Збірник праць Ін-ту математики НАН України 2019, т. 16, № 3, 92–100

УДК 517.51

Н. А. Василенко

Інститут математики НАН України, Київ;
vasylenkonnn@gmail.com

Про розподіли значень функцій типу Серпінського

We construct an infinite-parameter family of continuous nowhere monotonic and, in general, non-differentiable functions which are generalizations of classical nowhere differentiable Sierpiński function. We study topological and metric properties of the distribution of values of functions belonging to constructed family.
Key words: Q_s-representation of real numbers; continuous nowhere differentiable function; nowhere monotonic function; level sets of function; Lebesgue structure of distribution; discrete distribution; singular distribution.

Будується нескінченно-параметрична сім'я неперервних ніде не монотонних функцій, які є узагальненням класичної ніде не диференційовної функції Серпінського. Вивчаються тополого-метричні властивості розподілу значень функції з побудованої сім'ї.
Ключові слова: Q_s-зображення дійсних чисел; неперервна ніде не диференційовна функція; ніде не монотонна функція; рівень функції; лебегівська структура розподілу; дискретність розподілу; сингулярність розподілу.

Вступ

Сьогодні функції зі складною локальною будовою (ніде не монотонні, сингулярні, ніде не диференційовні, звивисті та ін.) виникають в багатьох моделях реальних об'єктів та процесів. Наявні засоби теорії фрактального аналізу та фрактальної геометрії значно розширили можливості дослідження властивостей таких функцій, переважна більшість яких будується з використанням перетворювачів символів однієї системи числення в іншу [1], [2], [6]. До таких функцій, зокрема, відноситься і функція Серпінського [4], а також її узагальнення — функції типу Серпінського [11], [12].

Функція типу Серпінського будується з використанням поліосновного Q_s-зображення дійсних чисел [7]. Такі зображення визначаються ймовірнісним вектором Q_s з додатними координатами $(q_0, q_1, \ldots, q_{s-1})$ і розкладом

$$[0;1] \ni x = \beta_{\alpha_1(x)} + \sum_{k=2}^{\infty} \left(\beta_{\alpha_k(x)} \prod_{j=1}^{k-1} q_{\alpha_j(x)} \right) \equiv \Delta^{Q_s}_{\alpha_1(x)\alpha_2(x)\ldots\alpha_k(x)\ldots},$$

де $\alpha_k(x) \in A_s \equiv \{0, 1, \ldots, s-1\}$, $\beta_0 = 0$, $\beta_i = \sum\limits_{j=0}^{i-1} q_j$.

Нехай $(c_1, c_2, \ldots, c_n)$ – упорядкований набір елементів алфавіту A_s. Нагадаємо, що *циліндром* рангу n із основою $c_1c_2\ldots c_n$ називається множина $\Delta^{Q_s}_{c_1c_2\ldots c_n}$ усіх чисел $x \in [0,1]$, які мають таке Q_s-зображення: $x = \Delta^{Q_s}_{c_1c_2\ldots c_n\alpha_{n+1}\ldots\alpha_{n+k}\ldots}$, $\alpha_{n+k} \in A_s$.

Циліндри мають властивості:

1) $\Delta^{Q_s}_{c_1c_2\ldots c_n} = \bigcup\limits_{j=0}^{s-1} \Delta^{Q_s}_{c_1\ldots c_n j}$;

2) $[0,1] = \bigcup\limits_{i_1=0}^{s-1} \bigcup\limits_{i_2=0}^{s-1} \ldots \bigcup\limits_{i_n=0}^{s-1} \Delta^{Q_s}_{i_1i_2\ldots i_n}$;

3) $max\Delta^{Q_s}_{c_1c_2\ldots c_n i} = min\Delta^{Q_s}_{c_1c_2\ldots c_n[i+1]}$;

4) $|\Delta^{Q_s}_{c_1c_2\ldots c_n}| = \prod\limits_{i=1}^{n} q_{c_i} \to 0 \ (n \to \infty)$;

5) $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \Delta^{Q_s}_{c_1\ldots c_n} = x \equiv \Delta^{Q_s}_{c_1\ldots c_n\ldots}$ для довільної послідовності (c_n), де $c_n \in A_s$.

Дана робота присвячена вивченню розподілу значень випадкової величини $Y = f(X)$ при заданному розподілу аргументу X, де f – функція типу Серпінського.

1. Об'єкт дослідження

Нехай $A_5 = \{0,1,2,3,4\}$, Q_5 і Q_3 – задані два Q-зображення. Вектор Q_3 (для зручності) позначимо через $G_3 = \{g_0, g_1, g_2\}$.

Визначимо на A_5 дискретну функцію

$$\gamma(\alpha) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } \ \alpha = 0, \\ 1, & \text{якщо } \ \alpha \in A_5 \setminus \{0,4\}, \\ 2, & \text{якщо } \ \alpha = 4. \end{cases} \tag{1}$$

Для кожної послідовності $(\alpha_k) \in L \equiv A_5^{\infty} = A_5 \times A_5 \times \ldots$ визначимо послідовність (c_k) наступним чином

$$c_1 = 0, c_k = \begin{cases} c_{k-1}, & \text{якщо } \ \alpha_{k-1} \in A_5 \setminus \{2\}, \\ 1 - c_{k-1}, & \text{якщо } \ \alpha_{k-1} = 2. \end{cases} \tag{2}$$

На відрізку $[0,1]$ визначимо функцію, аргумент якої подається у формі Q_5-розкладу

$$x = \varphi_{\alpha_1(x)} + \sum_{i=2}^{\infty} \left(\varphi_{\alpha_i(x)} \cdot \prod_{j=1}^{i-1} q_{\alpha_j(x)} \right) \equiv \Delta^{Q_5}_{\alpha_1(x)\alpha_2(x)\ldots\alpha_k(x)\ldots}, \tag{3}$$

де $\alpha_k(x) \in A_5$, $Q_5 = \{q_0, q_1, q_2, q_3, q_4, q_5\}$, $\varphi_0 = 0$, $\varphi_i = \sum\limits_{k=0}^{i-1} q_k$,

а значення функції має наступний G_3-розклад:

$$f(x) = \psi_{\beta_1} + \sum_{i=2}^{\infty} \left(\psi_{\beta_i} \cdot \prod_{j=1}^{i-1} g_{\beta_j} \right) \equiv \Delta^{G_3}_{\beta_1\beta_2\ldots\beta_k\ldots}, \tag{4}$$

де $\beta_k \in A_3 \equiv \{0,1,2\}$, $G_3 = \{g_0, g_1, g_2\}$, $\psi_0 = 0$, $\psi_i = \sum\limits_{k=0}^{i-1} g_k$, причому

$$\beta_1 = \gamma(\alpha_1), \;\; \beta_k = \begin{cases} \gamma(\alpha_k), \;\text{якщо}\; c_k = 0, \\ 2 - \gamma(\alpha_k), \;\text{якщо}\; c_k \neq 0. \end{cases} \tag{5}$$

Властивості функції f детально вивчалися в роботах [3], [11], [12]. Наведемо деякі з них.

1. Функція f є неперервною в кожній точці відрізка $[0;1]$.
2. Функція f є ніде не монотонною на $[0;1]$.
3. Функція f задовольняє систему функціональних рівнянь:

$$f(\beta_i + q_i x) = \begin{cases} \delta_{\gamma(i)} + g_{\gamma_i} f(x), \;\text{якщо}\; i \in A_5 \setminus 2, \\ \delta_{\gamma(i)} + g_{\gamma_i} f(I(x)), \;\text{якщо}\; i = 2, \end{cases}$$

де $I(x) = I(\Delta^{Q_5}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k\ldots}) = \Delta^{Q_5}_{[4-\alpha_1][4-\alpha_2]\ldots[4-\alpha_k]\ldots}$.

4. Для графіка функції f має місце властивість: $f(I(x)) = I(f(x))$.
5. Якщо $y_0 = \Delta^{G_3}_{d_1 d_2 \ldots d_m (1)}$ $(m \in \mathbb{Z}_0)$, то для множини рівня y_0 має місце рівність:

$$f^{-1}(y_0) = C[Q_5, V] \equiv \{x : \alpha_i(x) \in V = A_5 \setminus \{0,4\},\; i \in \mathbb{N}\},$$

отже, вона має властивості: 1) є континуальною;
2) ніде не щільною множиною; 3) нульової міри лебега.

6. Якщо в G_3-зображенні точки $y_0 = \Delta^{G_3}_{i_1 i_2 \ldots i_k \ldots}$ всі G_3-цифри $i_k \in A_3 \setminus \{1\}$, то множина $f^{-1}(y_0)$ містить єдину точку, зображення якої має наступний вигляд:

$$x = \Delta^{Q_5}_{\alpha_1(x)\alpha_2(x)\ldots\alpha_k(x)\ldots}, \;\text{де}\; \alpha_k(x) = \begin{cases} 0 \;\text{при}\; i_k = 0, \\ 4 \;\text{при}\; i_k = 2. \end{cases}$$

7. Якщо зображення точки $y_0 = \Delta^{G_3}_{\beta_1\beta_2\ldots\beta_k\ldots}$ містить n цифр "1", то множина $f^{-1}(y_0)$ складається з 3^n точок.

2. Розподіли значень функції $Y = f(X)$

Нехай $X = \Delta^{Q_5}_{\eta_1\eta_2\ldots\eta_k\ldots}$ – випадкова величина з незалежними символами η_k свого Q_5-зображення, де $P\{\eta_k = i\} = p_i$, $i \in A_5$, $\sum\limits_{i=0}^{4} p_i = 1$. Вивчимо структуру розподілу випадкової величини $Y = f(X) = \Delta^{G_3}_{\tau_1\tau_2\ldots\tau_k\ldots}$ (де f – узагальнена функція Серпінського) при заданному розподілі аргумента X.

Нагадаємо [7], що *функцією розподілу* випадкової величини ξ називають функцію $F_\xi(x) = P\{\xi < x\}$, а *спектром* $S_{F_\xi} = S_\xi$ функції $F_\xi(x)$ випадкової величини ξ називається множина всіх точок росту $F_\xi(x)$, тобто $S_{F_\xi} = \{x : F_\xi(x+\epsilon) - F_\xi(x-\epsilon) > 0, \forall\epsilon\}$.

Точковим спектром розподілу випадкового елемента $\xi \in R_n$ називається множина $D_\xi = \{u : \mu_\xi(\{u\}) > 0, u \in R_n\}$, де μ_ξ – ймовірнісна міра, що відповідає розподілу ξ, а *спектром* розподілу ξ називається мінімальний замкнений носій міри μ_ξ, тобто множина $S_\xi = \{u : \ \mu_\xi(O_\epsilon(u)) > 0 \, \forall\epsilon > 0\}$, де $O_\epsilon(u)$ – відкрита куля в R_n радіуса ϵ з центром в точці u.

Якщо існує скінченна або зліченна множина E така, що $\mu_\xi(E) = 1$, то розподіл ξ називається *чисто дискретним*, якщо ж $\mu_\xi(\{u\}) = 0$ для довільного $u \in R_n$, то – *неперервним.* Якщо $0 < \mu_\xi(D_\xi) < 1$, то розподіл ξ називається *сумішшю* дискретного і неперервного.

Лема 1. *Якщо $p_2 = 0$, то G_3-символи τ_k випадкової величини $Y = f(X)$ є незалежними і мають місце рівності:*

$$P\{\tau_k = 0\} = p_0, \ P\{\tau_k = 2\} = p_4, \ P\{\tau_k = 1\} = p_1 + p_3.$$

Доведення. Нехай $p_2 = 0$, тоді носієм розподілу випадкової величини X є множина $C[Q_5, V]$, де $V = \{0, 1, 3, 4\}$. Згідно означення функції f, якщо $\alpha_k \in V$ для всіх $k \in \mathbb{N}$, то $c_k = 0$, а $\beta_k(f(x)) = \gamma(\alpha_k(x))$. Тому:

$$P\{\tau_k = 0\} = P\{\eta_k = 0\} = p_0, \ P\{\tau_k = 2\} = P\{\eta_k = 4\} = p_4,$$

$$P\{\tau_k=1\} = P\{\eta_k=1 \vee \eta_k=3\} = P\{\eta_k=1\} + P\{\eta_k=3\} = p_1 + p_3,$$

що і треба було довести. □

Наслідок 2. *Якщо $p_1 = p_2 = p_3 = 0$, то Y є випадковою величиною з незалежними G_3-символами і виконуються наступні рівності:*

$$P\{\tau_k = 0\} = P\{\eta_k = 0\} = p_0,\ P\{\tau_k = 2\} = P\{\eta_k = 4\} = p_4.$$

Лема 3. *Якщо $p_0 = p_4 = 0$, то розподіл випадкової величини $Y = f(X) = \Delta^{G_3}_{\tau_1\tau_2\ldots\tau_k\ldots}$ є чисто дискретним і точка $y_0 = \Delta^{G_3}_{(1)}$ є атомом розподілу.*

Доведення. Нехай $p_0 = p_4 = 0$, тоді носієм розподілу випадкової величини X є множина $\{1, 2, 3\}$, тому

$$P\{\tau_k = 1\} = P\{\eta_k = 1\}+P\{\eta_k = 2\}+P\{\eta_k = 3\} = p_1+p_2+p_3 = 1,$$

що і треба було довести. □

Лема 4. *Якщо виконується одна з умов:*

1) $p_1 = p_2 = 0$ і $p_0 = p_4 = g_0 = g_4$;

2) $p_2 = p_3 = 0$ і $p_0 = p_4 = g_0 = g_4$;

3) $p_1 = p_2 = p_3 = 0$ і $p_0 = p_4 = \frac{1}{2}$,

то випадкові величини X та Y мають однаковий неперервний розподіл на $[0; 1]$.

Доведення.

Розглянемо кожен випадок окремо.

1) Нехай $p_1 = p_2 = 0$, тоді носієм розподілу випадкової величини X є множина $A_5 \setminus \{1, 2\}$, тоді згідно формул (3)-(**??**) маємо:

$$P\{\tau_k = 0\} = P\{\eta_k = 0\} = p_0,\ P\{\tau_k = 2\} = P\{\eta_k = 4\} = p_4,$$

$$P\{\tau_k = 1\} = P\{\eta_k = 3\} = p_3;$$

Враховуючи, що $p_0 = p_4 = g_0 = g_4$, маємо

$$P\{Y \in \Delta^{G_3}_{\beta_1\beta_2\ldots\beta_k}\} = \prod_{i=1}^{k} g_i = \prod_{i=1}^{k} p_i = P\{X \in \Delta^{Q_5}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k}\}.$$

Випадок 2) розглядається аналогічно до попереднього.

3) Нехай $p_1 = p_2 = p_3 = 0$, тоді носієм розподілу випадкової величини X є множина $A_5 \setminus \{1,2,3\}$, тому:

$$P\{\tau_k = 0\} = P\{\eta_k = 0\} = p_0 = \frac{1}{2}, P\{\tau_k = 2\} = P\{\eta_k = 4\} = p_4 = \frac{1}{2},$$

$$P\{\tau_k = 1\} = P\{\eta_k = 1\} + P\{\eta_k = 2\} + P\{\eta_k = 3\} = 0;$$

Таким чином,

$$P\{Y \in \Delta^{G_3}_{\beta_1\beta_2\ldots\beta_k}\} = \frac{1}{2^k} = P\{X \in \Delta^{Q_5}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k}\}.$$

□

Лема 5. *Якщо $p_0 = p_4 = 0$, то розподіл випадкової величини $Y = f(X)$ є виродженим.*

Доведення. Нехай $p_0 = p_4 = 0$, тоді носієм розподілу випадкової величини X є множина $\{1,2,3\}$, тому:

$$P\{\tau_k = 1\} = P\{\eta_k = 1\}+P\{\eta_k = 2\}+P\{\eta_k = 3\} = p_1+p_2+p_3 = 1,$$

що і треба було довести. □

Література

[1] *Bush K.A.* Continuous functions without derivatives // Amer. Math. Monthly. — 1952. — 59, no. 4. — P. 222-225.

[2] *Peter R. Massopust,* Fractal functions, fractal surfaces, and wavelets. — Academic Press; 1 edition (January 18, 1995), 383 p.

[3] *Pratsiovytyi M., Vasylenko N.* Fractal properties of functions defined in terms of Q-representation // Int. Journal of Math. Analysis, Vol. 7, 2013. – № 64. – P. 3155-3169.

[4] *Sierpiński W.* Arytmetyczny przykład funkcji ciągłej, nieróżniczkowalnej // Wektor. – 1914. – №8. – P. 337–343.

[5] *Schweiger F.* Ergodic theory of fibred systems and metric number theory. – Oxford: Clarendon Press. – 1995. – 320 p.

[6] *Jarnicki M., Pflug P.* Continuous nowhere differentiable function. The Monsters of Analysis // Springer Monographs in Mathematics — 2015. — 299 p.

[7] *Працьовитий М. В.* Фрактальний підхід у дослідженнях сингулярних розподілів. – Київ: Вид-во НПУ імені М. П. Драгоманова. – 1998. – 296 с.

[8] *Працьовитий М. В., Калашніков А. В.* Про один клас неперервних функцій зі складною локальною будовою, більшість з яких сингулярні або недиференційовні // Труды ИПММ НАН Украины. – 2011. – Том 23. – С. 180-191.

[9] *Турбин А. Ф., Працевитый Н. В.* Фрактальные множества, функции, распределения. – К.: Наукова думка. – 1992. – 208 с.

[10] *Працьовитий М. В.* Структура доскональних множин і сингулярних розподілів ймовірностей в R_n // Науковий часопис НПУ імені М.П. Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки. – К.: НПУ імені М. П. Драгоманова. – 2009. – С. 179–189.

[11] *Працьовитий М. В., Василенко Н. А.* Недиференційовна функція, що є одним з узагальнень відомої функції Серпінського // Науковий часопис НПУ імені М.П. Драгоманова. Серія 1, Фізико-математичні науки. – Київ: НПУ імені М.П. Драгоманова, 2010. – № 11. – С. 170–181.

[12] *Працьовитий М. В., Василенко Н. А.* Розподіл ймовірностей на графіках одного класу ніде не диференційовних функцій // Труды ИПММ НАН Украины. – 2013. – Т. 26. – С. 159–171.

[13] *Працьовитий М. В., Торбин Г.М.* Случайные величины с независимыми Q^*-знаками // Случайные эволюции: теоретические и прикладные задачи. – Киев: Ин-т математики НАН Украины, 1992 г. – С. 95–104.

[14] *Працьовитий М.В. Поліосновне $\tilde{Q}$-представлення і фрактальні математичні об'єкти з ним пов'язані // Фрактальний аналіз та суміжні питання. — Київ: ІМ НАН України - НПУ імені М.П.Драгоманова. — 1998. — № 2. — С. 14-35.*

[15] *Працьовитий М. В., Ратушняк С.П. Властивості та розподіли значень фрактальних функцій, пов'язаних із Q_2-зображенням дійсних чисел // Теорія ймовірностей та математична статистика. – 2018. – Вип. 2 – С. 187–202.*

[16] *Працьовитий М. В. Ніде не монотонні сингулярні функції // Науковий часопис НПУ імені М.П. Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки. — К.: НПУ імені М.П. Драгоманова. — 2011. — № 12. — С. 24-36.*

[17] *Свинчук О.В., Працьовитий М.В. Розподіли значень однієї сингулярної немонотонної функції канторівського типу // Збірник праць Ін-ту математики НАН України. – 2017. – т. 14. – № 2. – С. 110-121.*

[18] *Лукач Е. Характеристические функции. – М: Наука, 1979. – 424 с.*