Збірник праць Ін-ту математики НАН України 2019, т. 16, № 3, 149–159

УДК 517.2+517.51

Р. Ю. Осауленко

Національний технічний університет України «Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського», Київ; RomanOsaulenko@gmail.com

Один клас неперервних ніде не монотонних функцій, який містить сингулярні функції

In the paper, we propose another way of constructing a class of continuous nowhere monotonic functions which contains singular functions. We use (u, v)-derivative to study the differential properties of a function belonging to the constructed class.
Key words: nowhere monotonic function, singular function.

У роботі представлено ще один спосіб конструювання континуального класу ніде не монотонних функцій, який містить сингулярні. Показано використання (u, v)-похідної для дослідження диференціальних властивостей функції з побудованого класу.
Ключові слова: ніде не монотонна функція, сингулярна функція.

Вступ

Нас цікавлять неперервні функції, які є одночасно сингулярними (відмінні від константи, але мають похідну рівну нулю майже скрізь у розумінні міри Лебега) і ніде не монотонними (не мають жодного проміжку монотонності). Їх теорія є достатньо бідною і вичерпується окремими прикладами [3, 4, 7]. Хотілось би зазначити, що конструкції, наведені в роботі [7], викликають чимало запитань, на які нам не вдалося знайти відповіді. Як стверджує автор статті [1], такі функції виникають у задачах теорії фінітного керування.

Застосування зображень дійсних чисел чи систем кодування дійсних чисел засобами скінченного, нескінченного, сталого та змінного алфавітів дозволяють спростити задачу конструювання (моделювання) об'єктів із зазначеними властивостями [8, 9, 11, 12]. У цих роботах зазвичай основним прийомом для доведення сингулярності функції є використання «циліндричної похідної», відповідної зображенню аргументу.

Так, циліндричною похідною функції $y = f(x)$ в точці x_0, що відповідає s-ковому зображенню аргументу $\left(x_0 = \Delta^s_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}\right)$ називається границя

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f\left(\Delta^s_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n(s-1)}\right) - f\left(\Delta^s_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n(0)}\right)}{\left|\Delta^s_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n}\right|},$$

де $\left|\Delta^s_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n}\right|$ — довжина відрізка $\left[\Delta^s_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n(0)}; \Delta^s_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n(s-1)}\right]$, який є циліндром n-го рангу, що містить число x_0.

Нагадаємо, що циліндром n-го рангу $\Delta^s_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n}$ є множина всіх точок $x = \Delta^s_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}$, перші n цифр зображення яких мають фіксовані значення α_1, α_2, ..., α_n відповідно.

У цій роботі ми пропонуємо ще один спосіб задання континуального класу неперервних ніде не монотонних функцій, кожна з яких є границею рекурентно заданої рівномірно збіжної функціональної послідовності. Він містить континуальний підклас сингулярних функцій. Для обґрунтування сингулярності використовується узагальнення циліндричної похідної, так звана (u, v)-похідна, означення і властивості якої наведені в [10]. Коротко зупинимося на тих фактах, які будуть використовуватися для наведених нижче конструкцій функцій.

Позначимо через $\mathcal{P}$ множину всіх пар (u, v) нескінченно малих в нулі функцій, для кожної з яких існує таке число $\delta > 0$, що для всіх $h \in O^*_\delta$ виконується нерівність $\mathsf{u}(h) \neq -\mathsf{v}(h)$, де O^*_δ — проколений δ-окіл нуля.

Прикладами пар функції (u, v) є $\left(ah\mathtt{Sign}\left(\sin\frac{1}{h}\right), h\mathcal{D}(h)\right)$, $\left(\left[h^{-1}\right]^{-1}, h\right)$, де $\mathbb{R} \ni |a| \neq 1$, $\mathcal{D}(h) = \begin{cases} 0, & h \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}; \\ 1, & h \in \mathbb{Q}; \end{cases}$, $\mathtt{Sign}\,(h) = \begin{cases} h/|h|, & h \neq 0; \\ 0, & h = 0; \end{cases}$ а $[x]$ — ціла частина числа.

Нехай $\Delta^{\mathsf{u}(h)}_{\mathsf{v}(h)} x := \mathsf{u}(h) + \mathsf{v}\,(h)$,

$$\Delta^{\mathsf{u}(h)}_{\mathsf{v}(h)} f(x_0) := f\big(x_0 + \mathsf{u}(h)\big) - f\big(x_0 - \mathsf{v}\,(h)\,\big).$$

Якщо для наперед заданих в деякому околі x_0 функції f та пар функцій $(\mathsf{u}; \mathsf{v}) \in \mathcal{P}$ існує границя (скінченна чи нескінченна)

$$\lim_{h\to 0} \frac{\Delta^{\mathsf{u}(h)}_{\mathsf{v}(h)} f(x_0)}{\Delta^{\mathsf{u}(h)}_{\mathsf{v}(h)} x} = \lim_{h\to 0} \frac{f\big(x_0 + \mathsf{u}\,(h)\,\big) - f\big(x_0 - \mathsf{v}\,(h)\,\big)}{\mathsf{u}(h) + \mathsf{v}(h)},$$

то її значення називається (u, v)-*похідною функції* f *в точці* x_0 і позначається $\mathfrak{D}^{\mathsf{u}}_{\mathsf{v}} f(x_0)$.

Зазначимо, що у випадку, коли $\mathsf{u}(h) = h$, $\mathsf{v}(h) = 0$, отримуємо класичне означення похідної. Якщо ж $\mathsf{u}(h) = \mathsf{v}(h) = h$, то маємо означення симетричної похідної.

Вибравши нескінченно малу числову послідовність (a_n) і взявши за $\mathsf{u}(h) = a_n$ при $h \in \left(2^{-n-1}; 2^{-n}\right]$, $\mathsf{v}(h) = 0$ отримаємо значення $\mathfrak{D}^{\mathsf{u}}_{\mathsf{v}} f(x_0)$, яке рівне похідному числу для послідовності (a_n).

Зазначимо, що наведені далі конструкції мають безпосередній зв'язок з (u, v)-похідною.

- У [2] Вен Чен (Wen Chen) та ін. означили *фрактальну похідну (fractal derivative)* як границю $\lim\limits_{t_1\to t} \frac{u(t_1)-u(t)}{t_1^\alpha - t^\alpha}$. Легко показати, що $\lim\limits_{t_1\to t}\frac{u(t_1)-u(t)}{t_1^\alpha-t^\alpha} = \frac{t^{1-\alpha}}{\alpha}\mathfrak{D}_0^{t_1-t}u(t)$ при $t\neq 0$. Фрактальна похідна також застосовувалась у статті [5].

- У [6] було означено *conformable fractional derivate* як границю $T_\alpha(f)(t) = \lim\limits_{\varepsilon\to 0}\frac{f\left(t+\varepsilon t^{1-\alpha}\right)-f(t)}{\varepsilon}$. Легко показати, що $T_\alpha(f)(t) = t^{1-\alpha}\mathfrak{D}_0^{ht^{1\alpha}}f(t)$.

Надалі $\mathsf{u} = \mathsf{u}(h)$, $\mathsf{v} = \mathsf{v}(h)$. Наведемо прості твердження, які будемо використовувати далі (детальніше в [10]).

Нехай $\mathcal{P}^+ = \left\{(\mathsf{u},\mathsf{v}) \in \mathcal{P} : \mathsf{u}\cdot\mathsf{v} \geq 0, \forall h \in O\left(\mathsf{u},\mathsf{v}\right)\right\}$, де $O\left(\mathsf{u},\mathsf{v}\right)$ — деякий проколений окіл нуля, в кожній точці якого функції u, v є визначеними і виконується нерівність $\mathsf{u}(h)\neq -\mathsf{v}(h)$ для будь-якого $h\in O\left(\mathsf{u},\mathsf{v}\right)$.

Теорема 1. *Нехай f — функція, задана в околі точки x_0, для якої $f'(x_0)\in\mathbb{R}\bigcup\{\pm\infty\}$. Тоді для довільної пари $(\mathsf{u},\mathsf{v})\in\mathcal{P}^+$ виконується рівність $\mathfrak{D}_{\mathsf{v}}^{\mathsf{u}}f(x_0) = f'(x_0)$.*

Наслідок 1. *Якщо f — функція, задана в околі точки x_0 і для деякої $(\mathsf{u},\mathsf{v})\in\mathcal{P}^+$ не існує скінченної (u,v)-похідної $\mathfrak{D}_{\mathsf{v}}^{\mathsf{u}}f(x_0)$, то f — недиференційовна в цій точці.*

Наслідок 2. *Нехай в околі точки x_0 задано функцію f і послідовності дійсних чисел (l_n), (r_n), збіжні до x_0, і $l_n\leq x_0\leq r_n$, $l_n\neq r_n$ для всіх $n\in\mathbb{N}$. Тоді*

- *якщо $f'(x_0)\in\mathbb{R}\bigcup\{\pm\infty\}$, то $f'(x) = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{f(r_n)-f(l_n)}{r_n-l_n}$.*

- *якщо не існує $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{f(r_n)-f(l_n)}{r_n-l_n}$, то в точці x_0 не існує похідної.*

Якщо за l_n та r_n взяти лівий та правий кінець циліндра n-го рангу, то попередній наслідок якраз описує циліндричну похідну.

1. Клас ніде не монотонних функцій

Розглянемо додаткову функцію χ, задання якої залежить від двох параметрів p, q:

$$\chi(x,p,q)=[x]+\begin{cases}3p\{x\},\ 0\le\{x\}<\dfrac{1}{3};\\ 2p+q-1-3(p+q-1)\{x\},\ \dfrac{1}{3}\le\{x\}<\dfrac{2}{3};\\ 1-3q+3q\{x\},\ \dfrac{2}{3}\le\{x\}<1,\end{cases}\tag{1}$$

де $[x]$ — ціла частина числа x, $\{x\}$ — його дробова частина. Нагадаємо, що будь-яке дійсне число $x=[x]+\{x\}$, $\{x\}\in[0;1)$. Легко переконатися, що для $p,q\in[0;1]$ різниця

$$\chi(x,p,q)-x\in[-1;1],\quad x\in\mathbb{R}.\tag{2}$$

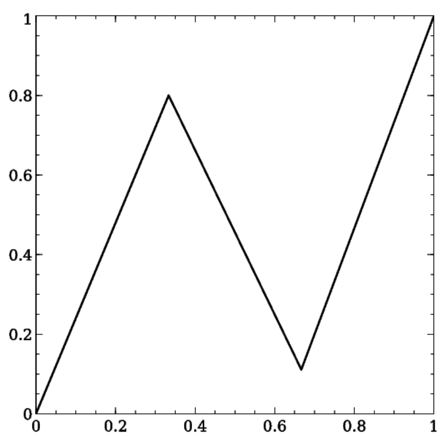

Рис. 1: Графік функції χ для $p=0.8$ і $q=0.6$

Нехай задано нескінченну послідовність пар параметрів $(p_n,g_n)=P$ таких, що $0\le\varliminf\limits_{n\to\infty}p_n\le\varlimsup\limits_{n\to\infty}p_n\le1$ і $0\le\varliminf\limits_{n\to\infty}g_n\le$

$\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} g_n \leq 1$. Розглянемо рекурентно задану послідовність:

$$\Omega_{k+1}(x,P) = 3^{-k}\chi\left(3^k\Omega_k(x,P), p_k, q_k\right), \quad \Omega_0(x,P) = x. \tag{3}$$

Теорема 2. *Для заданої послідовності пар параметрів P*

- *завжди існує неперервна $\Omega(x,P) = \lim\limits_{k\to\infty}\Omega_k(x,P)$;*
- *послідовність (Ω_k) є рівномірно збіжною до Ω на $[0;1]$.*

Доведення. Розглянемо різницю

$$\Omega_k(x,P) - \Omega_0(x,P) = \Omega_k(x,P) - x = \sum_{n=0}^{k-1}\left(\Omega_{n+1}(x,P) - \Omega_n(x,P)\right).$$

Перейшовши до границь в останніх рівностях, отримаємо, що

$$\Omega(x,P) = x + \sum_{n=0}^{\infty}\left(\Omega_{n+1}(x,P) - \Omega_n(x,P)\right). \tag{4}$$

Враховуючи ознаку Веєрштраса рівномірної збіжності функціональних рядів та оцінку (2), покажемо рівномірну збіжність ряду з рівності (4):

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left|\Omega_{n+1}(x,P) - \Omega_n(x,P)\right| \leq$$

$$\leq \sum_{n=0}^{\infty}\left|3^{-n}\left(\chi\Big(3^n\Omega_n(x,P), p_n, q_n\Big) - \Omega_n(x,P)\right)\right| \leq \sum_{n=0}^{\infty} 3^n.$$

Враховуючи властивості рівномірно збіжних рядів, отримуємо існування неперервної функції Ω для заданої послідовності пар $P = (p_k, q_k)$. □

Лема 3. *Нехай функціональна послідовність (φ_n) рівномірно збігається до φ на $[a;b]$. Для $\bigvee\limits_{[a;b]}\varphi$, варіації функції φ, виконується нерівність $\bigvee\limits_{[a;b]}\varphi \leq \underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\bigvee\limits_{[a;b]}\varphi_n \leq \overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\bigvee\limits_{[a;b]}\varphi_n$.*

Теорема 4. *Якщо для послідовності пар $P = (p_k, q_k)$ є збіжним додатний ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty} (p_n + q_n - 1 + |p_n + q_n - 1|)\,,$$

то функція Ω, що відповідає цій послідовності пар, є функцією обмеженої варіації.

Доведення. Варіація функції $\chi(x, p, q)$ у $(p_n + q_n + |p_n + q_n - 1|)$ разів більша, ніж варіація функції $f(x) = x$ на тому самому проміжку.

Якщо f — кусково-лінійна функція, то маємо оцінку

$$\bigvee_{[a;b]} \chi\big(f(x), p, q\big) \le (p_n + q_n + |p_n + q_n - 1|) \bigvee_{[a;b]} f(x).$$

Враховуючи теорему 2, де було встановлено, що послідовність кусково-лінійних функцій (Ω_k) рівномірно прямує до Ω, маємо, що застосовною є лема 3. Отже,

$$\bigvee_{[a;b]} \Omega(x, P) \le \varlimsup_{k\to\infty} \bigvee_{[a;b]} \Omega_k(x, P) \le$$

$$\le \varlimsup_{k\to\infty} \Big((b-a) \cdot \prod_{n=1}^{k} (p_n + q_n + |p_n + q_n - 1|)\Big). \tag{5}$$

Знайдемо умови, коли $\prod\limits_{n=1}^{\infty} (p_n + q_n + |p_n + q_n - 1|)$ існує і є скінченним. Для цього розглянемо ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \ln (p_n + q_n + |p_n + q_n - 1|)$. Застосовуючи граничний випадок ознаки порівняння, легко показати, що ряд збігається одночасно з рядом $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (p_n + q_n - 1 + |p_n + q_n - 1|)$. □

Теорема 5. *Якщо для заданої послідовності пар $P = (p_n, q_n)$ відповідна функція Ω є функцією обмеженої варіації, при* *цьому існує нескінченна підпослідовність* (n_j)*, що значення* $\varliminf\limits_{j\to\infty}\left|3p_{n_j}-1\right|$, $\varliminf\limits_{j\to\infty}\left|3q_{n_j}-1\right|$, $\varliminf\limits_{j\to\infty}\left|3\left|p_{n_j}+q_{n_j}-1\right|-1\right|$ *одночасно відмінні від нуля, то функція* Ω *— сингулярна.*

Доведення. Зазначимо таке: якщо при x значення $3^n\Omega_n(x,P)$ є цілим числом, то для всіх $k>n$ виконується рівність: $\Omega_k(x,P) = \Omega_n(x,P)=\Omega(x,P)$. Тобто, розглядаючи Ω_n як n-те наближення до Ω, маємо набори точок, які стають «нерухомими».

Позначимо $\Phi_n = \{x_j \mid 3^n\Omega_n(x_j,P)\in\mathbb{Z}\}$. Таким чином ми утворили послідовність вкладених множин (Φ_n), при цьому множина $\Phi = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}}\Phi_n$ буде скрізь щільною (це випливає з неперервності функції Ω і власне побудови множин Φ_n).

Для кожної точки x утворимо послідовності

$$l_n = l_n(x) = \max\left\{x_j \;\middle|\; x_j\le x,\ x_j\in\Phi_n\right\},$$
$$r_n = r_n(x) = \max\left\{x_j \;\middle|\; x_j> x,\ x_j\in\Phi_n\right\}.$$

Маємо, що $l_n(x)\le x<r_n(x)$, а також згідно з побудовою множин Φ_n монотонність послідовностей (l_n), (r_n).

Побудуємо додаткову послідовність функцій

$$K_n = \begin{cases}\Omega_n, \text{ якщо } \sup\limits_{t\in[l_n(x);r_n(x)]}\Omega_n(t,P) - \inf\limits_{t\in[l_n(x);r_n(x)]}\Omega_n(t,P) = 3^{-n};\\ 0, \text{ в іншому випадку.}\end{cases}$$

Особливістю побудованої функції є те, що розв'язками рівняння $\Omega(x,P)=\Omega_n(x,P)$ є всі числа з множини Φ_n. Згідно з побудовою маємо:

$$\frac{\Omega\Big(r_n(x),P\Big)-\Omega\Big(l_n(x),P\Big)}{r_n(x)-l_n(x)} = \frac{K_n(r_n)-K_n(l_n)}{r_n(x)-l_n(x)} = \begin{cases}{\Omega_n}'^{+}(x,P),\\ 0.\end{cases}$$

(${\Omega_n}'^{+}(x)$ це правостороння похідна функції Ω_n в точці x.)

Оскільки Ω є функцією обмеженої варіації, то майже скрізь у розумінні міри Лебега вона має скінченну похідну (позначимо множину таких значень аргументу через $\mathbb{X}$).

Для всіх x, для яких існує нескінченна підпослідовність натуральних чисел n_j таких, що $K_{n_j}(x) \neq 0$ покажемо, що

$$\lim_{j\to\infty} {\Omega_{n_j}}'^{+}(x,P) = \begin{cases} 0, \\ \pm\infty, \\ \text{не існує.} \end{cases}$$

Оскільки Ω_{n_j} — кусково-лінійна функція, то

$$\Omega(r_{n_j},P) - \Omega(l_{n_j},P) = \Omega_{n_j}(r_{n_j},P) - \Omega_{n_j}(l_{n_j},P) = {\Omega_{n_j}}'^{+}(t,P)$$

для всіх $t \in [l_{n_j}; r_{n_j})$.

Якщо врахувати задання Ω_n, то очевидним стає рекурентне співвідношення:

$$\Omega'_{n+1}(x,P) = a_n \Omega'_n(x,P), \quad a_n \in \{3p_n, 3q_n, 3\,|p_n+q_n-1|\}\,.$$

Враховуючи існування підпослідовності (n_j) (з умов теореми), маємо можливі випадки:

$$\lim_{j\to\infty} \Omega'_{n_j}(x,P) = \begin{cases} 0, \\ \pm\infty, \\ \text{не існує.} \end{cases}$$

Враховуючи наслідок 2, для всіх $x \in \mathbb{X}$ маємо

$$\Omega'(x,P) = \lim_{j\to\infty} \frac{\Omega\big(r_{n_j}(x,P)\big) - \Omega\big(l_{n_j}(x,P)\big)}{r_{n_j}(x) - l_{n_j}(x)} =$$

$$= \lim_{j\to\infty} \frac{K_{n_j}\big(r_{n_j}(x)\big) - K_{n_j}\big(l_{n_j}(x)\big)}{r_{n_j}(x) - l_{n_j}(x)} = \begin{cases} 0, \\ \pm\infty, \\ \text{не існує.} \end{cases} \tag{6}$$

Оскільки $\mathbb{X}$ — це множина тих значень аргументу, для яких існує скінченна похідна функції Ω, то з (6) маємо, що $\Omega'(x, P) = 0$ для всіх $x \in \mathbb{X}$. Отже, функція Ω — сингулярна. $\square$

Згідно з побудовою, можна говорити, що клас всеможливих функцій Ω містить в собі ніде не монотонні сингулярні функції обмеженої варіації.

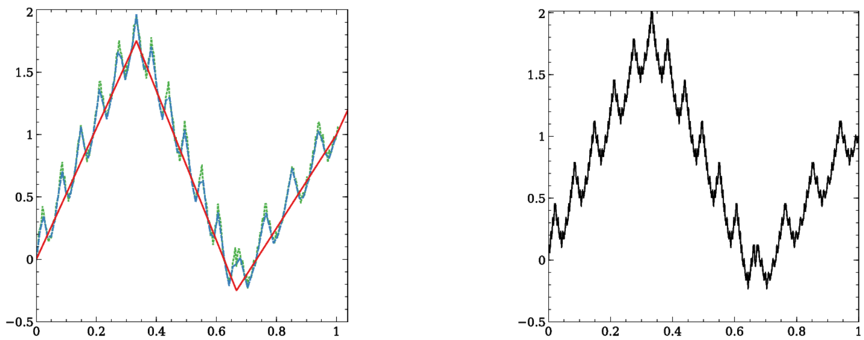

Рис. 2: Графіки функцій при $P = \left(\frac{3}{4} + \frac{1}{n^{1.2}}; \frac{1}{4} + \frac{1}{n^{1.2}}\right)$:
а) Ω_1, Ω_2, Ω_3; б) Ω.

Література

[1] *Agadzhanov A. N.* Nowhere monotone singular functions in problems of finite control of distributed systems // Dokl. Math. – 2014. – Vol. 89, № 1. – P. 84–87.

[2] *Chen W., Sun H., Zhang X., Korošak D.* Anomalous diffusion modeling by fractal and fractional derivatives // Comput. Math. Appl. – 2010. – Vol. 59, № 5. – P. 1754–1758.

[3] *Garg K. M.* On singular functions // Rev. Roumaine Math. Pures Appl. – 1969. – Vol. 14. – P.1441–1452.

[4] *Garg K. M.* Construction of absolutely continuous and singular functions that are nowhere of monotonic type // Classical real

analysis (Madison, Wis., 1982). – Providence, R.I.: Amer. Math. Soc. – 1985. – P. 61–79. – (Contemp. Math.; 42).

[5] *He J.-H.* Fractal calculus and its geometrical explanation // Results in Physics. – 2018. – Vol. 10. – P. 272–276.

[6] *Khalil R., Al Horani M., Yousef A., Sababheh M.* A new definition of fractional derivative // J. Comput. Appl. Math. – 2014. – Vol. 264. – P. 65–70.

[7] *Shukla U. K.* On points of non-symmetrical differentaibility of a continuous function. III // Ganita. – 1958. – Vol. 8. – P. 81–104.

[8] *Калашніков А. В., Працьовитий М. В.* Самоафінні сингулярні та ніде не монотонні функції, пов'язані з Q-зображенням дійсних чисел // Укр. мат. журн. – 2013. – Т. 65, № 3. – С. 405–417.

[9] *Климчук С. О., Працьовитий М. В.* Про один клас ніде не монотонних функцій з фрактальними властивостями, який містить підклас сингулярних функцій // Зб. пр. Ін-ту математики НАН України. – 2017. – Т. 14, № 4. – С. 19–33.

[10] *Осауленко Р. Ю.* Узагальнення класичної похідної функції в точці і його застосування // Зб. пр. Ін-ту математики НАН України. – 2018. – Т. 15, № 1. – С. 100–113.

[11] *Працьовитий М. В.* Фрактальний підхід у дослідженнях сингулярних розподілів. – Вид-во НПУ імені М. П. Драгоманова. – 1998. – 296 с.

[12] *Працьовитий М. В.* Ніде не монотонні сингулярні функції // Наук. часоп. НПУ імені М. П. Драгоманова. Сер. 1. Фіз.-мат. науки. – 2011. – № 12. – С. 24–36.