Збірник праць Ін-ту математики НАН України 2019, т. 16, № 3, 198–209

УДК 517.51

***М. В. Працьовитий*[1], *Н. В. Черчук*[2], *Ю. Ю. Вовк*[3], *А. В. Шевченко*[4]**

[1] *НПУ імені М. П. Драгоманова, Інститут математики НАН України, Київ; prats4444@gmail.com,*

[2] *НПУ імені М. П. Драгоманова, Київ.*

[3] *Чернігівський обласний інститут післядипломної педагогічної освіти імені К.Д. Ушинського, Чернігів; freeeidea@ukr.net*

Ніде не монотонні функції, пов'язані з зображеннями чисел рядами Кантора

In the paper, we study properties of two continuous nowhere monotonic functions such that their argument is represented in Cantor numeral system with a sequence of natural bases (s_k), where $s_k = 2k + 1$, and value of the function is determined by a chain dependence of digits of Q_s-representation of a number on digits of representation of the argument.
Key words: Cantor numeral system, Q_s-representation of a number, continuous nowhere monotonic function, cylindrical sets, basic metric relation.

У роботі вивчаються властивості двох неперервних ніде не монотонних функцій, аргумент яких представлений у канторівській системі числення з послідовністю натуральних основ (s_k), де $s_k = 2k+1$, а значення функції визначається ланцюговою залежністю цифр Q_s-зображення числа від цифр зображення аргументу.
Ключові слова: канторівська система числення, Q_s-зображення числа, неперервна ніде не монотонна функція, циліндричні множини, основне метричне відношення.

Вступ

Більшість у топологічному сенсі функцій з метричного простору $C_{[0;1]}$ є ніде не монотонними і навіть недиференційовними [9]. Разом з цим загальна аналітична теорія таких функцій є мало розвинутою. В ній перевага надається яскравим прикладам з поглибленим вивченням їх варіаційних, структурних і фрактальних властивостей [3], [4]. З цією метою використовують різні системи зображення чисел, знання геометрії яких спрощує формальне задання функцій і їх аналітичне вивчення.

У цій роботі вивчаються дві неперервні ніде не монотонні функції з різними способами задання. Функції залежні від параметрів, які набувають значень з континуальної множини. Перша функція – аналог Трибін-функції, що вивчалася в роботах [1], [10], [11], [18], [14], [13], а друга – аналог функції Серпінського [3], [7], [8], [12]. Для задання функцій використовуються канторівські зображення чисел з послідовністю різних основ і Q_s-зображення, яке є узагальненням s-кового зображення. Коротко зупинимось на ключових поняттях, які стосуються двох вказаних зображень чисел.

Нехай задано послідовність натуральних чисел $s_k = 2k+1$, $k \in \mathbb{N}$, яку називатимемо послідовністю основ; послідовність алфавітів $A_{s_k} = \{0, 1, \ldots, s_k - 1\}$ і простір $L = A_1 \times \ldots \times A_k \times \ldots$ – послідовностей елементів алфавітів.

Відомо [2], що для будь-якого числа $x \in [0;1]$ існує послідовність $(a_n) \in L$ така, що

$$x = \frac{a_1}{s_1} + \frac{a_2}{s_1 s_2} + \ldots \frac{a_k}{s_1 s_2 \ldots s_k} + \ldots = \Delta^{(s_k)}_{a_1 a_2 \ldots a_k \ldots} \qquad (1)$$

Розклад числа x в ряд (1) називається його представленням рядом Кантора [2], а скорочений запис $\Delta^{(s_k)}_{a_1 a_2 \ldots a_k \ldots}$ ряду і його суми — (s_k)–зображенням. Деякі числа мають два (s_k)-зображення:

$$\Delta^{(s_k)}_{a_1 \ldots a_m (0)} = \Delta^{(s_k)}_{a_1 \ldots a_{m-1} [a_m - 1][s_{m+1}-1][s_{m+2}-1]\ldots} \equiv \Delta^{(s_k)}_{a_1 \ldots [a_m - 1](s_{m+k}-1)}.$$

Вони називаються (s_k)-*бінарними*. Решта чисел мають єдине (s_k)-зображення і називаються (s_k)-*унарними*.

Нехай задано ймовірнісний вектор Q_s з додатними координатами $(q_0, q_1, \ldots, q_{s-1})$. Розклад числа

$$[0;1] \ni x = \beta_{\alpha_1(x)} + \sum_{k=2}^{\infty} \left(\beta_{\alpha_k(x)} \prod_{j=1}^{k-1} q_{\alpha_j(x)} \right) \equiv \Delta^{Q_s}_{\alpha_1(x) \alpha_2(x) \ldots \alpha_k(x) \ldots},$$

де $\alpha_k(x) \in A_s \equiv \{0, 1, \ldots, s-1\}$, $\beta_0 = 0$, $\beta_i = \sum\limits_{j=0}^{i-1} q_j$ називається Q_s-розкладом [6], а його скорочений запис $\Delta^{Q_s}_{\alpha_1(x)\alpha_2(x)\ldots\alpha_k(x)\ldots}$ – Q_s-зображенням числа x.

Означення 1. *Нехай* $(c_1, c_2, \ldots, c_m)$ *– упорядкований набір елементів алфавіту* A_s. Q_s*-циліндром рангу* m *із основою* $c_1 c_2 \ldots c_m$ *називається множина* $\Delta^{Q_s}_{c_1 c_2 \ldots c_m}$ *усіх чисел* $x \in [0,1]$*, які мають таке* Q_s*-зображення:* $x = \Delta^{Q_s}_{c_1 c_2 \ldots c_m \alpha_{m+1} \ldots \alpha_{m+k} \ldots}$, $\alpha_{m+k} \in A_s$.

Q_s-циліндр $\Delta^{Q_s}_{c_1 c_2 \ldots c_m}$ є відрізком $[\Delta^{Q_s}_{c_1 c_2 \ldots c_m (0)}; \Delta^{Q_s}_{c_1 c_2 \ldots c_m (s-1)}]$; $\Delta^{Q_s}_{c_1 \ldots c_m} = \Delta^{Q_s}_{c_1 \ldots c_m 0} \cup \ldots \cup \Delta^{Q_s}_{c_1 \ldots c_m [s-1]}$; ; довжина циліндра $|\Delta^{Q_s}_{c_1 c_2 \ldots c_m}| = \prod\limits_{i=1}^{m} q_{c_i}$; $|\Delta^{Q_s}_{c_1 \ldots c_m i}| = q_i |\Delta^{Q_s}_{c_1 \ldots c_m}|$.

Циліндр $\Delta^{(s_k)}_{c_1\ldots c_m}$ з основою $(c_1,\ldots,c_m)$, $c_k \in A_{s_k}$, що відповідає (s_k)-зображенню, є відрізком $[\Delta^{(s_k)}_{c_1\ldots c_m(0)}; \Delta^{(s_k)}_{c_1\ldots c_m([s_{m+k}-1])}]$, який має довжину $|\Delta^{(s_k)}_{c_1\ldots c_m}| = \frac{1}{s_1\cdot s_2\cdot\ldots\cdot s_m}$.

Оператор лівостороннього зсуву цифр Q_s-зображення чисел означується рівністю: $\omega(\Delta^{Q_s}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k\ldots}) = \Delta^{Q_s}_{\alpha_2\ldots\alpha_k\ldots}$;

$$\omega^n(\Delta^{Q_s}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k\ldots}) = \omega(\omega^{n-1}(\Delta^{Q_s}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k\ldots})) = \Delta^{Q_s}_{\alpha_{n+1}\ldots\alpha_{n+k}\ldots}.$$

1. Аналог Трибін-функції

На відрізку $[0;1]$ розглянемо функцію f, означену рівністю:

$$f(\Delta^{(s_k)}_{a_1a_2\ldots a_k\ldots}) = \beta_{\gamma_1} + \sum_{k=2}^{\infty}\left(\beta_{\gamma_k}\prod_{j=1}^{k-1} q_{\gamma_j}\right) = \Delta^{Q_2}_{\gamma_1\gamma_2\ldots\gamma_k\ldots}, \qquad (2)$$

де $\beta_0 = 0$, $\beta_1 = q_0$,

$$\gamma_1 = \begin{cases} 0, \text{ якщо } \alpha_1(x) = 0, \\ 1, \text{ якщо } \alpha_1(x) \neq 0; \end{cases} \qquad (3)$$

$$\gamma_{k+1} = \begin{cases} \gamma_k, \text{ якщо } \left[\begin{array}{l}\alpha_{k+1}(x) = \alpha_k(x), \\ (\alpha_k(x), \alpha_{k+1}(x)) = (s_k - 1, s_{k+1} - 1);\end{array}\right. \\ 1 - \gamma_k, \text{ якщо } \alpha_{k+1}(x) \neq \alpha_k(x). \end{cases} \qquad (4)$$

Лема 1. *Дане означення функції f рівністю* (2) *є коректним в кожній точці відрізка* $[0;1]$, *і в тих, що мають єдине зображення, і в тих, що мають два зображення.*

Доведення. Для доведення твердження досить показати, що рівність (2) від двох рівних зображень (s_k)-бінарних точок дає рівні значення. З цією метою розглянемо довільну (s_k)-бінарну точку

$x_1 \equiv \Delta^{(s_k)}_{c_1 \ldots [c_m - 1](s_{m+k}-1)} = \Delta^{(s_k)}_{c_1 \ldots c_m(0)} \equiv x_2$ і модуль різниці

$$|f(x_1) - f(x_2)| = \left| f(\Delta^{(s_k)}_{c_1 \ldots c_{m-1}[c_m-1](s_{m+k}-1)}) - f(\Delta^{(s_k)}_{c_1 \ldots c_{m-1} c_m(0)}) \right| =$$

$$= P_{m-1} \left| \Delta^{Q_2}_{b_m b_{m+1} \ldots} - \Delta^{Q_2}_{b'_m b'_{m+1} \ldots} \right|, \text{ де } P_{m-1} = \prod_{j=1}^{m-1} q_{b_j}$$

Можливі випадки

1) $c_m(x_1) = c_{m-1} \neq c_m(x_2)$;
2) $c_m(x_1) \neq c_{m-1} = c_m(x_2)$;
3) $(c_{m-1}, c_m(x_2)) = (s_{m-1} - 1, s_m - 1)$;
4) $c_m(x_1) \neq c_{m-1} \neq c_m(x_2)$.

Розглянемо кожен випадок окремо.

1) Нехай $c_m(x_1) = c_{m-1} \neq c_m(x_2)$, тоді $b_m = b_{m-1}$, $b_{m+k} = 1 - b_m$, $b'_m = 1 - b_{m-1}$, $b'_{m+k} = 1 - b'_m = b_m$, $k \in \mathbb{N}$. Тоді

$$|f(x_1) - f(x_2)| = P_{m-1} \left| \Delta^{Q_2}_{b_m(1-b_m)} - \Delta^{Q_2}_{[1-b_m](b_m)} \right| =$$
$$= P_{m-1} \left| \beta_{b_m} + \frac{q_{b_m}\beta_{[1-b_m]}}{1 - q_{[1-b_m]}} - \beta_{[1-b_m]} - \frac{q_{[1-b_m]}\beta_{b_m}}{1 - q_{b_m}} \right| =$$
$$= P_{m-1} \left| \beta_{b_m} + \frac{q_{b_m}\beta_{[1-b_m]}}{q_{b_m}} - \beta_{[1-b_m]} - \frac{q_{[1-b_m]}\beta_{b_m}}{q_{[1-b_m]}} \right| = 0;$$

2) Доведення випадку, коли $c_m(x_1) \neq c_{m-1} = c_m(x_2)$ аналогічне до 1).

3) Нехай $(c_{m-1}, c_m(x_2)) = (s_{m-1} - 1, s_m - 1)$. Тоді, згідно формул (4), маємо $b'_m = b_{m-1}$, $b'_{m+k} = 1 - b_{m-1}$, $b_m = 1 - b_{m-1}$, $b_{m+k} = b_{m-1}$. Звідки отримаємо, що $f(x_1) = f(x_2)$.

4) Нехай тепер $c_m(x_1) \neq c_{m-1} \neq c_m(x_2)$, тоді $b_m = 1 - b_{m-1}$, $b_{m+k} = 1 - b_m = b_{m-1}$, $b'_m = 1 - b_{m-1}$, $b'_{m+k} = 1 - b'_m = b_{m-1}$, $k \in \mathbb{N}$. З останнього слідує, що $f(x_1) = f(x_2)$.

Що і треба було довести. □

Лема 2. *Функція f є неперервною в кожній точці відрізка* $[0; 1]$.

Доведення. Нехай $[0;1] \ni x_0$ – довільна точка. Для доведення твердження досить показати, що $\lim\limits_{x \to x_0} |f(x) - f(x_0)| = 0$.

Якщо x_0 – (s_k)-унарна точка, то для довільного $x \in [0;1]$ існує номер $m = m(x)$ такий, що $(\alpha_{m-1}, \alpha_m) \neq (s_{m-1}, s_m)$ і виконується:

$$\begin{cases} \alpha_i(x) = \alpha_i(x_0), i = \overline{1, m-1}, \\ \alpha_m(x) \neq \alpha_m(x_0); \end{cases}$$

зрозуміло, що при $m \to \infty$ виконується $x \to x_0$. Таким чином

$$|f(x) - f(x_0)| = \left| \sum_{i=m}^{\infty} \left(\beta_{\gamma_i(y)} \prod_{j=1}^{i-1} q_{\gamma_j(y)} \right) - \sum_{i=m}^{\infty} \left(\beta_{\gamma_i(y_0)} \prod_{j=1}^{i-1} q_{\gamma_j(y_0)} \right) \right| =$$

$$= \prod_{j=1}^{m-1} q_{\gamma_j(y)} \left| \sum_{i=m}^{\infty} \left(\beta_{\gamma_i(y)} \prod_{j=m}^{i-1} q_{\gamma_j(y)} \right) - \sum_{i=m}^{\infty} \left(\beta_{\gamma_i(y_0)} \prod_{j=m}^{i-1} q_{\gamma_j(y_0)} \right) \right| <$$

$$< \prod_{j=1}^{m-1} q_{\gamma_j(y)} \leq (\max\{q_0, 1 - q_0\})^{m-1} \to 0 \text{ при } m \to \infty.$$

Нехай тепер x_0 – (s_k)-бінарна точка вигляду $\Delta^{(s_k)}_{c_1 \ldots [c_m - 1](s_{m+k} - 1)} = x_0 = \Delta^{(s_k)}_{c_1 \ldots c_m (0)}$, то для доведення неперервності функції f зліва треба використати (s_k)-зображення $x = \Delta^{(s_k)}_{c_1 \ldots [c_m - 1](s_{m+k} - 1)}$, а справа – (s_k)-зображення $x = \Delta^{(s_k)}_{c_1 \ldots c_m (0)}$ і повторити аналогічні, як і для (s_k)-унарної точки, міркування. □

Лема 3. *Функція f є ніде не монотонною на* $[0;1]$.

Доведення. Для доведення твердження покажемо, що функція f не має жодного, як завгодно малого, проміжку монотонності. Обчислимо приріст μ_f функції f на циліндрі $\Delta^{(s_k)}_{c_1 c_2 \ldots c_m}$ рангу m

$$\mu_f(\Delta^{(s_k)}_{c_1 c_2 \ldots c_m}) = f(\Delta^{(s_k)}_{c_1 c_2 \ldots c_m (s_{m+k} - 1)}) - f(\Delta^{(s_k)}_{c_1 c_2 \ldots c_m (0)}) =$$

$$= \begin{cases} (-1)^{\gamma_m+1}\prod\limits_{k=1}^{m} q_{\gamma_k}, \text{ якщо } c_m = s_m - 1, \\ (-1)^{\gamma_m}\prod\limits_{k=1}^{m} q_{\gamma_k}, \text{ якщо } c_m = 0, \\ 0, \text{ якщо } c_m \in A_m \setminus \{0, s_m - 1\}, \end{cases}$$

Легко бачити, що для кожного циліндра $\Delta^{(s_k)}_{c_1c_2\ldots c_m}$ можна вказати циліндр $\Delta^{(s_k)}_{c_1c_2\ldots c_m j} \subset \Delta^{(s_k)}_{c_1c_2\ldots c_m}$ на яких прирости функції f набувають різних знаків. Що і треба було довести. □

2. Аналог функції Серпінського

Визначимо на A_k дискретну функцію

$$\gamma(\alpha) = \begin{cases} 0, \text{ якщо } \alpha = 0, \\ 1, \text{ якщо } \alpha \in A_k \setminus \{0, s_k - 1\}, \\ 2, \text{ якщо } \alpha = s_k - 1. \end{cases} \tag{5}$$

Для кожної послідовності $(\alpha_k) \in L \equiv A_k^\infty = A_k \times A_k \times \ldots$ визначимо послідовність (c_k) наступним чином

$$c_1 = c_2 = 0, c_k = \begin{cases} c_{k-1}, \text{ якщо } \alpha_{k-1} \neq \dfrac{s_{k-1}-1}{2}, \\ 1 - c_{k-1}, \text{ якщо } \alpha_{k-1} = \dfrac{s_{k-1}-1}{2}. \end{cases} \tag{6}$$

На відрізку $[0, 1]$ визначимо функцію

$$g(x) = g(\Delta^{(s_k)}_{\alpha_1(x)\alpha_2(x)\ldots\alpha_k(x)\ldots}) = \Delta^{Q_3}_{\beta_1\beta_2\ldots\beta_k\ldots}, \tag{7}$$

де $\beta_k \in A_3 \equiv \{0, 1, 2\}$, причому

$$\beta_1 = \gamma(\alpha_1), \ \ \beta_k = \begin{cases} \gamma(\alpha_k), \text{ якщо } c_k = 0, \\ 2 - \gamma(\alpha_k), \text{ якщо } c_k \neq 0. \end{cases} \tag{8}$$

Лема 4. *Функція g означена коректно в кожній точці відрізка* $[0;1]$.

Доведення. Очевидно, що функція g в (s_k)-унарній точці означена коректно. Покажемо, що вона означена коректно і в (s_k)-бінарній точці. Для цього розглянемо два різних (s_k)-зображення (s_k)-бінарного значення аргумента x:

$$x_1 \equiv \Delta^{(s_k)}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{k-1}\alpha_k(0)} = \Delta^{(s_k)}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{k-1}[\alpha_k-1](s_{k+i}-1)} \equiv x_2.$$

Тоді $g(x_1)=\Delta^{Q_3}_{\beta_1\ldots\beta_{k-1}\beta_k\beta_{k+1}\ldots\beta_{k+n}\ldots}$, $g(x_2)=\Delta^{Q_3}_{\beta_1\ldots\beta_{k-1}\beta^*_k\beta^*_{k+1}\ldots\beta^*_{k+n}\ldots}$.

Тому

$$|g(x_1)-g(x_2)| = \prod_{i=1}^{k-1} q_{\beta_i} |\Delta^{Q_3}_{\beta_k\ldots\beta_{k+n}\ldots} - \Delta^{Q_3}_{\beta^*_k\ldots\beta^*_{k+n}\ldots}|$$

Очевидно, що $c_i(x_1) = c_i(x_2)$ для $i \leq k$. Для $i > k$ розглянемо можливі випадки

1) якщо $c_{k+1}(x_1) = c_k = c_{k+1}(x_2)$, тоді $\alpha_k(x) \in A_k \setminus \{\frac{s_k-1}{2}\}$,

$$\begin{aligned}\beta^*_k&=\beta_k-1 \text{ при } c_k=0,\\ \beta_k&=\beta^*_k-1 \text{ при } c_k=1;\end{aligned} \quad \beta_{k+n}=\begin{cases}0 \text{ при } c_k=0,\\ 2 \text{ при } c_k=1;\end{cases} \quad \beta^*_{k+n}=\begin{cases}0 \text{ при } c_k=1,\\ 2 \text{ при } c_k=0;\end{cases}$$

Таким чином врахувавши, що $\delta_{\beta_k} = \delta_{\beta_{k-1}} + q_{\beta_k-1}$ маємо

$$|g(x_1)-g(x_2)| = \begin{cases} \prod\limits_{i=1}^{k-1} q_{\beta_i} \left|\Delta^{Q_3}_{\beta_k(0)} - \Delta^{Q_3}_{[\beta_k-1](2)}\right| = 0, \\ \prod\limits_{i=1}^{k-1} q_{\beta_i} \left|\Delta^{Q_3}_{[\beta^*_k-1](2)} - \Delta^{Q_3}_{\beta^*_k(0)}\right| = 0; \end{cases}$$

2) якщо $c_{k+1}(x) \neq c_k = c_{k+1}(x^*)$, тоді $\alpha_k(x) = \frac{s_k-1}{2}$ або $\alpha_k(x)-1 = \frac{s_k-1}{2}$. Звідки, використовуючи формулу (7)-(8), маємо $\beta_n = \beta^*_n$ для всіх $n = k, k+1, k+2\ldots$. Тому $g(x) - g(x^*) = 0$.

Аналогічні міркування можна провести для випадка, коли $c_{k+1}(x) = c_k \neq c_{k+1}(x^*)$.

Отже, коректність означення функції в (s_k)-бінарній точці обгрунтовано. □

Лема 5. *Функція g є неперервною на відрізку* $[0;1]$

Доведення. Для доведення неперервності функції g в довільній точці x_0 відрізка $[0,1]$, досить показати, що має місце наступне співвідношення $\lim\limits_{x\to x_0} |g(x)-g(x_0)| = 0$. Доведення проведемо окремо для (s_k)-унарних та (s_k)-бінарних точок.

Нехай x_0 – (s_k)-унарна точка. Тоді для довільного $x \in [0,1]$ існує $m = m(x)$ таке, що

$$\begin{cases} \alpha_j(x) = \alpha_j(x_0), \;\; j = \overline{1, m-1}, \\ \alpha_m(x) \neq \alpha_m(x_0), \end{cases}$$

причому умова $x \to x_0$ рівносильна умові $m \to \infty$. Тоді,

$$g(x) = \Delta^{Q_3}_{\beta_1\beta_2\ldots\beta_{m-1}\beta_m\ldots\beta_{m+k}\ldots}, \quad g(x_0) = \Delta^{Q_3}_{\beta_1\beta_2\ldots\beta_{m-1}\beta'_m\ldots\beta'_{m+k}\ldots}.$$

Таким чином,

$$|g(x)-g(x_0)| = \left|\Delta^{Q_3}_{\beta_1\beta_2\ldots\beta_{m-1}\beta_m\ldots\beta_{m+k}\ldots} - \Delta^{Q_3}_{\beta_1\beta_2\ldots\beta_{m-1}\beta'_m\ldots\beta'_{m+k}\ldots}\right| =$$

$$= \prod_{i=1}^{m-1} q_{\beta_i} \left|\Delta^{Q_3}_{\beta_m\ldots\beta_{m+k}\ldots} - \Delta^{Q_3}_{\beta'_m\ldots\beta'_{m+k}\ldots}\right| \leq \prod_{i=1}^{m-1} q_{\beta_i} \to 0 \text{ при } m \to \infty.$$

Отже, функція g є неперервною в кожній (s_k)-унарній точці.

Для доведення неперервності функції g в (s_k)-бінарній точці $\Delta^{(s_k)}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k(0)} = x_0 = \Delta^{(s_k)}_{\alpha_1\alpha_2\ldots[\alpha_k-1](s_{k+m}-1)}$, досить довести окремо неперервність її зліва і справа у цій точці і повторити попередні міркування, при цьому для доведення першого твердження використати (s_k)-зображення $x_0 = \Delta^{(s_k)}_{\alpha_1\alpha_2\ldots[\alpha_k-1](s_{k+m}-1)}$, а для доведення другого – $x_0 = \Delta^{(s_k)}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k(0)}$. □

Лема 6. *Приріст функції g на циліндрі $\Delta^{(s_k)}_{d_1d_2\ldots d_m}$ визначаеться за формулою* $\mu_g(\Delta^{(s_k)}_{d_1d_2\ldots d_m}) = (-1)^{c_m}\prod\limits_{i=1}^{m} q_{b_i}$.

Доведення. Зафіксуємо циліндр $\Delta^{(s_k)}_{d_1d_2\ldots d_m}$, тоді

$$\mu_g(\Delta^{(s_k)}_{d_1d_2\ldots d_m}) = g(\Delta^{(s_k)}_{d_1d_2\ldots d_m(s_{m+k}-1)}) - g(\Delta^{(s_k)}_{d_1d_2\ldots d_m(0)}) =$$
$$= \begin{cases} \Delta^{Q_3}_{b_1b_2\ldots b_m(2)} - \Delta^{Q_3}_{b_1b_2\ldots b_m(0)} = \prod\limits_{i=1}^{m} q_{b_i}, \text{ якщо } c_m = 0, \\ \Delta^{Q_3}_{b_1b_2\ldots b_m(0)} - \Delta^{Q_3}_{b_1b_2\ldots b_m(2)} = -\prod\limits_{i=1}^{m} q_{b_i}, \text{ якщо } c_m = 1, \end{cases}$$

що і треба було довести. □

Наслідок. *Функція g є ніде не монотонною.*

Зауваження. Принципова відмінність функцій, розглянутих у даній роботі, полягає у різниці їх екстремальних властивостей на циліндрах, при цьому об'єднує їх той факт, що множини рівнів цих функцій є складнішими від їх класичних аналогів і на кожному циліндрі $\Delta^{(s_k)}_{c_1\ldots c_m}$ залежить від A_{s_m}.

У даній роботі ми залишили поза увагою диференціальні властивості функцій. Цікавим об'єктом дослідження є суперпозиція функцій, розглянутих у попередніх пуктах.

Література

[1] *Bush K.A.* Continuous functions without derivatives // Amer. Math. Monthly. — 1952. — 59, no. 4. — P. 222-225.

[2] *Cantor G.* Uber die einfachen Zahlesysteme // Z. Math. Phys. — 1869. — 10, **Bd**. 14. — P. 121-128.

[3] *Jarnicki M., Pflug P.* Continuous nowhere differentiable function. The Monsters of Analysis // Springer Monographs in Mathematics — 2015. — 299 p.

[4] *Peter R. Massopust.* Fractal functions, fractal surfaces, and wavelets. – Academic Press; 1 edition (January 18, 1995), 383 p.

[5] *Турбин А. Ф., Працевитый Н. В.* Фрактальные множества, функции, распределения. – К.: Наукова думка. – 1992. – 208 с.

[6] *Працьовитий М. В.* Фрактальний підхід у дослідженнях сингулярних розподілів. – Київ: Вид-во НПУ імені М. П. Драгоманова. – 1998. – 296 с.

[7] *Sierpiński W.* Arytmetyczny przykład funkcji ciągłej, nieróżniczkowalnej // Wektor. – 1914. – №8. – P. 337-343.

[8] *Pratsiovytyi M., Vasylenko N.* Fractal properties of functions defined in terms of Q-representation // Int. J. of Math. Anal. – 2013. – **7**(64). – P. 3155–3169. doi:10.12988/ijma.2013.311278

[9] *Козырев С. Б.* О топологической густоте извивающихся функций // Мат. заметки.– 1983. — 33, №1.— С. 71-76.

[10] *Коваль В. В.* Самоафінні графіки функцій // Наукові записки НПУ імені М.П. Драгоманова. Фізико-математичні науки. 2004. — № 5.— С. 292-299.

[11] *Панасенко О. Б.* Фрактальна властивості одного класу однопараметричних неперервних недиференційовних функцій // Науковий часопис НПУ імені М.П. Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки. – К.: НПУ імені М.П.Драгоманова. – 2006. – № 7. – С. 160–167.

[12] *Працьовитий М. В., Василенко Н. А.* Недиференційовна функція, що є одним з узагальнень відомої функції Серпінського // Науковий часопис НПУ імені М.П. Драгоманова. Серія 1, Фізико-математичні науки. – Київ: НПУ імені М.П. Драгоманова, 2010. – № 11. – С. 170–181.

[13] *Працьовитий М.В, Калашніков А.В.* Самоафінні сингулярні та ніде не монотонні функції, пов'язані з Q-зображеннями чисел // УМЖ. — 2013, т.65, №3. — С. 381-393.

[14] *Працевитый Н.В.* Непрерывные канторовские проекторы // Методы исследования алгебраических и топологических структур. — Киев: КГПИ, 1989. – С. 95-105.

[15] *Працьовитий М. В.* Фрактальні властивості однієї неперервної ніде не диференційовної функції// Наукові записки НПУ ім. М.П. Драгоманова. Фізико-математичні науки. 2002. – № 3, – С. 351-362.

[16] *Працьовитий М. В.* Системи числення зі змінною основою та змінним алфавітом (або розвинення чисел в ряди Кантора) // Студентські фізико-математичні етюди. – Київ: Вид-во НПУ імені М. П. Драгоманова, 2009. – **10**, №8. – С. 6-18.

[17] *Працьовитий М. В., Свинчук О. В.* Розсіювання значень однієї фрактальної неперервної немонотонної функції канторівського типу // Нелінійні коливання, 2018, Том 21, №1. – С. 116-130.

[18] *Працьовитий М.В., Панасенко О.Б.* Диференціальні і фрактальні властивості одного класу самоафінних функцій // Вісник Львівського університету. Серія механіко-математична. – 2009. – Т. 70. – С. 128-139.

[19] *Ралко Ю.В.* Зображення чисел рядами Кантора та деякі його застосування // Науковий часопис НПУ імені М. П. Драгоманова. Серія 1. Фіз.-мат. науки. – Київ: НПУ імені М. П. Драгоманова. – 2009. – **10**, №10. – С. 132-140.