Збірник праць Ін-ту математики НАН України 2019, т. 16, № 3, 210–218

УДК 510.22+511.72+517.5+519.21

М. В. Працьовитий [1], ***Я. В. Гончаренко*** [2], ***В. О. Дрозденко*** [3]

[1] *НПУ імені М. П. Драгоманова, ІМ НАН України, Київ; prats4444@gmail.com*

[2] *НПУ імені М. П. Драгоманова, Київ; yan_a@ukr.net*

[3] *Білоцерківський національний аграрний університет, Біла Церква; drozdenko0408@gmail.com*

Канторвали як множини неелементарних ланцюгових дробів з обмеженим алфавітом

Let $G_{\mathcal{A}}$ be a set of values of continued fractions whose elements belong to a bounded set $\mathcal{A}$ of positive real numbers. We prove that $G_{\mathcal{A}}$ is a continuum bounded and perfect set. For $\mathcal{A}_3 = \{0{,}5; 1; 8\}$, the set $G_{\mathcal{A}}$ is a Cantorval, namely, it is homeomorphic to the set

$$E = \{x : x = \sum_{k=1}^{\infty}(\frac{3\alpha_{2k-1}}{4^k} + \frac{2\alpha_{2k}}{4^k}), \alpha_k \in \{0, 1\}\},$$

where E contains a finite set of intervals whose complements are continuum nowhere dense sets.

Key words: continued fraction, Cantorval, topological structure of a set of continued fractions with bounded alphabet, set of incomplete sums of numerical series, nowhere dense set, Lebesgue measure, perfect set.

Доведено, що множина $G_{\mathcal{A}}$ значень ланцюгових дробів, елементи яких належать обмеженій множині $\mathcal{A}$ додатних дійсних чисел є континуальною, обмеженою, досконалою. При $\mathcal{A}_3 = \{0,5; 1; 8\}$ вона є канторвалом, а саме множиною, гомеоморфною множині

$$E = \{x : x = \sum_{k=1}^{\infty} (\frac{3\alpha_{2k-1}}{4^k} + \frac{2\alpha_{2k}}{4^k}), \alpha_k \in \{0, 1\}\},$$

яка містить зліченну множину відрізків, доповнення до яких є континуальною ніде не щільною множиною.
Ключові слова: ланцюговий дріб, канторвал, топологічна структура множини ланцюгових дробів з обмеженим алфавітом, множина неповних сум числового ряду, ніде не щільна множина, міра Лебега, досконала множина.

Вступ

Популярними об'єктами сучасних математичних досліджень є канторвали – обмежені лінійні досконалі множини, що є об'єднанням двох множин, одна з яких є ніде не щільною, а інша — зліченним об'єднанням відрізків, кожен з яких є суміжним першій множині і при цьому зліченна множина суміжних інтервалів першої не містить точок другої множини. Такі множин виникають в тополого-метричній теорії абсолютно збіжних числових рядів, теорії нескінченних згорток Бернуллі, дослідженнях розподілів випадкових величин типу Джессена-Вінтнера тощо. У геометрії числових рядів вони фігурують в якості множин неповних сум (підсум) рядів певної категорії, для розподілів випадкових величин – спектрами (мінімальними замкненими носіями ймовірнісної міри). Аналогічна ситуація має місце з множинами значень неелементарних ланцюгових дробів з обмеженим алфавітом, елементи якого додатні. Цьому питанню присвячена дана робота.

Добре відомо, що всі обмежені лінійні досконалі множини (а саме замкнені множини без ізольованих точок) гомеоморфні класичній множині Кантора

$$C = \{x : x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2\alpha_k}{3^k} = \Delta^3_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k\ldots}, \alpha_k \in \{0,2\}\},$$

доведення цього факту можна знайти в роботах [ ]. Множиною неповних сум (підсум) числового ряду $a_1 + a_2 + ... + a_n + ...$ називається множина $E(a_n) = \{x : x = \sum\limits_{n \in M \subset N} a_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n a_n, \varepsilon_n = 1$ при $n \in M; \varepsilon_n = 0$ при $n \notin M\}$, де M — пробігає сім'ю всіх підмножин множини натуральних чисел (буліан).

Множина неповних сум (підсум) абсолютно збіжного числового ряду є континуальною і досконалою. При цьому вона належить до одного з трьох топологічних типів:

1) є скінченним об'єднанням відрізків;

2) є ніде не щільною множиною;

3) є канторвалом — об'єднанням ніде не щільної множини і зліченної множини відрізків, а саме множиною, гомеоморфною множині неповних сум ряду

$$\frac{3}{4} + \frac{2}{4} + \frac{3}{4^2} + \frac{2}{4^2} + ... + \frac{3}{4^n} + \frac{2}{4^n} + ...,$$

що рівносильно гомеоморфною множині

$$T \equiv C \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} G_{2n-1} = [0;1] \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} G_{2n},$$

де $G_k = \bigcup\limits_{\alpha_1 \in \{0,2\}} ... \bigcup\limits_{\alpha_{k-1} \in \{0,2\}} (\Delta^3_{\alpha_1\ldots\alpha_{k-1}1(0)}; \Delta^3_{\alpha_1\ldots\alpha_{k-1}1(2)})$.

Критерій належності множини підсум першому типу відомий. Він отриманий С.Какея ще в 1914 р. у першій публікації з цієї тематики. Ознака (достатні умови) належності другому типу — теж. Але до цих пір критерія канторвальності множини підсум ряду не знайдено.

Нагадаємо, що нескінченним ланцюговим дробом називається вираз виду
$$a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + ...}}, \tag{1}$$
який скорочено позначається $[a_0; a_1, a_2, ...]$. Як відомо [6], числовий ланцюговий дріб (1) є збіжним (має значення) лише тоді, коли $a_1 + a_2 + ... + a_n + ...$ є розбіжним.

Ланцюговий дріб $[a_n; a_{n+1}, a_{n+2}, ...]$ називається залишком порядку n дробу (1), а скінченний дріб $[a_0; a_1, ..., a_n]$ — відрізком.

Ланцюговий дріб $r_n \equiv [a_n; a_{n+1}, a_{n+2}, ...]$ називається залишком порядку n, а скінченний дріб $\frac{p_n}{q_n} \equiv [a_0; a_1, ..., a_n]$ — відрізком дробу (1), прицьому дріб $\frac{p_n}{q_n}$ називається підхідним дробом порядку n.

Закон утворення підхідних дробів ($p_{-1} = 1$, $q_{-1} = 0$, $p_0 = a_0$, $q_0 = 1$): $p_k \equiv a_k p_{k-1} + p_{k-2}$, $q_k = a_k q_{k-1} + q_{k-2}$, $\forall k \geq 2$.

Має місце рівність
$$[a_0; a_1, a_2, ...] = [a_0; a_1, a_2, ..., a_{n-1} + \frac{1}{r_n}] = [a_0; a_1, a_2, ..., a_{n-1}, r_n].$$

Нехай $A = \{0,5; 1; 3\}$ – алфавіт, $L = A \times A \times ... \times A \times ...$– простір послідовностей елементів алфавіту. Розглядається множина G всіх ланцюгових дробів, елементами яких належать алфавіту A.

1. Множина значень ланцюгових дробів з обмеженим алфавітом

Нехай $1 < s$ – фіксоване натуральне число, $\mathcal{A} = \{c_0, c_1, \ldots, c_{s-1}\}$ — множина дійсних чисел таких, що $0 < c_0 < c_1 < \ldots < c_{s-1}$, яка називається алфавітом; $L_{\mathcal{A}} = \mathcal{A} \times \mathcal{A} \times \mathcal{A} \times \ldots \times \mathcal{A} \times \ldots$ —простір послідовностей елементів алфавіту $\mathcal{A}$. Нас цікавлять топологометричні властивості множини $G_{\mathcal{A}}$ значень усіх нескінченних ланцюгових дробів виду $[0; a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots]$, де $(a_n) \in L_{\mathcal{A}}$.

Випадок $s = 2$ заслуговує на окрему увагу, яка йому приділена у роботах [**?**, 2, 7, 8, 14].

Теорема 1. *[2] Якщо $s = 2$, то $G_{\mathcal{A}}$ є відрізком $[a; b]$, де $a = [0; (c_1, c_0)]$, $b = [0; (c_0, c_1)]$, коли $c_0c_1 \leq \frac{1}{2}$; ніде не щільною множиною, коли $c_0c_1 > \frac{1}{2}$. При умові $c_0c_1 > \frac{1}{2}$ кожне число $x \in G_{\mathcal{A}}$ має єдине зображення нескінченним ланцюговим дробом, при $c_0c_1 = \frac{1}{2}$ числа зліченної множини, щільної у відрізку $[\beta_0; \beta_1]$, де $\beta_0 = [0; (c_1, c_0)], \beta_1 = [0; (c_0, c_1)]$, мають два зображення, а решта — мають єдине зображення.*

Зауважимо, що при $c_0 = \frac{\sqrt{3}-1}{2}, c_1 = \frac{\sqrt{3}+1}{2}$ множина $G_{\mathcal{A}}$ є одиничним відрізком $[c_0, c_1]$, а при $c_0 = \frac{1}{2}$, $c_1 = 1$ — відрізком $[\frac{1}{2}; 1]$.

Лема 2. *Множина $G_{\mathcal{A}}$ значень нескінченних ланцюгових дробів виду $[0; a_1, a_2, \dots, a_n, \dots]$, де $(a_n) \in L_{\mathcal{A}}$, є континуальною і обмеженою, причому*

$$\min G_{\mathcal{A}} = [0; (c_{s-1}, c_0)] = \frac{\sqrt{c_0c_{s-1}(c_0c_{s-1}+4)} - c_0c_{s-1}}{2c_{s-1}} \equiv d_0, \quad (2)$$

$$\max G_{\mathcal{A}} = [0; (c_0, c_{s-1})] = \frac{\sqrt{c_0c_{s-1}(c_0c_{s-1}+4)} - c_0c_{s-1}}{2c_0} \equiv d_1. \quad (3)$$

Доведення. Якщо $a \in A \ni b$, то зі збіжності дробу $[0; (a, b)] = x$ маємо

$$x = \cfrac{1}{a + \cfrac{1}{b+x}} \quad \Leftrightarrow \quad ax + \frac{x}{b+x} = 1 \text{ або}$$

$$abx + ax^2 + x = b + x \quad \Leftrightarrow \quad ax^2 + abx - b = 0$$

$$x = \frac{-ab + \sqrt{ab(ab+4)}}{2a}.$$

Тоді очевидно, що виконуються рівності (2)–(3) і $G_{\mathcal{A}} \subset [d_0; d_1]$.

Континуальність множини $G_{\mathcal{A}}$ є наслідком попередньої теореми. Справді, якщо $B = \{c_0, c_{s-1}\}$, то згідно з теоремою 1 множина G_B значень усіх нескінченних ланцюгових дробів з алфавітом B є континуальною. А отже, такою є і множина $G_{\mathcal{A}} \supset G_B$. $\square$

Наслідок 3. *Якщо* $\mathcal{A} = \{\frac{1}{2}, 1, 8\}$, *то* $\min G_{\mathcal{A}} = \frac{\sqrt{2}-1}{4}$, $\max G_{\mathcal{A}} = 4\sqrt{2} - 4 = 4(\sqrt{2} - 1)$.

Означення 1. *Нехай* $(b_1, b_2, ..., b_m)$ *— фіксований набір елементів алфавіту* $\mathcal{A}$. *Множина* $\Delta'_{b_1 b_2 ... b_m}$ *всіх ланцюгових дробів виду* $[0; b_1, b_2, ..., b_m, a_1, a_2, ...]$, *де* $(\alpha_n) \in \mathcal{A}$, *називається циліндром рангу* m *з основою* $b_1 b_2 ... b_m$.

Циліндр є обмеженою фігурою, причому
$A = \min \Delta'_{b_1 ... b_m} = [0; b_1, b_2, ..., b_m, (a, b)]$,
$B = \max \Delta'_{b_1 ... b_m} = [0; b_1, b_2, ..., b_m, (b, a)]$, де

$$a = \begin{cases} c_0, & \text{якщо } m - \text{ непарне}, \\ c_{s-1}, & \text{якщо } m - \text{ парне}, \end{cases} \quad b = \begin{cases} c_0, & \text{якщо } m - \text{ парне}, \\ c_{s-1}, & \text{якщо } m - \text{ непарне}. \end{cases}$$

Означення 2. *Мінімальний відрізок, що містить циліндр* $\Delta'_{b_1 b_2 ... b_m}$, *тобто* $[A; B]$, *називається циліндричним відрізком рангу* m *з основою* $b_1 b_2 ... b_m$. *Його позначатимемо через* $\Delta_{b_1 b_2 ... b_m}$.

Теорема 4. *Множина* $G_{\mathcal{A}}$ *значень всіх нескінченних ланцюгових дробів виду* $[0; a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots]$, *де* $(a_n) \in L_{\mathcal{A}}$, *є досконалою.*

Доведення. Доведемо замкненість множини $G_{\mathcal{A}}$, тобто те, що вона містить всі свої граничні точки.

Нехай $F_k \equiv \bigcup\limits_{a_1 \in \mathcal{A}} ... \bigcup\limits_{a_k \in \mathcal{A}} \Delta_{a_1 a_2 ... a_k}$. Очевидно, що $F_{k+1} \subset F_k$, $k \in N$. Множина F_k є замкненою, як скінченне об'єднання замкнених множин. Оскільки $G_{\mathcal{A}} = \bigcap\limits_{k=1}^{\infty} F_k = \lim_{k \to \infty} F_k$, то $G_{\mathcal{A}}$ є замкненою множиною.

Для доведення відсутності ізольованих точок у множини $G_{\mathcal{A}}$ скористаємось методом від супротивного. Припустимо, що $x_0 = [0; b_1, b_2, ...]$ — ізольована точка множини $G_{\mathcal{A}}$. Тоді існує $\varepsilon > 0$ таке, що інтервал $(x_0 - \varepsilon; x_0 + \varepsilon)$ не містить точок множини $G_{\mathcal{A}}$. Розглянемо дві послідовності (x_n) і $(\overline{x}_n)$, де $x_n =$

$[0; b_1, ..., b_{2n-1}, b_{2n} + d_0]$, $\overline{x}_n = [0; b_1, ..., b_{2n-1}, b_{2n} + d_1]$. Очевидно, що $x_n \neq x_0$ або $\overline{x}_n \neq x_0$, але $x_0 = \lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} x'_n$, що суперечить ізольованості x_0. □

Лема 5. *Нехай $(b_1, b_2, ..., b_n)$ — довільний впорядкований набір елементів алфавіту $\mathcal{A}$; $A_2 \equiv \{\alpha_1, \alpha_2\} \subset \mathcal{A}$, причому $\alpha_1\alpha_2 \leq \frac{1}{2}$. Тоді множина D всіх чисел з зображеннями*

$$\Delta_{b_1 b_2 \ldots b_n a_1 a_2 \ldots}, \text{ де } (a_n) \in A_2,$$

утворює відрізок, який повністю належить множині $G_{\mathcal{A}}$ значень ланцюгових дробів з алфавітом $\mathcal{A}$.

Доведення. Нехай $\frac{p_n}{q_n}$ — підхідний дріб порядку n числа $x = [0; b_1, b_2, ..., b_n, a_1, a_2, ...]$ тоді $\frac{p_n}{q_n} < x < \frac{p_n + p_{n-1}}{q_n + q_{n-1}}$ або навпаки $\frac{p_n + p_{n-1}}{q_n + q_{n-1}} < x < \frac{p_n}{q_n}$ в залежності парності або непарності n. □

Теорема 6. *Множина всіх ланцюгових дробів з обмеженим алфавітом $\mathcal{A}$ містить відрізок тоді і тільки тоді, коли існують такі елементи алфавіту c_n і c_{n+1}, що $c_n \cdot c_{n+1} \leq \frac{1}{2}$, причому*

Доведення. Справді, згідно з лемою 1 при $c_n c_{n+1} \leq \frac{1}{2}$ множина G_{A_2}, де $A_2 = \{c_n, c_{n+1}\}$, є відрізком і $G_{A_2} \subset G_{\mathcal{A}}$.

Якщо ж $c_n c_{n+1} > \frac{1}{2}$ для всіх $n \in \{0, 1, ..., s-2\}$, то циліндричні відрізки першого рангу Δ_{c_0}, Δ_{c_1},...,$\Delta_{c_{s-1}}$ не мають спільних точок.

Аналогічна ситуація має місце для циліндрів всіх рангів. □

Означення 3. Валом *на числовій прямій називатимемо множину W, яка є таким об'єднанням нескінченного числа інтервалів, що*
1) інтервали попарно не перетинаються;
2) між кожними двома інтервалами об'єднання лежить принаймні один інтервал цього об'єднання.

Прикладом валу на числовій прямій є об'єднання циліндричних інтервалів трійкового зображення чисел відрізка $[0; 1]$ виду $\nabla^3_1, \nabla^3_{c_1 c_2 \ldots c_{2k-1} c_{2k} 1}$, де $c_i \in \{0, 2\}$, $k \in N$.

Множиною канторівського типу називається обмежена ніде не щільна, досконала множина.

Означення 4. Канторвалом *називається обмежена досконала множина K числової прямої, яка є об'єднанням множини канторівського типу C і валу W, кожен інтервал якого є суміжним з множиною C і при цьому доповнення $\overline{K}$ до K є валом.* Структурою канторвалу K *називається представлення (розклад): $K = C \cup W$.*

Теорема 7. *Якщо $A = \{\frac{1}{2}; 1; 8\}$, то G_A – канторвал.*

Доведення. Для довільного набору $(c_1, \ldots, c_m) \in A^m$ множина $\overline{\Delta}_{c_1 \ldots c_m}$ значень ланцюгових дробів виду $[0; c_1, \ldots, c_m, \alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_n, \ldots]$, де $\alpha_n \in A$, згідно з теоремою 1, є відрізком. Очевидно, що $\overline{\Delta}_{c_1 \ldots c_m} \subset \Delta'_{c_1 \ldots c_m} \subset \Delta_{c_1 \ldots c_m}$. Наприклад, $\overline{\Delta}_{\frac{1}{2}} = [\frac{2}{3}; 1]$, $\overline{\Delta}_1 = [\frac{1}{2}; \frac{2}{3}]$, $\overline{\Delta}_8 = [\frac{1}{9}; \frac{2}{17}]$.

Тому G_A містить нескінченну кількість відрізків.

□

Література

[1] *Виннишин Я.Ф., Маркітан В.П., Працьовитий М.В., Савченко І.О.* Додатні ряди, множини підсум яких є канторвалами. – Proceedings of the International Geometry Center. — 2019. — Vol.12, no. 2. P. 26–42.

[2] *Дмитренко С.О., Кюрчев Д.В., Працьовитий М.В.* Ланцюгове A_2–зображення дійсних чисел // Український математичний журнал. — 2009, том 61, № 4. — С.452–463.

[3] *Джоунс У., Трон В.* Непрерывные дроби. Аналитическая теория и приложения. — М.: Мир, 1985. — 414с.

[4] *Працьовитий М. В.* Фрактальний підхід у дослідженнях сингулярних розподілів. – Київ: Вид-во НПУ імені М. П. Драгоманова. – 1998. – 296 с.

[5] *Турбин А.Ф., Працевитый Н.В.* Фрактальные множества, функции, распределения. — Киев: Наук.думка, 1992. — 208с.

[6] *Хинчин А. Я.* Цепные дроби. — М.: Наука, — 1978. — 112 с.

[7] *Pratsiovytyi M., Chuikov A.* Continuous distributions whose functions preserve tails of an A_2-continued fraction representation of numbers // Random Operators and Stochastic Equations, 2019. Vol. 27(3), pp. 199-206.

[8] *Pratsiovytyi M.V., Makarchuk O.P., Chuikov A.S.* Approximation and estimates in the periodic representation of real numbers of the closed interval $[0;1]$ by A_2-continued fractions. //Journal of Numerical & Applied Mathematics. 2019. — 1 (130). Pp. 71–83.

[9] *Schweiger F.* Continues fractaion and their generalizations: A short hostory of f-expansion. Boston, Docent press, 2016.

[10] *Karpenkov O.* Geometry of continued fractions. Springer, 2013.

[11] *Kakey S.* On the set of partial sums of aninfinite series. Tohoku Sci Rep., (4): 159–163, 1914.

[12] *Працьовитий М.В.* Сингулярність розподілів випадкових величин, заданих розподілами елементів свого ланцюгового зображення // Укр. мат. журн. — 1996. — 48, № 8. — С.1086-1095.

[13] *Працьовитий М.В., Кюрчев Д.В.* Сингулярність розподілу випадкової величини, зображеної ланцюговим A_2-дробом з незалежними елементами // Теор. ймов. та мат. стат. — 2009. — 81. — С. 139-154.

[14] *Pratsiovytyi M., Kyurchev D.* Properties of the distribution of the random variable defined by A_2-continued fraction with independent elements // Random Oper. Stochastic Equations, 2009, Vol. 17., no. 1. — P.91-101.

[15] *Albeverio, S., Kulyba, Y., Pratsiovytyi, M. and Torbin, G.* (2015), On singularity and fine spectral structure of random continued fractions. Math. Nachr.