Збірник праць Ін-ту математики НАН України 2019, т. 16, № 3, 115–130

УДК 511.72+ 517.5

***М. В. Працьовитий*[1], *І. М. Лисенко*[2], *Ю. П. Маслова*[3]**

[1] *НПУ імені М. П. Драгоманова, Інститут математики НАН України, Київ; prats4444@gmail.com,*

[2] *НПУ імені М. П. Драгоманова, Київ; iryna.pratsiovyta@gmail.com,*

[3] *НПУ імені М. П. Драгоманова, Київ; julia0609mas@gmail.com.*

Метрична та ймовірнісна теорії G_2-зображення чисел

For numbers of interval $[0, g_0]$, $g_0 < 1$, we consider a system of encoding with two bases having different signs g_0 and $g_1 \equiv g_0 - 1$ by the means of alphabet $A = \{0, 1\}$:

$$x = \alpha_1 g_{1-\alpha_1} + \sum_{k=2}^{\infty}(\alpha_k g_{1-\alpha_k} \prod_{j=1}^{k-1} g_{\alpha_j}) \equiv \Delta^{G_2}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k\ldots}, \qquad (1)$$

where $\alpha_n \in A$. We develop a probabilistic theory for this representation, i.e., we consider distributions of digits of random variable X with a given distribution as well as distribution of random variable ξ determined by distributions of digits of its G_2-representation (2) if the digits are independent. Lebesgue structure of the probability distribution is described. Differential properties of the probability distribution function as well as properties of its spectrum and support are also studied.

Key words: Two-symbol system of encoding for real numbers, Q_2-representation of numbers, pure Lebesgue type of a probability distribution, singular probability distribution, spectrum of a probability distribution, random variable with independent digits of representation, infinite Bernoulli convolution.

Для двоосновної системи кодування чисел відрізка $[0; g_0]$, $g_0 < 1$, з різнознаковими основами g_0 і $\frac{1}{2} < g_1 \equiv g_0 - 1$, засобами алфавіту $A = \{0; 1\}$:

$$x = \alpha_1 g_{1-\alpha_1} + \sum_{k=2}^{\infty} (\alpha_k g_{1-\alpha_k} \prod_{j=1}^{k-1} g_{\alpha_j}) \equiv \Delta^{G_2}_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_k \ldots}, \tag{2}$$

де $\alpha_n \in A$, розвивається ймовірнісна теорія, а саме розглядаються розподіли цифр випадкової величини X з заданим розподілом і розподіл випадкової величини ξ, визначенний розподілами цифр її G_2–зображеннями (2) у випадку їх незалежності. Встановлюється лебегівська структура розподілу, вивчаються диференціальні властивості функції розподілу, а також властивості його спектра та носія.
Ключові слова: Двосимвольна система кодування дійсних чисел, Q_2–зображення чисел, G_2–зображення чисел чистий лебегівський тип розподілу, сингулярний розподіл ймовірностей, спектр розподілу, випадкова величина з незалежними цифрами зображення.

1. Вступ

Ймовірнісна теорія чисел — галузь математики, яка займається проблемами теорії чисел з застосуванням ймовірнісних засобів і методів [9], а також розподілів ймовірностей на числових множинах.

Ймовірнісна теорія зображення чисел у певній системі кодування (зображення) чисел вивчає розподіли цифр випадкової величин з заданим розподілом і розподіли випадкових величин, визначені розподілами цифр у їх зображеннях. Найстарішою і розвинітішою в цьому відношенні є ймовірнісна теорія двійкового зображення чисел відрізка $[0;1]$, представлена в багатьох роботах, зокрема [2, 4, 5, 9, 16]. Вона узагальнювалась, для Q_2–зображення – в [10, 15], а для Q_2^*–зображення — в [18].

У роботах [12, 16] побудовано аналог відомого Q_2–зображення дійсних чисел [10]:

$$x = \alpha_1 q_{1-\alpha_1} + \sum_{k=2}^{\infty}(\alpha_k q_{1-\alpha_k}\prod_{j=1}^{k-1} q_{\alpha_j}) \equiv \Delta^{G_2}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k\ldots},$$

$0 < q_0 < 1,\ q_1 \equiv 1 - q_0,\ \alpha_k \in A$, а саме: систему кодування чисел відрізка $[0; g_0]$ з різнознаковими основами: $g_0 \in (\frac{1}{2}; 1)$ і $g_1 \equiv g_0 - 1$, яка грунтується на розкладі числа в ряд

$$x = \alpha_1 g_{1-\alpha_1} + \sum_{k=2}^{\infty}(\alpha_k g_{1-\alpha_k}\prod_{j=1}^{k-1} g_{\alpha_j}) \equiv \Delta^{G_2}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k\ldots},\quad \alpha_k \in A \equiv \{0;1\}. \tag{3}$$

Кодом числа в обох системах є послідовність нулів та одиниць, тобто елемент простору $L = A \times A \times \ldots \times A \times \ldots$ Ці системи мають нульову надлишковість (кожне число має не більше двох зображень, причому тих, що мають їх два, лише зліченна множина).

Оскільки ряд (3) має, взагалі кажучи, як додатні, так і від'-ємні доданки, то G_2–зображення не є топологічно еквівалентним Q_2–зображе- нню і не є його простим перекодуванням. Разом з цим метричні теорії цих двох зображень мають багато спільного. Яскравою особливістю G_2–зображення є те, що оператор лівостороннього зсуву цифр G_2–зображення є функцією неперервною на всьому відрізку $[0; g_0]$ на відміну від Q_2–зображення, для якого аналогічний оператор має розрив в точці $x = \Delta^{Q_2}_{1(0)}$. Це принципово відрізняє дану систему від раніше вивчених.

Ті дійсні числа відрізка $[0; g_0]$, які мають два G_2–зображення, називаються G_2*–бінарними*, а ті, що мають єдине зображення, називаються G_2*–унарними*. Відомо [13], що множина B всіх

G_2–бінарних чисел є зліченною і вичерпується числами з G_2–зображеннями вигляду: $\Delta^{G_2}_{c_1\ldots c_m 01(0)} = \Delta^{G_2}_{c_1\ldots c_m 11(0)}$. Як бачимо, обидва зображення належать одній хвостовій множині.

Алгоритм порівняння чисел за їхніми G_2–зображеннями дає наступне твердження:

Теорема 1. *[13] Числа $\Delta^{G_2}_{c_1 c_2 \ldots c_m 1 d_1 d_2 \ldots} = x_1 \neq x_2 = \Delta^{G_2}_{c_1 c_2 \ldots c_m 0 d'_1 d'_2 \ldots}$ перебувають у відношенні*

$$x_1 > x_2, \quad \text{якщо} \quad \sigma_m \equiv c_1 + c_2 + \ldots + c_m = 2k,$$

$$x_1 < x_2, \quad \text{якщо} \quad \sigma_m \equiv c_1 + c_2 + \ldots + c_m = 2k - 1.$$

Геометричні властивості G_2–зображення чисел (як і Q_2–зображе- ння) описуються в термінах циліндричних множин.

Означення 1. *Нехай $(c_n) \in L$, G_2–циліндром рангу m з основою $c_1 c_2 \ldots c_m$ називається множина $\Delta^{G_2}_{c_1 c_2 \ldots c_m}$ всіх чисел $x \in [0; g_0]$, які мають таке G_2–зображення: $x = \Delta^{G_2}_{c_1 c_2 \ldots c_m \alpha_{m+1} \alpha_{m+2} \ldots \alpha_{m+k} \ldots}, \alpha_{m+j} \in A$, тобто $\Delta^{G_2}_{c_1 c_2 \ldots c_m} = \{x : \alpha_i(x) = c_i,\ i = \overline{1,m}\}$.*

Означення 2. *G_2–зображення і Q_2–зображення чисел із основами (g_0, g_1) і (q_0, q_1) відповідно називаються* двоїстими, *якщо $g_0 = q_0$.*

Вважаємо Q_2–зображення і G_2–зображення заданими.

Функція p, яка числу $x = \Delta^{Q_2}_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_n \ldots}$ ставить у відповідність число $y = \Delta^{G_2}_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_n \ldots}$, називається *проектором* Q_2–зображення в G_2–зображення.

Проектор Q_2–зображення в G_2–зображення Q_2–циліндр $\Delta^{Q_2}_{c_1 c_2 \ldots c_m}$ переводить у G_2–циліндр $\Delta^{G_2}_{c_1 c_2 \ldots c_m}$, причому $|\Delta^{G_2}_{c_1 \ldots c_m}| = g_0 |\Delta^{Q_2}_{c_1 \ldots c_m}|$.

Теорема 2. *Функція, означена рівністю $p\left(\Delta^{Q_2}_{\alpha_1 \ldots \alpha_n \ldots}\right) = \Delta^{G_2}_{\alpha_1 \ldots \alpha_n \ldots}$, є ніде не монотонною неперервною в кожній Q_2–*

унарній точці. У Q_2–бінарній точці $x_0 = \Delta^{Q_2}_{c_1\ldots c_{m-1}1(0)}$ функція p має скінченний стрибок $\dfrac{2g_0(1-g_0)}{2-g_0}\prod\limits_{j=1}^{m-1}|g_{c_j}|$.

Доведення. Нехай x_0 — Q_2–унарна точка, $x \neq x_0$. Тоді існує натуральне число m, таке, що $\alpha_{m+1}(x) \neq \alpha_{m+1}(x_0)$, але $\alpha_i(x) = \alpha_i(x_0)$ при $i \leq m$. Розглянемо

$$d = |p(x) - p(x_0)| = |\Delta^{G_2}_{\alpha_{m+1}(x)\alpha_{m+2}(x)\ldots} - \Delta^{G_2}_{\alpha_{m+1}(x_0)\alpha_{m+2}(x_0)\ldots}| \cdot \prod_{j=1}^{m}|g_{\alpha_j}|.$$

Оскільки $|\Delta^{G_2}_{\alpha_{m+1}(x)\alpha_{m+2}(x)\ldots} - \Delta^{G_2}_{\alpha_{m+1}(x_0)\alpha_{m+2}(x_0)\ldots}| \leq g_0$; а $x \to x_0$ рівнозначно $m \to \infty$, то при $m \to \infty$ маємо $d \to 0$, що рівносильно неперервності функції p в точці x_0 по множині G_2–унарних чисел.

Стрибок d функції p в G_2–бінарній точці $x_0 = \Delta^{Q_2}_{c_1\ldots c_{m-1}1(0)}$:

$$d(\Delta^{Q_2}_{c_1\ldots c_{m-1}1(0)}) = |\Delta^{G_2}_{c_1\ldots c_{m-1}1(0)} - \Delta^{G_2}_{c_1\ldots c_{m-1}0(1)}| =$$
$$= |\Delta^{G_2}_{1(0)} - \Delta^{G_2}_{0(1)}| \prod_{j=1}^{m-1}|g_{c_j}| = \frac{2g_0(1-g_0)}{2-g_0}\prod_{j=1}^{m-1}|g_{c_j}|.$$

Для доведення ніде не монотонності проектора досить у будь–якому циліндрі (нехай $\Delta^{G_2}_{c_1\ldots c_n}$) вказати такі три точки x_1, x_2, x_3, що $x_1 < x_2 < x_3$, але для відповідних значень проектора p виконується нерівність $[p(x_2) - p(x_1)] \cdot [p(x_3) - p(x_2)] < 0$. Задля цього розглянемо точки $x_1 = \Delta^{Q_2}_{c_1\ldots c_m i1(0)}$, $x_2 = \Delta^{Q_2}_{c_1\ldots c_m i11(0)}$, $x_3 = \Delta^{Q_2}_{c_1\ldots c_m i111(0)}$. Якщо $i = 0$ і $c_1 + c_2 + \ldots + c_m$ — число парне, то для їм відповідних значень: $y_1 = p(x_1) = \Delta^{G_2}_{c_1\ldots c_m i1(0)}$, $y_2 = p(x_2) = \Delta^{G_2}_{c_1\ldots c_m i11(0)}$, $y_3 = p(x_3) = \Delta^{G_2}_{c_1\ldots c_m i111(0)}$, враховуючи ознаку порівняння (теорема 1), маємо $y_1 > y_2 < y_3$. Отже, $(y_2 - y_1)(y_3 - y_2) < 0$.

Якщо $c_1 + c_2 + \ldots + c_m$ — число непарне, то, взявши $i = 1$, матимемо $x_1 > x_2 > x_3$ й ідентичний висновок. □

2. Метрична теорія

Означення 3. *Нехай* $x = \Delta^{G_2}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}$, $N_1(x,k) \equiv \alpha_1+\alpha_2\ldots+\alpha_k$, $N_0(x,k) = k - N_1$. *Число*

$$\lim_{k\to\infty}\frac{N_i(x,k)}{k} = \nu_i^{G_2}(x), \quad i \in A,$$

у випадку його існування, називається частотою цифри i у G_2*–зображенні числа* x.

Означення 4. *Число* $x \in [0; g_0]$ *називається* ***нормальним*** *відносно* G_2*–зображення чисел, якщо у цьому зображенні існують частоти його цифр, причому частота 0 рівна* g_0, *а 1 — (*$-g_1$*).*

Теорема 3. *(Аналог теореми Бореля для двійкового зображення).Множина* $B = \{x : \nu_o^{G_2}(x) = g_0\}$*чисел* x *відрізка* $[0; g_0]$*,частота цифри 0 у* G_2*-зображення яких має міру Лебега рівну 1.*

Доведення. Доведення проведемо засобами математичного аналізу, скориставшись схемою, яка використовувалася у роботі [14] Доведемо, що множина чисел x, для яких $\nu_0^{G_2}(x) \neq g_0$ (тобто частота не існує або не дорівнює g_0) має міру Лебега 0.

Умова $\nu_0^{G_2}(x) = g_0$ рівносильна умові $\nu_1^{G_2}(x) = -g_1$, яку перепишемо у вигляді

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\alpha_1(x)+\ldots+\alpha_k(x)}{k} = -g_1 \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{k\to\infty}(\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}\alpha_i(x)+g_1) = 0. \tag{4}$$

Розглянемо інтеграли:

$$I_k = \int\limits_0^{g_0}\left(\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}\alpha_i(x)+g_1\right)^2 dx = \frac{1}{k^2}\int\limits_0^{g_0}\left(\sum_{i=1}^{k}\alpha_i(x)+kg_1\right)^2 dx =$$

$$= \frac{1}{k^2}\int\limits_0^{g_0}\left(\sum_{i=1}^{k}(\alpha_i(x)+g_1)\right)^2 dx.$$

У виразі I_k зустрічаються інтеграли двох виразів:

1)
$$\int\limits_0^{g_0}(\alpha_i(x)+g_1)^2dx=\int\limits_0^{g_0}(\alpha_i^2(x)+2\alpha_i(x)g_1+g_1^2)dx=$$
$$=\int\limits_0^{g_0}(\alpha_i(x)(1+2g_1)+g_1^2)dx=(1+2g_1)\int\limits_0^{g_0}\alpha_i(x)dx+\int\limits_0^{g_0}g_1^2dx=$$
$$=(1+2g_1)\lambda\{x:\ \alpha_i(x)=1\}g_0+g_0g_1^2=(1+2g_1)g_0(-g_1)g_0+g_1^2g_0=$$
$$=g_0g_1(1-2g_0g_1),$$

оскільки $\alpha_i^2(x)=\alpha_i(x)$ (кількість таких інтегралів дорівнює k);

2)
$$\int\limits_0^{g_0}(\alpha_i(x)+g_1)(\alpha_j(x)+g_1)dx=$$
$$=\int\limits_0^{g_0}\alpha_i(x)\alpha_j(x)dx+g_1\int\limits_0^{g_0}(\alpha_i(x)+\alpha_j(x))dx+\int\limits_0^{g_0}g_1^2dx=$$
$$=g_0g_1^2+2g_1g_0(-g_1)+g_1^2g_0=0 \quad \text{при} \quad i\neq j.$$

Отже, $I_k=\dfrac{g_0g_1(1-2g_0g_1)}{k}$. Тоді $\lim\limits_{k\to\partial}I_k=0$, тобто послідовність сум $\dfrac{1}{k}\sum\limits_{i=1}^{k}\alpha_i(x)$ збігається до $(-g_1)$ в середньому квадратичному. Але із збіжності в середньому квадратичному, взагалі кажучи, не випливає збіжність майже скрізь у розумінні міри Лебега.

Візьмемо тепер будь–яке досить мале додатне число ε і розглянемо множину $E_k(\varepsilon)$ чисел відрізка $[0;g_0]$, для яких

$$\left|\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}\alpha_i(x)+g_1\right|>\varepsilon. \tag{5}$$

Щоб оцінити міру цієї множини, зауважимо, що

$$I_k = \int\limits_0^{g_0} \left(\frac{1}{k} \sum_{i=1}^{k} \alpha_i(x) + g_1 \right)^2 dx \geq \int\limits_{E_k(\varepsilon)} \left(\frac{1}{k} \sum_{i=1}^{k} \alpha_i(x) + g_1 \right)^2 dx \geq$$

$$\geq \varepsilon^2 \int\limits_{E_k(\varepsilon)} dx = \varepsilon \lambda [E_k(\varepsilon)],$$

звідси

$$\lambda[E_k(\varepsilon)] \leq \frac{I_k}{\varepsilon^2} = \frac{g_0 g_1 (1 - 2g_0 g_1)}{k\varepsilon^2}.$$

Таким чином, при фіксованому ε виконується рівність $\lim\limits_{k\to\infty} \lambda[E_k(\varepsilon)] = 0$. Але цього ще не достатньо для висновку, що для майже всіх $x \in [0; g_0]$ виконується (4).

Розглянемо послідовність множини чисел $x(\varepsilon)$:

$$E_1(\varepsilon),\ E_4(\varepsilon),\ E_9(\varepsilon), ..., E_{n^2}(\varepsilon), ... \tag{6}$$

і позначимо через $F_k(\varepsilon)$ множину чисел, що належить хоча б одній з множин $E_{k^2}(\varepsilon),\ E_{(k+1)^2}(\varepsilon), ...$ Тоді, враховуючи співвідношення (5), маємо:

$$\lambda[F_k(\varepsilon)] = \lambda[E_{k^2}(\varepsilon) \cup E_{(k+1)^2}(\varepsilon) \cup ...] \leq$$

$$\leq \sum_{j=0}^{\infty} \lambda[E_{(k+j)^2}(\varepsilon)] \leq \frac{g_0 g_1 (1 - 2g_0 g_1)}{k\varepsilon^2} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{(k+j)^2} \to 0 \quad (k \to \infty).$$

Оскільки послідовність множин $\{F_k(\varepsilon)\}$ є монотонною, тобто $F_{k+1}(\varepsilon) \subset F_k(\varepsilon)$, а міра Лебега множини $F_k(\varepsilon)$ прямує до нуля при необмеженому рості k, то перетин всіх цих множин має міру 0. Це рівносильно тому, що всі числа, крім чисел множини міри нуль, можуть належати лише скінченій сукупності цих множин, а це означає, що коли точка x належить лише скінченній кількості множин $F_k(\varepsilon)$, то при достатньо великому k вона не належить множині $F_k(\varepsilon)$, а отже, не належить жодній з множин (6). Тому для числа k, більшого деякого k_0, маємо

$$\left| \frac{1}{k^2} \sum_{i=1}^{k^2} \alpha_i(x) + g_1 \right| \le \varepsilon.$$

Таким чином, цю властивість мають майже всі числа для довільно вибраного ε. Отже, для майже всіх виконується

$$\frac{1}{k^2} \sum_{i=1}^{k^2} \alpha_i(x) \to -g_1 \quad \text{при} \quad k \to \infty.$$

Ми довели твердження за умови, що числа k ростуть по послідовності квадратів натуральних чисел. Якщо ж k довільне натуральне число, то для нього знайдеться натуральне число m, таке, що

$$m^2 \le k < (m+1)^2, \quad \text{тобто} \quad 0 \le k - m^2 < 2m + 1.$$

Тому

$$\frac{1}{k} \sum_{i=1}^{k} \alpha_i(x) = \frac{1}{k} \left(\sum_{i=1}^{m^2} \alpha_i(x) + \sum_{i=m^2+1}^{k} \alpha_i(x) \right) =$$

$$= \frac{1}{m^2} \sum_{i=1}^{m^2} \alpha_i(x) \frac{m^2}{k} + \frac{1}{k} \sum_{i=m^2+1}^{k} \alpha_i(x).$$

За доведеним, при $k \to \infty$ майже скрізь

$$\frac{1}{m^2} \sum_{i=1}^{m^2} \alpha_i(x) \to -g_1$$

і всюди $\dfrac{m^2}{(m+1)^2} < \dfrac{m^2}{k} \le 1$, $\dfrac{1}{k} \sum\limits_{i=m^2+1}^{k} \alpha_i(x) \le \dfrac{k - m^2}{k} < \dfrac{2m+1}{m^2}$,

внаслідок чого при $k \to \infty$ $\dfrac{m^2}{k} \to 1$ і $\dfrac{1}{k} \sum\limits_{i=m^2+1}^{k} \alpha_i(x) \to 0$.

Тому майже скрізь виконується рівність (4). □

Наслідок 4. *Множина чисел, які не є нормальними в G_2–зображенні, має нульову міру Лебега.*

3. Розподіли цифр

Теорема 5. *Якщо випадкова величина $\xi = \Delta^{G_2}_{\xi_1\xi_2\ldots}$ має рівномірний розподіл на відрізку $[0; g_0]$, то цифри (ξ_n) її G_2–зображення є незалежними і мають розподіли $P\{\xi_n = 0\} = g_0$, $P\{\xi_n = 1\} = -g_1$.*

Доведення. Оскільки ξ має рівномірний розподіл на $[0; g_0]$, то вона не має атомів, тобто ймовірність $P\{\xi = x_0\} = 0$ для будь–якого x_0, і $P\{\xi \in \Delta^{G_2}_{c_1\ldots c_m}\} = |\Delta^{G_2}_{c_1\ldots c_m}| = g_0 \prod_{i=1}^{m} |g_{c_i}|$.

Тоді $P\{\xi_1 = 0\} = P\{\xi \in \Delta^{G_2}_0\} = \dfrac{|\Delta^{G_2}_0|}{g_0} = g_0$,

$$P\{\xi_1 = 1\} = P\{\xi \in \Delta^{G_2}_1\} = \frac{|\Delta^{G_2}_1|}{g_0} = -g_1,$$

$$\begin{aligned} P\{\xi_{m+1} = i/\xi \in \Delta^{G_2}_{c_1\ldots c_m}\} &= \frac{P(\xi \in \Delta^{G_2}_{c_1\ldots c_m i})}{P(\xi \in \Delta^{G_2}_{c_1\ldots c_m})} = \\ &= g_0|g_i| \prod_{j=1}^{m} |g_{c_j}| : g_0 \prod_{j=1}^{m} |g_{c_j}| = |g_i|. \end{aligned} \tag{7}$$

Оскільки остання ймовірність не залежить від набору цифр $(c_1, c_2, \ldots, c_m)$, то ξ_{m+1} не залежить від $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$. Отже, (ξ_n) — послідовність незалежних випадкових величин. Більше того,

$$P\{\xi_n = 0\} = g_0, \quad P\{\xi_n = 1\} = -g_1,$$

що й вимагалось довести. □

Наслідок 6. *Якщо (ξ_n) — послідовність незалежних однаково розподілених випадкових величин з розподілами $P\{\xi_n = i\} = |g_i|$, $i = 0, 1$, то розподіл випадкової величини $\xi = \Delta^{G_2}_{\xi_1\xi_2\ldots\xi_n\ldots}$ є рівномірним.*

4. Випадкова величина з незалежними однаково розподіленими цифрами свого G_2–зображення

Теорема 7. *Якщо* (τ_n) *— послідовність незалежних однаково розподілених випадкових величин, які набувають значень 0 і 1 з ймовірностями* p_0 *і* p_1*, тобто* $P\{\tau_n = i\} = p_i,\ \ 0 < p_i < 1, i = 0, 1,$ *то розподіл випадкової величини* $\tau = \Delta^{G_2}_{\tau_1\tau_2\ldots\tau_n\ldots}$ *є рівномірним при* $p_0 = g_0$ *і сингулярно неперервним при* $p_0 \neq g_0$*.*

Доведення. Згідно з теоремою Лебега кожна неперервна монотонна функція майже скрізь у розумінні міри Лебега має скінченну похідну. Якщо в точці x_0 похідна існує, то вона обчислюється за формулою

$$F'_\tau(x_0) = \lim_{n\to\infty} \frac{P\{\tau \in \Delta^{G_2}_{\alpha_1(x_0)\alpha_2(x_0)\ldots\alpha_n(x_0)}\}}{|\Delta^{G_2}_{\alpha_1(x_0)\alpha_2(x_0)\ldots\alpha_n(x_0)}|} = \lim_{n\to\infty} \frac{p_0^{N_0} p_1^{N_1}}{g_0 \prod\limits_{j=1}^{n} |g_{c_j}|} =$$

$$= \frac{1}{g_0} \lim_{n\to\infty} \left(\frac{p_0^{\frac{N_0}{n}} p_1^{\frac{N_1}{n}}}{g_0^{\frac{N_0}{n}} |g_1|^{\frac{N_1}{n}}} \right)^n = \frac{1}{g_0} \lim_{n\to\infty} \left[\left(\frac{p_0}{g_0}\right)^{\frac{N_0}{n}} \left(\frac{p_1}{|g_1|}\right)^{\frac{N_1}{n}} \right]^n =$$

$$= \frac{1}{g_0} \lim_{n\to\infty} \left[\left(\frac{p_0}{g_0}\right)^{\nu_0} \left(\frac{p_1}{|g_1|}\right)^{\nu_1} \right]^n,$$

де $N_1 = \alpha_1(x_0) + \ldots + \alpha_n(x_0)$, $N_0 = n - N_1$, $\nu_1(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{N_1(x,n)}{n}$, $\nu_0(x) = 1 - \nu_1(x)$, $N_1(x,n) = \alpha_1(x) + \ldots + \alpha_n(x)$.

Можна довести (це робиться аналогічно до міркувань і висновків, наведених у роботі [10] для Q_2-зображення) таке твердження: *для майже всіх* $x = \Delta^{G_2}_{\alpha_1(x)\alpha_2(x)\ldots\alpha_n(x)\ldots} \in [0; g_0]$ *у розумінні міри Лебега виконуються рівності:* $\nu_0(x) = g_0$*,* $\nu_1(x) = g_1$. Тому для x_0, що належить множині повної міри Лебега, для кожної точки якої існує скінченна похідна і $\nu_0(x_0) = g_0$, $\nu_1(x_0) = g_1$ маємо $F'(x_0) = 0$, оскільки при $p_0 \neq g_0$ виконується $\frac{p_0^{g_0} p_1^{|g_1|}}{g_0^{g_0} |g_1|^{|g_1|}} < 1$.

Отже, при $p_0 \neq g_0$ функція розподілу F_τ є сингулярною (її похідна майже скрізь дорівнює нулю).

Якщо $p_0 = g_0$, то

$$P\{\tau \in \Delta^{G_2}_{c_1c_2\ldots c_m}\} = p_0^{N_0} p_1^{N_1} = g_0^{N_0} |g_1|^{N_1} = \frac{1}{g_0} |\Delta^{G_2}_{c_1c_2\ldots c_m}|,$$

тобто розподіл τ на $[0; g_0]$ є рівномірним. □

5. Оператор лівостороннього зсуву цифр G_2–зображення чисел і його інваріантні міри

Теорема 8. *[13] Оператор ω лівостороннього зсуву цифр G_2–зобра- ження чисел відрізка $[0; g_0]$, який у просторі G_2-зображень означується рівністю $\omega(\Delta^{G_2}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}) = \Delta^{G_2}_{\alpha_2\alpha_3\ldots\alpha_n\ldots}$, аналітично задається*

$$\omega(x) = \frac{1}{g_{\alpha_1(x)}} x - \frac{\delta_{\alpha_1(x)}}{g_{\alpha_1(x)}}, \tag{8}$$

є неперервною коректно означеною на $[0; g_0]$ функцією, лінійною на кожному циліндрі 1-го рангу, зростаючою на $\Delta^{G_2}_0$, спадною на $\Delta^{G_2}_1$.

Зауваження 1. *Остання теорема засвідчує суттєву відмінність G_2–зображення від інших відомих двосимвольних зображень, зокрема Q_2–зображення, Q_2^*–зображення [16], нега–двійкового [11] та ланцюгового A_2–зображення [3, 6].*

Інваріантними точками оператора лівостороннього зсуву ω є числа: $0 = \Delta^{G_2}_{(0)}$ і $\Delta^{G_2}_{(1)} = g_0 + g_0 g_1 + g_0 g_1^2 + \ldots = \frac{g_0}{2+g_0}$.

Теорема 9. *Інваріантною мірою оператора ω лівостороннього зсуву цифр G_2–зображення чисел є міра μ_τ, що відповідає розподілу неперервної випадкової величини $\tau = \Delta^{G_2}_{\tau_1\tau_2,\ldots,\tau_n,\ldots}$, цифр*

(τ_n) Δ^{G_2}–зображення якої є незалежними й однаково розподіленими, які набувають значень $P\{\tau_n = 0\} = p_0, \quad P\{\tau_n = 1\} = p_1, \ 0 < p_0 < 1$.

Доведення. Будь-яка борелівська підмножина відрізка $[0; g_0]$ як завгодно точно може бути наближена об'єднанням циліндрів. Оскільки міра μ_τ неперервна, то вона однозначно визначається значеннями на циліндричних множинах, а саме:

$$\mu_\tau(\Delta^{G_2}_{c_1c_2...c_n}) = p_0^{N_0}p_1^{N_1}, N_1 = c_1 + c_2 + ... + c_n, N_0 \equiv n - N_1.$$

Тому достатньо довести, що $\mu_\tau(\omega^{-1}) = \mu_\tau$. Для цього виразимо

$$\omega^{-1}(\Delta^{G_2}_{c_1c_2...c_n}) = \Delta^{G_2}_{0c_1c_2...c_n} \cup \Delta^{G_2}_{1c_1c_2...c_n},$$

і отримаємо

$$\begin{aligned}\mu_\tau(\omega^{-1}(\Delta^{G_2}_{c_1c_2...c_n})) =& \mu_\tau(\Delta^{G_2}_{0c_1c_2...c_n} \cup \Delta^{G_2}_{1c_1c_2...c_n}) = \\ =& p_0p_0^{N_0}p_1^{N_1} + p_0^{N_0}p_1p_1^{N_1} = \\ =& p_0^{N_0}p_1^{N_1}(p_0 + p_1) = p_0^{N_0}p_1^{N_1} = \mu_\tau(\Delta^{G_2}_{c_1c_2...c_n}).\end{aligned}$$

Отже, μ_τ є інваріантною мірою оператора ω. □

6. Розподіли ймовірностей, пов'язані з G_2–зображенням чисел

Теорема 10. *Нехай (ξ_n) — послідовність незалежних випадкових величин з розподілами $P\{\xi_n = i\} = p_{in} \geq 0, \ \ i \in A = \{0; 1\}$; то випадкова величина $\xi = \Delta^{G_2}_{\xi_1\xi_2...\xi_n...}$ має чистий лебегівський тип розподілу (тобто чисто дискретний, чисто неперервний, чисто абсолютно неперервний або чисто сингулярно неперервний), причому чисто дискретний — тоді і тільки тоді, коли*

$$M = \prod_{n=1}^{\infty} \max\{p_{0n}p_{1n}\} > 0.$$

Якщо $M = 0$ *і* $L \equiv \sum\limits_{n=1}^{\infty}\left[\left(1-\dfrac{p_{0n}}{g_0}\right)^2+\left(1+\dfrac{p_{1n}}{g_1}\right)^2\right] < \infty$, *то* ξ *має абсолютно неперервний розподіл, а при* $M = 0$ *і* $L = \infty$ *— сингулярно неперервний.*

У випадку дискретності розподілу, його точковий спектр утворюють точки x, *для яких* $p_{\alpha_k(x)k} \neq 0$ *для будь–якого* $k \in N$ *і при цьому* x *і* x_0 *належать одній хвостовій множині.*

Доведення. Дане твердження випливає з відомого аналогічного твердження для Q_2–зображення, оскільки відображення

$$\varphi : \Delta^{G_2}_{\alpha_1\ldots\alpha_n\ldots} \quad\rightarrow\quad \Delta^{Q_2}_{\alpha_1\ldots\alpha_n\ldots}$$

є вимірним і зберігає відношення довжин циліндрів (образу і прообразу). □

Література

[1] Albeverio S., Goncharenko Y., Pratsiovyti M., Torbin G. Convolutions of distributions of random variables with independent binary digits // Random Oper. Stohastic Equations. — 2007. — 15, №1. — P. 89-97.

[2] Marsaglia G. Random variables with independent binary digits. // Ann. Math. Statist. — 1971. — Vol. 12, no. 6. — P. 1922-1929.

[3] Pratsiovytyi M., Chuikov A. Continuous distributions whose functions preserve tails of an A_2-continued fraction representation of numbers // Random Operators and Stochastic Equations. — 2019. — Vol. 27(3) — P. 199-206.

[4] Salem R. On some singular monotonic function which are stricly increasing // Trans. Amer. Math. Soc. — 1943. — 53. — P. 423 - 439.

[5] Гончаренко Я.В. Згортки розподілів сум випадкових рядів спеціального виду // Наукові записки НПУ імені М.П. Драгоманова. Фізико–математичні науки. — Київ: НПУ імені М.П. Драгоманова. — 2003. — № 4. — С. 216-232.

[6] Дмитренко С.О., Кюрчев Д.В., Працьовитий М.В. Ланцюгове A_2–зображення дійсних чисел та його геометрія // Укр. мат. журнал. — 2009. — Т.61, №4. — С. 452-463.

[7] Працьовитий М.В. Фрактальний підхід у дослідженнях сингулярних розподілів. — Київ: Вид-во НПУ ім. М.П. Драгоманова. — 1998. — 296 с.

[8] Кац М. Статистическая независимость в теории вероятностей, анализе и теории чисел // М.: Изд–во иностранной литературы.— 1963. — 156 с.

[9] Постников А. Г. Вероятностная теория чисел. М.: Знание, 1974.— 62с.

[10] Працевитый Н.В. Случайные величины с независимыми Q_2-символами // Асимптотические методы в исследовании стохастических моделей. — Киев: ИМ АН УССР. — 1987. — С. 92-102.

[11] Працьовитий М. В., Гончаренко Я. В., Лисенко І. М. Нега–двійкове представлення дійсних чисел і його застосування // Науковий часопис НПУ імені М.П. Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки.. — 2015. — № 17. — С. 83-106.

[12] Працьовитий М.В., Лисенко І.М., Маслова Ю.П. Геометрія числових рядів: ряд як модель дійсного числа в новій двосимвольній системі кодування чисел // Збірник праць ІМ НАН України.— Київ: ІМ НАН України. — 2018. — Т. 15, № 1. — С. 132-146.

[13] Працьовитий М.В., Лисенко І.М., Маслова Ю.П. Двоосновна система числення з різнознаковими основами і спеціальні функції, з нею пов'язані // Збірник праць ІМ НАН України.— Київ: ІМ НАН України. — 2019. — Т. 16, № 2. — С. 50-62.

[14] Працьовитий М.В., Фещенко О.Ю. Математичні моделі двосторонніх динамічних конфліктів і Q–представлення чисел // Наукові записки НПУ імені М.П. Драгоманова. Фізико–математичні науки.— Київ: НПУ імені М.П. Драгоманова — 2003. — № 4. — С. 260-269.

[15] Працевитий М.В. Фрактальні властивості розподілів випадкових величин, Q_2-знаки яких утворюють однорідний ланцюг Маркова // Асимптотичний аналіз випадкових еволюцій. — Київ: Ін-т математики АН України. — 1994. — С. 249-254.

[16] Працьовитий М.В. Фрактальний підхід у дослідженнях сингулярних розподілів. — Київ: Вид-во НПУ ім. М.П. Драгоманова. — 1998. — 296 с.

[17] Працевитый Н.В. Поліосновне $\tilde{Q}$-представлення і фрактальні математичні об'єкти з ним пов'язані // Фрактальний аналіз та суміжні питання. — Київ: ІМ НАН України - НПУ імені М.П.Драгоманова. — 1998. — № 2. — С. 14-35.

[18] Торбин Г.М., Працевитый Н.В. Случайные величины с независимыми Q^*-знаками // Случайные эволюции: теоретические и прикладные задачи. — Киев: Ин-т математики АН Украины. — 1992. — С. 95-104.

[19] Турбин А.Ф., Працевитый Н.В. Фрактальные множества, функции, распределения. — Киев: Наукова думка. — 1992. — 208 с.