{(n)}$ за $n+1$ змінною. Визначимо

$$\widehat{F}^{(n)} \in \mathcal{H}_{ext}^{(n+1)}$$

як клас еквівалентності в $\mathcal{H}_{ext}^{(n+1)}$, породжений функцією $\widehat{f}^{(n)}$ (тобто $\widehat{f}^{(n)} \in \widehat{F}^{(n)}$). Наступне твердження є тривіальною модифікацією відповідного результату з [16].

Лема 1.4.1. *Для довільних $n \in \mathbb{N}$ та $F_{\cdot}^{(n)} \in \mathcal{H}_{ext}^{(n)} \otimes \mathcal{H}_{\mathbb{C}}$ елемент*

$$\widehat{F}^{(n)} \in \mathcal{H}_{ext}^{(n+1)}$$

визначений коректно (зокрема, $\widehat{F}^{(n)}$ не залежить від вибору представника $\dot{f}_{\cdot}^{(n)} \in F_{\cdot}^{(n)}$, який задовольняє умову (1.16)), та

$$|\widehat{F}^{(n)}|_{\mathcal{H}_{ext}^{(n+1)}} \leqslant |F_{\cdot}^{(n)}|_{\mathcal{H}_{ext}^{(n)} \otimes \mathcal{H}_{\mathbb{C}}}. \quad (1.17)$$

Зауваження 1.4.2. Легко бачити, що якщо

$$F_{\cdot}^{(n)} \in \mathcal{H}_{\mathbb{C}}^{\widehat{\otimes} n} \otimes \mathcal{H}_{\mathbb{C}} \subset \mathcal{H}_{ext}^{(n)} \otimes \mathcal{H}_{\mathbb{C}},$$

то щойно побудоване ядро $\widehat{F}^{(n)}$ є згаданою вище проекцією $F_{\cdot}^{(n)}$ на $\mathcal{H}_{\mathbb{C}}^{\widehat{\otimes} n+1} \subset \mathcal{H}_{ext}^{(n+1)}$.

Означення 1.4.3. Для $F \in (L^2)_q^\beta \otimes \mathcal{H}_{\mathbb{C}}$ визначимо розширений стохастичний інтеграл за процесом Леві $\int F(t)\widehat{d}L_t \in (L^2)_{q-1}^\beta$, поклавши

$$\int F(t)\widehat{d}L_t := \sum_{n=0}^{\infty} :\!\langle \circ^{\otimes n+1}, \widehat{F}^{(n)} \rangle\!: \quad (1.18)$$

(пор. з (1.15)), де $\widehat{F}^{(0)} := F_{\cdot}^{(0)} \in \mathcal{H}_{\mathbb{C}} = \mathcal{H}_{ext}^{(1)}$ та $\widehat{F}^{(n)} \in \mathcal{H}_{ext}^{(n+1)}$, $n \in \mathbb{N}$, побудовані за ядрами $F_{\cdot}^{(n)} \in \mathcal{H}_{ext}^{(n)} \otimes \mathcal{H}_{\mathbb{C}}$ з розкладу (1.12) для F.

Оскільки (див. (1.18), (1.9), (1.17) та (1.13))

$$\begin{aligned} \left\| \int F(t)\widehat{d}L_t \right\|^2_{(L^2)^\beta_{q-1}} &= \sum_{n=0}^{\infty} ((n+1)!)^{1+\beta} 2^{(q-1)(n+1)} |\widehat{F}^{(n)}|^2_{\mathcal{H}_{ext}^{(n+1)}} \leqslant \\ &\leqslant \sum_{n=0}^{\infty} (n!)^{1+\beta} 2^{qn} [(n+1)^{1+\beta} 2^{-n+q-1}] |F_{\cdot}^{(n)}|^2_{\mathcal{H}_{ext}^{(n)} \otimes \mathcal{H}_{\mathbb{C}}} \leqslant \\ &\leqslant \max_{n \in \mathbb{Z}_+} [(n+1)^{1+\beta} 2^{-n+q-1}] \|F\|^2_{(L^2)^\beta_q \otimes \mathcal{H}_{\mathbb{C}}}, \end{aligned} \tag{1.19}$$

це визначення є коректним, а інтеграл

$$\int \circ(t)\widehat{d}L_t : (L^2)^\beta_q \otimes \mathcal{H}_{\mathbb{C}} \to (L^2)^\beta_{q-1} \tag{1.20}$$

є лінійним *обмеженим*, а тому і *неперервним* оператором.

Відзначимо, що стохастичний інтеграл (1.20) називається *розширеним*, оскільки у випадках, коли $(L^2)^\beta_q \otimes \mathcal{H}_{\mathbb{C}}$ є простором регулярних *узагальнених* або квадратично інтегровних функцій (тобто коли $\beta < 0$ або $\beta = 0$ і $q \leqslant 0$), він є узагальненням стохастичного інтеграла Іто [16].

Легко бачити, що розширений стохастичний інтеграл можна визначити формулою (1.18) як лінійний неперервний оператор, що діє з простору

$$(L^2)^\beta \otimes \mathcal{H}_{\mathbb{C}} := \operatorname{pr}\lim_{q \to +\infty} (L^2)^\beta_q \otimes \mathcal{H}_{\mathbb{C}}$$

в простір $(L^2)^\beta$, або з простору

$$(L^2)^{-\beta} \otimes \mathcal{H}_{\mathbb{C}} := \operatorname{ind}\lim_{q \to +\infty} (L^2)^{-\beta}_{-q} \otimes \mathcal{H}_{\mathbb{C}}$$

в простір $(L^2)^{-\beta}$, тут $\beta \in [0, 1]$. До того ж за аналогією з (1.19) можна показати, що у випадку $\beta = -1$ розширений стохастичний інтеграл є лінійним неперервним оператором, що діє з простору $(L^2)^{-1}_q \otimes \mathcal{H}_{\mathbb{C}}$ в простір $(L^2)^{-1}_q$; а у випадку $\beta \in (-1, 1]$, як випливає з результатів [15], цей інтеграл можна інтерпретувати як лінійний необмежений замкнений оператор, що діє з простору $(L^2)^\beta_q \otimes \mathcal{H}_{\mathbb{C}}$ в простір $(L^2)^\beta_q$.

Зауваження 1.4.4. В цій роботи нам не знадобляться стохастичні інтеграли за вимірними множинами, що відрізняються від $\mathbb{R}_+$, але такі інтеграли часто виникають у застосуваннях. Визначення згаданих інтегралів можна дати у класичний спосіб: для довільного $\Delta \in \mathcal{B}(\mathbb{R}_+)$

покладемо

$$\int_\Delta \circ(t)\widehat{d}L_t := \int \circ(t)1_\Delta(t)\widehat{d}L_t.$$

Зацікавлений читач може знайти детальну інформацію про такі інтеграли, зокрема, у [15, 16, 37].

1.5. **Стохастична похідна Хіди.** Опишемо конструкцію стохастичної похідної Хіди на просторах $(L^2)^\beta_q$, яка базується на розкладі (1.6) (детальніше цей матеріал викладено у [15, 16]).

Нехай $G^{(n)} \in \mathcal{H}^{(n)}_{ext}$, $n \in \mathbb{N}$, і $\dot{g}^{(n)} \in G^{(n)}$ – представник $G^{(n)}$. Розглянемо $\dot{g}^{(n)}(\cdot)$, тобто відділимо один аргумент $\dot{g}^{(n)}$, та визначимо елемент

$$G^{(n)}(\cdot) \in \mathcal{H}^{(n-1)}_{ext} \otimes \mathcal{H}_\mathbb{C}$$

як клас еквівалентності у $\mathcal{H}^{(n-1)}_{ext} \otimes \mathcal{H}_\mathbb{C}$, породжений функцією $\dot{g}^{(n)}(\cdot)$ (тобто $\dot{g}^{(n)}(\cdot) \in G^{(n)}(\cdot)$).

Лема 1.5.1. *Для довільних $n \in \mathbb{N}$ та $G^{(n)} \in \mathcal{H}^{(n)}_{ext}$ елемент*

$$G^{(n)}(\cdot) \in \mathcal{H}^{(n-1)}_{ext} \otimes \mathcal{H}_\mathbb{C}$$

визначений коректно (зокрема, $G^{(n)}(\cdot)$ не залежить від вибору представника $\dot{g}^{(n)} \in G^{(n)}$) та

$$|G^{(n)}(\cdot)|_{\mathcal{H}^{(n-1)}_{ext} \otimes \mathcal{H}_\mathbb{C}} \leqslant |G^{(n)}|_{\mathcal{H}^{(n)}_{ext}}. \tag{1.21}$$

Доведення цього твердження співпадає з точністю до очевидних модифікацій із доведенням відповідного результату у [16].

Зауваження 1.5.2. Варто відзначити, що, не зважаючи на оцінку (1.21), простір $\mathcal{H}^{(n)}_{ext}$, $n \in \mathbb{N}\backslash\{1\}$, не є підпростором простору $\mathcal{H}^{(n-1)}_{ext} \otimes \mathcal{H}_\mathbb{C}$, оскільки різні елементи $\mathcal{H}^{(n)}_{ext}$ можуть співпадати у $\mathcal{H}^{(n-1)}_{ext} \otimes \mathcal{H}_\mathbb{C}$, тобто представники різних класів еквівалентності у $\mathcal{H}^{(n)}_{ext}$ можуть потрапляти у один і той самий клас еквівалентності у $\mathcal{H}^{(n-1)}_{ext} \otimes \mathcal{H}_\mathbb{C}$ (а тому, зокрема, неможливо проектувати елементи $\mathcal{H}^{(n-1)}_{ext} \otimes \mathcal{H}_\mathbb{C}$ на $\mathcal{H}^{(n)}_{ext}$ та будувати ядра розкладу (1.18) розширеного стохастичного інтеграла за класичною схемою).

Означення 1.5.3. Для $G \in (L^2)^\beta_{q+1}$ визначимо стохастичну похідну Хіди $\partial_\cdot G \in (L^2)^\beta_q \otimes \mathcal{H}_\mathbb{C}$, поклавши

$$\partial_\cdot G := \sum_{n=1}^\infty n{:}\langle \circ^{\otimes n-1}, G^{(n)}(\cdot)\rangle{:}, \tag{1.22}$$

де $G^{(n)} \in \mathcal{H}_{ext}^{(n)}$ – ядра з розкладу (1.6) для G, які розуміються як елементи $\mathcal{H}_{ext}^{(n-1)} \otimes \mathcal{H}_{\mathbb{C}}$ (в описаному вище сенсі).

Оскільки (див. (1.22), (1.13), (1.21) та (1.9))

$$\begin{aligned} \|\partial.G\|^2_{(L^2)^\beta_q \otimes \mathcal{H}_{\mathbb{C}}} &= \sum_{n=1}^{\infty} ((n-1)!)^{1+\beta} n^2 2^{q(n-1)} |G^{(n)}(\cdot)|^2_{\mathcal{H}_{ext}^{(n-1)} \otimes \mathcal{H}_{\mathbb{C}}} \leqslant \\ &\leqslant \sum_{n=1}^{\infty} (n!)^{1+\beta} 2^{(q+1)n} [n^{1-\beta} 2^{-(n+q)}] |G^{(n)}|^2_{\mathcal{H}_{ext}^{(n)}} \leqslant \\ &\leqslant \max_{n \in \mathbb{N}} [n^{1-\beta} 2^{-(n+q)}] \|G\|^2_{(L^2)^\beta_{q+1}}, \end{aligned} \tag{1.23}$$

це визначення є коректним, а похідна

$$\partial. : (L^2)^\beta_{q+1} \to (L^2)^\beta_q \otimes \mathcal{H}_{\mathbb{C}} \tag{1.24}$$

є лінійним *обмеженим*, а тому і *неперервним* оператором.

Зрозуміло, що, як і розширений стохастичний інтеграл, стохастичну похідну Хіди можна визначити формулою (1.22) як лінійний неперервний оператор, що діє з простору $(L^2)^\beta$ в простір $(L^2)^\beta \otimes \mathcal{H}_{\mathbb{C}}$ ($\beta \in [-1, 1]$). До того ж за аналогією з (1.23) можна показати, що у випадку $\beta = 1$ стохастична похідна Хіди є лінійним неперервним оператором, що діє з простору $(L^2)^1_q$ в простір $(L^2)^1_q \otimes \mathcal{H}_{\mathbb{C}}$; а у випадку $\beta \in [-1, 1)$, як випливає з результатів [15], цю похідну можна інтерпретувати як лінійний необмежений замкнений оператор, що діє з простору $(L^2)^\beta_q$ в простір $(L^2)^\beta_q \otimes \mathcal{H}_{\mathbb{C}}$.

В наступному твердженні описано зв'язок між розширеним стохастичним інтегралом та стохастичною похідною Хіди.

Теорема 1.5.4. *Розширений стохастичний інтеграл*

$$\int \circ \widehat{d}L : (L^2)^{-\beta}_{-q} \otimes \mathcal{H}_{\mathbb{C}} \to (L^2)^{-\beta}_{-q-1}$$

та стохастична похідна Хіди (1.24) *є взаємно спряженими операторами:*

$$\int \circ \widehat{d}L = (\partial.)^*, \qquad \partial. = \left(\int \circ \widehat{d}L \right)^*, \tag{1.25}$$

тобто для довільних $F \in (L^2)^{-\beta}_{-q} \otimes \mathcal{H}_{\mathbb{C}}$ *та* $G \in (L^2)^\beta_{q+1}$

$$\langle\!\langle \int F(t) \widehat{d}L_t, G \rangle\!\rangle_{(L^2)} = \langle\!\langle F(\cdot), \partial.G \rangle\!\rangle_{(L^2) \otimes \mathcal{H}_{\mathbb{C}}}. \tag{1.26}$$

Доведення зводиться до встановлення рівності (1.26), яке проводиться так само, як і для інтеграла та похідної на просторах $(L^2) \otimes \mathcal{H}_{\mathbb{C}}$ та (L^2) відповідно, див. [16].

Відзначимо, що результат Теореми 1.5.4 тривіальним чином розповсюджується на випадок граничних просторів, тобто коли стохастичні інтеграл та похідна визначені відповідно на $(L^2)^{-\beta} \otimes \mathcal{H}_{\mathbb{C}}$ та $(L^2)^{\beta}$ ($\beta \in [-1, 1]$). Ясно також, що рівності (1.25) можуть використовуватись як альтернативні визначення розширеного стохастичного інтеграла та стохастичної похідної Хіди.

Зауваження 1.5.5. Результат Теореми 1.5.4 залишається справедливим для розширеного стохастичного інтеграла

$$\int \circ(t)\widehat{d}L_t : (L^2)_{-q}^{-\beta} \otimes \mathcal{H}_{\mathbb{C}} \to (L^2)_{-q}^{-\beta}$$

та стохастичної похідної Хіди

$$\partial_\cdot : (L^2)_q^{\beta} \to (L^2)_q^{\beta} \otimes \mathcal{H}_{\mathbb{C}},$$

[15] (див. також [16]). З цього результату випливає, зокрема, замкненість згаданих операторів.

Насамкінець зауважимо, що у випадках, коли замість розширеного стохастичного інтеграла $\int \circ(t)\widehat{d}L_t$ розглядається інтеграл

$$\int_\Delta \circ(t)\widehat{d}L_t = \int \circ(t)1_\Delta(t)\widehat{d}L_t, \qquad \Delta \in \mathcal{B}(\mathbb{R}_+)$$

(див. Зауваження 1.4.4), відповідним спряженим оператором є стохастична похідна Хіди $1_\Delta(\cdot)\partial_\cdot$, це тривіальним чином випливає з рівності (1.26).

2. Формули типу Кларка-Окона та суміжні питання

Нехай $\mathcal{F}_t$, $t \in \mathbb{R}_+$, – поповнення відносно міри білого шуму Леві σ-алгебри $\sigma(L_u : u \leqslant t)$, породженої процесом Леві L до моменту часу t. Для $F \in (L^2)_q^{\beta}$, $\beta \in [-1, 0)$ та $q \in \mathbb{Z}$, або $\beta = 0$ та $-q \in \mathbb{N}$ (тобто для узагальнених випадкових величин), визначимо математичне сподівання $\mathbf{E}$ та умовне математичне сподівання $\mathbf{E}\big(\circ |_{\mathcal{F}_t}\big)$, поклавши

$$\mathbf{E}F := \langle\!\langle F, 1 \rangle\!\rangle_{(L^2)} = F^{(0)} \in \mathbb{C},$$

$$\mathbf{E}\big(F|_{\mathcal{F}_t}\big) := F^{(0)} + \sum_{n=1}^{\infty} :\langle \circ^{\otimes n}, F^{(n)} 1_{[0,t)^n} \rangle: \in (L^2)_q^{\beta},$$

де $F^{(n)} \in \mathcal{H}_{ext}^{(n)}$ – ядра з розкладу (1.6) для F. Якщо $F \in (L^2) \subset (L^2)_q^{\beta}$, то, як легко бачити, $\mathbf{E}F$ є звичайним математичним сподіванням F; і цілком аналогічно доведенню Теореми 4.2 в [17] можна показати, що $\mathbf{E}(F|_{\mathcal{F}_t})$ є умовним математичним сподіванням F відносно $\mathcal{F}_t$. Спираючись на це визначення, для $G \in (L^2)_q^\beta \otimes \mathcal{H}_\mathbb{C}$ природно покласти

$$\mathbf{E}\big(G(\cdot)|_{\mathcal{F}_\cdot}\big) := G_\cdot^{(0)} + \sum_{n=1}^{\infty} :\!\langle \circ^{\otimes n}, G_\cdot^{(n)} 1_{[0,\cdot)^n} \rangle\!: \in (L^2)_q^\beta \otimes \mathcal{H}_\mathbb{C}, \tag{2.1}$$

де $G_\cdot^{(n)} \in \mathcal{H}_{ext}^{(n)} \otimes \mathcal{H}_\mathbb{C}$ – ядра з розкладу (1.12) для G. Зрозуміло, що

$$G_\cdot^{(n)} 1_{[0,\cdot)^n} \in \mathcal{H}_{ext}^{(n)} \otimes \mathcal{H}_\mathbb{C}, \qquad |G_\cdot^{(n)} 1_{[0,\cdot)^n}|_{\mathcal{H}_{ext}^{(n)} \otimes \mathcal{H}_\mathbb{C}} \leqslant |G_\cdot^{(n)}|_{\mathcal{H}_{ext}^{(n)} \otimes \mathcal{H}_\mathbb{C}},$$

а тому $\mathbf{E}\big(\circ(\cdot)|_{\mathcal{F}_\cdot}\big)$ є лінійним неперервним оператором в $(L^2)_q^\beta \otimes \mathcal{H}_\mathbb{C}$.

2.1. **Формула Кларка-Окона в найпростішому частинному випадку.** Як і при описі конструкції розширеного стохастичного інтеграла, розглянемо спочатку найпростіший частинний випадок, в якому формула Кларка-Окона приймає класичний вигляд.

Твердження 2.1.1. *Нехай $F \in (L^2)_q^\beta$ є таким, що ядра $F^{(n)}$, $n \in \mathbb{Z}_+$, з розкладу (1.6) належать просторам $\mathcal{H}_\mathbb{C}^{\widehat{\otimes} n} \subset \mathcal{H}_{ext}^{(n)}$ (див. Підрозділ 1.2). Тоді*

$$F = \mathbf{E}F + \int \mathbf{E}\big(\partial_t F|_{\mathcal{F}_t}\big)\widehat{d}L_t \tag{2.2}$$

(пор. з (0.2)).

Доведення. Використовуючи (1.22), (2.1) та (1.15), нескладно прийти до висновку, що представлення (2.2) справедливе, якщо для кожного $n \in \mathbb{N}\backslash\{1\}$ і для кожного $F^{(n)} \in \mathcal{H}_\mathbb{C}^{\widehat{\otimes} n}$

$$nPr\big(F^{(n)}(\cdot_1, \ldots, \cdot_{n-1}, \cdot_n) 1_{[0,\cdot_n)^{n-1}}(\cdot_1, \ldots, \cdot_{n-1})\big) = F^{(n)}$$

у просторі $\mathcal{H}_\mathbb{C}^{\widehat{\otimes} n}$, тут і нижче Pr – оператор симетризації за всіма змінними. Але ця рівність виконується у вказаному просторі, оскільки $F^{(n)}$ є симетричною функцією (точніше, клас еквівалентності $F^{(n)}$ у просторі $\mathcal{H}_\mathbb{C}^{\widehat{\otimes} n}$ містить симетричну функцію-представника), для *різних* $t_1, \ldots, t_n$ $Pr 1_{[0,t_n)^{n-1}}(t_1, \ldots, t_{n-1}) = \frac{1}{n}$, а іншими випадками можна знехтувати через неатомарність міри Лебега. □

Зауваження 2.1.2. Нехай $F \in (L^2)_q^\beta$ задовольняє умову Твердження 2.1.1, а також є регулярною основною ($\beta > 0$ або $\beta = 0$ та $q \in \mathbb{N}$), або квадратично інтегровною ($\beta = q = 0$, $F \in (L^2)$) та диференційовною за Хідою ($\partial_\cdot F \in (L^2) \otimes \mathcal{H}_\mathbb{C}$) функцією. Тоді $\mathbf{E}\big(\partial_\cdot F|_{\mathcal{F}_\cdot}\big)$ є інтегровним за

Іто випадковим процесом, а тому у представленні (2.2) можна використовувати стохастичний інтеграл Іто (який співпадає в зазначених випадках з розширеним стохастичним інтегралом).

У загальному випадку представлення (2.2) не може бути справедливим хоча б тому, що не кожне $F \in (L^2)_q^\beta$ можна представити у вигляді

$$F = \mathbf{E}F + \int G(t)\widehat{d}L_t, \tag{2.3}$$

де G – бодай формальний ряд вигляду (1.12) (див. Теорему 2.2.1 нижче). Але навіть якщо F є таким, що його можна подати у вигляді (2.3), рівність (2.2) однаково може не виконуватись. Нехай, наприклад,

$$F = :\langle \circ^{\otimes 3}, F^{(3)}\rangle:, \;\; F^{(3)} \in \mathcal{H}_{ext}^{(3)}.$$

Тоді $\mathbf{E}F = 0$ та, як неважко підрахувати за допомогою (1.22), (2.1) та (1.18),

$$\int \mathbf{E}\big(\partial_t F|_{\mathcal{F}_t}\big)\widehat{d}L_t =$$
$$= \; :\langle \circ^{\otimes 3}, F^{(3)}(\cdot_1,\cdot_2,\cdot_3)\big(1_{[0,\cdot_3)^2}(\cdot_1,\cdot_2)+1_{[0,\cdot_2)^2}(\cdot_3,\cdot_1)+1_{[0,\cdot_1)^2}(\cdot_2,\cdot_3)\big)\rangle:,$$

а тому, використовуючи (1.9) та (1.8), отримуємо

$$\|F - \int \mathbf{E}\big(\partial_t F|_{\mathcal{F}_t}\big)\widehat{d}L_t\|^2_{(L^2)_q^\beta} = 6^{1+\beta}\cdot 8^q \times$$
$$\times \big|F^{(3)}(\cdot_1,\cdot_2,\cdot_3)\big(1-[1_{[0,\cdot_3)^2}(\cdot_1,\cdot_2)+1_{[0,\cdot_2)^2}(\cdot_3,\cdot_1)+1_{[0,\cdot_1)^2}(\cdot_2,\cdot_3)]\big)\big|^2_{ext} =$$
$$= 9\cdot 6^\beta\cdot 8^q\|p_2\|^2_\nu \int_{\mathbb{R}_+^2} |F^{(3)}(t_1,t_1,t_2)|^2 1_{\{t_1\geqslant t_2\}}dt_1dt_2 +$$
$$+ 6^\beta\cdot 8^q\|p_3\|^2_\nu \int_{\mathbb{R}_+} |F^{(3)}(t_1,t_1,t_1)|^2 dt_1.$$

Якщо $F^{(3)}$ є таким, що $\int_{\mathbb{R}_+} |F^{(3)}(t_1,t_1,t_1)|^2 dt_1 = 0$, то $:\langle \circ^{\otimes 3}, F^{(3)}\rangle:$ можна представити у вигляді (2.3) (див. Теорему 2.2.1 нижче); але якщо при цьому

$$\int_{\mathbb{R}_+^2} |F^{(3)}(t_1,t_1,t_2)|^2 1_{\{t_1\geqslant t_2\}}dt_1dt_2 \neq 0,$$

то $F \neq \int \mathbf{E}\big(\partial_t F|_{\mathcal{F}_t}\big)\widehat{d}L_t$, тобто $:\langle \circ^{\otimes 3}, F^{(3)}\rangle:$ не можна представити у вигляді (2.2).

У наступних підрозділах ми встановимо необхідну і достатню умову, за якої $F \in (L^2)_q^\beta$ можна представити у вигляді (2.3); отримаємо формули типу Кларка-Окона для F; а також з'ясуємо необхідну і достатню умову, за якої F допускає представлення у вигляді (2.2).

2.2. **Належність випадкових величин області значень розширеного стохастичного інтеграла.** Розглянемо простий приклад. Нехай

$$F = :\langle \circ^{\otimes 2}, F^{(2)}\rangle:, \quad F^{(2)} \in \mathcal{H}^{(2)}_{ext}.$$

Зрозуміло, що якщо таке F можна представити у вигляді (2.3), то

$$G(\cdot) = :\langle \circ, G^{(1)}_{\cdot}\rangle:, \qquad G^{(1)}_{\cdot} \in \mathcal{H}^{(1)}_{ext} \otimes \mathcal{H}_{\mathbb{C}}, \qquad F^{(2)} = \widehat{G}^{(1)},$$

(див. Підрозділ 1.4). Оскільки за побудовою $\widehat{G}^{(1)}$ містить представника $\widehat{g}^{(1)}$ такого, що для кожного $t \in \mathbb{R}_+ \widehat{g}^{(1)}(t,t) = 0$, маємо *необхідну* умову, за якої $:\langle \circ^{\otimes 2}, F^{(2)}\rangle:$ можна представити у вигляді (2.3):

- $F^{(2)}$ *має містити представника* $f^{(2)}$ *такого, що для кожного* $t \in \mathbb{R}_+$ $f^{(2)}(t,t) = 0$.

Більше того, легко бачити, що ця умова є й *достатньою*: покладемо

$$G^{(1)}_{\cdot} := F^{(2)}(\cdot) \in \mathcal{H}^{(1)}_{ext} \otimes \mathcal{H}_{\mathbb{C}}$$

(іншими словами, $G^{(1)}_{\cdot}$ – це ядро $F^{(2)}$, яке розуміється як елемент простору $\mathcal{H}^{(1)}_{ext} \otimes \mathcal{H}_{\mathbb{C}}$, див. Підрозділ 1.5), тоді за виконання згаданої умови маємо $\widehat{G}^{(1)} = F^{(2)}$ (в якості представника $G^{(1)}_{\cdot}$, що задовольніє умову (1.16), можна взяти згадану вище функцію $f^{(2)}$), а тому згідно з (1.18)

$$\int :\langle \circ, G^{(1)}_t\rangle: \widehat{d}L_t = :\langle \circ^{\otimes 2}, F^{(2)}\rangle: = F.$$

У загальному випадку ситуація, звісно, подібна: $F \in (L^2)^{\beta}_q$ можна представити у вигляді (2.3) (таке представлення, взагалі кажучи, не є єдиним) якщо та лише якщо ядра з розкладу (1.6) для F мають властивості, притаманні ядрам з розкладу (1.18) для розширених стохастичних інтегралів. Точніше, справедливе таке твердження.

Теорема 2.2.1. *Нехай* $F \in (L^2)^{\beta}_q$. *Тоді наступні твердження еквівалентні:*

(1) F *можна представити у вигляді* (2.3), *де* $G \in (L^2)^{\beta}_q \otimes \mathcal{H}_{\mathbb{C}}$ *у випадку* $\beta \geqslant 0$, *та* $G \in (L^2)^{\beta}_{q-1} \otimes \mathcal{H}_{\mathbb{C}}$, *якщо* $\beta < 0$;

(2) *для кожного* $n \in \mathbb{N}\backslash\{1\}$ *ядро* $F^{(n)} \in \mathcal{H}^{(n)}_{ext}$ *з розкладу* (1.6) *для* F *містить представника* $f^{(n)}$ *такого, що* $f^{(n)}(t_1, \ldots, t_n) = 0$, *якщо для кожного* $i \in \{1, \ldots, n\}$ *існує* $j \in \{1, \ldots, n\}\backslash\{i\}$ *таке, що* $t_i = t_j$.

Доведення. Спочатку доведемо теорему для

$$F = :\langle \circ^{\otimes n}, F^{(n)}\rangle:, \qquad F^{(n)} \in \mathcal{H}^{(n)}_{ext}, \; n \in \mathbb{N}\backslash\{1\}$$

(випадки $n = 0$ та $n = 1$ є тривіальними).

(1)⇒(2) Нехай $:\langle \circ^{\otimes n}, F^{(n)}\rangle : = \int G(t)\widehat{d}L_t$. Зрозуміло, що зараз

$$G(\cdot) = :\langle \circ^{\otimes n-1}, G_{\cdot}^{(n-1)}\rangle:, \quad G_{\cdot}^{(n-1)} \in \mathcal{H}_{ext}^{(n-1)} \otimes \mathcal{H}_{\mathbb{C}}, \quad F^{(n)} = \widehat{G}^{(n-1)}$$

(див. (1.18)). Але за побудовою $\widehat{G}^{(n-1)} \in \mathcal{H}_{ext}^{(n)}$ задовольняє умову твердження (2) (в якості $f^{(n)}$ можна обрати функцію $\widehat{g}^{(n-1)} \in \widehat{G}^{(n-1)}$, що є симетризацією представника $\dot{g}_{\cdot}^{(n-1)} \in G_{\cdot}^{(n-1)}$, який задовольняє умову (1.16), див. Підрозділ 1.4).

(2)⇒(1) Нехай $f^{(n)} \in F^{(n)}$ – описаний у твердженні (2) представник $F^{(n)}$. Не втрачаючи загальності можна вважати, що $f^{(n)}$ є симетричною функцією. Покладемо

$$\begin{aligned} h_n(t_1, \dots, t_n) &:= Pr1_{\{t_1 \neq t_n, t_2 \neq t_n, \dots, t_{n-1} \neq t_n\}} = \\ &= \frac{1}{n}\Big[1_{\{t_1 \neq t_n, t_2 \neq t_n, \dots, t_{n-1} \neq t_n\}} + 1_{\{t_n \neq t_{n-1}, t_1 \neq t_{n-1}, \dots, t_{n-2} \neq t_{n-1}\}} + \\ &\qquad + \dots + 1_{\{t_2 \neq t_1, t_3 \neq t_1, \dots, t_n \neq t_1\}}\Big], \end{aligned} \tag{2.4}$$

$$g_t^{(n-1)}(t_1, \dots, t_{n-1}) := \begin{cases} \frac{f^{(n)}(t_1, \dots, t_{n-1}, t)}{h_n(t_1, \dots, t_{n-1}, t)}, & h_n(t_1, \dots, t_{n-1}, t) \neq 0 \\ 0, & h_n(t_1, \dots, t_{n-1}, t) = 0 \end{cases} \tag{2.5}$$

(зауважимо, що якщо $h_n(t_1, \dots, t_{n-1}, t) = 0$, то

$$f^{(n)}(t_1, \dots, t_{n-1}, t) = 0$$

за умовою твердження (2), а тому можна сказати, що $g_{\cdot}^{(n-1)}$ «зберігає всю інформацію» про функцію $f^{(n)}$). Використовуючи (1.8), неатомарність міри Лебега, та рівність

$$\begin{aligned} h_n(\underbrace{t_1, \dots, t_1}_{l_1}, \dots, \underbrace{t_{s_1+\dots+s_k}, \dots, t_{s_1+\dots+s_k}}_{l_k}, t) &= \\ &= \frac{1}{n} 1_{\{l_k > 1\}} + \frac{s_k + 1}{n} 1_{\{l_k = 1\}} \end{aligned} \tag{2.6}$$

для *різних* $t_1, \dots, t_{s_1+\dots+s_k}, t$, яка випливає безпосередньо з (2.4), де

$$k, l_{\cdot}, s_{\cdot} \in \mathbb{N}, \quad l_1 > \dots > l_k, \quad l_1 s_1 + \dots + l_k s_k = n - 1,$$

отримаємо

$$
\begin{aligned}
&|g_{\cdot}^{(n-1)}|^2_{\mathcal{H}_{ext}^{(n-1)}\otimes\mathcal{H}_{\mathbb{C}}} = \\
&= \sum_{\substack{k,l_j,s_j\in\mathbb{N}:\\ j=1,\dots,k,\ l_1>\dots>l_k,\\ l_1s_1+\dots+l_ks_k=n-1}} \frac{(n-1)!}{s_1!\cdots s_k!}\Big(\frac{\|p_{l_1}\|_\nu}{l_1!}\Big)^{2s_1}\cdots\Big(\frac{\|p_{l_k}\|_\nu}{l_k!}\Big)^{2s_k}\times \\
&\qquad\times \int\limits_{\mathbb{R}_+^{s_1+\dots+s_k+1}} \big|g_t^{(n-1)}(\underbrace{t_1,\dots,t_1}_{l_1},\dots,\underbrace{t_{s_1+\dots+s_k},\dots,t_{s_1+\dots+s_k}}_{l_k})\big|^2\times \\
&\qquad\qquad\times dt_1\cdots dt_{s_1+\dots+s_k}dt = \\
&= n\sum_{\substack{k,l_j,s_j\in\mathbb{N}:\ j=1,\dots,k,\\ l_1>\dots>l_k>1,\\ l_1s_1+\dots+l_ks_k+1=n}} \frac{n!}{s_1!\cdots s_k!}\Big(\frac{\|p_{l_1}\|_\nu}{l_1!}\Big)^{2s_1}\cdots\Big(\frac{\|p_{l_k}\|_\nu}{l_k!}\Big)^{2s_k}\times \\
&\qquad\times \int\limits_{\mathbb{R}_+^{s_1+\dots+s_k+1}} \big|f^{(n)}(\underbrace{t_1,\dots,t_1}_{l_1},\dots,\underbrace{t_{s_1+\dots+s_k},\dots,t_{s_1+\dots+s_k}}_{l_k},t)\big|^2\times \\
&\qquad\qquad\times dt_1\cdots dt_{s_1+\dots+s_k}dt+ \\
&\quad+n\sum_{\substack{k,l_j,s_j\in\mathbb{N}:\\ j=1,\dots,k,\ l_1>\dots>l_k=1,\\ l_1s_1+\dots+l_{k-1}s_{k-1}+s_k+1=n}} \frac{n!}{s_1!\cdots(s_k+1)!(s_k+1)}\times \\
&\qquad\times\Big(\frac{\|p_{l_1}\|_\nu}{l_1!}\Big)^{2s_1}\cdots\Big(\frac{\|p_{l_{k-1}}\|_\nu}{l_{k-1}!}\Big)^{2s_{k-1}}\times \\
&\quad\times \int\limits_{\mathbb{R}_+^{s_1+\dots+s_k+1}} \big|f^{(n)}(\underbrace{t_1,\dots,t_1}_{l_1},\dots,t_{s_1+\dots+s_{k-1}+1},\dots,t_{s_1+\dots+s_k},t)\big|^2\times \\
&\qquad\times dt_1\cdots dt_{s_1+\dots+s_k}dt \leqslant n|F^{(n)}|^2_{\mathcal{H}_{ext}^{(n)}} < \infty.
\end{aligned}
\tag{2.7}
$$

Отже, функція $g_{\cdot}^{(n-1)}$ породжує елемент (клас еквівалентності)

$$G_{\cdot}^{(n-1)} \in \mathcal{H}_{ext}^{(n-1)} \otimes \mathcal{H}_{\mathbb{C}}.$$

Покладемо

$$\dot{g}_{\cdot_n}^{(n-1)}(\cdot_1,\dots,\cdot_{n-1}) := g_{\cdot_n}^{(n-1)}(\cdot_1,\dots,\cdot_{n-1})1_{\{\cdot_1\neq\cdot_n,\cdot_2\neq\cdot_n,\dots,\cdot_{n-1}\neq\cdot_n\}} \in G_{\cdot}^{(n-1)}.$$

Зрозуміло, що ця функція задовольняє умову (1.16). Враховуючи (2.4) та (2.5), отримуємо

$$\widehat{g}^{(n-1)}(\cdot_1,\dots,\cdot_n) = Pr\dot{g}^{(n-1)}_{\cdot_n}(\cdot_1,\dots,\cdot_{n-1}) =$$
$$= g^{(n-1)}_{\cdot_n}(\cdot_1,\dots,\cdot_{n-1})h_n(\cdot_1,\dots,\cdot_n) = f^{(n)}(\cdot_1,\dots,\cdot_n) \in F^{(n)},$$

оскільки $f^{(n)}$ – симетрична функція, що задовольняє умову твердження (2) (зауважимо, що якби функція $f^{(n)}$ не задовольняла б умову твердження (2), остання рівність не мала б місця). З іншого боку, функція $\widehat{g}^{(n-1)}$ породжує ядро $\widehat{G}^{(n-1)} \in \mathcal{H}^{(n)}_{ext}$, яке використовується при визначенні розширеного стохастичного інтеграла:

$$\int :\langle \circ^{\otimes n-1}, G^{(n-1)}_t \rangle : \widehat{d}L_t = :\langle \circ^{\otimes n}, \widehat{G}^{(n-1)} \rangle :$$

(див. Підрозділ 1.4). Отже, $\widehat{G}^{(n-1)} = F^{(n)}$ в $\mathcal{H}^{(n)}_{ext}$, а тому, поклавши $G(\cdot) := :\langle \circ^{\otimes n-1}, G^{(n-1)}_{\cdot} \rangle :$, маємо $F = \int G(t)\widehat{d}L_t$, тобто умова твердження (1) виконана.

У загальному випадку імплікація (1)⇒(2) тривіальним чином випливає з (1.18) та відповідної імплікації у щойно розглянутому частинному випадку.

Доведемо імплікацію (2)⇒(1). Нехай

$$G(\cdot) := \sum_{n=1}^{\infty} :\langle \circ^{\otimes n-1}, G^{(n-1)}_{\cdot} \rangle :,$$

де $G^{(n-1)}_{\cdot} \in \mathcal{H}^{(n-1)}_{ext} \otimes \mathcal{H}_{\mathbb{C}}$ – ядра, побудовані вище для кожного $n \in \mathbb{N}\backslash\{1\}$, $G^{(0)}_{\cdot} := F^{(1)}(\cdot) \in \mathcal{H}^{(1)}_{ext} = \mathcal{H}_{\mathbb{C}}$. Достатньо довести, що $G \in (L^2)^{\beta}_q \otimes \mathcal{H}_{\mathbb{C}}$ у випадку $\beta \geqslant 0$, та $G \in (L^2)^{\beta}_{q-1} \otimes \mathcal{H}_{\mathbb{C}}$, якщо $\beta < 0$, тоді рівність (2.3) випливатиме з (1.18) та відповідної імплікації у щойно розглянутому частинному випадку. Використовуючи (1.13), оцінку

$$|G^{(n-1)}_{\cdot}|^2_{\mathcal{H}^{(n-1)}_{ext} \otimes \mathcal{H}_{\mathbb{C}}} \leqslant n|F^{(n)}|^2_{\mathcal{H}^{(n)}_{ext}}$$

(див. (2.7); випадок $n = 1$ є тривіальним), та (1.9), отримуємо для $\beta \geqslant 0$

$$\|G\|^2_{(L^2)^{\beta}_q \otimes \mathcal{H}_{\mathbb{C}}} = \sum_{n=1}^{\infty} ((n-1)!)^{1+\beta} 2^{q(n-1)} |G^{(n-1)}_{\cdot}|^2_{\mathcal{H}^{(n-1)}_{ext} \otimes \mathcal{H}_{\mathbb{C}}} \leqslant$$
$$\leqslant 2^{-q} \sum_{n=1}^{\infty} (n!)^{1+\beta} 2^{qn} n^{-\beta} |F^{(n)}|^2_{\mathcal{H}^{(n)}_{ext}} \leqslant 2^{-q} \|F\|^2_{(L^2)^{\beta}_q} < \infty,$$

та для $\beta < 0$

$$\|G\|^2_{(L^2)^{\beta}_{q-1} \otimes \mathcal{H}_{\mathbb{C}}} = \sum_{n=1}^{\infty} ((n-1)!)^{1+\beta} 2^{(q-1)(n-1)} |G^{(n-1)}_{\cdot}|^2_{\mathcal{H}^{(n-1)}_{ext} \otimes \mathcal{H}_{\mathbb{C}}} \leqslant$$

$$\leqslant 2^{1-q}\sum_{n=1}^{\infty}(n!)^{1+\beta}2^{qn}[2^{-n}n^{-\beta}]|F^{(n)}|^2_{\mathcal{H}^{(n)}_{ext}} \leqslant$$
$$\leqslant 2^{1-q}\max_{n\in\mathbb{N}}[2^{-n}n^{-\beta}]\|F\|^2_{(L^2)^\beta_q} < \infty,$$

звідки й випливає потрібне. □

Зауваження 2.2.2. Нехай випадкову величину $F \in (L^2)^\beta_q$ можна *формально* представити у вигляді $F = \mathbf{E}F + \int \mathcal{G}(t)\widehat{d}L_t$ (пор. з (2.3)), де

$$\mathcal{G}(\cdot) := \sum_{n=1}^{\infty} :\langle \circ^{\otimes n-1}, \mathcal{G}^{(n-1)}_{\cdot}\rangle:,$$

$\mathcal{G}^{(n-1)}_{\cdot} \in \mathcal{H}^{(n-1)}_{ext} \otimes \mathcal{H}_{\mathbb{C}}$, – *формальний* ряд, та

$$\int \mathcal{G}(t)\widehat{d}L_t := \sum_{n=1}^{\infty} :\langle \circ^{\otimes n}, \widehat{\mathcal{G}}^{(n-1)}\rangle:$$

(пор. з (1.18)) – *формальний* стохастичний інтеграл. Тоді для кожного ядра $F^{(n)} \in \mathcal{H}^{(n)}_{ext}$ ($n \in \mathbb{N}$) з розкладу (1.6) для F маємо $F^{(n)} = \widehat{\mathcal{G}}^{(n-1)}$, а тому F задовольняє умову твердження (2) Теореми 2.2.1, відтак F можна представити у вигляді (2.3) з $G \in (L^2)^\beta_q \otimes \mathcal{H}_{\mathbb{C}}$ ($\beta \geqslant 0$) або $G \in (L^2)^\beta_{q-1} \otimes \mathcal{H}_{\mathbb{C}}$ ($\beta < 0$).

Насамкінець відзначимо, що якщо $F = :\langle \circ^{\otimes n}, F^{(n)}\rangle:$, $F^{(n)} \in \mathcal{H}^{(n)}_{ext}$, $n \in \mathbb{N}\backslash\{1\}$, неможливо представити у вигляді (2.3), однаково можна побудувати ядра $G^{(n-1)}_{\cdot} \in \mathcal{H}^{(n-1)}_{ext} \otimes \mathcal{H}_{\mathbb{C}}$ за функціями (2.5). Але в цьому випадку $\widehat{G}^{(n-1)} \neq F^{(n)}$ в $\mathcal{H}^{(n)}_{ext}$ (зараз $|\widehat{G}^{(n-1)} - F^{(n)}|_{ext}$ містить інтеграли за сім'ями аргументів, для яких функція h_n, визначена у (2.4), дорівнює нулю) та $|\widehat{G}^{(n-1)}|_{ext} < |F^{(n)}|_{ext}$ (доведення цього факту залишимо зацікавленому читачу).

2.3. **Найпростіша формула типу Кларка-Окона в загальному випадку.** Почнемо з певної підготовки. Для $n \in \mathbb{N}\backslash\{1\}$ та $t_1, \ldots, t_n \in \mathbb{R}_+$ визначимо

$$\hbar_n(t_1, \ldots, t_n) := n h_n(t_1, \ldots, t_n), \tag{2.8}$$

де функції h_n визначені формулою (2.4); покладемо також $\hbar_1 \equiv 1$. Далі, для $G^{(n)}_{\cdot} \in \mathcal{H}^{(n)}_{ext} \otimes \mathcal{H}_{\mathbb{C}}$, $n \in \mathbb{Z}_+$, покладемо

$$\widetilde{G}^{(n)}_{\cdot}(\cdot_1, \ldots, \cdot_n) := \begin{cases} \frac{G^{(n)}_{\cdot}(\cdot_1,\ldots,\cdot_n)}{\hbar_{n+1}(\cdot_1,\ldots,\cdot_n,\cdot)}, & \text{якщо } \hbar_{n+1}(\cdot_1, \ldots, \cdot_n, \cdot) \neq 0 \\ 0, & \text{якщо } \hbar_{n+1}(\cdot_1, \ldots, \cdot_n, \cdot) = 0. \end{cases} \tag{2.9}$$

Легко бачити, що $\widetilde{G}_{\cdot}^{(n)} \in \mathcal{H}_{ext}^{(n)} \otimes \mathcal{H}_{\mathbb{C}}$ та
$$|\widetilde{G}_{\cdot}^{(n)}|_{\mathcal{H}_{ext}^{(n)} \otimes \mathcal{H}_{\mathbb{C}}} \leqslant |G_{\cdot}^{(n)}|_{\mathcal{H}_{ext}^{(n)} \otimes \mathcal{H}_{\mathbb{C}}}. \tag{2.10}$$

Для $G \in (L^2)_q^\beta \otimes \mathcal{H}_{\mathbb{C}}$ визначимо
$$(AG)(\cdot) := \sum_{n=0}^{\infty} :\langle \circ^{\otimes n}, \widetilde{G}_{\cdot}^{(n)} \rangle:, \tag{2.11}$$
де ядра $\widetilde{G}_{\cdot}^{(n)}$ побудовані по ядрам $G_{\cdot}^{(n)}$ з розкладу (1.12) для G. З оцінки (2.10) випливає, що A є лінійним *неперервним* оператором в $(L^2)_q^\beta \otimes \mathcal{H}_{\mathbb{C}}$.

Твердження 2.3.1. *Нехай $F \in (L^2)_q^\beta$. Тоді*
$$A\partial_{\cdot} F \in (L^2)_q^\beta \otimes \mathcal{H}_{\mathbb{C}} \quad \textit{для} \quad \beta \geqslant 0,$$
та
$$A\partial_{\cdot} F \in (L^2)_{q-1}^\beta \otimes \mathcal{H}_{\mathbb{C}} \quad \textit{для} \quad \beta < 0,$$
де $\partial_{\cdot}$ – похідна Хіди (1.24).

Доведення. У випадку $\beta < 0$ результат твердження випливає безпосередньо з властивостей операторів $\partial_{\cdot}$ та A. Розглянемо випадок $\beta \geqslant 0$. З (1.22) та (2.11) випливає, що
$$A\partial_{\cdot} F = \sum_{n=1}^{\infty} n{:}\langle \circ^{\otimes n-1}, \widetilde{F}^{(n)}(\cdot) \rangle{:},$$
де ядра $\widetilde{F}^{(n)}(\cdot) \in \mathcal{H}_{ext}^{(n-1)} \otimes \mathcal{H}_{\mathbb{C}}$ побудовані по ядрам $F^{(n)}$ з розкладу (1.6) для F, які розуміються як елементи просторів $\mathcal{H}_{ext}^{(n-1)} \otimes \mathcal{H}_{\mathbb{C}}$ (див. Підрозділ 1.5). Використовуючи (1.8), неатомарність міри Лебега, (2.6) та (2.8), подібно до викладки (2.7) можна встановити, що
$$|n\widetilde{F}^{(n)}(\cdot)|^2_{\mathcal{H}_{ext}^{(n-1)} \otimes \mathcal{H}_{\mathbb{C}}} \leqslant n|F^{(n)}|^2_{\mathcal{H}_{ext}^{(n)}}. \tag{2.12}$$
Скориставшись (1.13), цією оцінкою та (1.9), отримуємо
$$\|A\partial_{\cdot} F\|^2_{(L^2)_q^\beta \otimes \mathcal{H}_{\mathbb{C}}} = \sum_{n=1}^{\infty} ((n-1)!)^{1+\beta} 2^{q(n-1)} |n\widetilde{F}^{(n)}(\cdot)|^2_{\mathcal{H}_{ext}^{(n-1)} \otimes \mathcal{H}_{\mathbb{C}}} \leqslant$$
$$\leqslant 2^{-q} \sum_{n=1}^{\infty} (n!)^{1+\beta} 2^{qn} n^{-\beta} |F^{(n)}|^2_{\mathcal{H}_{ext}^{(n)}} \leqslant 2^{-q} \|F\|^2_{(L^2)_q^\beta} < \infty,$$
звідки й випливає потрібне. $\square$

Сформулюємо й доведемо основний результат підрозділу.

Теорема 2.3.2. *Нехай випадкова величина $F \in (L^2)_q^\beta$ може бути представлена у вигляді* (2.3) *(див. Теорему* 2.2.1*). Тоді має місце представлення (формула типу Кларка-Окона)*

$$F = \mathbf{E}F + \int A\partial_t F \widehat{d}L_t \tag{2.13}$$

(пор. з (2.2)*).*

Доведення. Спочатку доведемо теорему для $F = :\langle \circ^{\otimes n}, F^{(n)} \rangle:$, $F^{(n)} \in \mathcal{H}_{ext}^{(n)}$, $n \in \mathbb{N}\backslash\{1\}$ (випадки $n = 0$ та $n = 1$ є тривіальними). Задля спрощення позначень приймемо за визначенням $\frac{0}{0} := 0$. Використовуючи (1.22), (2.11), (2.9) та (2.8), отримуємо

$$A\partial.:\langle \circ^{\otimes n}, F^{(n)} \rangle: = n:\langle \circ^{\otimes n-1}, \widetilde{F}^{(n)}(\cdot) \rangle: =$$
$$= n:\langle \circ^{\otimes n-1}, \frac{f^{(n)}(\cdot_1, \ldots, \cdot_{n-1}, \cdot)}{\hbar_n(\cdot_1, \ldots, \cdot_{n-1}, \cdot)} \rangle: = :\langle \circ^{\otimes n-1}, \frac{f^{(n)}(\cdot_1, \ldots, \cdot_{n-1}, \cdot)}{h_n(\cdot_1, \ldots, \cdot_{n-1}, \cdot)} \rangle:,$$

де $f^{(n)} \in F^{(n)} \in \mathcal{H}_{ext}^{(n)}$ – симетрична функція, описана у твердженні (2) Теореми 2.2.1 (нагадаємо, що якщо для деякого набору аргументів $t_1, \ldots, t_{n-1}, t \in \mathbb{R}_+$ виконана умова

$$h_n(t_1, \ldots, t_{n-1}, t) = \hbar_n(t_1, \ldots, t_{n-1}, t) = 0,$$

то $f^{(n)}(t_1, \ldots, t_{n-1}, t) = 0$). Але за побудовою ядер розширеного стохастичного інтеграла (див. Підрозділ 1.4) $\widehat{\frac{f^{(n)}}{h_n}} = f^{(n)} \in F^{(n)}$, звідки маємо, що

$$\int (A\partial.:\langle \circ^{\otimes n}, F^{(n)} \rangle:)(t) \widehat{d}L_t \equiv \int A\partial_t:\langle \circ^{\otimes n}, F^{(n)} \rangle: \widehat{d}L_t = :\langle \circ^{\otimes n}, F^{(n)} \rangle:,$$

що і треба було довести.

Твердження теореми в загальному випадку випливає з Твердження 2.3.1, (1.18) та щойно доведеного результату. □

Зауваження 2.3.3. Нехай $F \in (L^2)_q^\beta$ можна представити у вигляді (2.3). З Зауваження 2.2.2, Твердження 2.3.1 та представлення (2.13) випливає, що в якості підінтегральної функції $G(\cdot)$ можна обрати $A\partial.F$ (насправді саме у вигляді $A\partial.F$, хоч і в інших позначеннях, $G(\cdot)$ було побудовано при доведенні Теореми 2.2.1).

2.4. **Прямий аналог формули Кларка-Окона в загальному випадку.** Конструкція підінтегральної функції у формулі типу Кларка-Окона (2.13) є відносно простою, але ця формула не є безпосереднім узагальненням класичної формули Кларка-Окона (2.2). Справді, нехай $F \in (L^2)_q^\beta$ задовольняє умову Твердження 2.1.1. Використовуючи (1.22), (2.11), (2.9), (2.8), (2.4) та (2.1), неважко показати, що в цьому випадку

$$A\partial_\cdot F = \sum_{n=1}^{\infty} {:}\langle \circ^{\otimes n-1}, F^{(n)}(\cdot)\rangle{:},$$

в той час як

$$\mathbf{E}\big(\partial_\cdot F|_{\mathcal{F}_\cdot}\big) = \sum_{n=1}^{\infty} n{:}\langle \circ^{\otimes n-1}, F^{(n)}(\cdot)1_{[0,\cdot)^{n-1}}\rangle{:} \neq A\partial_\cdot F,$$

взагалі кажучи (тут $F^{(n)}$, $n \in \mathbb{N}$, – ядра з розкладу (1.6) для F, які розуміються як елементи просторів $\mathcal{H}_{ext}^{(n-1)} \otimes \mathcal{H}_{\mathbb{C}}$, див. Підрозділ 1.5). Подібна ситуація має місце і в гауссівському аналізі, див. [13].

Отримаємо прямий аналог, тобто безпосереднє узагальнення формули Кларка-Окона (2.2) на випадок, коли випадкову величину F можна представити у вигляді (2.3), але умова Твердження 2.1.1 не виконана. Для $n \in \mathbb{N}$ та $t_1, \ldots, t_n, t \in \mathbb{R}_+$ покладемо

$$\chi_{n,t}(t_1, \ldots, t_n) := \begin{cases} 0, & \text{якщо } \exists i \in \{1, \ldots, n\} : t_i \geqslant t \\ & \text{та } \forall j \in \{1, \ldots, n\} \backslash \{i\}\ t_i \neq t_j \\ 1, & \text{в інших випадках} \end{cases} \tag{2.14}$$

тобто $\chi_{n,t}(t_1, \ldots, t_n) = 0$, якщо існує t_i кратності 1 (себто t_i не дорівнює жодному іншому t_j, $j \neq i$), більше за t або рівне t. Наприклад,

- $\chi_{3,4}(7,7,2) = 1$ ($2 < 4$, 7 має кратність 2),
- $\chi_{3,4}(5,5,5) = \chi_{3,4}(2,2,2) = 1$ (відсутні аргументи кратності 1),
- $\chi_{3,4}(7,2,2) = 0$ ($7 > 4$, 7 має кратність 1),
- $\chi_{3,4}(4,2,2) = 0$ (є однократний аргумент, що дорівнює 4).

Покладемо також $\chi_{0,\cdot} \equiv 1$. Для $G \in (L^2)_q^\beta \otimes \mathcal{H}_{\mathbb{C}}$ визначимо

$$\begin{aligned}(\mathbf{E}_\cdot G)(\cdot) &:= \sum_{n=0}^{\infty} {:}\langle \circ^{\otimes n}, G_\cdot^{(n)} \chi_{n,\cdot}\rangle{:} \\ &\equiv G_\cdot^{(0)} + \sum_{n=1}^{\infty} {:}\langle \circ^{\otimes n}, G_\cdot^{(n)} \chi_{n,\cdot}\rangle{:} \in (L^2)_q^\beta \otimes \mathcal{H}_{\mathbb{C}}\end{aligned} \tag{2.15}$$

(пор. з (2.1)), де $G_\cdot^{(n)} \in \mathcal{H}_{ext}^{(n)} \otimes \mathcal{H}_{\mathbb{C}}$ – ядра з розкладу (1.12) для G. Зрозуміло, що

$$G_\cdot^{(n)} \chi_{n,\cdot} \in \mathcal{H}_{ext}^{(n)} \otimes \mathcal{H}_{\mathbb{C}}, \qquad |G_\cdot^{(n)} \chi_{n,\cdot}|_{\mathcal{H}_{ext}^{(n)} \otimes \mathcal{H}_{\mathbb{C}}} \leqslant |G_\cdot^{(n)}|_{\mathcal{H}_{ext}^{(n)} \otimes \mathcal{H}_{\mathbb{C}}},$$

а отже $\mathbf{E}_\cdot$ є лінійним неперервним оператором в $(L^2)_q^\beta \otimes \mathcal{H}_{\mathbb{C}}$.

Твердження 2.4.1. (пор. з Твердженням 2.3.1) *Нехай* $F \in (L^2)^\beta_q$. *Тоді*

$$\mathbf{E}.\partial.F \in (L^2)^\beta_q \otimes \mathcal{H}_\mathbb{C} \quad \text{для} \quad \beta \geqslant 0$$

та

$$\mathbf{E}.\partial.F \in (L^2)^\beta_{q-1} \otimes \mathcal{H}_\mathbb{C} \quad \text{для} \quad \beta < 0,$$

де $\partial.$ *– похідна Хіди* (1.24).

Доведення. У випадку $\beta < 0$ результат твердження випливає безпосередньо з властивостей операторів $\partial.$ та $\mathbf{E}.$. Розглянемо випадок $\beta \geqslant 0$. З (1.22) та (2.15) випливає, що

$$\mathbf{E}.\partial.F = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1){:}\langle \circ^{\otimes n}, F^{(n+1)}(\cdot)\chi_{n,\cdot}\rangle{:}, \tag{2.16}$$

де $F^{(n+1)}$ – ядра з розкладу (1.6) для F, які розуміються як елементи просторів $\mathcal{H}^{(n)}_{ext} \otimes \mathcal{H}_\mathbb{C}$ (див. Підрозділ 1.5). Для того, щоб оцінити норму $\mathbf{E}.\partial.F$ в просторі $(L^2)^\beta_q \otimes \mathcal{H}_\mathbb{C}$, потрібен такий технічний результат.

Лема 2.4.2. *Для довільних* $n \in \mathbb{Z}_+$ *та* $F^{(n+1)} \in \mathcal{H}^{(n+1)}_{ext}$

$$(n+1)|F^{(n+1)}(\cdot)\chi_{n,\cdot}|^2_{\mathcal{H}^{(n)}_{ext} \otimes \mathcal{H}_\mathbb{C}} \leqslant |F^{(n+1)}|^2_{\mathcal{H}^{(n+1)}_{ext}} \tag{2.17}$$

(пор. з (2.12)*).*

Доведення. Використовуючи (1.8), (2.14), неатомарність міри Лебега та той добре відомий факт, що для *симетричної* інтегровної за Лебегом функції $f : \mathbb{R}^m_+ \to \mathbb{R}_+$, $m \in \mathbb{N}$,

$$\int_{\mathbb{R}^m_+} f(t_1, \ldots, t_m) dt_1 \ldots dt_m = m \int_{\mathbb{R}_+} dt_1 \int_{[0,t_1)^{m-1}} f(t_1, \ldots, t_m) dt_2 \ldots dt_m,$$

отримуємо

$$\begin{aligned}
&(n+1)|F^{(n+1)}(\cdot)\chi_{n,\cdot}|^2_{\mathcal{H}^{(n)}_{ext} \otimes \mathcal{H}_\mathbb{C}} = \\
&= \sum_{\substack{k, l_j, s_j \in \mathbb{N}:\\ j=1,\ldots,k,\ l_1 > \cdots > l_k,\\ l_1 s_1 + \cdots + l_k s_k = n}} \frac{(n+1)!}{s_1! \cdots s_k!} \left(\frac{\|p_{l_1}\|_\nu}{l_1!}\right)^{2s_1} \cdots \left(\frac{\|p_{l_k}\|_\nu}{l_k!}\right)^{2s_k} \times \\
&\quad \times \int_{\mathbb{R}^{s_1+\cdots+s_k+1}_+} |F^{(n+1)}(\underbrace{t_1, \ldots, t_1}_{l_1}, \ldots, \underbrace{t_{s_1+\cdots+s_k}, \ldots, t_{s_1+\cdots+s_k}}_{l_k}, t) \times \\
&\quad \times \chi_{n,t}(\underbrace{t_1, \ldots, t_1}_{l_1}, \ldots, \underbrace{t_{s_1+\cdots+s_k}, \ldots, t_{s_1+\cdots+s_k}}_{l_k})|^2 dt_1 \cdots dt_{s_1+\cdots+s_k} dt =
\end{aligned}$$

$$= \sum_{\substack{k, l_j, s_j \in \mathbb{N}: \\ j=1,\dots,k,\ l_1 > \dots > l_k > 1, \\ l_1 s_1 + \dots + l_k s_k = n}} \frac{(n+1)!}{s_1! \cdots s_k!} \Big(\frac{\|p_{l_1}\|_\nu}{l_1!}\Big)^{2s_1} \cdots \Big(\frac{\|p_{l_k}\|_\nu}{l_k!}\Big)^{2s_k} \times$$

$$\times \int\limits_{\mathbb{R}_+^{s_1+\dots+s_k+1}} \big|F^{(n+1)}(\underbrace{t_1, ..., t_1}_{l_1}, ..., \underbrace{t_{s_1+\dots+s_k}, ..., t_{s_1+\dots+s_k}}_{l_k}, t)\big|^2 \times$$

$$\times\, dt_1 \cdots dt_{s_1+\dots+s_k} dt +$$

$$+ \sum_{\substack{k, l_j, s_j \in \mathbb{N}: \\ j=1,\dots,k,\ l_1 > \dots > l_k = 1, \\ l_1 s_1 + \dots + l_{k-1} s_{k-1} + s_k = n}} \frac{(n+1)!}{s_1! \cdots s_k!} \Big(\frac{\|p_{l_1}\|_\nu}{l_1!}\Big)^{2s_1} \cdots \Big(\frac{\|p_{l_{k-1}}\|_\nu}{l_{k-1}!}\Big)^{2s_{k-1}} \times$$

$$\times \int\limits_{\mathbb{R}_+^{s_1+\dots+s_k+1}} \big|F^{(n+1)}(\underbrace{t_1, ..., t_1}_{l_1}, ..., t_{s_1+\dots+s_{k-1}+1}, ..., t_{s_1+\dots+s_k}, t) \times$$

$$\times\, \chi_{n,t}(\underbrace{t_1, ..., t_1}_{l_1}, ..., t_{s_1+\dots+s_{k-1}+1}, ..., t_{s_1+\dots+s_k})\big|^2 dt_1 \cdots dt_{s_1+\dots+s_k} dt =$$

$$= \sum_{\substack{k, l_j, s_j \in \mathbb{N}: \\ j=1,\dots,k,\ l_1 > \dots > l_k > 1, \\ l_1 s_1 + \dots + l_k s_k = n}} \frac{(n+1)!}{s_1! \cdots s_k!} \Big(\frac{\|p_{l_1}\|_\nu}{l_1!}\Big)^{2s_1} \cdots \Big(\frac{\|p_{l_k}\|_\nu}{l_k!}\Big)^{2s_k} \times$$

$$\times \int\limits_{\mathbb{R}_+^{s_1+\dots+s_k+1}} \big|F^{(n+1)}(\underbrace{t_1, ..., t_1}_{l_1}, ..., \underbrace{t_{s_1+\dots+s_k}, ..., t_{s_1+\dots+s_k}}_{l_k}, t)\big|^2 \times$$

$$\times\, dt_1 \cdots dt_{s_1+\dots+s_k} dt +$$

$$+ \sum_{\substack{k, l_j, s_j \in \mathbb{N}: \\ j=1,\dots,k,\ l_1 > \dots > l_k = 1, \\ l_1 s_1 + \dots + l_{k-1} s_{k-1} + s_k = n}} \frac{(n+1)!}{s_1! \cdots s_k!} \Big(\frac{\|p_{l_1}\|_\nu}{l_1!}\Big)^{2s_1} \cdots \Big(\frac{\|p_{l_{k-1}}\|_\nu}{l_{k-1}!}\Big)^{2s_{k-1}} \times$$

$$\times \int\limits_{\mathbb{R}_+^{s_1+\dots+s_{k-1}+1}} dt dt_1 \cdots dt_{s_1+\dots+s_{k-1}} \times$$

$$\times \int\limits_{[0,t)^{s_k}} \big|F^{(n+1)}(\underbrace{t_1, ..., t_1}_{l_1}, ..., t_{s_1+\dots+s_{k-1}+1}, ..., t_{s_1+\dots+s_k}, t)\big|^2 \times$$

$$\times\, dt_{s_1+\dots+s_{k-1}+1} \cdots dt_{s_1+\dots+s_k} =$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{\substack{k,l_j,s_j\in\mathbb{N}:\\ j=1,\dots,k,\ l_1>\dots>l_k>1,\\ l_1s_1+\dots+l_ks_k+1=n+1}} \frac{(n+1)!}{s_1!\cdots s_k!}\Big(\frac{\|p_{l_1}\|_\nu}{l_1!}\Big)^{2s_1}\cdots\Big(\frac{\|p_{l_k}\|_\nu}{l_k!}\Big)^{2s_k}\times\\
&\times \int\limits_{\mathbb{R}_+^{s_1+\dots+s_k+1}} \big|F^{(n+1)}(\underbrace{t_1,\dots,t_1}_{l_1},\dots,\underbrace{t_{s_1+\dots+s_k},\dots,t_{s_1+\dots+s_k}}_{l_k},t)\big|^2\times\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \times dt_1\cdots dt_{s_1+\dots+s_k}dt+\\
&+ \sum_{\substack{k,l_j,s_j\in\mathbb{N}:\\ j=1,\dots,k,\ l_1>\dots>1,\\ l_1s_1+\dots+l_{k-1}s_{k-1}+s_k+1=n+1}} \frac{(n+1)!}{s_1!\cdots(s_k+1)!}\Big(\frac{\|p_{l_1}\|_\nu}{l_1!}\Big)^{2s_1}\cdots\Big(\frac{\|p_{l_{k-1}}\|_\nu}{l_{k-1}!}\Big)^{2s_{k-1}}\times\\
&\times \int\limits_{\mathbb{R}_+^{s_1+\dots+s_k+1}} \big|F^{(n+1)}(\underbrace{t_1,\dots,t_1}_{l_1},\dots,t_{s_1+\dots+s_{k-1}+1},\dots,t_{s_1+\dots+s_k},t)\big|^2\times\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad \times dt_1\cdots dt_{s_1+\dots+s_k}dt \leqslant |F^{(n+1)}|^2_{\mathcal{H}_{ext}^{(n+1)}}.
\end{aligned}
$$

(Зауважимо, що якщо $F^{(n+1)}$ задовольняє умову, накладену на ядра у твердженні (2) Теореми 2.2.1, то на останньому кроці маємо рівність, тобто в такому випадку

$$
(n+1)|F_\cdot^{(n+1)}\chi_{n,\cdot}|^2_{\mathcal{H}_{ext}^{(n)}\otimes\mathcal{H}_\mathbb{C}} = |F^{(n+1)}|^2_{\mathcal{H}_{ext}^{(n)}},
$$

довести це пропонується зацікавленому читачу.) □

Повернемось до доведення твердження. Скориставшись формулами (2.16), (1.13), (2.17) та (1.9), отримуємо

$$
\begin{aligned}
\|\mathbf{E}_\cdot\partial_\cdot F\|^2_{(L^2)_q^\beta\otimes\mathcal{H}_\mathbb{C}} &= \sum_{n=0}^\infty (n!)^{1+\beta}2^{qn}(n+1)^2|F^{(n)}(\cdot)\chi_{n,\cdot}|^2_{\mathcal{H}_{ext}^{(n)}\otimes\mathcal{H}_\mathbb{C}} \leqslant\\
&\leqslant 2^{-q}\sum_{n=0}^\infty ((n+1)!)^{1+\beta}2^{q(n+1)}(n+1)^{-\beta}|F^{(n+1)}|^2_{\mathcal{H}_{ext}^{(n+1)}} \leqslant\\
&\leqslant 2^{-q}\|F\|^2_{(L^2)_q^\beta} < \infty,
\end{aligned}
$$

звідки й випливає потрібне. □

Сформулюємо й доведемо основний результат підрозділу.

Теорема 2.4.3 (пор. з Теоремою 2.3.2)**.** *Нехай випадкова величина $F \in (L^2)_q^\beta$ може бути представлена у вигляді* (2.3) *(див. Теорему 2.2.1).*

Тоді має місце представлення (формула типу Кларка-Окона)

$$F = \mathbf{E}F + \int \mathbf{E}_t \partial_t F \widehat{d}L_t \tag{2.18}$$

(пор. з (2.2), (2.13)*).*

Доведення. Спочатку доведемо теорему для

$$F = :\langle \circ^{\otimes n}, F^{(n)} \rangle:, \ F^{(n)} \in \mathcal{H}^{(n)}_{ext}, \ n \in \mathbb{N}\backslash\{1\}$$

(випадки $n=0$ та $n=1$ є тривіальними). Використовуючи (1.22), (2.15) та (1.18), отримуємо

$$\int \mathbf{E}_t \partial_t :\langle \circ^{\otimes n}, F^{(n)} \rangle: \widehat{d}L_t = n :\langle \circ^{\otimes n}, \widehat{F^{(n)}(\cdot)\chi_{n-1,\cdot}} \rangle:,$$

отже, треба довести, що $n\widehat{F^{(n)}(\cdot)\chi_{n-1,\cdot}} = F^{(n)}$ в $\mathcal{H}^{(n)}_{ext}$. Нехай $f^{(n)} \in F^{(n)}$ – симетрична функція, описана у твердженні (2) Теореми 2.2.1. Нагадаємо, що ядро $\widehat{F^{(n)}(\cdot)\chi_{n-1,\cdot}}$ породжене симетризацією функції

$$f^{(n)}(\cdot_1, \ldots, \cdot_{n-1}, \cdot)\chi_{n-1,\cdot}(\cdot_1, \ldots, \cdot_{n-1}) 1_{\{\cdot_1 \neq \cdot, \ldots, \cdot_{n-1} \neq \cdot\}}$$

за всіма змінними, див. Підрозділ 1.4. Використовуючи (1.8), властивості функції $f^{(n)}$, щойно згадану конструкцію ядра $\widehat{F^{(n)}(\cdot)\chi_{n-1,\cdot}}$ та неатомарність міри Лебега, отримуємо

$$|F^{(n)} - n\widehat{F^{(n)}(\cdot)\chi_{n-1,\cdot}}|^2_{ext} = |f^{(n)} - n\widehat{f^{(n)}(\cdot)\chi_{n-1,\cdot}}|^2_{ext} =$$

$$= \sum_{\substack{k, l_j, s_j \in \mathbb{N}: \\ j=1,\ldots,k, \ l_1 > \cdots > l_k = 1, \\ l_1 s_1 + \cdots + l_{k-1}s_{k-1} + s_k = n}} \frac{n!}{s_1! \ldots s_k!} \Big(\frac{\|p_{l_1}\|_\nu}{l_1!}\Big)^{2s_1} \cdots \Big(\frac{\|p_{l_{k-1}}\|_\nu}{l_{k-1}!}\Big)^{2s_{k-1}} \times$$

$$\times \int_{\mathbb{R}_+^{s_1+\cdots+s_k}} \Big| f^{(n)}(\underbrace{t_1, \ldots, t_1}_{l_1}, \ldots, t_{s_1+\cdots+s_{k-1}+1}, \ldots, t_{s_1+\cdots+s_k})[1-$$

$$- 1_{\{t_{s_1+\cdots+s_{k-1}+1} < t_{s_1+\cdots+s_k}, t_{s_1+\cdots+s_{k-1}+2} < t_{s_1+\cdots+s_k}, \ldots, t_{s_1+\cdots+s_k-1} < t_{s_1+\cdots+s_k}\}} -$$

$$- 1_{\{t_{s_1+\cdots+s_k} < t_{s_1+\cdots+s_k-1}, t_{s_1+\cdots+s_{k-1}+1} < t_{s_1+\cdots+s_k-1}, \ldots, t_{s_1+\cdots+s_k-2} < t_{s_1+\cdots+s_k-1}\}} -$$

$$- \cdots - 1_{\{t_{s_1+\cdots+s_{k-1}+2} < t_{s_1+\cdots+s_{k-1}+1}, \ldots, t_{s_1+\cdots+s_k} < t_{s_1+\cdots+s_{k-1}+1}\}}]\Big|^2 \times$$

$$\times dt_1 \cdots dt_{s_1+\cdots+s_k} = 0$$

(для *різних* $t_{s_1+\cdots+s_{k-1}+1}, \ldots, t_{s_1+\cdots+s_k}$ один і тільки один індикатор в цій викладці дорівнює одиниці; інші випадки можна ігнорувати через неатомарність міри Лебега).

Твердження теореми в загальному випадку випливає з Твердження 2.4.1, (1.18) та щойно доведеного результату. □

Відзначимо, що якщо $F \in (L^2)^\beta_q$ задовольняє умову Твердження 2.1.1 (тобто якщо ядра $F^{(n)}$, $n \in \mathbb{Z}_+$, з розкладу (1.6) для F належать просторам $\mathcal{H}_{\mathbb{C}}^{\widehat{\otimes} n} \subset \mathcal{H}_{ext}^{(n)}$), формула (2.18) редукується до (2.2) (довести це пропонується зацікавленому читачу).

Зауваження 2.4.4. (пор. з Зауваженням 2.3.3) Нехай $F \in (L^2)^\beta_q$ можна представити у вигляді (2.3). З Зауваження 2.2.2, Твердження 2.4.1 та представлення (2.18) випливає, що в якості підінтегральної функції $G(\cdot)$ можна обрати $\mathbf{E}.\partial.F$.

2.5. **Класична формула Кларка-Окона.** У Підрозділі 2.1 ми встановили доволі обтяжливу *достатню* умову на випадкову величину F, за якої формула Кларка-Окона для F приймає класичний вигляд (2.2) (див. Твердження 2.1.1). На щастя, ця умова не є необхідною, і клас випадкових величин, для яких справедливе представлення (2.2), є доволі широким. Розглянемо це питання докладно.

Нехай $F = :\langle \circ^{\otimes 3}, F^{(3)} \rangle:$, $F^{(3)} \in \mathcal{H}_{ext}^{(3)}$. Умовою, за якої це F можна представити у вигляді (2.3), є рівність $\int_{\mathbb{R}_+} |F^{(3)}(t,t,t)|^2 dt = 0$, див. Підрозділ 2.1. Але, як ми бачили у згаданому підрозділі, для представлення F у вигляді (2.2) цього недостатньо: потрібна ще рівність

$$\int_{\mathbb{R}_+^2} |F^{(3)}(t_1,t_1,t_2)|^2 1_{\{t_1 \geqslant t_2\}} dt_1 dt_2 = 0,$$

яка виконується, якщо $F^{(3)}$ *містить представника, який дорівнює нулю, коли кратність найбільшого аргументу більша за одиницю* (грубо кажучи, якщо $F^{(3)}(t_1,t_1,t_2) = 0$, коли $t_1 \geqslant t_2$). Виявляється, що для $F \in (L^2)^\beta_q$ подібна умова на ядра з розкладу (1.6) і є необхідною та достатньою для представлення F у вигляді (2.2). Сформулюємо та доведемо відповідне твердження; але спочатку пояснимо, чому виникає саме така умова.

Нехай $F \in (L^2)^\beta_q$ можна представити у вигляді (2.3) (насправді за виконання згаданої вище умови ця вимога виконана автоматично, див. Зауваження 2.5.2 нижче). Представлення (2.18), яке є однією з конкретизацій представлення (2.3) (див. Зауваження 2.4.4), відрізняється від представлення (2.2) використанням функцій $\chi_{n,\cdot}$ (див. (2.14)) замість індикаторів $1_{[0,\cdot)^n}$ у підінтегральному виразі (пор. (2.15) та (2.1)). Але, на відміну від індикаторів, функції $\chi_{n,\cdot}$ «не реагують» на «поведінку» тих аргументів, кратність яких є більшою за одиницю; отже, для того, щоб вирази у правих частинах (2.18) та (2.2) співпали, «реагувати» мають ядра з розкладу (1.6) для F.

Теорема 2.5.1 (пор. з Теоремою 2.2.1). *Нехай $F \in (L^2)^\beta_q$. Наступні твердження еквівалентні:*

(1) *F можна представити у вигляді (2.2), де $\mathbf{E}\big(\partial_\cdot F|_{\mathcal{F}_\cdot}\big) \in (L^2)^\beta_q \otimes \mathcal{H}_\mathbb{C}$ у випадку $\beta \geqslant 0$, та $\mathbf{E}\big(\partial_\cdot F|_{\mathcal{F}_\cdot}\big) \in (L^2)^\beta_{q-1} \otimes \mathcal{H}_\mathbb{C}$, якщо $\beta < 0$;*

(2) *для кожного $n \in \mathbb{N}\backslash\{1\}$ ядро $F^{(n)} \in \mathcal{H}^{(n)}_{ext}$ з розкладу (1.6) для F містить представника $f^{(n)}$ такого, що $f^{(n)}(t_1, \dots, t_n) = 0$, якщо існують $i, j \in \{1, \dots, n\}$, $i \neq j$, такі, що*

$$\max\{t_1, \dots, t_n\} = t_i = t_j$$

(тобто якщо кратність найбільшого $t_\cdot \in \{t_1, \dots, t_n\}$ більша за одиницю).

Доведення. Спочатку доведемо теорему для

$$F = :\langle \circ^{\otimes n}, F^{(n)} \rangle:, \;\; F^{(n)} \in \mathcal{H}^{(n)}_{ext}, \;\; n \in \mathbb{N}\backslash\{1\},$$

(випадки $n = 0$ та $n = 1$ є тривіальними). Нехай $f^{(n)} \in F^{(n)}$ – симетричний представник класу еквівалентності $F^{(n)}$ в просторі $\mathcal{H}^{(n)}_{ext}$. Використовуючи (1.22), (2.1) та конструкцію ядер розширеного стохастичного інтеграла (див. Підрозділ 1.4), отримуємо

$$\begin{aligned}\int \mathbf{E}\big(\partial_t F|_{\mathcal{F}_t}\big)\widehat{d}L_t &= \int \mathbf{E}\big(\partial_t :\langle \circ^{\otimes n}, F^{(n)} \rangle:|_{\mathcal{F}_t}\big)\widehat{d}L_t = \\ &= \int n :\langle \circ^{\otimes n-1}, f^{(n)}(t) 1_{[0,t)^{n-1}} \rangle: \widehat{d}L_t = \\ &= :\langle \circ^{\otimes n}, f^{(n)} n Pr 1_{[0,\cdot_n)^{n-1}}(\cdot_1, \dots, \cdot_{n-1}) \rangle:,\end{aligned}$$

де, як і раніше, Pr – оператор симетризації за всіма змінними. Отже, випадкову величину $F = :\langle \circ^{\otimes n}, F^{(n)} \rangle:$ можна представити у вигляді (2.2) якщо та лише якщо функції $f^{(n)}$ та $f^{(n)} n Pr 1_{[0,\cdot_n)^{n-1}}(\cdot_1, \dots, \cdot_{n-1})$ належать одному і тому самому класу еквівалентності $F^{(n)}$ в $\mathcal{H}^{(n)}_{ext}$.

(1)⇒(2) Якщо F можна представити у вигляді (2.2), то, як щойно встановлено, $f^{(n)} n Pr 1_{[0,\cdot_n)^{n-1}}(\cdot_1, \dots, \cdot_{n-1}) \in F^{(n)}$. Легко перевірити, що ця функція задовольняє умову твердження (2) теореми.

(2)⇒(1) Нехай $f^{(n)} \in F^{(n)}$ – описаний у твердженні (2) представник $F^{(n)}$. Не втрачаючи загальності можна вважати, що $f^{(n)}$ є симетричною функцією. Легко показати, що зараз справедлива рівність $f^{(n)} = f^{(n)} n Pr 1_{[0,\cdot_n)^{n-1}}(\cdot_1, \dots, \cdot_{n-1})$, а тому F можна представити у вигляді (2.2).

У загальному випадку імплікація (1)⇒(2) тривіальним чином випливає з (1.18) та відповідної імплікації у щойно розглянутому частинному випадку; імплікація (2)⇒(1) – з того факту, що за виконання умови твердження (2)

$$\mathbf{E}\big(\partial_\cdot F|_{\mathcal{F}_\cdot}\big) = \mathbf{E}_\cdot\partial_\cdot F$$

(див. доведення Твердження 2.5.3 нижче), Твердження 2.4.1, (1.18) та щойно доведеної відповідної імплікації у частинному випадку. □

Зауваження 2.5.2. Відзначимо, що якщо деяке $F \in (L^2)_q^\beta$ задовольняє умову твердження (2) Теореми 2.5.1, то це F задовольняє й умову твердження (2) Теореми 2.2.1, оскільки представлення (2.2) для F є однією з конкретизацій представлення (2.3). Довести це можна й безпосередньо, що пропонується зробити в якості вправи зацікавленому читачу.

Як вже відзначалось, формула типу Кларка-Окона (2.18) є безпосереднім узагальненням класичної формули Кларка-Окона (2.2). Точніше, справедливе таке твердження.

Твердження 2.5.3. *Якщо $F \in (L^2)_q^\beta$ можна представити у вигляді (2.2), то*

$$\mathbf{E}\big(\partial_\cdot F|_{\mathcal{F}_\cdot}\big) = \mathbf{E}_\cdot\partial_\cdot F \tag{2.19}$$

в $(L^2)_q^\beta \otimes \mathcal{H}_\mathbb{C}$ у випадку $\beta \geqslant 0$ та в $(L^2)_{q-1}^\beta \otimes \mathcal{H}_\mathbb{C}$ у випадку $\beta < 0$.

Доведення. Спочатку доведемо твердження для

$$F = :\langle \circ^{\otimes n}, F^{(n)}\rangle:, \qquad F^{(n)} \in \mathcal{H}_{ext}^{(n)},\ n \in \mathbb{N}\backslash\{1\}$$

(випадки $n = 0$ та $n = 1$ є тривіальними). Нехай $f^{(n)} \in F^{(n)}$ – описаний в умові твердження (2) Теореми 2.5.1 представник $F^{(n)}$. Згідно з (1.22), (2.1) та (2.15) достатньо показати, що

$$f^{(n)}(\cdot)1_{[0,\cdot)^{n-1}} = f^{(n)}(\cdot)\chi_{n-1,\cdot}$$

в $\mathcal{H}_{ext}^{(n-1)} \otimes \mathcal{H}_\mathbb{C}$. Легко перевірити, що якщо для деяких $t_1, \ldots, t_{n-1}, t$

$$1_{[0,t)^{n-1}}(t_1, \ldots, t_{n-1}) \neq \chi_{n-1,t}(t_1, \ldots, t_{n-1}),$$

то кратність $\max\{t_1, \ldots, t_{n-1}, t\}$ є більшою за одиницю; а у такому випадку $f^{(n)}(t_1, \ldots, t_{n-1}, t) = 0$. Отже, для будь-якого набору аргументів

$$f^{(n)}(t_1, \ldots, t_{n-1}, t)[1_{[0,t)^{n-1}}(t_1, \ldots, t_{n-1}) - \chi_{n-1,t}(t_1, \ldots, t_{n-1})] = 0$$

і тому

$$|f^{(n)}(\cdot)[1_{[0,\cdot)^{n-1}} - \chi_{n-1,\cdot}]|_{\mathcal{H}_{ext}^{(n-1)} \otimes \mathcal{H}_\mathbb{C}} = 0,$$

що і треба було довести.

У загальному випадку рівність (2.19) в просторі $(L^2)_{q-1}^\beta \otimes \mathcal{H}_\mathbb{C}$ є наслідком щойно доведеного результату та неперервності операторів $\partial_\cdot$,

$\mathbf{E}\big(\circ(\cdot)|_{\mathcal{F}_\cdot}\big)$ і $\mathbf{E}_\cdot$; а якщо $\beta \geqslant 0$, то згідно з твердженням 2.4.1 ця рівність є справедливою в просторі $(L^2)_q^\beta \otimes \mathcal{H}_\mathbb{C} \subset (L^2)_{q-1}^\beta \otimes \mathcal{H}_\mathbb{C}$. □

Відзначимо, що результати цієї статті залишаються справедливими для випадкових величин $F \in (L^2)^\beta$, $\beta \in [-1, 1]$, в цьому випадку підінтегральні функції належать відповідним просторам $(L^2)^\beta \otimes \mathcal{H}_\mathbb{C}$.

Насамкінець зауважимо, що крім просторів з регулярного оснащення простору (L^2) (1.10), в аналізі білого шуму Леві уводяться та вивчаються так звані простори *нерегулярних* основних і узагальнених функцій [15, 37], а також визначаються та досліджуються різноманітні оператори й операції на таких просторах. Варто зазначити, що деякі властивості згаданих просторів суттєво відрізняються від властивостей просторів $(L^2)_q^\beta$. Побудові й дослідженню формул типу Кларка-Окона на просторах нерегулярних основних і узагальнених функцій будуть присвячені інші роботи автора.

Я щиро вдячний професору В. І. Герасименку за пропозицію написати цю статтю та всебічну підтримку.

Література

[1] K. Aase, B. Oksendal, N. Privault, and J. Uboe. White noise generalizations of the Clark-Haussmann-Ocone theorem with application to mathematical finance. *Finance Stochastics*, 4(4):465–496, 2000. doi:10.1007/PL00013528.

[2] F. E. Benth, G. Di Nunno, A. Lokka, B. Oksendal, and F. Proske. Explicit representation of the minimal variance portfolio in markets driven by Lévy processes. *Math. Finance*, 13(1):55–72, 2003. doi:10.1111/1467-9965.t01-1-00005.

[3] Jean Bertoin. *Lévy processes*, volume 121 of *Cambridge Tracts in Mathematics*. Cambridge University Press, Cambridge, 1996.

[4] J. M. C. Clark. The representation of functionals of Brownian motion by stochastic integrals. *Ann. Math. Statist.*, 41:1282–1295, 1970. doi:10.1214/aoms/1177696903.

[5] M. De Faria, M. J. Oliveira, and L. Streit. A generalized Clark-Ocone formula. *Random Oper. Stochastic Equations*, 8(2):163–174, 2000. doi:10.1515/rose.2000.8.2.163.

[6] G. Di Nunno, B. Oksendal, and F. Proske. White noise analysis for Lévy processes. *J. Funct. Anal.*, 206(1):109–148, 2004. doi:10.1016/S0022-1236(03)00184-8.

[7] G. Di Nunno, B. Oksendal, and F. Proske. *Malliavin Calculus for Lévy Processes with Applications to Finance*. Universitext. Springer-Verlag, Berlin, 2009.

[8] Khalifa Es-Sebaiy and Ciprian A. Tudor. Lévy processes and Itô-Skorokhod integrals. *Theory Stoch. Process.*, 14(2):10–18, 2008. URL: http://tsp.imath.kiev.ua/files/156/1420_2.pdf.

[9] M. M. Frei. Wick calculus on spaces of regular generalized functions of Lévy white noise analysis. *Carpathian Mathematical Publications*, 10(1):82–104, 2018. doi:10.15330/cmp.10.1.82-104.

[10] W. Grecksch, C. Roth, and V. V. Anh. q-fractional Brownian motion in infinite dimensions with application to fractional Black-Scholes market. *Stoch. Anal. Appl.*, 27(1):149–175, 2009. doi:10.1080/07362990802565084.

[11] H. Holden, B. Oksendal, J. Uboe, and T.-S. Zhang. *Stochastic partial differential equations*. Universitext. Springer, New York, second edition, 2010. A modeling, white noise functional approach. doi:10.1007/978-0-387-89488-1.
[12] N. A. Kachanovsky. On an extended stochastic integral and the Wick calculus on the connected with the generalized Meixner measure Kondratiev-type spaces. *Meth. Func. Anal. and Topol.*, 13(4):338–379, 2007.
[13] N. A. Kachanovsky. Clark-Ocone type formulas in the Meixner white noise analysis. *Carpathian Mathematical Publications*, 3(1):56–72, 2011.
[14] N. A. Kachanovsky. Clark-Ocone type formulas on spaces of test and generalized functions of Meixner white noise analysis. *Meth. Func. Anal. and Topol.*, 18(2):160–175, 2012.
[15] N. A. Kachanovsky. Extended stochastic integrals with respect to a Lévy process on spaces of generalized functions. *Mathematical Bulletin of Taras Shevchenko Scientific Society*, 10:169–188, 2013.
[16] N. A. Kachanovsky. On extended stochastic integrals with respect to Lévy processes. *Carpathian Mathematical Publications*, 5(2):256–278, 2013.
[17] N. A. Kachanovsky and V. A. Tesko. Stochastic integral of Hitsuda-Skorokhod type on the extended Fock space. *Ukr. Math. J.*, 61(6):873–907, 2009. doi:10.1007/s11253-009-0257-2.
[18] Ioannis Karatzas, Daniel L. Ocone, and Jinlu Li. An extension of Clark's formula. *Stochastics Rep.*, 37(3):127–131, 1991. doi:10.1080/17442509108833731.
[19] A. Lokka. Martingale representation, chaos expansion and Clark-Ocone formulas. In *Research Report, Centre for Mathematical Physics and Stochastics, University of Aarhus, Denmark, 22*, pages 1–24. 1999.
[20] A. Lokka. Martingale representation of functionals of Lévy processes. *Stochastic Anal. Appl.*, 22(4):867–892, 2004. doi:10.1081/SAP-120037622.
[21] Eugene Lytvynov. Orthogonal decompositions for Lévy processes with an application to the gamma, Pascal, and Meixner processes. *Infin. Dimens. Anal. Quantum Probab. Relat. Top.*, 6(1):73–102, 2003. doi:10.1142/S0219025703001031.
[22] Jan Maas and Jan van Neerven. A Clark-Ocone formula in UMD Banach spaces. *Electron. Commun. Probab.*, 13:151–164, 2008. doi:10.1214/ECP.v13-1361.
[23] P. A. Meyer. Quantum Probability for Probabilists. pages X+312. In: Lect. Notes in Math., Vol. 1538, Springer–Verlag, Berlin. 1993.
[24] David Nualart and Wim Schoutens. Chaotic and predictable representations for Lévy processes. *Stochastic Process. Appl.*, 90(1):109–122, 2000. doi:10.1016/S0304-4149(00)00035-1.
[25] Daniel Ocone. Malliavin's calculus and stochastic integral representations of functionals of diffusion processes. *Stochastics*, 12(3-4):161–185, 1984. doi:10.1080/17442508408833299.
[26] Daniel L. Ocone and Ioannis Karatzas. A generalized Clark representation formula, with application to optimal portfolios. *Stochastics Stochastics Rep.*, 34(3-4):187–220, 1991. doi:10.1080/17442509108833682.
[27] Horst Osswald. Malliavin calculus on extensions of abstract Wiener spaces. *J. Math. Kyoto Univ.*, 48(2):239–263, 2008. doi:10.1215/kjm/1250271411.
[28] G. Peccati and M. S. Taqqu. Stable convergence of generalized L^2 stochastic integrals and the principle of conditioning. *Electron. J. Probab.*, 12(15):447–480, 2007. doi:10.1214/EJP.v12-404.

[29] Irina Rodionova. Analysis connected with generating functions of exponential type in one and infinite dimensions. *Methods Funct. Anal. Topology*, 11(3):275–297, 2005. URL: http://mfat.imath.kiev.ua/article/?id=321.

[30] W. Schoutens. Stochastic processes and orthogonal polynomials. pages XIII+166. In: Lect. Notes in Statist., Vol. 146. Springer–Verlag, New York. 2000.

[31] D. Surgailis. On L^2 and non-L^2 multiple stochastic integration. pages 212–226. In: Lect. Notes in Control and Information Sciences, Vol. 36, Springer–Verlag., Berlin–Heidelberg. 1981. doi:10.1007/BFb0006424.

[32] Xicheng Zhang. Clark-Ocone formula and variational representation for Poisson functionals. *Ann. Probab.*, 37(2):506–529, 2009. doi:10.1214/08-AOP411.

[33] Ю. М. Березанский, Г. Ф. Ус, and З. Г. Шефтель. *Функциональный анализ. Курс лекций.* Вища школа, Київ, 1990.

[34] И. М. Гельфанд and Н. Я. Виленкин. *Обобщенные функции, Том IV.* Государственное издательство физико-математической литературы, Москва, 1961.

[35] И. И. Гихман and А. В. Скороход. *Теория случайных процессов, Том 2.* Наука, Москва, 1973.

[36] М. О. Качановський. Формули типу Кларка-Окона в майкснерівському аналізі білого шуму для недиференційовних за Хідою випадкових величин. *Наукові вісті НТУУ "КПІ"*, 15(4):56–60, 2011.

[37] М. О. Качановський. Про стохастичне інтегрування, диференціювання та віківське числення в аналізі білого шуму Леві. In *Сучасні проблеми математики та її застосувань, частина II: Збірник праць Інституту математики НАН України, том 18, №1*, pages 456–507. Інститут математики НАН України, 2021.

[38] А. В. Скороход. *Интегрирование в гильбертовом пространстве.* Наука, Москва, 1975.

М. О. Качановський
Інститут математики НАН України, м. Київ
Email: nkachano@gmail.com
ORCID: 0000-0001-7354-5384