Збірник праць Ін-ту математики НАН України 2019, т. 16, № 3, 174–186

УДК 517.5

О. І. Бондаренко, Н. М. Василенко, М. В. Працьовитий

Національний педагогічний університет імені М. П. Драгоманова, Київ; prats444gmail.com

Канторівська двійково-фібоначчієва система числення у задачах теорії функцій

In the article we study a class of continuous functions with locally complicated structure defined in terms of the representation of numbers in the Cantor number system:

$$[0;1] \ni x = \frac{\alpha_1}{s_1} + \frac{\alpha_2}{s_1 s_2} + \dots + \frac{\alpha_n}{s_1 s_2 \dots s_n} + \dots \equiv \Delta_{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_n\dots},$$

where $s_n = 2^{\varphi_n}$, (φ_n) is a classical Fibonacci sequence: $\varphi_1 = 1 = \varphi_2$, $\varphi_{n+2} = \varphi_n + \varphi_{n+1}$, $\alpha_n \in \{0, 1, \dots, s_n - 1\}$.
Singular, nowhere monotonic and nondifferentiable functions, functions with bounded and unbounded variation are among the studied functions.
Key words: Cantor's number system, binary series, Δ-binary and Δ-unary number, cylinder, continuous nowhere monotonic function, singular function, function of unbounded variation.

У роботі вивчається клас неперервних функцій з локально-складною структурою, які означуються у термінах зображення чисел у канторівській системі числення:

$$[0;1] \ni x = \frac{\alpha_1}{s_1} + \frac{\alpha_2}{s_1 s_2} + \dots + \frac{\alpha_n}{s_1 s_2 \dots s_n} + \dots \equiv \Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n \dots},$$

де $s_n = 2^{\varphi_n}$, (φ_n) — класична послідовність Фібоначчі: $\varphi_1 = 1 = \varphi_2$, $\varphi_{n+2} = \varphi_n + \varphi_{n+1}$, $\alpha_n \in \{0, 1, \dots, s_n - 1\}$.
Серед досліджуваних функцій сингулярні, ніде не монотонні та недиференційовні функції; функції з обмеженою та необмеженою варіацією.
Ключові слова: канторівська система числення, двійковий ряд, Δ-бінарне число, циліндр, сингулярна функція, неперервна ніде не монотонна функція, дискретний розподіл, неперервний розподіл, рівномірний розподіл.

Вступ

Узагальненням класичної s-кової системи числення є канторівська система, яка використовує послідовність натуральних основ (s_n) і змінний алфавіт $A_{s_n} \equiv \{0, 1, \dots, s_n - 1\}$, $n = 1, 2, \dots$ [4, 13, 21].

Якщо (s_n) — послідовність натуральних чисел, більших 1, (A_{s_n}) — послідовність алфавітів, то представлення числа $x \in [0;1]$ у канторівській (s_n)-системі має вигляд

$$x = \frac{\alpha_1}{s_1} + \frac{\alpha_2}{s_1 s_2} + \dots + \frac{\alpha_n}{s_1 s_2 \dots s_n} + \dots \equiv \Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n \dots}, \tag{1}$$

де $\alpha_n \in A_{s_n}$.

Символічний запис $\Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n \dots}$ називається Δ-зображенням ряду (1) і його суми — числа x. При цьому α_n називається n-ою цифрою цього зображення.

Δ-зображення числа є його кодуванням засобами змінного алфавіту, при цьому кодом числа x є послідовність (α_n) з простору $\Omega \equiv A_{s_1} \times A_{s_2} \times \dots \times A_{s_n} \times \dots$.

У роботі [5] розглядалась система числення з послідовністю основ $s_n = 2^{\varphi_n}$, де (φ_n) — класична послідовність Фібоначчі [7]: де $\varphi_1 = 1 = \varphi_2,\ \ \varphi_{n+2} = \varphi_n + \varphi_{n+1}$. Базисною послідовністю для неї є послідовність степенів 2 :

$$2^{-1},\ 2^{-2},\ 2^{-4},\ 2^{-7},\ 2^{-12},\ 2^{-20},\ 2^{-33},\ \ldots, 2^{-(\varphi_1+\varphi_2+\ldots+\varphi_n)},\ \ldots.$$

Використовуючи зв'язок Δ-зображення з класичним двійковим зображенням [5], легко констатувати, що сума базисного ряду

$$x = \Delta_{(1)} = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-(\varphi_1+\varphi_2+\ldots+\varphi_n)}, \tag{2}$$

є ірраціональним числом, оскільки його двійкове зображення є неперіодичним.

Зауважимо, що множина неповних сум (підсум) ряду (2) є аномально фрактальною, тобто має нульову фрактальну розмірність Гаусдорфа-Безиковича [11, 22].

Інверсор цифр Δ-зображення чисел, тобто функція, що означена рівністю

$$I = \Delta_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots} = \Delta_{[s_1-1-\alpha_1][s_2-1-\alpha_2]\ldots[s_k-1-\alpha_k]\ldots},$$

має аналітичний вираз $I(x) = 1 - x$. Це свідчить про відносну простоту геометрії Δ-зображення чисел («рівноправність» цифр алфавіту, їх рівноцінну вагу).

У даній роботі ми продовжуємо вивчати ту ж канторівську систему і використовувати її для конструювання неперервних функцій з локально складними властивостями варіаційного та диференціального характеру.

Інтерес до неперервних функцій, які мають масивні (у тополого-метричному та фрактальному сенсі) множини особливостей інтегро-диференціального та варіаційного характеру, зокрема до сингулярних [14], ніде не монотонних та недиференційовних невпинно зростає [1, 3]. Його підсилюють нові приклади моделей реальних процесів інформаційно-комунікаційного плану, які використовують такі функції, інтерес до систем кодування, декодування та захисту інформації, засобів компактизації даних тощо.

Сьогодні найбільш поширеним способом конструювання та дослідження ніде не монотонних функцій є метод згущення особливостей [22], задання функцій перетворювачем цифр (одного або різних) зображень чисел [2, 16], зокрема за допомогою автоматів з різною масивністю пам'яті [8, 9, 12, 15, 19], інверсуванням цифр зображення числа, «проектування» цифр одного зображення числа в інше. Одним з явно сформованих є підхід, який реалізується в роботах [17, 18, 20]. Дану роботу слід вважати продовженням дослідження в цьому напрямі.

1. Базисні поняття і факти

Нагадаємо, що існують числа, які мають два Δ-зображення. Вони називаються Δ-бінарними. Це числа з зображеннями $\Delta_{c_1\ldots c_{m-1}c_m(0)}$ і $\Delta_{c_1\ldots c_{m-1}[c_m-1](s_{m+k}-1)}$, де $(s_{m+k}) \in \Omega_m = A_{s_m} \times A_{s_{m+1}} \times \ldots \times A_{s_{m+k}} \times \ldots$. Таких чисел зліченна всюди щільна в $[0;1]$ множина. Решта чисел мають єдине Δ-зображення і називаються Δ-унарними.

Циліндром рангу m з основою $c_1 \ldots c_m$ називається множина $\Delta_{c_1\ldots c_m}$ всіх чисел x, які мають зображення $\Delta_{c_1\ldots c_m d_1 d_2\ldots}$, де $(d_k) \in \Omega_{m+1}$.

Циліндр $\Delta_{c_1\ldots c_m}$ є відрізком з кінцями:

$$a = \frac{c_1}{s_1} + \frac{c_2}{s_1 s_2} + \ldots + \frac{c_m}{s_1 s_2 \ldots s_m} = \Delta_{c_1\ldots c_m(0)},$$

$$b = a + \frac{s_{m+1}-1}{s_1 \ldots s_m s_{m+1}} + \frac{s_{m+2}-1}{s_1 \ldots s_{m+1} s_{m+2}} + \ldots = \Delta_{c_1\ldots c_m(s_{m+k}-1)},$$

який має довжину $|\Delta_{c_1\ldots c_m}| = \frac{1}{s_1 s_2 \ldots s_m}$. А, отже, основне метричне відношення має вигляд $|\Delta_{c_1\ldots c_m}| = s_{m+1}|\Delta_{c_1\ldots c_m i}|$.

Воно не залежить від основи $c_1 \dots c_m$ циліндра і не залежить від останньої цифри i, а залежить лише від рангу циліндра, тобто числа m.

Зауважимо, що кожне Δ-бінарне число є кінцем двох послідовностей циліндрів всеможливих рангів, починаючи з деякого.

2. Об'єкт дослідження

Нехай задано $\overline{g}_k = (g_{0k}, g_{1k}, \dots, g_{s_k-1,k})$ – послідовність векторів, координати яких задовольняють умови:

1) $|g_{ik}| < 1$,

2) $g_{0k} > 0$, 3) $\delta_{ik} \equiv g_{0k} + g_{1k} + \dots + g_{i-1,k} > 0,\ i \in A_{s_k}$,

4) $g_{0k} + g_{1k} + \dots + g_{s_k-1,k} = 1,\ k \in N$,

5) $\prod\limits_{i=1}^{\infty} g_{c_i i} = 0,\ \forall (c_i) \in \Omega$.

Очевидно, що $\delta_{i+1,k} = \delta_{ik} + g_{ik}$ для будь-яких $i \in A_{s_k},\ k \in \mathbb{N}$.

Лема 1. *Має місце рівність*

$$\delta_{s_1-1,1} + \delta_{s_2-1,2}\, g_{s_1-1,1} + \delta_{s_3-1,3}\, g_{s_1-1,1}\, g_{s_2-1,2} + \dots = 1$$

Доведення. Враховуючи, що $\delta_{s_k-1,k} = 1 - g_{s_k-1,k}$, отримаємо

$$\begin{aligned}
&\delta_{s_1-1,1} + \delta_{s_2-1,2}\, g_{s_1-1,1} + \delta_{s_3-1,3}\, g_{s_1-1,1}\, g_{s_2-1,2} + \dots = 1 - g_{s_1-1,1} + \\
&+ (1 - g_{s_2-1,2}) g_{s_1-1,1} + (1 - g_{s_3-1,3})\, g_{s_1-1,1}\, g_{s_2-1,2} + \dots = \\
&= \dots = 1 - \prod_{k=1}^{\infty} g_{s_k-1,k} = 1.
\end{aligned}$$

□

Розглядається функція $y = \Phi(x)$, означена рівністю

$$\Phi\left(x = \Delta_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}\right) = \delta_{\alpha_1 1} + \sum_{k=2}^{\infty}\left(\delta_{\alpha_k k}\prod_{i=1}^{k-1} g_{\alpha_i i}\right) \equiv \Delta^{\Phi}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}. \tag{3}$$

Коректність означення функції є наслідком двох умов:
1) абсолютної збіжності ряду (3),
2) рівності $\Phi\left(\Delta_{c_1\ldots c_{m-1}c_m(0)}\right) = \Phi\left(\Delta_{c_1\ldots c_{m-1}[c_m-1](s_{m+k}-1)}\right)$.

Для доведення останньої рівності досить розглянути різницю

$$\rho \equiv \Phi\left(\Delta_{c_1\ldots c_{m-1}[c_m-1](s_{m+k}-1)}\right) - \Phi\left(\Delta_{c_1\ldots c_{m-1}c_m(0)}\right) =$$

$$= \left(\prod_{i=1}^{m-1} g_{c_i i}\right)\left[\delta_{c_m-1,m} + g_{c_m-1,m}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\delta_{s_{m+k}-1,m+k}\prod_{j=1}^{k-1} g_{s_{m+j},m+j}\right) - \delta_{c_m,m}\right] =$$

$$= \left(\prod_{i=1}^{m-1} g_{c_i i}\right)\left[\delta_{c_m-1,m} + g_{c_m-1,m} - \delta_{c_m m}\right] = 0.$$

Якщо всі елементи матриці $\|g_{ik}\|$ є раціональними, то функція $\Phi(x)$ називається раціональною. Її значення у Δ-бінарній точці є раціональним числом. Справді, $\Phi\left(\Delta_{c_1\ldots c_m(0)}\right) = \Delta^{\Phi}_{c_1\ldots c_m-1(0)}$ є раціональним числом, як скінченна сума раціональних чисел.

Лема 2. *Приріст* $\mu_\Phi\left(\Delta_{c_1c_2\ldots c_m}\right) \equiv \Phi\left(\Delta_{c_1c_2\ldots c_m(s_{m+k}-1)}\right) - \Phi\left(\Delta_{c_1c_2\ldots c_m(0)}\right)$ *функції* Φ *на циліндрі* $\Delta_{c_1\ldots c_m}$ *обчислюється за формулою*

$$\mu_\Phi(\Delta_{c_1c_2\ldots c_m}) = \prod_{i=1}^{m} g_{c_i i}. \tag{4}$$

Доведення. Виразимо

$$\mu_\Phi(\Delta_{c_1c_2\ldots c_m}) = P\cdot\left[\delta_{s_{m+1}-1,m+1} + \delta_{s_{m+2}-1,m+2}\cdot g_{s_{m+1}-1,m+1}\right.$$
$$\left.+\delta_{s_{m+3}-1,m+3}\cdot g_{s_{m+1}-1,m+1}\cdot g_{s_{m+2}-1,m+2} + \cdots\right] = P,$$

де $P = \prod\limits_{i=1}^{m} g_{c_i i}$.

Оскільки, $\delta_{s_{m+k}-1,m+k} = 1 - g_{s_{m+k}-1,m+k}$ для всіх $k \in \mathbb{N}$, то вираз у квадратних дужках збігається до одиниці. Тому виконується рівність (4).

Лему доведено. □

У роботах [2, 8, 10, 12, 14 – 20, 22] сформувалась певна методологія вивчення такого типу неперервних функцій, якої ми будемо дотримуватись у даній роботі.

3. Властивості: неперервність, монотонність

Теорема 3. *Функція* $y = \Phi(x)$ *є неперевною в кожній точці відрізка* $[0;1]$; *строго зростаючою, якщо* $g_{ik} > 0$ *для будь-яких* $i \in A_{s_k}$, $k \in \mathbb{N}$; *сталою на всіх циліндрах виду* $\Delta_{c_1 \ldots c_{k-1} i}$, *якщо* $g_{ik} = 0$.

Доведення.

1. Нехай $x_0 = \Delta_{c_1 \ldots c_m \ldots}$ — довільна Δ-унарна точка відрізка $[0;1]$, $x_0 \neq x = \Delta_{\alpha_1 \ldots \alpha_m \ldots}$. Тоді існує число m таке, що $\alpha_m \neq c_m$, але $\alpha_i = c_i$ при $i < m$, причому $x \to x_0$ рівносильно $m \to \infty$. Тоді

$$|\Phi(x) - \Phi(x_0)| = \left(\prod_{i=1}^{m} |g_{c_i,i}|\right) |\delta_{\alpha_m m} +$$

$$+ \sum_{k=m+1}^{\infty} \left(\delta_{\alpha_k k} \prod_{i=m}^{k-1} g_{\alpha_i i}\right) - \delta_{c_m m} - \sum_{k=m+1}^{\infty} \left(\delta_{c_k k} \prod_{i=m}^{k-1} g_{c_i i}\right) \Bigg|.$$

Оскільки вираз під останнім модулем є різницею двох чисел з відрізка $[0;1]$, то сам модуль не перевищує 1. При цьому добуток

$$\prod_{i=1}^{m-1} |g_{c_i,i}| \to 0$$

при умові $m \to \infty$, що є наслідком умови 5).

Таким чином,

$$|\Phi(x) - \Phi(x_0)| \to 0$$

(умова $m \to \infty \Leftrightarrow x \to x_0$, що є свідченням неперервності функції $\Phi(x)$ в точці x_0).

Якщо $x_0 = \Delta_{c_1 \ldots c_{m-1} [c_m - 1](s_{m+k} - 1)} = \Delta_{c_1 \ldots c_{m-1} c_m (0)}$ — Δ-бінарна точка, то неперервність функції $\Phi(x)$ обґрунтовується аналогічно, з тією лише різницею, що окремо доводиться неперервність зліва і справа. При цьому для доведення неперервності зліва використовується перше зображення, а для доведення неперервності справа — друге.

2. Доведемо строгу монотонність функції $\Phi(x)$ при умові додатності всіх елементів матриці $\|g_{ik}\|$. З цією метою розглянемо x_1 і x_2, де $x_1 < x_2$. Нехай $x_1 = \Delta_{c_1\ldots c_m d_1 d_2\ldots}$, $x_2 = \Delta_{c_1\ldots c_m d'_1 d'_2\ldots}$. Тоді $d_1 < d'_1$. Розглянемо різницю

$$\Phi(x_2)-\Phi(x_1)=\left(\prod_{i=1}^{m} g_{c_i i}\right)\left[\sum_{k=1}^{\infty}\left(\delta_{d'_k k}\prod_{i=1}^{k-1} g_{d'_i i}\right)-\sum_{k=1}^{\infty}\left(\delta_{d_k k}\prod_{i=1}^{k-1} g_{d_i i}\right)\right] \geq$$

$$\geq \left(\prod_{i=1}^{m} g_{c_i i}\right)\left[\delta_{d'_1 1}-\delta_{d_1 1}-g_{d_1 1}\cdot 1\right]=\left(\prod_{i=1}^{m} g_{c_i i}\right)\left[\delta_{d'_1 1}-\delta_{[d_1+1]1}\right] > 0,$$

оскільки $x_1 \neq x_2$.

Отже, $\Phi(x)$ є строго зростаючою функцією.

3. Нехай $g_{im} = 0$. Тоді для довільного $x = \Delta_{c_1\ldots c_{m-1} i d_1 d_2\ldots}$, що належить циліндру $\Delta_{c_1\ldots c_{m-1} i}$, маємо

$$\Phi(x) = \delta_{c_1 1}+\sum_{k=2}^{m-1}\left(\delta_{c_k k}\prod_{i=1}^{k-1} g_{c_i i}\right)+\delta_{im}\prod_{i=1}^{m-1} g_{c_i i}+0 = \Phi(\Delta_{c_1\ldots c_{m-1}(0)}),$$

тобто функція $\Phi(x)$ набуває сталого значення у кожній точці циліндра $\Delta_{c_1\ldots c_{m-1} i}$. □

Наслідок 4. *Областю визначення і множиною значень функції* $\Phi(x)$ *є* $[0;1]$, *тобто* $D(\Phi) = [0;1] = E(\Phi)$.

Наслідок 5. *Нехай* F_k *— об'єднання циліндрів рангу* k, *серед внутрішніх точок яких є точки нестабільності функції* Φ, *тобто*

$$F_k \equiv \bigcup_{i_1:\ g_{i_1 1}\neq 0} \ldots \bigcup_{i_k:\ g_{i_k k}\neq 0} \Delta_{i_1 i_2\ldots i_k}.$$

Функція $\Phi(x)$ *є сингулярною функцією канторівського типу [11] тоді і тільки тоді, коли*

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda\left(F_k \setminus F_{k+1}\right)}{\lambda(F_k)} = \infty, \quad \text{де} \quad \lambda(\cdot) - \text{міра Лебега.}$$

4. Варіаційні властивості функції

Лема 6. *Якщо* $g_{ik} > 0$ *для всіх* $i \in A_{s_k}$ *і* $k \geq m$, *то функція* $\Phi(x)$ *є монотонною на кожному циліндрі* m*-го рангу, причому на циліндрі* $\Delta_{c_1 \ldots c_m}$ *є*

1) *строго зростаючою, якщо* $P \equiv \prod\limits_{i=1}^{m} g_{c_i i} > 0$;
2) *строго спадною, якщо* $P < 0$;
3) *сталою, якщо* $P = 0$.

Доведення. Нехай $x_1 = \Delta_{c_1 \ldots c_m d_1 d_2 \ldots}$ і $x_2 = \Delta_{c_1 \ldots c_m d'_1 d'_2 \ldots}$, причому $x_1 < x_2$, тобто $d_1 < d'_1$. Розглянемо різницю

$$\rho \equiv \Phi(x_2) - \Phi(x_1) = P \left[\sum_{k=1}^{\infty} \left(\delta_{d'_k k} \prod_{i=1}^{k-1} g_{d'_i i} \right) - \sum_{k=1}^{\infty} \left(\delta_{d_k k} \prod_{i=1}^{k-1} g_{d_i i} \right) \right].$$

Оскільки вираз у квадратних дужках має додатне значення із за $x_1 < x_2$, то знак різниці ρ залежить від знаку числа P. З довільності вибору чисел x_1 і x_2 з циліндра $\Delta_{c_1 \ldots c_m}$ випливає твердження, що вимагалось довести. Лему доведено. □

Наслідок 7. *Функція* $\Phi(x)$ *свого найбільшого і найменшого значення на циліндрі, набуває на його кінцях.*

Наслідок 8. *Точки максимумів та мінімумів функції є* Δ*-бінарними числами.*

Теорема 9. *Якщо матриця* $\|g_{ik}\|$ *не містить нулів, але має нескінченну кількість від'ємних елементів, то функція* $\Phi(x)$ *є ніде не монотонною.*

Доведення. Для доведення теореми досить показати, що в довільному циліндрі як завгодно великого рангу існує три точки x_1, x_2, x_3 такі, що $x_1 < x_2 < x_3$ і при цьому

$$[\Phi(x_2) - \Phi(x_1)]\,[\Phi(x_3) - \Phi(x_2)] < 0.$$

Можна скористатися іншим прийомом, а саме довести, що у кожному циліндрі існує два циліндри вищих рангів, прирости на яких мають різні знаки. З цією метою розглянемо циліндр $\Delta_{c_1 \ldots c_m}$ і число $k > m$, для якого існує $g_{ik} < 0$. Згідно з лемою 1

$$\mu_\Phi(\Delta_{c_1 \ldots c_m \ldots c_{k-1} 0}) = P \cdot g_{0k}, \ \mu_\Phi(\Delta_{c_1 \ldots c_m \ldots c_{k-1} i}) = P \cdot g_{ik},$$

де $P = \prod\limits_{i=1}^{k-1} g_{c_i i}$.

Оскільки $g_{0k} > 0$ (див. умову 2)), а $g_{ik} < 0$, то

$$\mu_\Phi(\Delta_{c_1 \ldots c_m \ldots c_{k-1} 0}) \mu_\Phi(\Delta_{c_1 \ldots c_m \ldots c_{k-1} i}) = P^2 g_{0k} g_{ik} < 0.$$

Саме це є свідченням не монотонності функції на циліндрі $\Delta_{c_1 \ldots c_m}$. Теорему доведено. □

Теорема 10. *Варіація* $V(\Phi)$ *функції* Φ *на відрізку* $[0;1]$ *обчислюється за формулою*

$$V(\Phi) = \prod_{k=1}^{\infty} W_k, \tag{5}$$

де $W_k = g_{0k} + |g_{1k}| + \cdots + |g_{s_k - 1, k}|$.

Доведення. Враховуючи, що функція $\Phi(x)$ найменшого і найбільшого значення на циліндрі набуває на його кінцях, а також лему 1, яка виражає коливання функції на циліндрі, бачимо, що добуток

$$\prod_{k=1}^{m} W_k$$

виражає сумарне значення коливань функції на всіх циліндрах рангу m. Тоді граничний перехід дає варіацію функції Φ на всьому відрізку $[0;1]$, тобто приводить до формули (5). □

Наслідок 11. *Функція* Φ *є функцією обмеженої варіації тоді і тільки тоді, коли збігається ряд* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} (1 - W_k)$.

Дане твердження є наслідком попередньої теореми і теореми про зв'язок збіжності нескінченного добутку

$$\prod_{k=1}^{\infty}(1-a_k) \text{ і ряду } \sum_{k=1}^{\infty} a_k.$$

5. Один цікавий частковий випадок

Нехай $g_{0k} = q_{0k} > 0$, $g_{s_k-1,k} = q_{1k} > 0$, $q_{0k} + q_{1k} = 1$; $g_{ik} = 0$ при $0 \neq i \neq s_k - 1$, $k \in \mathbb{N}$. Тоді $\delta_{0k} = 0$, $\delta_{ik} = q_{0k}$, при $i \neq 0$. У цьому випадку вираз (3) функції $\Phi(x)$ набуває Q_2^* представлення чисел.

При виконанні вказаних умов функція $\Phi(x)$ є сингулярною функцією розподілу (має похідну рівну нулю майже скрізь, у розумінні міри Лебега) з аномально фрактальним спектром (множиною точок росту).

Якщо крім цього $q_{0k} = q_0$ для будь-якого $k \in \mathbb{N}$, то вираз функції Φ є Q_2-зображенням числа, а при $q_0 = \frac{1}{2}$ — класичним двійковим. Ці додаткові обмеження дозволяють суттєво спростити дослідження локальних тополого-метричних та інтегро-диференціальних властивостей функції.

Література

[1] *Jarnicki M., Pflug P.* Continuous nowhere differentiable function. The Monsters of Analysis // Springer Monographs in Mathematics — 2015. — 299 p.

[2] *Pratsiovytyi M., Vasylenko N.* Fractal properties of functions defined in terms of Q-representation // International Journal of Math. Analysis Vol.7, 2013. no. 61-67 . — P. 3155-3169.

[3] *Peter R. Massopust,* Fractal functions, fractal surfaces, and wavelets. — Academic Press; 1 edition (January 18, 1995), 383 p.

[4] *Cantor G.* Uber die einfachen Zahlesysteme // Z. Math. Phys. — 1869. — 10, **Bd**. 14. — P. 121-128.

[5] *Бондаренко О.І., Працьовитий М.В.* Канторівська система числення, пов'язана з двійковим рядом і послідовністю Фібоначчі // Фрактальний аналіз та суміжні питання. Зб. праць Ін-ту математики НАН України. — Т.14, № 4. — Київ: Інститут математики НАН України, 2017. — С. 178-187.

[6] *Василенко Н. М.* Математичні структури в просторі послідовностей Фібоначчі / Н. М. Василенко, М. В. Працьовитий // Науковий часопис НПУ імені М. П. Драгоманова. Серія 1. Фіз.-мат. науки. — Київ: НПУ імені М. П. Драгоманова, 2008. — **9.** — С. 129-150.

[7] *Воробьев Н.Н.* Числа Фибоначчи. — М.: Наука, 1969. — 112 с.

[8] *Коваль В.В.* Самоафінні графіки функцій // Науковий часопис НПУ імені М.П. Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки. — К.: НПУ імені М.П. Драгоманова. — 2004. — № 5. — С. 292-299.

[9] *Панасенко О.Б.* Фрактальна розмірність графіків неперервних канторівських проекторів // Науковий часопис НПУ імені М.П. Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки. — К.: НПУ імені М.П. Драгоманова. — 2008, № 9. — С. 104-111.

[10] *Працевитый Н.В.* Непрерывные канторовские проекторы // Методы исследования алгебраических и топологических структур. — Киев: КГПИ, 1989. — С. 95-105.

[11] *Працьовитий М. В.* Фрактальний підхід у дослідженнях сингулярних розподілів. — Київ: Вид-во НПУ імені М. П. Драгоманова, 1998. — 296 с.

[12] *Працьовитий М.В.* Фрактальні властивості однієї неперервної ніде не диференційовної функції // Науковий часопис НПУ імені М.П. Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки. — К.: НПУ імені М.П. Драгоманова. — 2002. — № 3. — С. 351-362.

[13] *Працьовитий М. В.* Системи числення зі змінною основою та змінним алфавітом (або розвинення чисел в ряди Кантора) // Студентські фізико-математичні етюди. — Київ: Вид-во НПУ імені М. П. Драгоманова, 2009. — **10**, №8. — С. 6-18.

[14] *Працьовитий М. В.* Ніде не монотонні сингулярні функції // Науковий часопис НПУ імені М.П. Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки. — К.: НПУ імені М.П. Драгоманова. — 2011. — № 12. — С. 24-36.

[15] *Працьовитий М. В., Барановський О. М., Маслова Ю. П.* Узагальнення Трибін-функції // Нелінійні коливання, 2019, Том 22, №3. — С. 380-390.

[16] *Працьовитий М.В., Василенко Н.А.* Одна сім'я неперервних ніде не монотонних функцій з фрактальними властивостями // Науковий часопис НПУ імені М.П. Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки. — К.: НПУ імені М.П. Драгоманова. — 2013. — № 14. — С. 176-188.

[17] *Працьовитий М. В., Калашніков А.В.* Про один клас неперервних функцій зі складною локальною будовою, більшість з яких сингулярні або недиференційовні // Труды ИПММ НАН Украины. — 2011, Т.23. — С. 180-191.

[18] *Працьовитий М.В., Калашніков А.В.* Самоафінні сингулярні та ніде не монотонні функції, пов'язані з Q-зображенням чисел. // Укр. Мат. Журнал. — 2013. – Т.65, № 3. — С. 381-393.

[19] *Працьовитий М.В., Ратушняк С.П.* Неперервна ніде не диференційовна функція з фрактальними властивостями, визначена в термінах Q_2-зображення // Нелінійні коливання, Т.23. № 2б 2020. — С. 231-252.

[20] *Працьовитий М. В., Свинчук О. В.* Розсіювання значень однієї фрактальної неперервної немонотонної функції канторівського типу // Нелінійні коливання, 2018, Том 21, №1. — С. 116-130.

[21] *Ралко Ю.В.* Зображення чисел рядами Кантора та деякі його застосування // Науковий часопис НПУ імені М. П. Драгоманова. Серія 1. Фіз.-мат. науки. — Київ: НПУ імені М. П. Драгоманова. — 2009. — **10**, №10. — С. 132-140.

[22] *Турбин А.Ф., Працевитый Н.В.* Фрактальные множества, функции, распределения. — Киев: Наук.думка, 1992. — 208 с.