Збірник праць Ін-ту математики НАН України 2019, т. 16, № 3, 187–197

УДК 517.5+ 519.21

Я. В. Гончаренко[1] ***Є. І. Калашнікова***[2]***,***
С. О. Дмитренко[3]***, Н. А. Василенко***[4]

[1] *НПУ імені М.П. Драгоманова, Київ; yan_a@ukr.net*

[2] *НПУ імені М.П. Драгоманова, Київ; evgeniak885@gmail.com*

[3] *НАПН України, Київ; sergey@inlay.com.ua*

[4] *Інститут математики НАН України, Київ;*
vasylenkonnn@gmail.com

Про розподіл значень однієї сингулярної функції, пов'язаної з зображенням чисел рядами Люрота

In the article we study the distribution of the random variable $Y = F(X)$, where X — is evenly distributed on $[0;1]$ random variable, F — distribution function, the digits of which are positive by the Lurot's rows are independent and equally distributed random variables. The problem of the Lebesgue structure of the distribution Y is solved, the criterion of discreteness (and continuity) of the distribution Y is proved, the conditions under which the distribution is not pure are found.

Key words: Lürot's rows, L-representation of numbers, L-cylinders, lebesgue distribution structure, discrete distribution, continuous distribution, singular distribution, a mixture of distributions of pure Lebesgue types.

Вивчається розподіл випадкової величини $Y = F(X)$, де X — рівномірно розподілена на $[0;1]$ випадкова величина, F — функція розподілу, цифри зображення якої додатним рядом Люрота є незалежними і однаково розподіленими випадковими величинами. Розв'язується задача про лебегівську структуру розподілу Y, доводиться критерій дискретності (і неперервності) розподілу Y, знайдено умови, при яких розподіл не є чистим.
Ключові слова: Ряд Люрота, L-зображення чисел, L-циліндри, лебегівська структура розподілу, дискретний розподіл, неперервний розподіл, сингулярний розподіл, суміш розподілів чистих лебегівських типів.

Вступ

У роботах [5], [12], [13] проведена актуалізація інтересу до розподілів значень функцій зі складною тополого-метричною локальною структурою, зокрема сингулярних функцій (монотоних і немонотонних), неперервних, ніде не монотонних (майже скрізь диференційовних та ніде не диференційовних).

У роботах [5], [10] акцентувалася увага на сингулярних функціях канторівського типу. Вони стосувались зображень чисел засобами скінченного алфавіту. Виявилося, що в цьому класі розподілів природньо виникають суміші дискретних і неперервних розподілів. У цій роботі ми розглядаємо зображення чисел у системі з нескінченним алфавітом, а саме додатними рядами Люрота. Основною задачею, яка розв'язувалась в цих роботах, була задачі про лебегівську структуру розподілу (функції розподілу), а саме: $F_Y = \beta_1 F_Y^d + \beta_2 F_Y^c = \alpha_1 F_Y^d + \alpha_2 F_Y^{ac} + \alpha_3 F_Y^s$, $\beta_i \geq 0$, $\alpha_i \geq 0$, $\beta_1 + \beta_2 = 1 = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$.

Нехай $L = \{1, 2, \ldots, k, \ldots\}$ – алфавіт, $L = A \times A \ldots \times A \times \ldots$ – простір послідовностей елементів алфавіту.

Відомо [1], що для будь-якого числа $x \in (0;1]$ існує послідовність $(a_n) \in L$ така, що

$$x=\frac{1}{a_1+1}+\frac{1}{a_1(a_1+1)(a_2+1)}+\frac{1}{a_1(a_1+1)a_2(a_2+1)(a_3+1)}+$$
$$+\ldots+\frac{1}{a_1(a_1+1)\ldots a_{n-1}(a_{n-1}+1)(a_n+1)}+\ldots=\Delta^L_{a_1\ldots a_k\ldots}.$$

Символічний запис $\Delta^L_{a_1\ldots a_k\ldots}$, що є скороченим записом ряду і його суми, називається L-зображенням числа x, $a_n = a_n(x)$ – його n-ою L-цифрою.

Геометрія L-зображення чисел є добре вивченою [4], [8], [9]. Ключовим поняттям у цій теорії є поняття циліндра. Нагадаємо його зміст.

Нехай $(c_1, c_2, ..., c_m)$ — фіксований набір натуральних чисел. *Циліндром рангу* m з основою $c_1c_2...c_m$ називається множина $\Delta^L_{c_1c_2\ldots c_m}$, яка містить всі числа x такі, що $d_i(x) = c_i$ при $i \leqslant m$, тобто $\Delta^L_{c_1c_2\ldots c_m} = \left\{x : x = \Delta^L_{c_1c_2\ldots c_m d_{m+1}d_{m+2}\ldots},\ d_{m+i} \in \mathbb{N}\right\}$. *Циліндричним відрізком (інтервалом)* рангу m з основою $c_1c_2...c_m$ називається відрізок (інтервал), кінці якого співпадають з кінцями циліндра, вони позначаються $\left[\Delta^L_{c_1c_2\ldots c_m}\right]$ та $\nabla^L_{c_1c_2\ldots c_m}$ відповідно.

Циліндри мають наступні **властивості**:

1. $\Delta^L_{c_1c_2\ldots c_m} = \bigcup\limits_{i_1=1}^{\infty} ... \bigcup\limits_{i_k=1}^{\infty} \Delta^L_{c_1\ldots c_m i_1 i_2\ldots i_k}, \forall k \in N$;

2. $inf\Delta^L_{c_1\ldots c_m i} = max\Delta^L_{c_1\ldots c_m[i+1]}$;

2. Циліндр $\Delta^L_{c_1c_2\ldots c_m}$ є півінтервалом $(A_m; B_m]$ з кінцями

$$A_m = \inf\Delta^L_{c_1\ldots c_m} = \frac{1}{c_1+1}+...+\frac{1}{c_1(c_1+1)...c_{m-1}(c_{m-1}+1)(c_m+1)},$$

$$B_m = \sup\Delta^L_{c_1\ldots c_m} = \max\Delta^L_{c_1\ldots c_m} = A_m+\frac{1}{b_m\cdot 2}+\frac{1}{b_m\cdot 1\cdot 2\cdot 2}+...=A_m+\frac{1}{b_m},$$

де $b_m = c_1(c_1+1)...c_m(c_m+1)$, тобто

$$\Delta^L_{c_1\ldots c_m} = \left(A_m, A_m+\frac{1}{b_m}\right] = \left(A_m, A_m+\frac{1}{c_1(c_1+1)...c_m(c_m+1)}\right].$$

3. Довжина циліндра виражається формулою:

$$|\Delta^L_{c_1\ldots c_m}| = \frac{1}{c_1(c_1+1)...c_m(c_m+1)} = \prod_{i=1}^{m} \frac{1}{c_i(c_i+1)}.$$

Остання рівність є наслідком попередньої властивості.

4. Для довільної послідовності натуральних чисел (c_n) переріз

$$\bigcap_{m=1}^{\infty} \Delta^L_{c_1\ldots c_m} \equiv \Delta^L_{c_1\ldots c_m\ldots}$$

є точкою (числом) з півінтервалу $(0;1]$.

Нехай (ζ_k) — незалежні однаково розподілені випадкові величини, які набувають значень $1, 2, \ldots, n, \ldots$ з ймовірностями $p_1, p_2, \ldots p_n, \ldots$ відповідно. Випадкова величина $\zeta = \Delta^L_{\zeta_1\ldots\zeta_k\ldots}$ має чистий лебегівський тип розподілу [9], причому її функція розподілу аналітично виражається:

$$\mathcal{F}_\zeta(x = \Delta^L_{a_1\ldots a_k\ldots}) = \beta_{a_1(x)} + \sum_{k=2}^{\infty} \left(\beta_{a_k(x)} \prod_{j=1}^{k-1} p_{a_j(x)} \right), \qquad (1)$$

де $\beta_i = p_{i+1} + p_{i+2} + \ldots$, $i \in \mathbb{N}$. Критерії належності розподілу ζ до кожного з чистих лебегівських типів також відомі.

Теорема 1. *[9] Розподіл випадкової величини $\zeta = \Delta^L_{\zeta_1\zeta_2\ldots\zeta_k\ldots}$ цифри L-зображеня якої є незалежними і однаково розподіленими: $P\{\zeta_k = i\} = p_i$ є 1) виродженим дискретним розподілом з одним атомом, коли $\max\limits_i p_i = 1$;*
2) рівномірним, коли $p_i = \frac{1}{i(i+1)}$, $i \in \mathbb{N}$;
3) сингулярно неперервним – в решті випадках, причому сингулярний розподіл канторівського типу, якщо існує $p_i = 0$.

Теорема 2. *[9] Випадкова величина $\xi = \Delta^L_{\xi_1\ldots\xi_k\ldots}$, L-символи ξ_n якої є незалежними і мають розподіли: $\mathrm{P}\{\xi_k = i\} = p_{ik},\ i \in N$,*

має чистий лебегівський тип, причому
1.дискретний — тоді і тільки тоді, коли

$$M = \prod_{k=1}^{\infty} \max_i \{p_{ik}\} > 0;$$

2. абсолютно неперервний — тоді і тільки тоді, коли

$$S = \prod_{k=1}^{\infty} (\sum_{i=1}^{\infty} \sqrt{\frac{p_{ik}}{i(i+1)}}) > 0; \quad (2)$$

3. сингулярний — в решті випадків, тобто, коли $M = 0 = S$.

Теорема 3. *[9] Спектр* S_ξ *(мінімальний замкнений носій) розподілу випадкової величини* ξ *є*
1) відрізком $[0,1]$*, якщо матриця* $||p_{ik}||$ *нулів не містить;*
2) об'єднанням відрізків, якщо матриця $||p_{ik}||$ *містить нулі лише у скінченній кількості стовпців;*
3) ніде не щільною множиною, міра Лебега якої обчислюється за формулою

$$\lambda(S_\xi) = \prod_{k=1}^{\infty} W_k, \quad W_k = \sum_{i:p_{ik}>0} \frac{1}{i(i+1)}, k \in \mathbb{N},$$

якщо матриця $||p_{ik}||$ *містить нулі у нескінченній кількості стовпців.*

Далі з цього класу розглядаються сингулярні розподіли канторівського типу, тобто такі, шо задовольняють умову 3).

1. Розподіл значень функції розподілу ζ при рівномірному розподілі аргумента

Нехай X — рівномірно розподілена на відрізку $[0;1]$ випадкова величина. Розглянемо випадкову величину $Y = \mathcal{F}_\zeta(X)$, коректність її означення є наслідком неперервності функції $\mathcal{F}_\zeta$.

Теорема 4. *Якщо $P\{\zeta_k = a\} = p_a = 0$ і $p_c \neq 0$, коли $c \neq a$, то випадкова величина $Y = \mathcal{F}_\zeta(X)$ має чисто дискретний розподіл з атомами виду:*

$$y = \Delta^L_{c_1 \ldots c_m a(0)} = \beta_{c_1} + \sum_{k=2}^{m} \left(\beta_{c_k} \prod_{i=1}^{k} p_{c_i} \right) + \beta_a \prod_{i=1}^{m} p_{c_i}, \qquad (3)$$

де $a \neq c_i \in \mathbb{N}$.

Доведення. Нехай $x = \Delta^L_{c_1 c_2 \ldots c_m a \ldots}$ довільна фіксована точка, яка належить циліндру $\Delta^L_{c_1 c_2 \ldots c_m a}$, де $a \neq c_i \in \mathbb{N}$.

З виразу (2) функції розподілу випадкової величини ζ бачимо: якщо $p_{c_i} = 0$, то функція розподілу $\mathcal{F}_\zeta$ на кожному з циліндрів $\Delta^L_{c_1 c_2 \ldots c_m}$ є сталою. З цього випливає, що образи усіх точок циліндра $\Delta^L_{c_1 c_2 \ldots c_m a}$ під дією функції $\mathcal{F}_\zeta(X)$ збігаються, тобто циліндр $\Delta^L_{c_1 c_2 \ldots c_m a}$ відображається в одну точку $y_0 = \mathcal{F}_\zeta(\Delta^L_{c_1 \ldots c_m a(1)})$.

Оскільки X має рівномірний на $[0;1]$ розподіл, то ймовірність циліндра $\Delta^L_{c_1 c_2 \ldots c_m a}$ дорівнює його довжині, тобто:

$$P\{Y = y_0\} = P\left\{X \in \Delta^L_{c_1 c_2 \ldots c_m a}\right\} = \frac{1}{a(a+1)} \prod_{i=1}^{m} \frac{1}{c_i(c_i+1)}, \quad (4)$$

$\mathcal{F}_\zeta(\Delta^L_{c_1 \ldots c_m a}) = y_0$.

Знайдемо суму S довжин усіх циліндрів виду $\left|\Delta^L_{c_1 c_2 \ldots c_m a}\right|$, де $c_i \neq a$, $i = \overline{1, m}$, тобто

$$S = \sum_{c_i \neq a,\, m=1}^{\infty} \left|\Delta^L_{c_1 \ldots c_m a}\right| = \sum_{m=1}^{\infty} \left(\sum_{c_1 \neq a} \cdots \sum_{c_m \neq a} \Delta^L_{c_1 \ldots c_m a} \right).$$

Враховуючи формулу (4), маємо:

$$\left|\Delta^L_a\right| = \frac{1}{a \cdot (a+1)},$$

$$\left|\Delta^L_{c_1 a}\right| = \frac{1}{a(a+1)} \left(\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \ldots + \frac{1}{(a-1)a} + \frac{1}{(a+1)(a+2)} + \ldots \right) =$$

$$= \frac{1}{a(a+1)}\left(1-\frac{1}{a(a+1)}\right).$$

За індукцією, отримаємо

$$\left|\Delta^L_{c_1c_2\ldots c_{k-1}c_ka}\right| =$$
$$=\frac{1}{a(a+1)}\sum_{c_1=1}^{\infty}\cdots\sum_{c_{k-1}=1}^{\infty}\sum_{c_k=1}^{\infty}\frac{1}{c_1(c_1+1)\cdot\ldots\cdot c_{k-1}(c_{k-1}+1)\cdot c_k(c_k+1)}=$$
$$=\frac{1}{a(a+1)}\left(1-\frac{1}{a(a+1)}\right)^k.$$

Тоді S, як сума нескінченно спадної геометричної прогресії зі знаменником $1-\dfrac{1}{a(a+1)}$, дорівнює 1.

Враховуючи, що сумарна маса всіх атомів розподілу Y дорівнює 1, робимо висновок про його дискретність. □

2. Розподіл значень функції розподілу ξ при рівномірному розподілі аргумента

Нехай X — рівномірно розподілена на відрізку $[0;1]$ випадкова величина. Розглядається випадкова величина $Z=\mathcal{F}_\xi(X)$, коректність її означення є наслідком неперервності функції $\mathcal{F}_\xi$.

Теорема 5. *Якщо ξ – неперервна випадкова величина, спектр S_ξ якої має додатну міру Лебега, меншу 1, то розподіл випадкової величини $Z=F_\xi(X)$ є сумішшю дискретного і неперервного розподілів, причому в окремих випадках сумішшю дискретного і сингулярного або дискретного і абсолютно неперервного.*

Доведення. Оскільки $0<\lambda(S_\xi)<1$, то сумарна довжина l проміжків сталості функції додатна, але менша 1. А отже, сума мас атомів розподілу Z дорівнює l. Отже, розподіл Z має нетривіальні дискретну (оскільки розподіл атоми має) і неперервну (оскільки сума мас атомів менша 1) компоненту, тобто є сумішшю дискретного і неперервного розподілів. □

Наведемо приклади сумішей розподілів. З цією метою дамо інше виведення формули для обчислення міри Лебега спектра розподілу випадкової величини ξ.

Нехай F_k – об'єднання циліндрів рангу k, серед внутрішніх точок яких є точки спектра S_ξ. Тоді

$$S_\xi = \bigcap_{k=1}^{\infty} F_k = \lim_{k\to\infty} F_k \text{ і } \lambda(F_k) = \frac{\lambda(F_k)}{\lambda(F_{k-1})} \cdot \frac{\lambda(F_{k-1})}{\lambda(F_{k-2})} \cdot \ldots \cdot \frac{\lambda(F_1)}{\lambda(F_0)},$$

де $F_0 = [0;1]$, а тому

$$\lambda(S_\xi) = \lim_{k\to\infty} \lambda(F_k) = \lim_{k\to\infty} \prod_{i=0}^{k} \frac{\lambda(F_i)}{\lambda(F_{i-1})} = \prod_{i=0}^{\infty} \frac{\lambda(F_i)}{\lambda(F_{i-1})}.$$

Нехай $F_k \setminus F_{k+1} = \overline{F}_{k+1}$. Тоді $F_{k+1} = F_k \setminus \overline{F}_{k+1}$,
$\lambda F_{k+1} = \lambda(F_k) - \lambda(\overline{F}_{k+1})$ і

$$\prod_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda(F_{k-1}) - \lambda(\overline{F}_k)}{\lambda(F_{k-1})} = \prod_{k=1}^{\infty} (1 - \frac{\lambda(\overline{F}_k)}{\lambda(F_{k-1})}).$$

Наслідком з наведених дедуктивних міркувань є твердження.

Лема 6. *Міра Лебега спектра розподілу випадкової величини ξ обчислюється за формулою*

$$\lambda(S_\xi) = \prod_{k=1}^{\infty} (1 - \frac{\lambda(\overline{F}_k)}{\lambda(F_{k-1})}),$$

де F_k – об'єднання циліндрів рангу k, серед внутрішніх точок яких є точки спектра S_ξ, $\overline{F}_{k+1} = F_{k+1} \setminus F_k$.

Наслідок 7. *Міра Лебега спектра S_ξ розподілу випадкової величини ξ дорівнює нулю тоді і тільки тоді, коли розбігається ряд*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda(\overline{F}_k)}{\lambda(F_{k-1})}$$

Приклад 1. (Суміш дискретного та сингулярного розподілів) Нехай $0 = p_{21} = p_{2^2 2} = \ldots = p_{2^k k} = \ldots$; при $i \neq 2^k$

$$p_{ik} = \begin{cases} \dfrac{1}{2^i} \text{ при } i < 2^k, \\ \dfrac{1}{2^{i-1}} \text{ при } i > 2^k. \end{cases}$$

Справді, сума довжин інтервалів сталості функції розподілу F_ξ обчислюється за формулою $l = 1 - \prod\limits_{k=1}^{\infty}(1 - \frac{1}{2^k(2^k+1)})$, але останній добуток P лежить в межах $0 < P < \frac{5}{6}$. Тому сума мас атомів більше $\frac{1}{6}$, але менша 1.

Розподіл випадкової величини ξ при заданих умовах є сингулярним розподілом квазіканторівського типу [10].

Приклад 2. (Суміш дискретного і абсолютно неперервного розподілів) Нехай $0 = p_{21} = p_{2^2 2} = \ldots = p_{2^k k} = \ldots$; при $i \neq 2^k$

$$p_{ik} = \begin{cases} \dfrac{1}{i(i+1)} \text{ при } i < 2^k, \\ \dfrac{1}{(i-1)i} \text{ при } i > 2^k. \end{cases}$$

Справді, нетривіальність дискретної компоненти розподілу Z обгрунтовано у прикладі 1. Абсолютна неперервність розподілу випадкової величини ξ випливає з теореми 2. Нетривіальність абсолютно неперервної компоненти розподілу Z є наслідком того, що відображеня φ спектра S_ξ у відрізок $[0, 1]$, яке дає функцію розподілу F_ξ, зберігає міру Лебега.

Зауважимо, що неперервні компоненти у прикладах 1 та 2 мають розподіли, аналогічні до розподілів випадкових величин, які розглядались у роботах [11], [7].

Залишається відкритим питання про існування нетривіальної суміші сингулярного та абсолютно неперервного розподілів.

Література

[1] *Lüroth J.* Uber eine eindeutige Entwickelung von Zahlen in eine unendliche Reihe //Math.Ann. – 1883. – Vol. 21. – P. 411–423.

[2] *Pratsiovytyi M., Khvorostina Yu.* Topological and metric properties of distributions of random variables represented by the alternating Lüroth series with independent elements // Random Oper. Stoch. Equ. – 2013. – Vol. 21, no. 4. – P. 385–401.

[3] *Pratsovytyi M.V., Lechinskii O.L.* Properties of random variable defined by the distributions of elements of their -representation // Theor. Probability and Math. Statist. No.57, 1998. – P.143-148.

[4] *Zhykharyeva Yu., Pratsiovytyi M.* Expansions of numbers in positive Lüroth series and their applications to metric, probabilistic and fractal theories of numbers// Algebra and Discrete Mathematics. – Vol.14. – 2012. – no. 1. – P. 145-160.

[5] *Pratsiovytyi M., Lysenko I., Voitovska O.* Distribution of values of classic singular Cantor function of random argument // Random Operators and Stochastic Equations. – 2018. – Vol. 26, no.4. – P.193-200.

[6] *Кац М.* Статистическая независимость в теории вероятностей, анализе и теории чисел (пер. с. англ.) — М.:Из-во иностранной литературы, — 1963. — 156 с.

[7] *Гончаренко Я.В., Лисенко І.М.* Геометрія нескінченно-символьного q_0^∞-зображення дійсних чисел та її застосування у метричній теорії чисел// Науковий часопис НПУ імені М. П. Драгоманова, Серія 1. Фізико-математичні науки. К.: – НПУ імені М. П. Драгоманова, 2013. – №15. – С.63-82.

[8] *Жихарева Ю.І.* Сингулярні розподіли ймовірностей, повязані з представленнями чисел знакододатними рядами Люрота: автореф. дис. на здобуття наук. ступеня канд. фіз-мат. наук: спец.: 01.01.05 "теорія ймовірностей і математична статистика"/ Ю.І. Жихарєва. – Донецьк, 2014. – 20 с.

[9] *Жихарева Ю.І., Працьовитий М.В.* Властивості розподілу випадкової величини, L-символи якої в зображенні знакододатним рядом Люрота, є незалежними // Труды ИПММ НАН Украины. – 2011. – Т. 23. – С. 71–83.

[10] *Працьовитий М.В.* Фрактальний підхід у дослідженнях сингулярних роподілів. — Київ: НПУ імені М.П. Драгоманова, 1998 — 296с.

[11] *Працьовитий М.В.* Геометрія дійсних чисел у їх кодуваннях засобами нескінченного алфавіту як основа топологічних, метричних, фрактальних і ймовірнісних теорій // Науковий часопис НПУ імені М.П. Драгоманова, Серія 1. Фізико-математичні науки. – К.: – НПУ імені М.П. Драгоманова, 2013. – №14. – С.189-216.

[12] *Працьовитий М.В., Ратушняк С.П.* Властивості та розподіли значень фрактальних функцій, пов'язаних з Q_2-зображенням дійсних чисел // Теорія ймовірностей та математична статистика., Вип. 2(99)/2018. — С. 187–202.

[13] *Працьовитий М. В., Свинчук О. В.* Розсіювання значень однієї фрактальної неперервної немонотонної функції канторівського типу // Нелінійні коливання, 2018., Том 21, №1. – С. 116-130.

[14] *Турбин А.Ф., Працевитый Н.В.* Фрактальные множества, функции, распределения. - Київ: Наукова думка, 1992. - 208 с.

[15] *Хворостіна Ю.В., Працьовитий М.В.* Випадкова величина, символи $\widetilde{L}$-зображення якої є випадковими величинами з марковською залежністю// Теорія ймовірностей та математична статистика. – К. Вид-во ТЙіМС. – 2014. – Вип. 91. – С. 143–153.