Збірник праць Ін-ту математики НАН України (2023) т. 20, №1, 712–728

Зародження і розвиток ідей теорії стохастичних диференціальних рівнянь в українській школі математики

М. І. Портенко

Abstract. It is universally recognized that the theory of stochastic differential equations was created in the Japanese mathematical school during the forties of the last century, and it is much less-known that the idea of a stochastic differential equation arose independently in the Ukrainian school of mathematics about the same time. This paper is devoted to a description of the initial stages in forming the school of the theory of stochastic differential equations and its subsequent development in Ukraine.

Анотація. Як зародилось поняття стохастичного диференціального рівняння в рамках української математичної школи та як проходило становлення теорії таких рівнянь в Україні – це основні питання, що їх висвітлено в статті.

Вступ

Одним з найзначніших досягнень математики середини минулого сторіччя слід вважати зародження та розвиток ідей теорії стохастичних диференціальних рівнянь, що зрештою призвело до утворення нового розділу сучасної математики під назвою «Стохастичний аналіз». Окреслилися зв'язки нової науки з такими класичними розділами математики, як математичний аналіз, диференціальні рівняння, динамічні системи тощо. Визначилися сфери застосування: фізика, біологія, теорія оптимального керування системами з розподіленими параметрами, фінансова математика та ін.

Цікаво, що і до процесу зародження теорії стохастичних диференціальних рівнянь, і до її подальшого розвитку причетними виявилися науковці української школи математики. В цій статті якраз йтиметься про ті початкові етапи становлення стохастичного аналізу в Україні.

2020 Mathematics Subject Classification: 60H10, 01A60

Ключові слова: стохастичні диференціальні рівняння; дифузійні процеси; рівняння Колмогорова

DOI: http://dx.doi.org/10.3842/trim.v20n1.527

Автор не ставив собі за мету дослідження цього процесу у всіх деталях. Натомість підкреслюється роль деяких сильних сторін тогочасної української математичної школи, які, власне, і призвели до зародження ідеї стохастичного диференціального рівняння та стали потужним фактором подальшого розвитку теорії таких рівнянь. Крім того, наводяться деякі яскраві результати з теорії стохастичних диференціальних рівнянь, отримані представниками української школи теорії ймовірностей. Їх добірка відображає смаки автора цієї статті і аж ніяк не претендує на бодай якусь повноту.

Основою цієї статті стали матеріали доповіді автора на засіданні Київського математичного товариства 6 вересня 2022 року. Це засідання відбувалося в рамках так званих Гравевських читань, що традиційно проводяться в день народження Д. О. Ґраве, який став лідером Київської школи математики на початку XX сторіччя і був ним до своєї смерті в 1939 році. Отже, мені, як доповідачеві на цих читаннях, слід було провести лінію від Д. О. Ґраве до Й. І. Гіхмана, оскільки саме у його публікації 1947 року з'явилося поняття стохастичного диференціального рівняння. Таку лінію провести нескладно: Й. І. Гіхман, закінчивши Київський університет в 1939 році, одразу поступив на навчання в аспірантурі при цьому університеті, і керівником йому було призначено М. М. Боголюбова, який зі своїх юних літ був активним учасником семінару під керівництвом Д. О. Ґраве. Відштовхуючись від робіт саме свого учителя (спільних з М. М. Криловим) кінця 1930-х років, Й. І. Гіхман зробив вирішальний крок до поняття стохастичного диференціального рівняння. В низці своїх публікацій початку 1950-х років Й. І. Гіхман розвинув свої первісні ідеї.

В подальшому розвитку теорії стохастичних диференціальних рівнянь надзвичайно важливим був той факт, що такий титан науки як А. В. Скороход долучився (не без впливу Й. І. Гіхмана) до дослідження в цій галузі математики, починаючи з 1957 року. І вже в кінці 1961 року у видавництві Київського університету вийшла з друку його книга «Исследовання по теории случайних процессов», присвячена (значною мірою) теорії стохастичних диференціальних рівнянь. Низку нових ідей та результатів в цій теорії було запропоновано автором книги. Після цього спільна робота Й. І. Гіхмана та А. В. Скорохода в теорії стохастичних диференціальних рівнянь увінчалася публікацією книги «Стохастические дифференциальнне уравнення» в 1968-у році у видавництві «Наукова думка» в Києві. З'явилася ціла когорта учнів цих двох видатних математиків. Так зародилась в Україні школа теорії стохастичних диференціальних рівнянь. Саме про ті далекі тепер події ця стаття.

Слід сказати, що на початку 1940-х років японський математик К. Іто (K. Itô) побудував теорію стохастичного інтегрування, яка дозволила йому створити теорію стохастичних диференціальних рівнянь. Як і у Й. І. Гіхмана, основи теорії були сформовані на самому початку 1950-х років. На відміну від К. Іто, Й. І. Гіхман не володів поняттям стохастичного інтеграла, хоч його підхід до поняття стохастичного диференціального рівняння був цілком строгим[1]. Підхід К. Іто виявився вдалим, і тепер теорію стохастичних диференціальних рівнянь викладають, грунтуючись саме на понятті стохастичного інтеграла.

Ще одне ім'я варто згадати тут. Як показують деякі матеріали, подібні ідеї були і у франко-німецького математика В. Дебліна (W. Döblin). Однак його коротке життя трагічно обірвалося вже в перші роки 2-ї світової війни, а зміст його листа до академії наук Франції, в якому згадані ідеї викладені, оприлюднено порівняно недавно. Тому автор не буде тут торкатися цієї сторони справи.

Закінчу цей вступний розділ статті двома коротенькими історіями, що мають стосунок до двох постатей в математиці, причетних до створення теорії стохастичних диференціальних рівнянь.

Наприкінці літа 1975 року в м. Ташкенті відбувався Радянсько-Японський симпозіум з теорії ймовірностей. К. Іто не брав участі в тому симпозіумі. В один з вечорів у неформальній обстановці троє молодих тоді математиків з Києва – В. В. Булдигін, А. Ф. Турбін та я – мали нагоду поспілкуватися з молодим тоді японським математиком М. Фукушімою (M. Fukushima). На наше запитання: «Кого він вважає математиком №1 в Японії?» відповідь була однозначною і без жодних вагань: «К. Іто!». Ми продовжили: «А хто на другому місці?». Він зробив паузу, ніби щось зважуючи, і зрештою сказав: «Немає нікого!». Так було і з місцями 3 та 4. «А на п'ятому місці – багато різних!». Таким був його вердикт.

Друга історія асоціюється із запитанням, чи знав К. Іто про Й. І. Гіхмана і про його підхід до поняття стохастичного диференціального рівняння. Моя відповідь: «Безумовно, так!». І ось доведення цього твердження.

Це було в м. Тбілісі влітку 1982 року, де тоді проходив черговий Радянсько-Японський симпозіум з теорії ймовірностей (до речі, наступний був у Києві в 1991 році, він завершився за тиждень до «ГКЧП»).

[1]Намагання уникати складних пояснень під час доповіді 6 вересня 2022 року привело тоді автора до цілком неадекватного опису того, чим є стохастичне диференціальне рівняння у Й. І. Гіхмана. Визнаючи цю мою провину і перепрошуючи за неї перед моїми слухачами, постараюся у цій статті усунути ту прикру недбалість, що трапилася у доповіді.

Цього разу К. Іто був у складі японської делегації. Одного дня в певний час всі учасники симпозіуму мали зібратися в вестибюлі готелю, де мешкали, мабуть, перед екскурсією, чи бенкетом. Сталося так, що я стояв поруч з К. Іто. Ми встигли обмінятися парою фраз перед тим, як до нас підійшов Ілля Гіхман – син Йосипа Ілліча. Він також був учасником симпозіуму і був зовсім ще молодим чоловіком (трохи більше 30-ти років). У нього на бейджику був напис: I. I. Gikhman. Правила хорошого тону зобов'язували мене представити його професору, і я це зробив. Професор нахилився до Іллі, щоб прочитати на бейджику ім'я молодого математика. Коли він випростався, на його обличчі був вираз найвищого ступеня подиву. Він не міг повірити в те, що його, так би мовити, конкурент з України у справі створення теорії стохастичних диференціальних рівнянь є такою молодою людиною (різниця у віці між К. Іто та Й. І. Гіхманом складала 3 роки, перший був старшим). Ми з Іллею поспішили заспокоїти професора, пояснивши ситуацію. Цим і завершується доведення.

Подяка. Щиро дякую професорові М. М. Осипчуку з Прикарпатського національного університету імені Василя Стефаника за допомогу при підготовці цієї статті до друку.

1. Дифузійні процеси в сенсі А. Колмогорова

Як відомо, процес Маркова $(x(t))_{t\geqslant 0}$ в евклідовому просторі $\mathbb{R}^d$ характеризується існуванням функції $P(s,x,t,\Gamma)$ аргументів $s\geqslant 0$, $x\in\mathbb{R}^d$, $t>s$ та $\Gamma\in\mathcal{B}$ (через $\mathcal{B}$ позначається σ-алгебра всіх борельових підмножин $\mathbb{R}^d$), значеннями якої є числа з проміжку $[0,1]$ дійсної осі і яка має такі властивості:

а) вона є $\mathcal{B}$-вимірною функцією аргумента $x\in\mathbb{R}^d$ при фіксованих $s<t$ та $\Gamma\in\mathcal{B}$;

б) вона є ймовірнісною мірою по $\Gamma\in\mathcal{B}$ при фіксованих $s<t$, $x\in\mathbb{R}^d$;

в) при всіх $s<\tau<t$, $x\in\mathbb{R}^d$ та $\Gamma\in\mathcal{B}$ виконується рівність

$$P(s,x,t,\Gamma)=\int_{\mathbb{R}^d}P(\tau,y,t,\Gamma)P(s,x,\tau,\mathrm{d}y);$$

г) при всіх $s<t$ та $\Gamma\in\mathcal{B}$ виконується (майже напевно) рівність

$$\mathbb{P}\left(\{x(t)\in\Gamma\}\mid\mathcal{M}_s\right)=P(s,x(s),t,\Gamma),$$

де ліворуч записана умовна ймовірність події $\{x(t)\in\Gamma\}$, коли фіксована σ-алгебра $\mathcal{M}_s$, що є найменшою σ-алгеброю подій, яка містить всі події вигляду $\{x(r)\in\Lambda\}$ при $r\in[0,s]$ та $\Lambda\in\mathcal{B}$.

Умова г) означає, що при складанні прогнозу майбутньої поведінки процесу (тобто, в момент часу t), якщо до уваги береться повна інформація про його поведінку в минулому (тобто, до теперішнього моменту часу s, $s \leqslant t$), вся інформація про $x(r)$ при $r < s$ виявляється зайвою: важливою є лише та, що стосується $x(s)$. Саме ця властивість покладена в основу визначення процесу Маркова.

Отже, якщо є процес Маркова $(x(t))_{t\geqslant 0}$ в фазовому просторі $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B})$, то існує функція $P(s, x, t, \Gamma)$, $0 \leqslant s < t$, $x \in \mathbb{R}^d$, $\Gamma \in \mathcal{B}$, яка задовольняє умови а)-г). Навпаки, якщо маємо функцію $P(s, x, t, \Gamma)$, що задовольняє умови а)-в), і додатково задана ймовірнісна міра $(\mu(\Gamma))_{\Gamma\in\mathcal{B}}$, то існує процес Маркова $(x(t))_{t\geqslant 0}$ в $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B})$, для якого $\mathbb{P}\left(\{x(0) \in \Gamma\}\right) = \mu(\Gamma)$ при всіх $\Gamma \in \mathcal{B}$ і також виконується умова г).

Таким чином, всякий розв'язок рівняння в умові в) (він має задовольняти умови а) та б), бо лише за цих умов і можна писати те рівняння) визначає процес Маркова в $\mathbb{R}^d$ і навіть не один (вони будуть різнитися лише початковими розподілами). В цьому розумінні рівняння в) є джерелом всіх процесів Маркова в $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B})$. Воно носить назву рівняння Колмогорова-Чепмена. Всякий розв'язок цього рівняння, що є ймовірнісною мірою по четвертій змінній, зветься ймовірністю переходу. Її інтерпретація очевидна: $P(s, x, t, \Gamma)$ при $s < t$ задає умовну ймовірність події $\{x(t) \in \Gamma\}$ за умови $x(s) = x$.

Виражаючи досить загальний принцип еволюції систем, що описуються процесами Маркова, рівняння Колмогорова-Чепмена є нелінійним. А. Н. Колмогоров на межі 20-х та 30-х років минулого сторіччя запропонував метод лінеаризації таких рівнянь, що ґрунтується на тих чи інших припущеннях щодо локальної поведінки процесу на малих проміжках часу (див. [6]). Він виділив декілька класів процесів Маркова, один з яких згодом дістав назву дифузійних процесів. Сформулюємо ті умови на ймовірність переходу в $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B})$, які визначають дифузійний процес. Через $B_r(x)$ позначається відкрита куля в $\mathbb{R}^d$ з центром в точці $x \in \mathbb{R}^d$ радіуса $r > 0$, а через $B_r(x)^c$ її доповнення до $\mathbb{R}^d$.

Нехай ймовірність переходу $P(s, x, t, \Gamma)$, $0 \leqslant s \leqslant t$, $x \in \mathbb{R}^d$, $\Gamma \in \mathcal{B}$, задовольняє наступні умови:

1) при всіх $s \geqslant 0$, $x \in \mathbb{R}^d$ та $\varepsilon > 0$ виконується співвідношення

$$\lim_{\Delta s \downarrow 0} \frac{1}{\Delta s} \int_{B_\varepsilon(x)^c} P(s, x, s + \Delta s, \mathrm{d}y) = 0;$$

2) при всіх $s \geqslant 0$, $x \in \mathbb{R}^d$ та деякому $\varepsilon > 0$ існує границя

$$\lim_{\Delta s \downarrow 0} \frac{1}{\Delta s} \int_{B_\varepsilon(x)} (y - x) P(s, x, s + \Delta s, \mathrm{d}y);$$

3) при всіх $s \geqslant 0$, $x \in \mathbb{R}^d$, $\theta \in \mathbb{R}^d$ та деякому $\varepsilon > 0$ існує границя

$$\lim_{\Delta s \downarrow 0} \frac{1}{\Delta s} \int_{B_\varepsilon(x)} (y - x, \theta)^2 P(s, x, s + \Delta s, \mathrm{d}y).$$

Неважко бачити, що за умови 1) існування границь в 2) та 3) при деякому $\varepsilon > 0$ означає їх існування при будь-якому $\varepsilon > 0$ і незалежність тих границь від $\varepsilon > 0$. Тому границя в 2) визначає $\mathbb{R}^d$-значну функцію $(a(s, x))_{s \geqslant 0, x \in \mathbb{R}^d}$, яка зветься вектором переносу. Границя в 3) визначає операторну функцію $(b(s, x))_{s \geqslant 0, x \in \mathbb{R}^d}$, яка зветься оператором дифузії і з допомогою якої та границя записується у вигляді квадратичної форми $(b(s, x)\theta, \theta)$. В одновимірному випадку ці функції називаються коефіцієнтом переносу та коефіцієнтом дифузії, відповідно. Це і є локальні характеристики процесу, які описують рух на макроскопічному та мікроскопічному рівнях.

Наступний результат належить А. Н. Колмогорову. Припустимо, що задана ймовірність переходу в $\mathbb{R}^d$, яка задовольняє умови 1)-3) з неперервними локальними характеристиками, а задана функція $(\varphi(x))_{x \in \mathbb{R}^d}$ з дійсними значеннями є неперервною обмеженою і такою, що функція ($t > 0$ фіксоване)

$$u(s, x) = \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(y) P(s, x, t, \mathrm{d}y), \quad (s, x) \in [0, t) \times \mathbb{R}^d, \tag{1.1}$$

двічі неперервно диференційовна по $x \in \mathbb{R}^d$. Тоді вона диференційовна і по змінній $s \in [0, t)$ та задовольняє рівняння

$$u'_s(s, x) + \big(a(s, x), u'_x(s, x)\big) + \tfrac{1}{2} \mathrm{Tr}\,\big(b(s, x) u''_{xx}(s, x)\big) = 0 \tag{1.2}$$

в області $(s, x) \in [0, t) \times \mathbb{R}^d$, а також «початкову» умову

$$u(t-, x) = \varphi(x), \quad x \in \mathbb{R}^d. \tag{1.3}$$

У разі, якщо ймовірність переходу задовольняє умови 1)-3) і має щільність відносно лебегової міри в $\mathbb{R}^d$, тобто,

$$P(s, x, t, \Gamma) = \int_\Gamma G(s, x, t, y)\, \mathrm{d}y, \quad 0 \leqslant s < t,\ x \in \mathbb{R}^d,\ \Gamma \in \mathcal{B},$$

А. Н. Колмогоров за певних умов вивів рівняння для функції $G(s, x, t, y)$, $t \in (s, +\infty)$, $y \in \mathbb{R}^d$ при фіксованих $s \geqslant 0$ та $x \in \mathbb{R}^d$. Це рівняння є формально спряженим до рівняння (1.2). Воно відоме в літературі, ближчій до фізики, під назвою рівняння Фоккера-Планка. Ймовірнісники називають його прямим рівнянням Колмогорова, на відміну від рівняння (1.2), яке є оберненим.

У частинному випадку, коли $a(s, x) \equiv 0$, а $b(s, x) \equiv I$ (через I позначається тотожній оператор в $\mathbb{R}^d$), рівняння (1.2) перетворюється на рівняння теплопровідності

$$u'_s(s,x) + \tfrac{1}{2}\Delta u(s,x) = 0 \tag{1.4}$$

при $(s,x) \in [0,t) \times \mathbb{R}^d$ ($t > 0$ фіксоване), де оператор Лапласа Δ діє на функцію $(u(s,x))_{(s,x)\in[0,t)\times\mathbb{R}^d}$ по змінній $x \in \mathbb{R}^d$, тобто,

$$\Delta u(s,x) = \operatorname{Tr}(u''_{xx}(s,x)).$$

Розв'язком задачі Коші в цьому випадку буде функція

$$u(s,x) = \int_{\mathbb{R}^d} g(s,x,t,y)\varphi(y)\,\mathrm{d}y, \quad (s,x) \in [0,t) \times \mathbb{R}^d,$$

де

$$g(s,x,t,y) = (2\pi(t-s))^{-d/2} \exp\left\{-|y-x|^2/2(t-s)\right\}$$

при $s < t$, $x \in \mathbb{R}^d$ та $y \in \mathbb{R}^d$. Працюючи саме з цією функцією g, Н. Вінер сто років тому побудував міру в просторі неперервних функцій, яка є розподілом в тому просторі дифузійного процесу з локальними характеристиками $a(s,x) \equiv 0$ та $b(s,x) \equiv I$ (див. [8]). Цей процес тепер називають *вінеровим*, або ж *процесом броунівського руху*.

Слід сказати, що згадана вище стаття А. Н. Колмогорова мала великий вплив на тогочасних математиків, які проводили свої дослідження в області теорії випадкових процесів. Вона вказувала на шлях, йдучи яким можна було сподіватись на побудову широкого класу дифузійних процесів. Головним на цьому шляху був аналіз задачі Коші (1.2)-(1.3). Якщо за певних умов на коефіцієнти рівняння (1.2) виявиться, що ця задача має розв'язок для широкого класу «початкових» функцій (настільки широкого, що кожний заряд на $\mathcal{B}$ однозначно визначається інтегралами від функцій цього класу по цьому заряду) і якщо при цьому розв'язок є невід'ємною функцією за умови, що $\varphi(x) \geqslant 0$ при всіх $x \in \mathbb{R}^d$, тоді цей розв'язок запишеться у формі (1.1) з деякою ймовірністю переходу, щодо якої залишиться лише перевірити, чи вона задовольняє умови 1)-3). Якщо так, то цим і завершується побудова дифузійного процесу в сенсі Колмогорова з наперед заданими локальними характеристиками руху: вектором переносу $(a(s,x))_{s\geqslant 0, x\in\mathbb{R}^d}$ та оператором дифузії $(b(s,x))_{s\geqslant 0, x\in\mathbb{R}^d}$.

Першим цей шлях пройшов В. Феллер [5], який в одновимірному випадку, використавши метод параметрикс, а також принцип максимуму для рівнянь типу (1.2), зумів побудувати дифузійний процес в $\mathbb{R}^1$ з наперед заданими локальними характеристиками.

Метод параметрикс побудови фундаментальних розв'язків рівнянь типу (1.2), започаткований на початку минулого сторіччя, до його середини завдяки математикам різних країн і різних поколінь було розвинуто настільки, що можна було гарантувати існування фундаментальних розв'язків рівнянь (1.2) за наступних умов на задані функції $(a(s,x))_{(s,x)\in[0,T]\times\mathbb{R}^d}$ та $(b(s,x))_{(s,x)\in[0,T]\times\mathbb{R}^d}$ ($T>0$ фіксоване):

α) при всіх $\theta\in\mathbb{R}^d$ виконується умова

$$c_1|\theta|^2 \leqslant (b(s,x)\theta,\theta) \leqslant c_2|\theta|^2$$

зі сталими $c_1>0$ та $c_2\geqslant c_1$, якими б не були $(s,x)\in[0,T]\times\mathbb{R}^d$;

β) функція $(b(s,x))_{(s,x)\in[0,T]\times\mathbb{R}^d}$ задовольняє умову Гельдера

$$\|b(s,x)-b(t,y)\| \leqslant K\left(|t-s|^{\alpha/2}+|x-y|^{\alpha}\right)$$

зі сталими $\alpha\in(0,1]$ та $K>0$ при всіх $0\leqslant s<t\leqslant T$ та $x\in\mathbb{R}^d$, $y\in\mathbb{R}^d$ (тут використано операторну норму);

γ) функція $(a(s,x))_{(s,x)\in[0,T]\times\mathbb{R}^d}$ є неперервною обмеженою і задовольняє умову

$$|a(s,x)-a(s,y)| \leqslant K|x-y|^{\alpha}$$

з тими ж сталими K та α при всіх $s\in[0,T]$, $x\in\mathbb{R}^d$ та $y\in\mathbb{R}^d$.

Принцип максимуму для рівнянь (1.2) дозволяє гарантувати невід'ємність фундаментального розв'язку, а також забезпечує єдиність розв'язку задачі Коші (1.2)-(1.3) в певних класах. Це в свою чергу приводило до існування дифузійного процесу з наперед заданими локальними характеристиками руху.

Таким чином, вже на середину минулого сторіччя в теорії дифузійних процесів панівними були виключно аналітичні методи побудови таких процесів та дослідження їх властивостей.

Цікаво, що до рівняння Фоккера-Планка прийшов також С. Бернштейн, який до 1934 року працював у Харкові, перебравшись в тому році до Москви. В своїй статті [2] він запропонував розглянути певну різницеву схему, в яку було залучено задані поля $(a(s,x))_{(s,x)\in[0,T]\times\mathbb{R}^d}$ та $(\sigma(s,x))_{(s,x)\in[0,T]\times\mathbb{R}^d}$, векторне та операторне, відповідно. Нехай задана деяка послідовність $\left(t_k^{(n)}\right)_{k=0,1,\dots,k_n}$, $n=1,2,\dots$ розбиттів проміжка $[s,t]\subset[0,T]$, для якої

$$\lim_{n\to\infty}\max_{0\leqslant k<k_n}(t_{k+1}^{(n)}-t_k^{(n)})=0.$$

Покладаємо для деякого $x\in\mathbb{R}^d$, $\xi_{s,x}^{(n)}(s)=x$, а при $\tau\in(t_k^{(n)},t_{k+1}^{(n)}]$, де $k=0,1,\dots,k_n-1$,

$$\xi_{s,x}^{(n)}(\tau) = \xi_{s,x}^{(n)}(t_k^{(n)}) + a\left(t_k^{(n)}, \xi_{s,x}^{(n)}(t_k^{(n)})\right)\left(\tau - t_k^{(n)}\right) + \\ + \sigma\left(t_k^{(n)}, \xi_{s,x}^{(n)}(t_k^{(n)})\right)\zeta_k^{(n)}\sqrt{\tau - t_k^{(n)}},$$

де $\left(\zeta_k^{(n)}\right)_{k=0,1,\ldots,k_n}$, $n = 1, 2, \ldots$, – послідовність серій незалежних в кожній серії нормальних випадкових векторів в $\mathbb{R}^d$ з нульовим середнім та одиничною коваріаційною матрицею.

За певних умов на задані поля, С. Бернштейн довів, що розподіл величини $\xi_{s,x}^{(n)}(t)$ збігається, коли $n \to \infty$, до граничного розподілу, який є абсолютно неперервним відносно лебегової міри в $\mathbb{R}^d$. Щільність того розподілу задовольняє рівняння Фоккера-Планка з коефіцієнтами $a(s,x)$ та $b(s,x) = \sigma(s,x)\sigma^*(s,x)$, $(s,x) \in [0,T] \times \mathbb{R}^d$.

Дуже важливою обставиною в цій розповіді є той факт, що в 1939 році до цього ж рівняння прийшов молодий київський математик (йому тоді було 30 років) М. М. Боголюбов разом зі своїм учителем М. М. Криловим. В своїй тогорішній публікації з промовистою назвою «Про рівняння Фоккера-Планка, що виводиться в теорії пертурбацій методом, заснованим на спектральних властивостях пертурбаційного гамільтоніана», вони також доводили, що певна динамічна система під впливом швидко змінних факторів, які переходять в «білий шум», в границі описується рівнянням Фоккера-Планка (див. [15]).

Як вже згадувалось, Й. І. Гіхман закінчив навчання в Київському університеті в 1939 році і, ставши в тому ж році аспірантом М. М. Боголюбова, змушений був підключатись до тих розмірковувань, якими в той час переймався його учитель. До війни Й. І. Гіхман встиг опублікувати дві статті, які були в руслі вже цитованої роботи Крилова-Боголюбова.

Й. І. Гіхман був учасником війни від її початку і до кінця. Цікаво, що свою кандидатську дисертацію він захистив під час війни (точніше, в лютому 1942 року) в Ташкенті. Його військова частина проходила там переформування, і він мав нагоду скористуватися тією сприятливою обставиною, що в Ташкенті на той час вже була сформована сильна ймовірнісна школа.

2. Стохастичні диференціальні рівняння

2.1. **Зародження ідеї.** Повернувшись після війни до Києва, Й. І. Гіхман почав розмірковувати над тим, як будувати випадкові процеси типу тих, що звуться дифузійними. Підхід А. Н. Колмогорова – це намагання будувати розв'язки рівняння Колмогорова-Чепмена з допомогою лінеаризації того рівняння. Цей підхід дає змогу конструювати скінченно-вимірні розподіли процесу, а отже, і сам процес з допомогою теореми Колмогорова про узгодженість тих розподілів.

Тепер важко сказати, як саме прийшла до Й. І. Гіхмана надзвичайно смілива думка про те, що можна спробувати будувати не якісь ймовірнісні характеристики шуканого процесу, а безпосередньо його траєкторії як розв'язки певного диференціального рівняння. Здається, що саме тут могла відіграти свою роль та обставина, що учителем Й. І. Гіхмана був такий корифей школи математичної фізики, як М. М. Боголюбов.

Ідея Й. І. Гіхмана полягала в тому, що має бути заданим векторне поле випадкових процесів $(\alpha(t,x))_{(t,x)\in[0,T]\times\mathbb{R}^d}$, яке має задавати локальну поведінку шуканого процесу $(x(t))_{t\in[0,T]}$ в тому розумінні, що при $0 \leqslant t < t+\Delta t \leqslant T$ мусить виконуватись приблизна рівність

$$x(t+\Delta t) - x(t) \cong \alpha(t+\Delta t, x(t)) - \alpha(t, x(t)).$$

Ця рівність має бути тим точнішою, чим меншим є значення $\Delta t > 0$. Крім того, треба вибрати початковий момент часу $s \in [0,T)$, задати початкову умову $x(s) = \xi$ (ξ – довільна точка $\mathbb{R}^d$) і тоді можна сформулювати проблему.

Знайти умови на задане поле випадкових процесів $(\alpha(t,x))_{(t,x)\in[0,T]\times\mathbb{R}^d}$, за яких існує такий випадковий процес $(x(t))_{t\in[s,T]}$ в $\mathbb{R}^d$, що задовольняє наступні умови:

$A_1)$ $x(s) = \xi$;

$A_2)$ при всіх $t \in [s,T)$ виконуються рівності

$$\lim_{\Delta t\downarrow 0} \frac{1}{\Delta t}\mathbb{E}\left|x(t+\Delta t) - x(t) - (\alpha(t+\Delta t, x(t)) - \alpha(t, x(t)))\right|^2 = 0,$$

$$\lim_{\Delta t\downarrow 0} \tfrac{1}{\Delta t^2}\mathbb{E}\big|\mathbb{E}\big[(x(t+\Delta t) - x(t) - (\alpha(t+\Delta t, x(t)) - \alpha(t, x(t)))) \mid \mathcal{M}_t^s\big]\big|^2 = 0,$$

де $(\mathcal{M}_t^s)_{s\leqslant t}$ спільна історія (фільтрація), породжена усіма випадковими векторами $\alpha(\tau, x)$ при $\tau \in [s,t]$ та $x \in \mathbb{R}^d$.

Зауважимо, що друга границя в умові $A_2)$ означає, що випадкові фактори приросту $\alpha(t+\Delta t, x(t)) - \alpha(t, x(t))$, які могли би мати порядок $\sqrt{\Delta t}$, мусять «зникати», коли береться умовне середнє того приросту при фіксованому $\mathcal{M}_t^s$. Трохи згодом Й. І. Гіхман дійшов висновку, що задане поле випадкових процесів має бути, так би мовити, двопараметричним: $\alpha(t,x,h)$, $(t,x) \in [0,T]\times\mathbb{R}^d$, $h > 0$; при фіксованих (t,x) це має бути випадковий процес по змінній h, причому $\alpha(t,x,0+) = 0$. Прикладом такого поля може бути

$$\alpha(t,x,h) = a(t,x)h + \sigma(t,x)[w(t+h) - w(t)], \tag{2.1}$$

де $(a(t,x))_{(t,x)\in[0,T]\times\mathbb{R}^d}$ та $(\sigma(t,x))_{(t,x)\in[0,T]\times\mathbb{R}^d}$ задані поля, відповідно векторне і операторне, а $(w(t))_{t\geqslant 0}$ заданий вінерів процес в $\mathbb{R}^d$, тобто, найпростіший дифузійний процес, що описує рух мікроскопічної частинки в нерухомому ізотропному середовищі типу рідини чи газу. В цьому випадку друга умова в $A_2)$ зводиться до такої

$$\mathbb{E}\big|\mathbb{E}\big[(x(t+\Delta t)-x(t)-a(t,x(t))\Delta t-\sigma(x(t))[w(t+\Delta t)-w(t)]) \mid \mathcal{M}_t^s\big]\big|^2 = \\ = \mathbb{E}\big|\mathbb{E}\big[(x(t+\Delta t)-x(t)-a(t,x(t))\Delta t) \mid \mathcal{M}_t^s\big]\big|^2 = o\big(\Delta t^2\big),$$

за умови, що випадковий вектор $w(t+\Delta t)-w(t)$ не залежить від подій із σ-алгебри $\mathcal{M}_t^s$.

Загальний результат Й. І. Гіхмана, сформульований в [9], звучить так: за певних умов на поле $\alpha(t,x)$, $(t,x)\in[0,T]\times\mathbb{R}^d$, типу умови Ліпшиця по просторовій змінній, накладеної на умовні середні приростів поля, існує єдиний $(\mathcal{M}_t^s)$-узгоджений випадковий процес $(x_{s,\xi}(t))_{t\in[s,T]}$, який задовольняє умови $A_1)$-$A_2)$.

В частинному випадку поля (2.1) справа зводилась до простих умов Ліпшиця зі сталою $K>0$ на функцію σ

$$\|\sigma(t,x)-\sigma(t,y)\| \leqslant K|x-y|, \quad t\in[0,T],\ x\in\mathbb{R}^d,\ y\in\mathbb{R}^d,$$

та функцію a

$$(a(t,x)-a(t,y),x-y) \leqslant K|x-y|^2, \quad t\in[0,T],\ x\in\mathbb{R}^d,\ y\in\mathbb{R}^d$$

(ця форма умови Ліпшиця враховує напрямок поля a; саме таку умову використовував С. Бернштейн в [2]). В цьому випадку Й. І. Гіхман довів, що рівняння

$$\mathrm{d}x(t) = a(t,x(t))\,\mathrm{d}t + \sigma(t,x(t))\,\mathrm{d}w(t), \quad t\in[s,T],$$

при умові $x(s)=\xi$ ($\xi\in\mathbb{R}^d$ невипадковий вектор) має єдиний роз'язок, який є процесом Маркова. Позначимо цей роз'язок через

$$(x_{s,\xi}(t))_{t\in[s,T]}.$$

Й. І. Гіхман не зупинився на теоремі існування і єдиності роз'язку. За умови, що функції a та σ є тричі неперервно диференційовними по просторовій змінній, він довів, що функція $u(s,\xi)=\mathbb{E}\varphi(x_{s,\xi}(t))$, $(s,\xi)\in[0,t)\times\mathbb{R}^d$, (при заданій гладкій $(\varphi(x))_{x\in\mathbb{R}^d}$) є двічі неперервно диференційовною по змінній ξ, а отже, за теоремою Колмогорова вона диференційовна і по s, і задовольняє обернене рівняння Колмогорова

$$u'_s(s,\xi) + \big(a(s,\xi),u'_\xi(s,\xi)\big) + \tfrac{1}{2}\mathrm{Tr}\,\big(b\,(s,\xi)\,u''_{\xi\xi}(s,\xi)\big) = 0,$$

в якому $b(s,\xi)=\sigma\,(s,\xi)\,\sigma^*\,(s,\xi)$.

Це був надзвичайно сильний результат: те, що в теорії Колмогорова було, так би мовити, «темним» припущенням, у Й. І. Гіхмана стверджувалось. Цим відкривалося проникнення чисто ймовірнісних методів у таку класичну область математики, як диференціальні рівняння з частинними похідними параболічного типу. Справді, будується певний випадковий процес, а з його допомогою знаходиться розв'язок задачі Коші для відповідного рівняння Колмогорова. Це докорінно відрізнялось від того інструментарію, яким володіли спеціалісти з рівнянь такого типу.

В серії публікацій початку 1950 років (див. [10, 11]) Й. І. Гіхман розвинув ідеї статті [9]. Слід також сказати, що його заслугою перед теорією стохастичних диференціальних рівнянь є той факт, що під його впливом до серйозних занять в цій новій галузі математики долучився, починаючи з 1957 року, молодий тоді математик А. В. Скороход, який щойно повернувся до Києва після навчання в аспірантурі при Московському університеті протягом 1953-56 років.

2.2. **Перша книга А. В. Скорохода.** Наприкінці 1961 року вийшла з друку монографія А. В. Скорохода [20], яка була його докторською дисертацією. Значною мірою вона була присвячена теорії стохастичних диференціальних рівнянь. Слід сказати, що А. В. Скороход під час навчання в аспірантурі в Москві встиг ознайомитися з підходом К. Іто до теорії стохастичних диференціальних рівнянь. Щодо підходу Й. І. Гіхмана до цієї теорії, він його осягнув уже в Києві під час розмов між ними, які за свідченням А. В. Скорохода стали регулярними після його повернення з Москви.

Тим більше вражає відвага і сміливість думки А. В. Скорохода, який запропонував цілком новий погляд на стохастичне диференціальне рівняння. Якщо у Й. І. Гіхмана і К. Іто розв'язок такого рівняння був певним функціоналом від заданого вінерового процесу, то А. В. Скороход використав принцип компактності мір (в просторі неперервних функцій), що відповідають випадковим процесам, і зумів побудувати розв'язки стохастичного диференціального рівняння за умови, що коефіцієнти є лише неперервними функціями. Саме цей революційний крок А. В. Скорохода призвів до понять слабкого та сильного розв'язків.

З цим пов'язаний захоплюючий період в історії розвитку теорії стохастичних диференціальних рівнянь. Повчальною в цьому сенсі є стаття [16] московських математиків А. К. Звонкіна та Н. В. Крилова: їх результат дає критерій існування сильного розв'язку даного стохастичного диференціального рівняння в термінах його коефіцієнтів. Хоч скористуватись тим критерієм в конкретних ситуаціях непросто, проте сам факт, що питання про наявність (чи відсутність) сильного розв'язку визначається повністю коефіцієнтами, а не вдалим (чи невдалим) вибором ймовірнісного простору, важив немало.

Другим важливим результатом книги можна назвати теорему порівняння розв'язків пари стохастичних диференціальних рівнянь, у яких збігаються коефіцієнти дифузії (в одновимірному випадку), а їх коефіцієнти переносу були пов'язані певною нерівністю. Доводилось, що якщо й початкові положення розв'язків цих рівнянь пов'язані тією ж нерівністю, то нею пов'язані ці розв'язки в будь-який момент часу після початкового. З цього факту автор книги зумів ефектно вивести єдиність розв'язку стохастичного диференціального рівняння за умов суттєво слабших, ніж умова Ліпшиця по просторовій змінній.

До книги не увійшли піонерські роботи А. В. Скорохода кінця 1950-х – початку 1960-х років, присвячені теорії стохастичних диференціальних рівнянь в обмеженій області. Ці його дослідження стимулювали цікавість до проблеми в різних ймовірнісних центрах світу. Ця цікавість підтримується і донині, про що свідчить хоча б доповідь професора А. Ю. Пилипенка «Про узагальнення проблеми відбиття Скорохода», зроблена на засіданні семінару «Числення Маллявена» при Інституті математики НАН України, що відбулося 7 березня 2023 року.

2.3. **Перша книга з теорії стохастичних диференціальних рівнянь.** В 1968 році в київському видавництві «Наукова думка» вийшла з друку монографія Й. І. Гіхмана та А .В. Скорохода [13] присвячена повністю теорії стохастичних диференціальних рівнянь. В деяких книгах, опублікованих раніше, можна знайти фрагменти цієї теорії, наприклад, [3, 12, 20].

Книга [13] складається з двох частин. В першій з них в одновимірному випадку розглядається рівняння

$$\mathrm{d}x(t) = a(t, x(t))\,\mathrm{d}t + \sigma(t, x(t))\,\mathrm{d}w(t),$$

в якому a та σ – задані при $(t, x) \in [0, T] \times \mathbb{R}^1$ функції з дійсними значеннями, а $(w(t))_{t\geqslant 0}$ – одновимірний вінерів процес. Викладена в цій книзі теорія таких рівнянь є надзвичайно багатою. Крім теорем існування та єдиності розв'язку, сформульовано низку тверджень про асимптотичну поведінку розв'язків, коли $t \to \infty$, детально описується взаємодія між теорією рівнянь цього типу та теорією дифузійних процесів у розумінні Колмогорова, а отже, і з теорією диференціальних рівнянь з частинними похідними. Особливу увагу приділено теорії стохастичних диференціальних рівнянь на скінченному просторовому проміжку (процеси з граничними точками).

В другій частині книги в багатовимірній ситуації розглянуто рівняння складнішого типу, зокрема, такі, коли до правої частини додаються ще стохастичні диференціали по центрованій і нецентрованій пуассоновій мірі. Сформульовано низку теорем існування та єдиності розв'язку таких рівнянь, досліджено їх асимптотичну поведінку, коли $t \to \infty$ (теореми про стійкість розв'язків, про їх обмеженість тощо). З теперішньої точки зору деякі місця цієї другої частини книги заслуговують на критику. Очевидно, що і в ті часи, коли книга з'явилася, авторам доводилось вислуховувати критичні зауваження. Тому в 1982 р. автори публікують нову версію книги в якій намагаються врахувати тодішні досягнення світової школи теорії ймовірностей, особливо французької школи. Однак на той час така книга, здається, вже втратила актуальність.

2.4. **Розширений стохастичний інтеграл.** Як вже зазначалось, в основі теорії стохастичних диференціальних рівнянь лежить поняття стохастичного інтеграла Іто, в якому вирішальну роль відіграє та обставина, що значення функції, яка інтегрується, в моменти часу $\tau \leqslant s$ не залежать від приростів вінерового процесу по якому будується інтеграл, після моменту часу s (не залежать в ймовірнісному сенсі).

В 1975 році А. В. Скороход в статті [21] ввів поняття розширеного стохастичного інтеграла по гауссовій центрованій мірі від випадкових функцій з досить широкого класу. Це поняття виявилось надзвичайно цікавим з багатьох точок зору, зокрема, воно використовується під назвою «інтеграл Скорохода» в деяких теоріях сучасної фізики. Еволюція цього поняття протягом 30-и років після його введення в науковий обіг описана в статті [4] А. А. Дороговцева (одного з учнів А. В. Скорохода), який нині завідує відділом теорії випадкових процесів Інституту математики і є визнаним експертом в стохастичному аналізі.

2.5. **Ю. Л. Далецький та його учні.** Юрію Львовичу належать такі слова: «Неможливо не знати теорії ймовірностей, перебуваючи в одній компанії з Й. І. Гіхманом та А. В. Скороходом». Ці слова можуть сприйматися як жарт, проте це – саме той жарт, в якому лише частка жарту. Насправді автор цих слів був одним з перших математиків не ймовірнісного профілю, хто зрозумів всю важливість того нового, що з'явилось в роботах Й. І. Гіхмана та А. В. Скорохода, а саме, теорії стохастичних диференціальних рівнянь. І, до його честі, він зумів підхопити нові ідеї. Його результати з теорії стохастичних диференціальних рівнянь на гільбертових та банахових просторах дозволили йому та його учням по-новому підійти до дослідження еволюційних рівнянь в таких просторах. Що ж стосується теорії стохастичних диференціальних рівнянь на многовидах (як скінченої, так і нескінченної кількості вимірів), то тут Юрій Львович був одним з піонерів, а його результати, отримані спільно з учнями, стали тепер класичними в цій галузі (див. монографію [14]).

2.6. **Дві точки зору на стохастичне диференціальне рівняння.** Розглянемо стохастичне диференціальне рівняння

$$\mathrm{d}x(t) = a(t, x(t))\,\mathrm{d}t + \sigma(t, x(t))\,\mathrm{d}w(t), \tag{2.2}$$

в якому $(w(t))_{t\geqslant 0}$ – заданий вінерів процес в $\mathbb{R}^d$, а задані на множині $(t, x) \in [0, T] \times \mathbb{R}^d$ векторне поле $a(t, x)$ та операторне поле $\sigma(t, x)$ задовольняють умови існування і єдиності розв'язку (локальна умова Ліпшиця по просторовій змінний і обмеження на можливе зростання коефіцієнтів, коли $|x| \to +\infty$: це зростання має не перевищувати зростання функції $K(1 + |x|)$ зі сталою $K > 0$).

Рівняння (2.2) можна розглядати як результат збурення рівняння

$$\mathrm{d}x(t) = a(t, x(t))\,\mathrm{d}t \tag{2.3}$$

випадковим фактором, що породжується вінеровим процесом $(w(t))_{t\geqslant 0}$. Якщо (2.3) визначає динамічну систему, то рівняння (2.2) описує її поведінку під дією згаданих випадкових факторів.

Іншим поглядом на рівняння (2.2) є той, згідно з яким воно є результатом збурення рівняння

$$\mathrm{d}x(t) = \sigma(t, x(t))\mathrm{d}w(t) \tag{2.4}$$

векторним полем $(a(t, x))_{t\geqslant 0, x\in\mathbb{R}^d}$. Виявляється, що рівняння (2.4) можна збурювати такими полями $(a(t, x))_{t\geqslant 0, x\in\mathbb{R}^d}$, для яких рівняння (2.3) не породжує жодної динамічної системи. Наприклад, таким полем може бути

$$a(t, x) = q(x)\delta_S(x)N(t, x),\ t \geqslant 0,\ x \in \mathbb{R}^d,$$

де S – задана досить гладенька гіперповерхня в $\mathbb{R}^d$, $(\delta_S(x))_{x\in\mathbb{R}^d}$ – узагальнена функція, яка діє на тестову функцію $(\varphi(x))_{x\in\mathbb{R}^d}$ згідно з правилом

$$\langle \delta_S, \varphi \rangle = \int_S \varphi(x)\,\mathrm{d}S$$

(поверхневий інтеграл), $(q(x))_{x\in\mathbb{R}^d}$ – задана неперервна функція зі значеннями в проміжку $[-1, 1]$, а $(N(t, x))_{t\geqslant 0, x\in S}$ – конормаль до гіперповерхні S, тобто, $N(t, x) = b(t, x)\nu(x)$ для $t \geqslant 0$ та $x \in S$ (тут $\nu(x)$ – нормаль до S в точці x, а $b(t, x) = \sigma(t, x)\sigma^*(t, x)$).

Ясна річ, що такий процес не може бути дифузійним в сенсі Колмогорова, проте він є таким в деякому узагальненому сенсі. Узагальнені дифузійні процеси є предметом розгляду монографії [19], а також низки публікацій моїх колишніх учнів, а тепер – колег – О. В. Арясової, Б. І. Копитка, М. М. Осипчука.

2.7. **Граничні теореми.** В рамках української школи теорії стохастичних диференціальних рівнянь популярними є задачі наступного типу.

Припустимо, що рівняння (2.2) має єдиний розв'язок, але для рівняння (2.3) не виконується теорема єдиності розв'язку, а отже, рівняння (2.3) визначає не одну динамічну систему. Припустимо також, що оператор $\sigma(s,x)$, $s \in [0,T]$, $x \in \mathbb{R}^d$, в рівнянні (2.2) множиться на $\varepsilon > 0$, і ми цікавимось граничною поведінкою відповідного розв'язку, коли $\varepsilon \to 0$. Низку надзвичайно цікавих тверджень такого типу одержано в роботах С. Я. Махна та його учнів, а також в роботах О. М. Кулика та А. Ю. Пилипенка разом з колегами (див. [1, 7, 18]).

2.8. **Приклад Г. Л. Куленіча.** Одним з учнів А. В. Скорохода був Г. Л. Куленіч. Він закінчив свій життєвий шлях 10 лютого 2022 року. Як знак пам'яті про цього прекрасного математика і вірного друга, наведу тут один з його яскравих результатів [17], що є справжньою перлиною теорії стохастичних диференціальних рівнянь. Цим і закінчу цю мою статтю.

Розглянемо послідовність одновимірних стохастичних диференціальних рівнянь

$$\mathrm{d}x_n(t) = a_n(x_n(t))\,\mathrm{d}t + \mathrm{d}w(t), \tag{2.5}$$

де $(w(t))_{t\geqslant 0}$ – одновимірний вінерів процес, а функція $(a_n(x))_{x\in\mathbb{R}^1}$ для $n = 1, 2, \ldots$ визначається рівністю $a_n(x) = n\cos(nx)$, $x \in \mathbb{R}^1$. Виявляється, і це – результат Григорія Логвиновича майже 50-літньої давності, що послідовність випадкових процесів $(x_n(t))_{t\geqslant 0}$ слабко збігається, коли $n \to \infty$, до процесу $(x(t))_{t\geqslant 0}$, який можна записати в такій формі

$$\mathrm{d}x(t) = k^{-1}\mathrm{d}w(t), \tag{2.6}$$

де $k = \sum_{j=0}^{\infty}(j!)^{-2}$. Отже, як бачимо, граничний перехід від (2.5) до (2.6) приводить до того, що в границі коефіцієнт переносу зникає, а коефіцієнт дифузії зменшується. Цікаво, як реагує інтуїція читача на запитання, чому коефіцієнт дифузії мусить саме зменшуватись.

Література

[1] Pilipenko A. and F. N. Proske. On perturbation of an ODE with non-Lipschitz coefficients by a small self similar noise. *Statistics and Probability Letters*, 132:62–73, 2018.

[2] S. Bernstein. Principles de la théorie des équations différentielles stochastiques. *Trudy Fiz. - Mat. Inst. Steklov.*, 5:94–124, 1934.

[3] J. L. Doob. *Stochastic processes.* New York, John Wiley and sons, London, Chapman and Hall, 1953.

[4] A. A. Dorogovtsev. The evolution of the Skorokhod integral. In *Anatoliy V. Skorokhod, Selected Works*, pages 321–328. Springer Verlag, 2016.

[5] W. Feller. Zur Theorie der stochastischen Processe Existenz und Eindeutigkeitssätze. *Math. Ann.*, 113:113–160, 1936/37.
[6] A. N. Kolmogorov. Über die analytischen Methoden in der Wahrscheinlichkeitsrechnung. *Math. Ann.*, 104:415–458, 1930/31.
[7] A. Kulik and I. Pavlyukevich. Limit theorem for non-linear Langevin equations driven by Lévy noise. *Annales de l'Institut Henri Poincaré*, 55(3):1278–1315, 2019.
[8] N. Wiener. Differential space. *J. Math. and Phys.*, 2:131–174, 1922/23.
[9] И. И. Гихман. Об одной схеме образования случайных процессов. *Докл. АН СССР*, LVIII(6):961–964, 1947.
[10] И. И. Гихман. О некоторых дифференциальных уравнениях со случайными процессами. *Укр. матем. журн.*, 2:45–69, 1950.
[11] И. И. Гихман. К теории дифференциальных уравнений случайных процессов. *Укр. матем. журн.*, (2(3)):37–63(317–339), 1950(1951).
[12] И. И. Гихман and А. В. Скороход. *Введение в теорию случайных процессов.* Москва, Наука, 1965.
[13] И. И. Гихман and А. В. Скороход. *Стохастические дифференциальные уравнения.* Киев, Наукова думка, 1968.
[14] Ю. Л. Далецкий and Я. И. Белопольская. *Стохастические уравнения и дифференциальная геометрия.* Київ, Вища школа, 1989.
[15] М. М. Крилов and М. М. Боголюбов. Про рівняння Фоккера-Планка, що виводиться в теорії пертурбацій методом, заснованим на спекральних властивостях пертурбаційного гамільтоніана. *Записки кафедри математичної фізики*, 4:5–80, 1939.
[16] А. К. Звонкин и Н. В. Крылов. О сильных решениях стохастических дифференциальных уравнений. *Труды школы-семинара по теории случайных процессов (Друскининкай, 1974)*, II:9–88, 1975.
[17] Г. Л. Кулініч. Предельные теоремы для одномерных стохастических дифференциальных уравнений с нерегулярной зависимостью коэффициентов от параметра. *Теория вероятностей и матем. статистика*, 15:99–114, 1976.
[18] С. Я. Махно and И. Г. Крыкун. Явление Пеано для уравнений Ито. *Український математичний вісник*, 10(1):87–109, 2013.
[19] Н. И. Портенко. *Обобщённые диффузионные процессы.* Київ, Наукова думка, 1982.
[20] А. В. Скороход. *Исследования по теории случайных процессов.* Киев, Изд-во Киевск. ун-та, 1961.
[21] А. В. Скороход. Об одном обобщении стохастического интеграла. *Теория вероятн. и её примен.*, 20(2):223–238, 1975.

М. І. Портенко
Інститут математики НАН України, м. Київ
Email: portenko@imath.kiev.ua
ORCID: 0000-0003-1425-0628