Збірник праць Ін-ту математики НАН України 2019, т. 16, № 3, 131–148

УДК 517.5

***О. М. Барановський*[1], *М. В. Працьовитий*[2]**

[1] *Інститут математики НАН України, Київ; baranovskyi@imath.kiev.ua*

[2] *НПУ імені М. П. Драгоманова, Інститут математики НАН України, Київ; prats4444@gmail.com*

Про одну сингулярну функцію канторівського типу, пов'язану з рядами Енгеля

In the paper, we construct and study the class of continuous on $[0, 1]$ functions with continuum set of peculiarities. Any function f belonging to this class is defined by the Engel series representation of its argument and by special convergent series. Conditions for f to be a Cantor-type singular function are found.
Key words: Continuous function, singular function, Engel series, E-representation of a number.

У роботі конструюється і досліджується клас неперервних на $[0, 1]$ функцій з континуальною множиною особливостей. Функція f з цього класу визначається зображенням аргументу рядом Енгеля і спеціальним збіжним рядом. Знайдено умови сингулярності канторівського типу функції f.
Ключові слова: Неперервна функція, сингулярна функція, ряд Енгеля, E-зображення числа.

1. Вступ

Переважна більшість [8, 30, 36, 44] функцій, неперервних на відрізку $[0,1]$, має складні локальні властивості (нескінченну і навіть континуальну множину особливостей). До таких, зокрема, належать сингулярні функції, які мають похідну рівну нулю майже скрізь у розумінні міри Лебега; ніде не монотонні функції, які не мають жодного як завгодно малого проміжку монотонності; недиференційовні функції, які не мають похідної в жодній точці тощо. Саме таким функціям присвячена дана робота. Їх моделювання і дослідження вимагає тонких прийомів і методів. Вирази, якими вони аналітично задаються, містять нескінченну кількість операцій або граничні переходи. Часто при цьому використовуються ряди [3], нескінченні добутки, ланцюгові дроби і т. п. Принаймні так було для класичних ніде не диференційовних функцій Вейєрштрасса [26], Такаґі [42], Серпінського [18], Буша–Вундерліха [31, 43] тощо, сингулярних функцій Кантора [13], Салема [32, 35, 40, 41], Мінковського [37], Серпінського [24] та ін.

Останнім часом для цього використовують системи функціональних рівнянь [6, 20 – 22, 27], системи ітерованих функцій, різноманітні системи зображення чисел (системи кодування чисел) [2, 14 – 17, 28, 38] і автомати зі скінченною пам'яттю (перетворювачі цифр одного зображення в інше) [7, 10 – 12, 14].

Існують певні методологічні труднощі у розвитку як загальної, так і індивідуальної теорії таких функцій. У першу чергу, вони пов'язані з відсутністю ефективних способів їх задання (опису), а також інструментарію їх дослідження.

Ідеї теорії фракталів (фрактальної геометрії та фрактального аналізу) — самоподібності, самоафінності, автомодельності — можуть бути ефективно для цього використані.

Сьогодні розвивається кілька основних напрямів дослідження фрактальних властивостей функцій (локальних та глобальних):

1. фрактальні характеристики суттєвих для функції множин

(наприклад, множин особливостей) [13, 26];

2. властивості рівнів функції [18, 26];
3. фрактальні властивості графіків [9 – 11, 23];
4. здатність функції зберігати або трансформувати фрактальну розмірність [29].

У даній роботі ми конструюємо і досліджуємо нескінченно-параметричну сім'ю неперервних функцій зі складними локальними властивостями. Для цього ми використовуємо E-зображення дійсного числа, що є його кодуванням засобами нескінченного алфавіту за допомогою рядів Енгеля — знакододатних рядів, членами яких є числа, обернені до накопичувальних добутків натуральних [1, 4, 5, 19, 33, 34, 39]. Знайдено умови на параметри, за яких функція з цієї сім'ї є сингулярною функцією канторівського типу, тобто неперервною функцією розподілу, похідна якої дорівнює 0 майже скрізь у розумінні міри Лебега і спектр якої є ніде не щільною множиною нульової міри Лебега.

2. Об'єкт дослідження

З відомої теореми Енгеля [33] випливає [19], що *для будь-якого числа $x \in (0,1]$ існує єдина послідовність (g_n) цілих невід'ємних чисел така, що*

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2+g_1)(2+g_1+g_2)\ldots(2+g_1+g_2+\ldots+g_n)} \equiv \equiv \Delta^E_{g_1 g_2 \ldots g_n \ldots}. \qquad (1)$$

Ряд (1) називається *рядом Енгеля*, останній символічний запис числа x — його *E-зображенням*, при цьому $g_n = g_n(x)$ — n-м символом (цифрою) цього зображення.

Зауважимо, що E-зображення числа є його кодуванням засобами нескінченного алфавіту $A \equiv \mathbb{Z}_0 = \{0, 1, 2, \ldots\}$.

Якщо існує $p \in \mathbb{N}$ таке, що $g_{m+np+j} = g_{m+j}$, $1 \le j \le p$, для будь-якого $n \in \mathbb{Z}_0$, то кажуть, що E-зображення має період

$$g_{m+1}g_{m+2}\cdots g_{m+p},$$

це записується $\Delta^E_{g_1g_2\ldots g_m(g_{m+1}g_{m+2}\ldots g_{m+p})}$.

Число, E-зображення якого має період (0), називається *E-раціональним.* E-зображення таких чисел мають вигляд $\Delta^E_{c_1c_2\ldots c_m(0)}$.

Нехай $(u_n)_{n=0}^{\infty}$ — нескінченна послідовність дійсних чисел, яка має властивості (початкові умови):

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n = u_0 + u_1 + \ldots + u_n + r_n = S_n + r_n = 1; \tag{2}$$

$$|u_n| < 1 \quad \text{при всіх } n \in \mathbb{Z}_0; \tag{3}$$

$$0 < r_n \equiv \sum_{i=n+1}^{\infty} u_i = r_{n-1} - u_n = 1 - (u_0 + u_1 + \ldots + u_n) < 1 \tag{4}$$

для будь-якого $n \in \mathbb{Z}_0$.

З властивості (2) послідовності (u_n) випливає, що вона є нескінченно малою, а з властивості (4) — наступні співвідношення:

$$0 < u_0 + u_1 + \ldots + u_n = S_n < 1 \quad \text{при всіх} \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

і те, що ряд (1) має нескінченну кількість членів, відмінних від 0.

Основним об'єктом даного дослідження є функція

$$y = f(x) = r_{g_1(x)} + \sum_{k=2}^{\infty}\left(r_{g_k(x)}\prod_{i=1}^{k-1} u_{g_i(x)}\right) \equiv \Delta_{g_1g_2\ldots g_n\ldots}, \tag{5}$$

де $g_n = g_n(x)$ — n-й символ E-зображення числа $x \in (0, 1]$.

Зрозуміло, що рівність (5) не визначає функцію f поза півінтервалом $(0, 1]$. При цьому

$$f(1) = f(\Delta^E_{(0)}) = r_0 + r_0u_0 + r_0u_0^2 + \ldots = \frac{r_0}{1 - u_0} = 1,$$

$$f(\Delta^E_{c_1\ldots c_m(c)}) = r_{c_1} + \sum_{k=2}^{m}\left(r_{c_k}\prod_{i=1}^{k-1}u_{c_i}\right) + \frac{r_c}{1-u_c}\prod_{i=1}^{m}u_{c_i},$$

зокрема

$$f(\Delta^E_{c_1\ldots c_m(0)}) = r_{c_1} + \sum_{k=2}^{m}\left(r_{c_k}\prod_{i=1}^{k-1}u_{c_i}\right) + \prod_{i=1}^{m}u_{c_i}. \qquad (6)$$

Рівність (6) дає вираз значення функції в E-раціональній точці.

Оскільки кожне число $x \in (0,1]$ має єдине E-зображення, то для обґрунтування коректності означення функції f досить показати лише, що ряд (5) збігається для довільної послідовності цілих невід'ємних чисел (g_n).

Оскільки серед чисел u_n можуть бути і від'ємні, і рівні нулю, то ряд (5), взагалі кажучи, не є знакододатним. Тому розглянемо ряд з загальним членом

$$v_k = r_{g_k}\prod_{j=1}^{k-1}|u_{g_j}|.$$

Оскільки

$$r_{g_k} \le r^* \equiv \max\{r_0, r_1, \ldots, r_n, \ldots\},$$

а

$$|u_{g_k}| \le u^* \equiv \max\{|u_1|, |u_2|, \ldots, |u_n|, \ldots\} < 1,$$

то $v_k \le r^*(u^*)^{k-1} \equiv w_k$.

На основі ознаки порівняння зі збіжності ряду з загальним членом w_k випливає збіжність ряду з загальним членом v_k. При цьому

$$\sum_{k=1}^{\infty} v_k \le \sum_{k=1}^{\infty} w_k = \frac{r^*}{1-u^*}.$$

Отже, ряд (5) є абсолютно збіжним. Коректність означення функції f обґрунтовано.

3. Умови сингулярності канторівського типу

Нехай V — непорожня підмножина множини $\mathbb{Z}_0$. Означимо множину $C[E,V]$ рівністю

$$C[E,V] = \left\{x\colon x = \Delta^E_{g_1 g_2 \ldots g_n \ldots},\ g_n = g_n(x) \in V \subset \mathbb{Z}_0\ \forall n \in \mathbb{N}\right\}.$$

Лема 1. *Якщо $u_n \geq 0$, то з точністю до зліченної множини спектр S_f функції f збігається з множиною $C[E,V]$, де*

$$V = \{v\colon u_v > 0\}.$$

Доведення. Покажемо, що $C[E,V] \subset S_f$. Нехай $x \in C[E,V]$. Тоді для будь-якого $m \in \mathbb{N}$

$$\prod_{i=1}^{m} u_{g_i(x)} > 0.$$

Оскільки для довільного $\varepsilon > 0$ легко вказати такий циліндр $\Delta^E_{g_1(x) g_2(x) \ldots g_n(x)}$, який повністю належить ε-околу $(x-\varepsilon, x+\varepsilon)$ точки x, то приріст функції на проміжку $(x-\varepsilon, x+\varepsilon)$ є додатним. Тому $x \in S_f$.

Легко показати методом від супротивного, що жодна точка суміжного з $C[E,V]$ інтервалу спектру не належить.

Спектр є замкненою множиною, а $C[E,V]$ — ні, і відрізняється від свого замикання на скінченну або зліченну множину точок. Тому S_f збігається з $C[E,V]$ з вказаною точністю. □

Наступне просте твердження доводиться аналогічно до відповідного твердження для рядів Остроградського 1-го виду [3, 28].

Лема 2. *Міра Лебега множини $C[E,V]$ обчислюється за формулою*

$$\lambda(C[E,V]) = \prod_{k=0}^{\infty} \left(1 - \frac{\lambda(\bar{F}_{k+1})}{\lambda(F_k)}\right),$$

де

$$F_0=[0,1],\quad F_k=\bigcup_{c_1\in V}\bigcup_{c_2\in V}\dots\bigcup_{c_k\in V}\Delta^E_{c_1c_2\dots c_k},\quad \bar F_{k+1}=F_k\setminus F_{k+1}.$$

Доведення. За означенням F_k є об'єднанням всіх циліндрів рангу k, внутрішність яких містить точки $C[E,V]$, а множина

$$\bar F_{k+1}=\bigcup_{c_1\in V}\bigcup_{c_2\in V}\dots\bigcup_{c_k\in V}\bigcup_{s\in\mathbb{Z}_0\setminus V}\Delta^E_{c_1c_2\dots c_k s}.$$

Тоді

$$F_k=F_{k+1}\bigcup\bar F_{k+1}\iff F_{k+1}=F_k\setminus\bar F_{k+1}=(0,1]\setminus\bigcup_{i=1}^{k+1}\bar F_i.$$

Оскільки $C[E,V]\subset F_{k+1}\subset F_k$ для всіх $k\in\mathbb{N}$ і

$$C[E,V]=\bigcap_{k=1}^{\infty}F_k=\lim_{k\to\infty}F_k,$$

то

$$\begin{aligned}\lambda(C[E,V])&=\lim_{k\to\infty}\lambda(F_{k+1})=\\&=\lim_{k\to\infty}\left(\frac{\lambda(F_{k+1})}{\lambda(F_k)}\cdot\frac{\lambda(F_k)}{\lambda(F_{k-1})}\cdot\ldots\cdot\frac{\lambda(F_1)}{\lambda(F_0)}\right)=\\&=\prod_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda(F_{k+1})}{\lambda(F_k)}=\prod_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda(F_k)-\lambda(\bar F_{k+1})}{\lambda(F_k)}=\\&=\prod_{k=0}^{\infty}\left(1-\frac{\lambda(\bar F_{k+1})}{\lambda(F_k)}\right).\end{aligned}$$

Це завершує доведення леми. □

Наслідок 3. *Міра Лебега множини $C[E,V]$ дорівнює 0 тоді і тільки тоді, коли*

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda(\bar F_{k+1})}{\lambda(F_k)}=\infty. \tag{7}$$

Дане твердження є наслідком відомого зв'язку між збіжністю нескінченних добутків і рядів.

Лема 4. *Якщо в точці x_0 існує похідна функції f, то вона обчислюється за формулою*

$$f'(x_0) = \lim_{m\to\infty} \big(2 + \sigma_m(x_0)\big) \prod_{i=1}^{m} \big(2 + \sigma_{g_i(x_0)}(x_0)\big) u_{g_i(x_0)}, \qquad (8)$$

де $\sigma_i(x_0) = g_1(x_0) + g_2(x_0) + \ldots + g_i(x_0)$.

Доведення. Оскільки $f'(x_0)$ існує, то

$$f'(x_0) = \lim_{m\to\infty} \frac{\mu_f(\Delta^E_m(x_0))}{|\Delta^E_m(x_0)|}, \quad \text{де} \quad \Delta^E_m(x_0) = \Delta^E_{g_1(x_0)g_2(x_0)\ldots g_m(x_0)}.$$

Враховуючи вираз довжини циліндра $\Delta^E_m(x_0)$ і приросту функції, отримуємо (8). □

Теорема 5. *Якщо всі члени послідовності (u_n) є невід'ємними, то f є сингулярною функцією розподілу ймовірностей на відрізку $[0, 1]$, причому функцією розподілу канторівського типу тоді і тільки тоді, коли для послідовності (u_n) множина $V = \{v : u_v > 0\}$ забезпечує рівність (7).*

Доведення проведемо аналогічно доведенню відповідного твердження для функції розподілу випадкової величини з незалежними однаково розподіленими різницями послідовних елементів ряду Остроградського 1-го виду (див. статтю [25] або монографію [3, розд. 3.11, 4.2]). Спочатку доведемо кілька допоміжних тверджень.

Лема 6. *Міра μ_ξ, що відповідає випадковій величині*

$$\xi = \Delta^E_{\eta_1\eta_2\ldots\eta_k\ldots}$$

з незалежними однаково розподіленими E-символами η_k, є інваріантною і ергодичною відносно перетворення зсуву ω.

Доведення. 1. Нехай множина A є інваріантною відносно перетворення ω, тобто $\omega^{-1}A = A$ для довільної A з борелівської σ-алгебри $\mathfrak{B}$. Тоді $\omega(\omega^{-1}A) = \omega A$ і, отже, $A = \omega A$. Тому $A = \omega^{-1}A = \omega^{-1}(\omega A)$.

Якщо $x = \Delta^E_{g_1(x)g_2(x)\ldots g_k(x)\ldots}$ і $x \in A$, то

$$\omega^{-1}(\omega x) = \Big\{x\colon x = \Delta^E_{c_1 g_2(x)\ldots g_k(x)\ldots)},\ c_1 \in \mathbb{Z}_0\Big\} \subset A.$$

Тому належність x до інваріантної множини A не залежить від першого E-символу точки x. Аналогічно можна довести, що належність x до інваріантної множини A не залежить від перших n E-символів точки x. Тому множина A є залишковою, і за законом нуля і одиниці Колмогорова $\mu_\xi(A) = 0$ або $\mu_\xi(A) = 1$. Отже, μ_ξ ергодична відносно перетворення ω.

2. Оскільки борелівська σ-алгебра $\mathfrak{B}$ породжується системою циліндрів, що відповідають E-зображенню, тобто множин вигляду $\Delta^E_{c_1c_2\ldots c_n}$, то досить показати інваріантність міри μ_ξ на таких циліндрах. Очевидно, що $\mu_\xi(\Delta^E_{c_1c_2\ldots c_n}) = u_{c_1}\cdot u_{c_2}\cdot\ldots\cdot u_{c_n}$. Оскільки

$$\omega^{-1}(\Delta^E_{c_1c_2\ldots c_n}) = \bigcup_{i=0}^{\infty} \Delta^E_{ic_1c_2\ldots c_n},$$

то

$$\mu_\xi(\omega^{-1}(\Delta^E_{c_1c_2\ldots c_n})) = \sum_{i=0}^{\infty} \mu_\xi(\Delta^E_{ic_1c_2\ldots c_n}) =$$
$$= u_{c_1}\cdot u_{c_2}\cdot\ldots\cdot u_{c_n}\sum_{i=0}^{\infty} u_i = u_{c_1}\cdot u_{c_2}\cdot\ldots\cdot u_{c_n} = \mu_\xi(\Delta^E_{c_1c_2\ldots c_n}),$$

що й треба було довести. □

Нехай $N_i(x,k)$ — кількість символів «i» в E-зображенні числа x до k-го місця включно.

Якщо границя $\lim\limits_{k\to\infty}\frac{N_i(x,k)}{k}$ існує, то її називають *асимптотичною частотою* цифри (символу) «i» в E-зображенні числа x і позначають через $\nu_i(x)$.

Лема 7. *Для майже всіх (у розумінні міри Лебега) дійсних чисел $x \in [0,1]$ та для довільної цифри $i \in \mathbb{Z}_0$ має місце*

$$\limsup_{n\to\infty} N_i(x,n) < +\infty,$$

тобто в E-розкладі майже всіх (у розумінні міри Лебега) дійсних чисел довільна цифра «i» з алфавіту $A = \mathbb{Z}_0$ трапляється скінченну кількість разів.

Доведення. Нехай $\Omega = [0,1]$, $\mathfrak{B}$ — борелівська σ-алгебра, $\mathsf{P} = \lambda$ — міра Лебега на одиничному відрізку. Для довільного $i \in \mathbb{Z}_0$ та $k \in \mathbb{N}$ означимо множину

$$A_k^i := \Big\{x\colon x = \Delta^E_{g_1(x)g_2(x)\ldots g_n(x)\ldots},\ g_k(x) = i\Big\} = \\ = \bigcup_{c_1=0}^{\infty}\bigcup_{c_2=0}^{\infty}\ldots\bigcup_{c_{k-1}=0}^{\infty}\Delta^E_{c_1c_2\ldots c_{k-1}i}.$$

Тоді

$$\lambda(A_k^i) \le \lambda(A_k^0) = \sum_{c_1=0}^{\infty}\ldots\sum_{c_{k-1}=0}^{\infty}|\Delta^E_{c_1c_2\ldots c_{k-1}0}| = \\ = \sum_{c_1=0}^{\infty}\ldots\sum_{c_{k-1}=0}^{\infty}\frac{1}{(2+\sigma_1)(2+\sigma_2)\ldots(2+\sigma_{k-1})(1+\sigma_{k-1})} \le \\ \le \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^{k-1},$$

де $\sigma_j = c_1 + c_2 + \ldots + c_j$.

Справді, оскільки довжина циліндра

$$|\Delta^E_{c_1c_2\ldots c_{k-1}0}| = \frac{1}{(2+\sigma_1)(2+\sigma_2)\ldots(2+\sigma_{k-1}+0)(1+\sigma_{k-1}+0)} = \\ = \frac{3+\sigma_{k-1}}{2+\sigma_{k-1}}\cdot\frac{1}{(2+\sigma_1)(2+\sigma_2)\ldots(2+\sigma_{k-2})}\times$$

$$\times \frac{1}{(3+\sigma_{k-1})(2+\sigma_{k-1})(1+\sigma_{k-1})} =$$
$$\leq \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{(2+\sigma_1)(2+\sigma_2)\dots(2+\sigma_{k-2})} \times$$
$$\times \frac{1}{(3+\sigma_{k-1})(2+\sigma_{k-1})(1+\sigma_{k-1})}$$

і

$$\sum_{c_{k-1}=0}^{\infty} \frac{1}{(3+\sigma_{k-1})(2+\sigma_{k-1})(1+\sigma_{k-1})} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{(2+\sigma_{k-2})(1+\sigma_{k-2})},$$

маємо, що $\lambda(A_k^0) \leq \frac{3}{4}\lambda(A_{k-1}^0)$. З останньої нерівності й очевидної рівності $\lambda(A_1^0) = \frac{1}{2}$ випливає, що

$$\lambda(A_k^i) \leq \lambda(A_k^0) \leq \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{k-1}.$$

Нехай $A^i = \limsup\limits_{k\to\infty} A_k^i$. Очевидно, що $x \in A^i$ тоді і тільки тоді, коли E-зображення точки x містить нескінченну кількість цифр «i». Оскільки ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \lambda(A_k^i)$ збіжний за ознакою порівняння, отримуємо за лемою Бореля–Кантеллі, що $\lambda(A^i) = 0$. Тому для довільного символу $i \in \mathbb{Z}_0$ і для майже всіх у розумінні міри Лебега чисел $x \in [0,1]$, маємо, що E-зображення числа x містить лише скінченну кількість символів «i», звідки й випливає висновок леми. □

Наслідок 8. *Для майже всіх (у розумінні міри Лебега) дійсних чисел x та для довільного $i \in \mathbb{Z}_0$ має місце рівність:*

$$\nu_i(x) = 0.$$

Лема 9. *Для μ_ξ-майже всіх $x \in [0,1]$ має місце рівність*

$$\nu_i(x) = u_i \tag{9}$$

для будь-якого $i \in \mathbb{Z}_0$.

Доведення. Нехай $\omega^j(x)$ означає j-кратне послідовне застосування перетворення зсуву ω, тобто $\omega^{j+1}(x) = \omega(\omega^j(x))$. Згідно з лемою 6 міра μ_ξ є ергодичною та інваріантною відносно ω. Тому за ергодичною теоремою Біркгофа рівність

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \varphi(\omega^j(x)) = \int\limits_0^1 \varphi(x)\, d(\mu_\xi(x))$$

має місце для μ_ξ-майже всіх чисел $x \in [0,1]$ і для довільної функції $\varphi \in L^1([0,1], d\mu_\xi)$.

Зафіксуємо деяке число $i \in \mathbb{Z}_0$. Нехай Δ_i^E — відповідний циліндр першого рангу, що відповідає E-зображенню. Візьмемо за функцію φ індикатор множини Δ_i^E, тобто $\varphi(x) = 1$, якщо $x \in \Delta_i^E$, і $\varphi(x) = 0$ в іншому випадку.

Тоді

$$\frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \varphi(\omega^j(x)) = \frac{N_i(x,n)}{n}, \quad \int\limits_0^1 \varphi(x)\, d(\mu_\xi(x)) = \int\limits_{\Delta_i^E} d(\mu_\xi(x)) = u_i.$$

Отже, для μ_ξ-майже всіх x має місце рівність (9). □

Доведення теореми 5. Доведемо, що розподіл випадкової величини ξ не може містити абсолютно неперервної компоненти. Для цього виберемо таке число $i_0 \in \mathbb{Z}_0$, щоб $u_{i_0} > 0$ (щонайменше одне таке число існує) і розглянемо множину

$$M_{i_0} = \{x \colon x \in [0,1],\, \nu_{i_0}(x) = u_{i_0} > 0\}.$$

За лемою 9 ця множина має повну μ_ξ-міру.

Розглянемо також множину $L_{i_0}^* = \{x \colon x \in [0,1],\, \nu_{i_0}(x) = 0\}$. З наслідку 8 випливає, що $\lambda(L_{i_0}^*) = 1$.

Множини M_{i_0} і $L_{i_0}^*$ не перетинаються. Перша з них є носієм ймовірнісної міри μ_ξ, а друга є носієм міри Лебега. Отже, міра μ_ξ сингулярна відносно міри Лебега, що й доводить першу частину твердження.

Друга частина теореми 5 є наслідком леми 1 і наслідку 3. □

Теорема 10. *У випадку монотонності, тобто* $u_i \geq 0$ *для всіх* $i \in \mathbb{N}$, *функція* f *трансформує фрактальну розмірність Гаусдорфа–Безиковича, зокрема аномально фрактальну множину переводить у фрактальну множину додатної розмірності, множину додатної міри Лебега — у фрактальну множину дробової розмірності. Більше того, для будь-якого* $\alpha \in (0,1)$ *існує множина додатної міри Лебега* B *така, що* $\alpha_0(f(B)) < \alpha$.

Доведення. Як відомо [5], розмірність Гаусдорфа–Безиковича множини $C[E,V]$, де $V = \{1,2,\ldots,m\}$, $m \geq 2$, дорівнює 0.

Нехай u_1, u_m — перші два відмінні від 0 члени ряду (5), яким означена функція f. Тоді образом множини $C[E,V]$ під дією функції f є самоподібна множина, самоподібна розмірність якої є розв'язком рівняння

$$u_1^x + u_m^x = 1.$$

Очевидно, що цей розв'язок додатний. Отже, образом аномально фрактальної множини $C[E,V]$ є множина додатної розмірності.

Якщо $V = \{m+1, m+2, \ldots\}$, де $m \in \mathbb{Z}_0$, то множина $C[E,V]$ має додатну міру Лебега [5]. Її образом під дією функції f є N-самоподібна множина, N-самоподібна розмірність якої дорівнює

$$\alpha_0 = \sup_{l \in \mathbb{N}} \left\{ x\colon \sum_{i=m+1}^{m+l} u_i^x = 1 \right\}.$$

Вибором m можна досягнути того, що ця розмірність буде як завгодно близькою до 0. □

Наслідок 11. *У випадку монотонності, тобто* $u_i \geq 0$ *для всіх* $i \in \mathbb{N}$, *функція* f *не зберігає розмірність Гаусдорфа–Безиковича.*

Література

[1] Барановський О. М., Працьовитий М. В., Гетьман Б. І. Порівняльний аналіз метричних теорій представлень чисел рядами Енгеля і Остроградського та ланцюговими дробами //

Наук. часоп. Нац. пед. ун-ту ім. М. П. Драгоманова. Сер. 1. Фіз.-мат. науки. — 2011. — № 12. — С. 130–139.

[2] Барановський О. М., Працьовитий М. В., Торбін Г. М. Тополого-метричні властивості множин дійсних чисел з умовами на їх розклади в ряди Остроградського // Укр. мат. журн. — 2007. — Т. 59, № 9. — С. 1155–1168.

[3] Барановський О. М., Працьовитий М. В., Торбін Г. М. Ряди Остроградського–Серпінського–Пірса та їхні застосування. — Київ : Наук. думка, 2013. — 288 с. — (Проект «Наукова книга»).

[4] Гетьман Б. І. Зображення чисел s-адичними рядами Енгеля // Наук. часоп. Нац. пед. ун-ту ім. М. П. Драгоманова. Сер. 1. Фіз.-мат. науки. — 2008. — № 9. — С. 212–224.

[5] Гетьман Б. І., Працьовитий М. В., Барановський О. М. Про властивості однієї сім'ї множин канторівського типу, що визначається умовами на елементи розкладу в ряд Енгеля // Наук. часоп. Нац. пед. ун-ту ім. М. П. Драгоманова. Сер. 1. Фіз.-мат. науки. — 2010. — № 11. — С. 119–142.

[6] Калашніков А. В. Деякі функціональні співвідношення, які задовольняє сингулярна функція Салема // Наук. часоп. Нац. пед. ун-ту ім. М. П. Драгоманова. Сер. 1. Фіз.-мат. науки. — 2008. — № 9. — С. 192–199.

[7] Коваль В. В. Самоафінні графіки функцій // Наук. зап. Нац. пед. ун-ту ім. М. П. Драгоманова. Фіз.-мат. науки. — 2003. — № 4. — С. 241–249.

[8] Козырев С. Б. О топологической густоте извивающихся функций // Мат. заметки. — 1983. — Т. 33, № 1. — С. 71–76.

[9] Панасенко О. Б. Фрактальні властивості одного класу однопараметричних неперервних недиференційовних функцій //

Наук. часоп. Нац. пед. ун-ту ім. М. П. Драгоманова. Сер. 1. Фіз.-мат. науки. — 2006. — № 7. — С. 160–167.

[10] Панасенко О. Б. Фрактальна розмірність графіків неперервних канторівських проекторів // Наук. часоп. Нац. пед. ун-ту ім. М. П. Драгоманова. Сер. 1. Фіз.-мат. науки. — 2008. — № 9. — С. 104–111.

[11] Панасенко О. Б. Розмірність Хаусдорфа–Безиковича графіка однієї неперервної ніде не диференційовної функції // Укр. мат. журн. — 2009. — Т. 61, № 9. — С. 1225–1239.

[12] Працевитый Н. В. Непрерывные канторовские проекторы // Методы исследования алгебраических и топологических структур. — Киев : КГПИ, 1989. — С. 95–105.

[13] Працьовитий М. В. Фрактальний підхід у дослідженнях сингулярних розподілів. — Київ : Вид-во НПУ ім. М. П. Драгоманова, 1998. — 296 с.

[14] Працьовитий М. В. Фрактальні властивості однієї неперервної ніде не диференційовної функції // Наук. зап. Нац. пед. ун-ту ім. М. П. Драгоманова. Фіз.-мат. науки. — 2002. — № 3. — С. 351–362.

[15] Працьовитий М. В. Ніде не монотонні сингулярні функції // Наук. часоп. Нац. пед. ун-ту ім. М. П. Драгоманова. Сер. 1. Фіз.-мат. науки. — 2011. — № 12. — С. 24–36.

[16] Працьовитий М. В., Барановський О. М. Властивості розподілів випадкових величин з незалежними різницями послідовних елементів ряду Остроградського // Теорія ймовір. та матем. статист. — 2004. — № 70. — С. 131–143.

[17] Працьовитий М. В., Василенко Н. А. Одна сім'я неперервних ніде не монотонних функцій з фрактальними властивостями // Наук. часоп. Нац. пед. ун-ту ім. М. П. Драгоманова. Сер. 1. Фіз.-мат. науки. — 2013. — № 14. — С. 176–188.

[18] Працьовитий М. В., Василенко Н. А. Розподіли ймовірностей на графіках одного класу ніде не диференційовних функцій // Тр. Ин-та прикл. математики и механики НАН Украины. — 2013. — Т. 26. — С. 159–171.

[19] Працьовитий М. В., Гетьман Б. І. Ряди Енгеля та їх застосування // Наук. часоп. Нац. пед. ун-ту ім. М. П. Драгоманова. Сер. 1. Фіз.-мат. науки. — 2006. — № 7. — С. 105–116.

[20] Працьовитий М. В., Калашніков А. В. Про один клас неперервних функцій зі складною локальною будовою, більшість з яких сингулярні або недиференційовні // Тр. Ин-та прикл. математики и механики НАН Украины. — 2011. — Т. 23. — С. 180–191.

[21] Працьовитий М. В., Калашніков А. В. Самоафінні сингулярні та ніде не монотонні функції, пов'язані з Q-зображенням дійсних чисел // Укр. мат. журн. — 2013. — Т. 65, № 3. — С. 405–417.

[22] Працьовитий М. В., Калашніков А. В., Безбородов В. К. Про один клас сингулярних функцій, що містить класичну функцію Мінковського // Наук. часоп. Нац. пед. ун-ту ім. М. П. Драгоманова. Сер. 1. Фіз.-мат. науки. — 2010. — № 11. — С. 225–231.

[23] Працьовитий М. В., Панасенко О. Б. Диференціальні та фрактальні властивості класу самоафінних функцій // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. — 2009. — № 70. — С. 128–142.

[24] Серпинскій В. Элементарный примѣръ возрастающей функціи, имѣющей почти всюду производную равную нулю // Мат. сб. — 1916. — Т. 30, № 3. — С. 449–473.

[25] Торбін Г. М. Властивості розподілів випадкових величин та динамічних систем, пов'язаних з рядами Остроградського

першого виду // Наук. часоп. Нац. пед. ун-ту ім. М. П. Драгоманова. Сер. 1. Фіз.-мат. науки. — 2006. — № 7. — С. 117–125.

[26] Турбин А. Ф., Працевитый Н. В. Фрактальные множества, функции, распределения. — Киев : Наук. думка, 1992. — 208 с.

[27] Albeverio S., Baranovskyi O., Kondratiev Yu., Pratsiovytyi M. On one class of functions related to Ostrogradsky series and containing singular and nowhere monotonic functions // Наук. часоп. Нац. пед. ун-ту ім. М. П. Драгоманова. Сер. 1. Фіз.-мат. науки. — 2013. — no. 15. — P. 24–41.

[28] Albeverio S., Baranovskyi O., Pratsiovytyi M., Torbin G. The Ostrogradsky series and related Cantor-like sets // Acta Arith. — 2007. — Vol. 130, no. 3. — P. 215–230.

[29] Albeverio S., Pratsiovytyi M., Torbin G. Fractal probability distributions and transformations preserving the Hausdorff–Besicovitch dimension // Ergodic Theory Dynam. Systems. — 2004. — Vol. 24, no. 1. — P. 1–16.

[30] Banach S. Über die Baire'sche Kategorie gewisser Funktionenmengen // Studia Math. — 1931. — Bd. 3. — S. 174–179.

[31] Bush K. A. Continuous functions without derivatives // Amer. Math. Monthly. — 1952. — Vol. 59, no. 4. — P. 222–225.

[32] Chatterji S. D. Certain induced measures on the unit interval // J. London Math. Soc. — 1963. — Vol. 38. — P. 325–331.

[33] Engel F. Entwicklung der Zahlen nach Stammbrüchen // Verh. d. 52. Versamml. dtsch. Philologen u. Schulmänner Marburg 1913. — Leipzig : Teubner, 1914. — S. 190–191.

[34] Erdős P., Rényi A., Szüsz P. On Engel's and Sylvester's series // Ann. Univ. Sci. Budapest. Sect. Math. — 1958. — Vol. 1. — P. 7–32.

[35] Marsaglia G. Random variables with independent binary digits // Ann. Math. Statist. — 1971. — Vol. 42, no. 6. — P. 1922–1929.

[36] Mazurkiewicz S. Sur les fonctions non dérivables // Studia Math. — 1931. — Vol. 3. — P. 92–94.

[37] Minkowski H. Zur Geometrie der Zahlen // Verh. d. 3. Int. Math.-Kongr. Heidelb. 1904. — Leipzig : Teubner, 1905. — S. 164–173.

[38] Pratsiovytyi M. V., Vasylenko N. A. Fractal properties of functions defined in terms of Q-representation // Int. J. Math. Anal. (Ruse). — 2013. — Vol. 7, no. 64. — P. 3155–3167.

[39] Rényi A. A new approach to the theory of Engel's series // Ann. Univ. Sci. Budapest. Sect. Math. — 1962. — Vol. 5. — P. 25–32.

[40] Salem R. On some singular monotonic functions which are strictly increasing // Trans. Amer. Math. Soc. — 1943. — Vol. 53, no. 3. — P. 427–439.

[41] Takács L. An increasing continuous singular function // Amer. Math. Monthly. — 1978. — Vol. 85, no. 1. — P. 35–37.

[42] Takagi T. A simple example of the continuous function without derivative // Tōkyō Sūgaku-Butsurigakkwai Hōkoku. — 1901. — Vol. 1. — P. 176–177.

[43] Wunderlich W. Eine überall stetige und nirgends differenzierbare Funktion // Elem. Math. — 1952. — Bd. 7, H. 4. — S. 73–79.

[44] Zamfirescu T. Most monotone functions are singular // Amer. Math. Monthly. — 1981. — Vol. 88, no. 1. — P. 47–49.